

2019 A1課題演習 COMPTON散乱

金城信
笥嵩文
河合峻

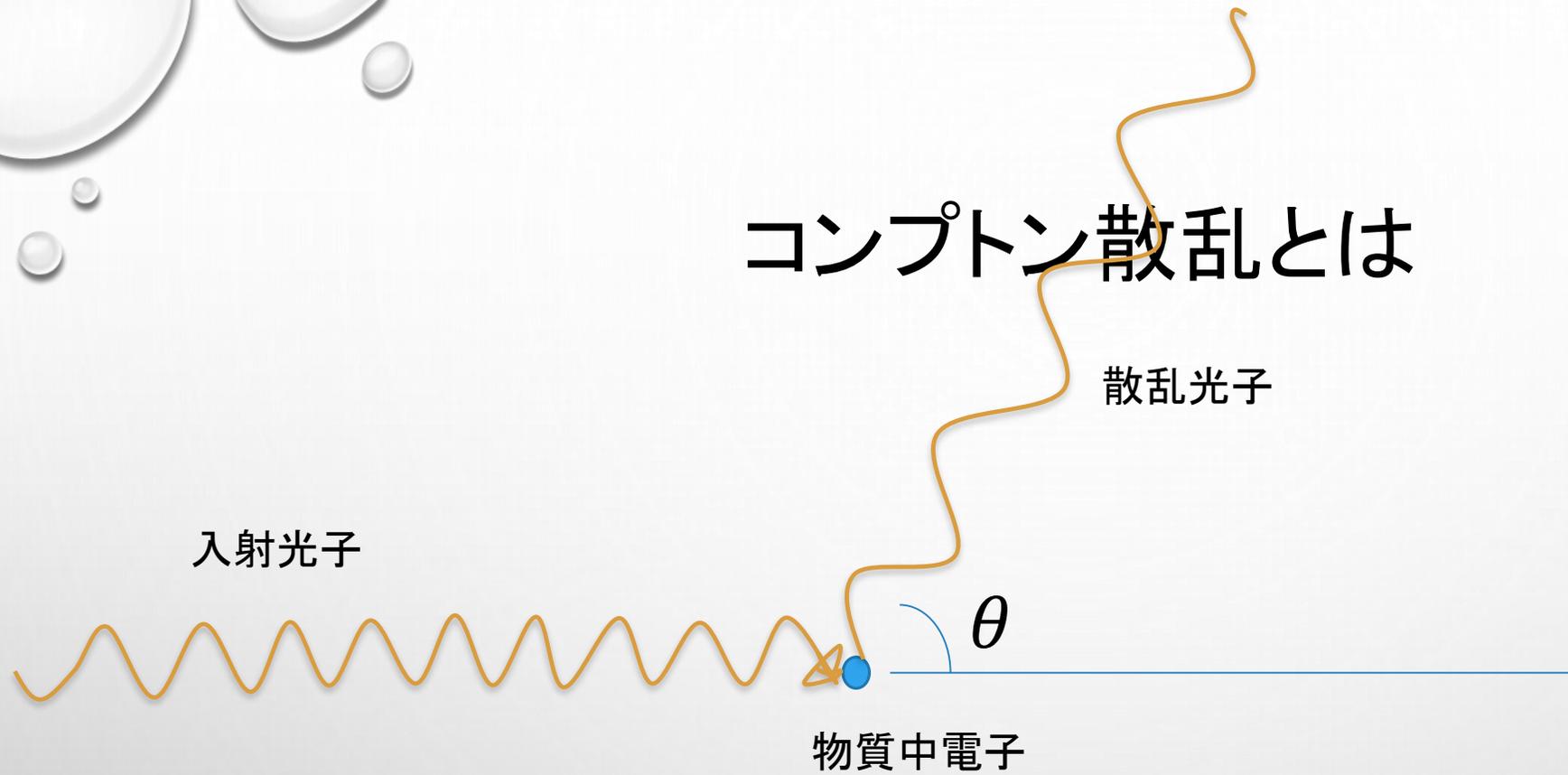
吉中讓次郎
田中大登
春名裕貴

目次

1. 実験目的（筧）
2. 実験機構（装置編）（吉中）
3. 実験機構（理論編）（河合）
4. 実験結果（田中）
5. 分析・考察（金城・春名）

実験目的

コンプトン散乱とは



γ (X)線(光子)が電子によって散乱する現象

コンプトン散乱とは

- 電子による光子の散乱。
- **光の粒子性**が顕著な効果。
- 従来のマックスウェルの電磁気学でも散乱だけなら説明はできるが(トムソン散乱)、**反射光の波長が入射光の波長とずれ**が生じる理由を説明できなかった。
- 光子を考えればうまくこの散乱が説明できることが1923年にコンプトンにより発見された。

実験目的

- ①コンプトン散乱において、エネルギーと散乱角の関係及びエネルギー保存が成立していることを確認する。
- ②角度ごとの散乱の分布（微分散乱断面積）を調べ、クライン-仁科の公式に一致することを確認する。

①エネルギーと散乱角

入射光子、散乱光子の振動数をそれぞれ ν, ν' とすると、以下の関係が成立する

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2} (1 - \cos \theta)}$$

これを実験により確かめる

①エネルギー保存



入射光子(線源 Cs)のエネルギーは既知として、
散乱光子のエネルギーと散乱された電子が得たエネルギーの和
が元のエネルギーに等しいことを確認

②クライン-仁科の公式

微分散乱断面積を σ 、入射波及び反射波の波長を λ, λ' とすれば以下のクライン仁科の公式が成立

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_e^2}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \sin^2 \theta \right]$$

λ_e は電子波の波長, α は微細構造定数

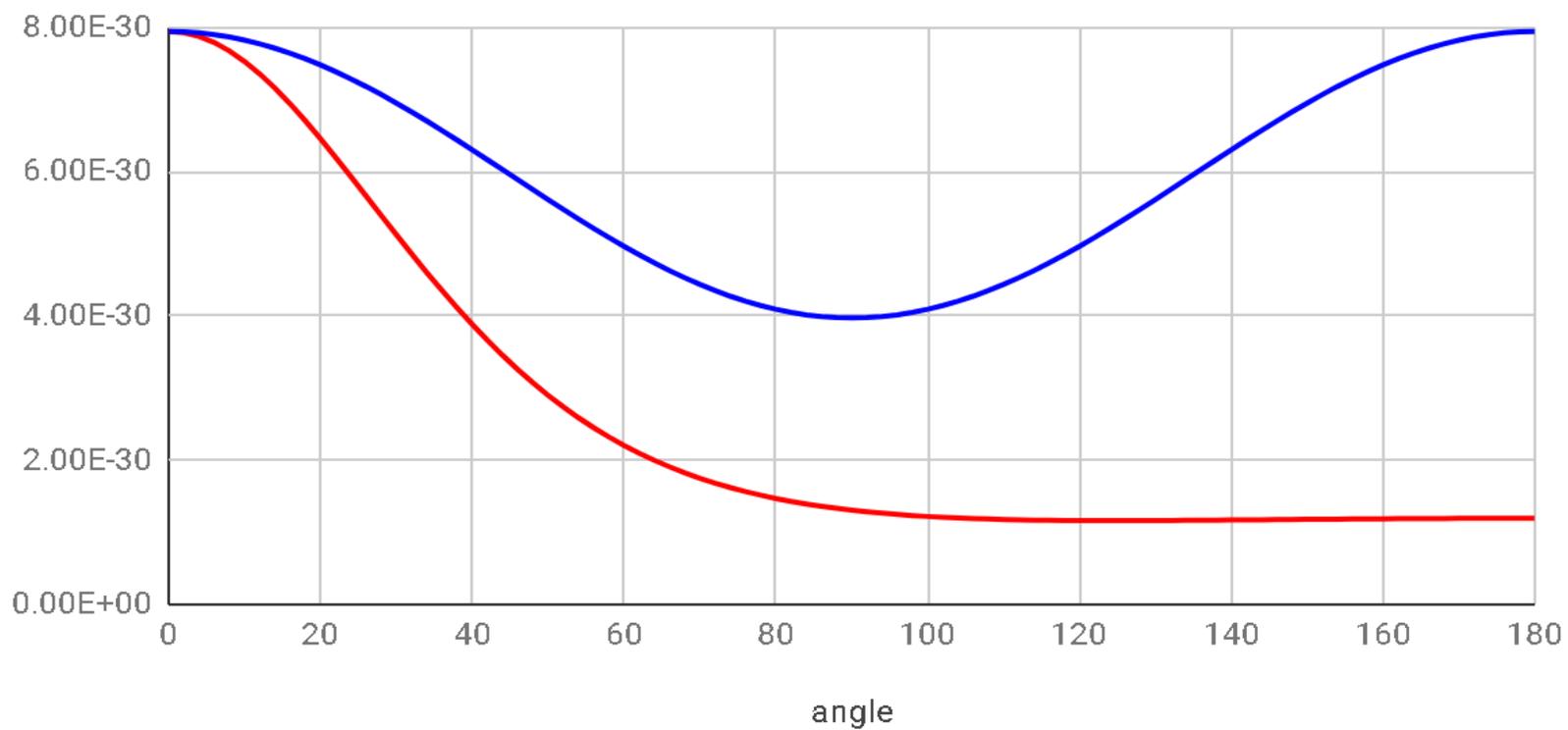
トムソンの公式とクライン-仁科の公式の違い

	トムソンの公式	クライン-仁科の公式
光の入射エネルギー	低エネルギー	高エネルギーでも可
電子が動くか	振動中心は不動(と近似)	動く
散乱後の光子の振動数	変わらない	変わる
具体的表式	$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_e^2}{2} (1 + \cos^2\theta)$	$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_e^2}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \sin^2\theta\right)$

グラフで見る違い

$d\sigma/d\Omega(\theta)$ (Compton)と $d\sigma/d\Omega(\theta)$ (Thomson)

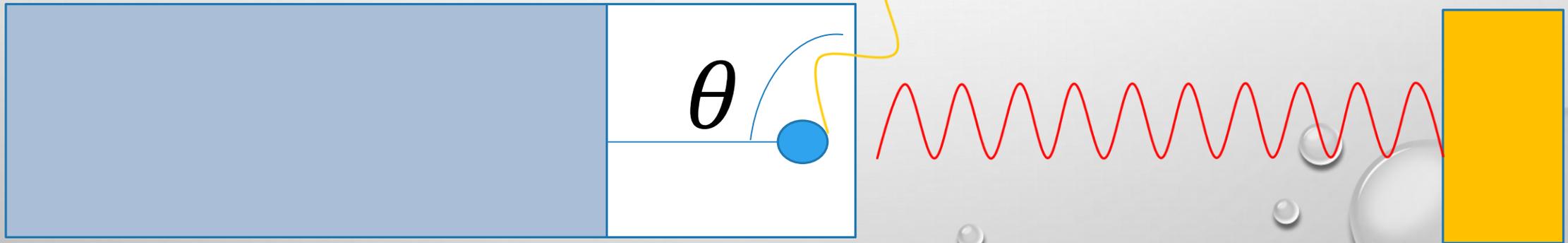
— $d\sigma/d\Omega$ — $d\sigma/d\Omega(T)$



実験機構（理論編）

実験の方法

光子がシンチレーターの中で
反射する



検出器

線源

エネルギー保存の確認法

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}mv^2$$

NaI

$h\nu'$

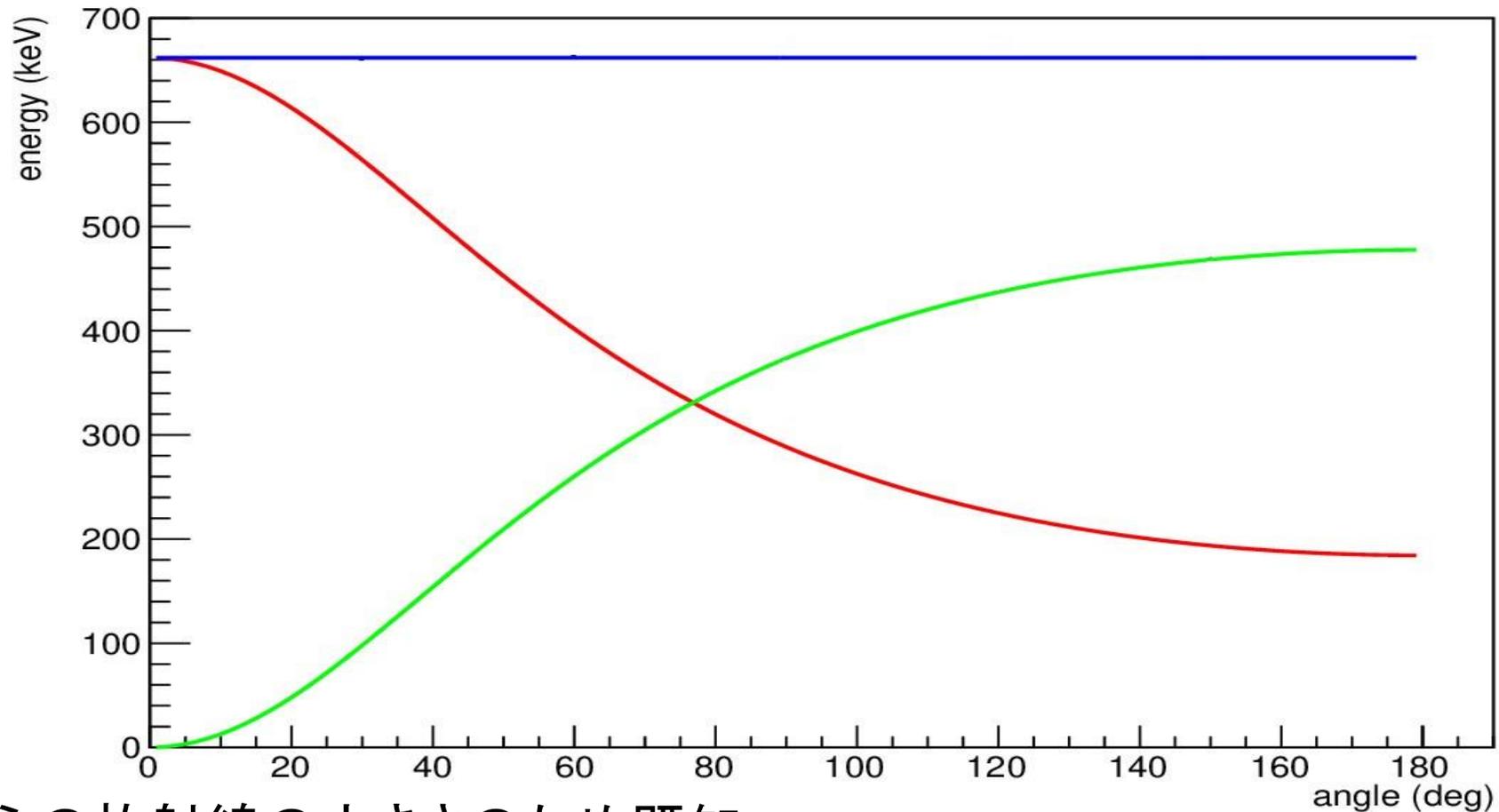


LaBr₃

$\frac{1}{2}mv^2$

$h\nu$

angle vs energy(0918)



$h\nu$ は線源からの放射線の大きさのため既知

$h\nu'$ はNaIの測定データ

$\frac{1}{2} m\nu^2$ はLaBr₃の測定データ

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2} (1 - \cos \theta)}$$

このようになっていればエネルギー保存がいえる

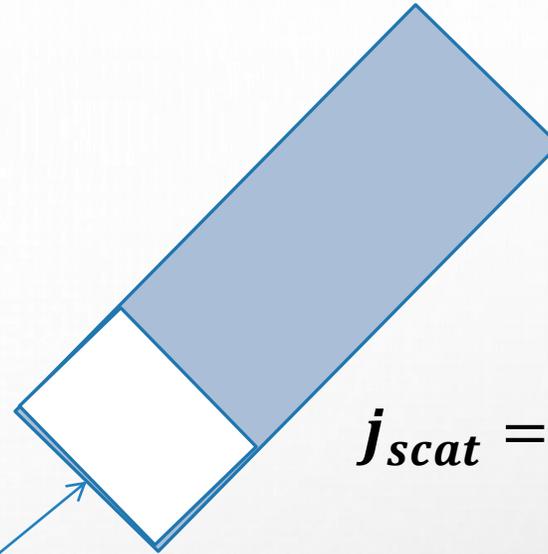
散乱断面積の確認法

単位時間あたりの入射
粒子数を測定する

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_{scat}}{j_{in}} r^2$$



$$j_{in} = \frac{\text{入射粒子数}}{\text{測定時間} \times \text{面積}}$$



$$j_{scat} = \frac{\text{散乱粒子数}}{\text{測定時間} \times \text{面積}}$$

実験機構(装置編)

実験概要

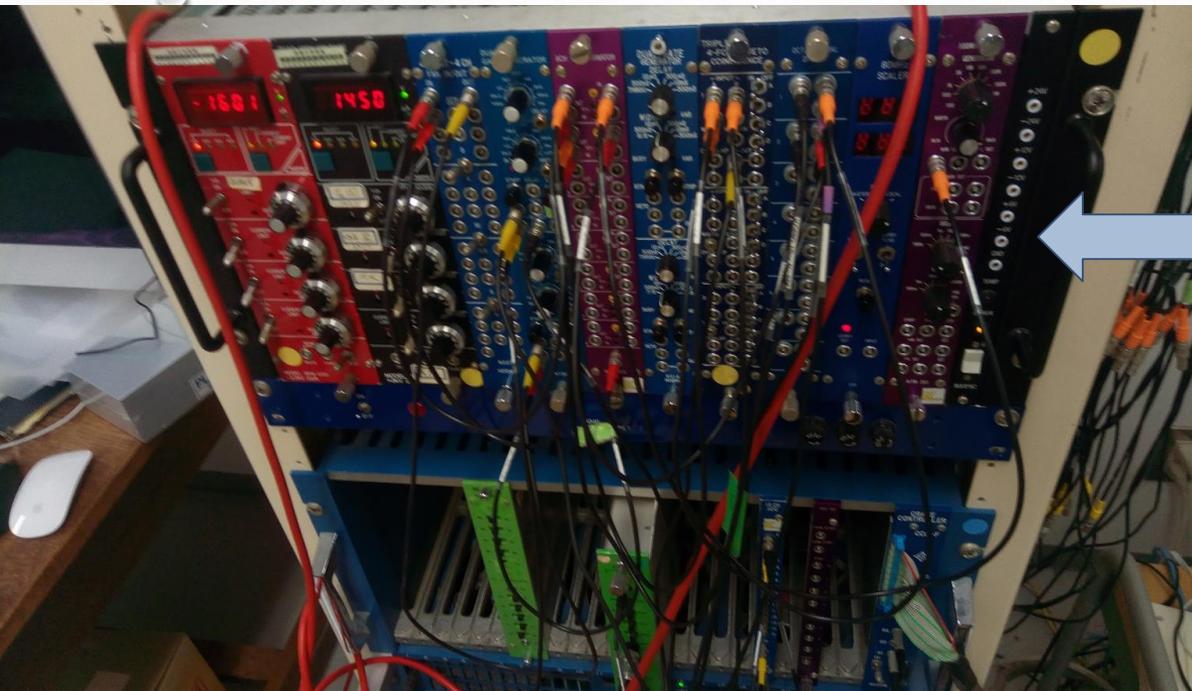
1. Calibration (較正)

ADCカウントとエネルギーの関係を得る

2. Compton散乱

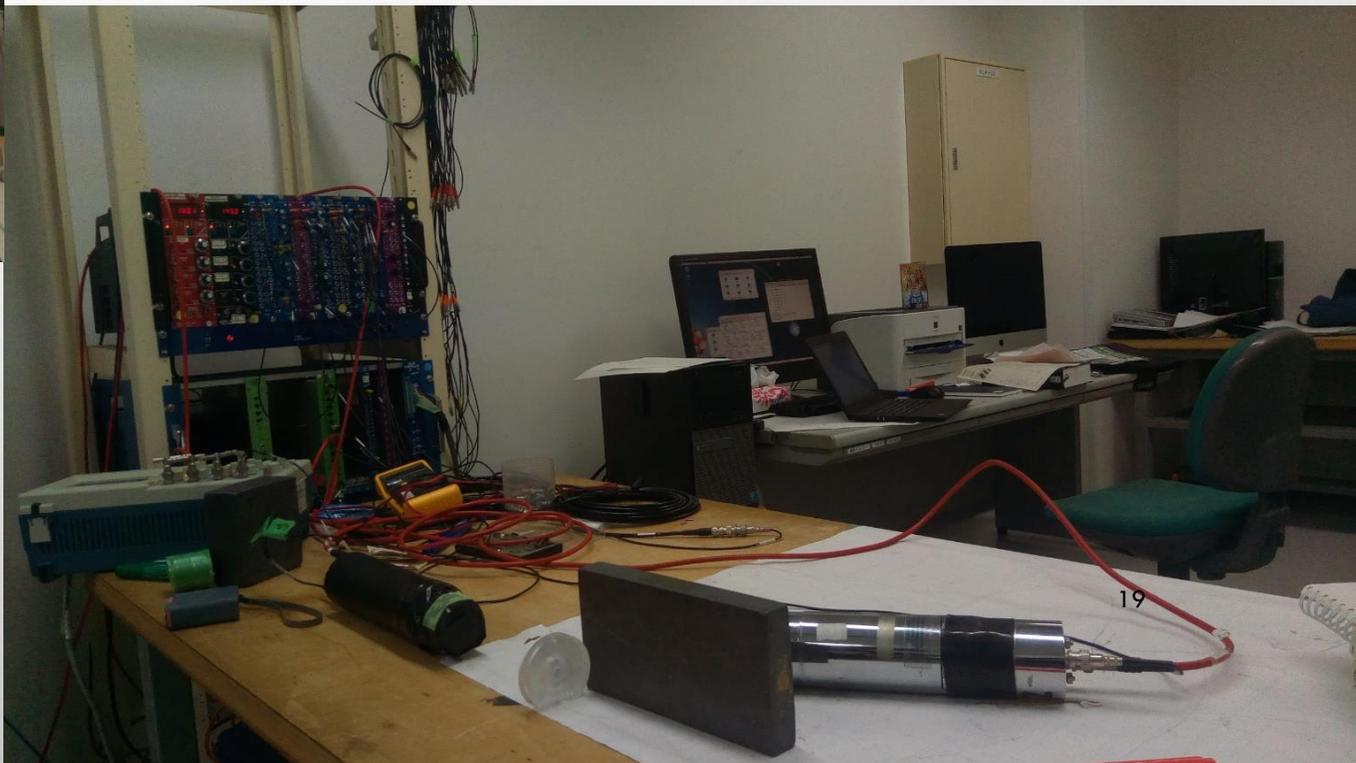
シンチレータ結晶内の電子によって散乱された γ 線と反跳電子のエネルギーを角度 θ ごとに測定

回路モジュール

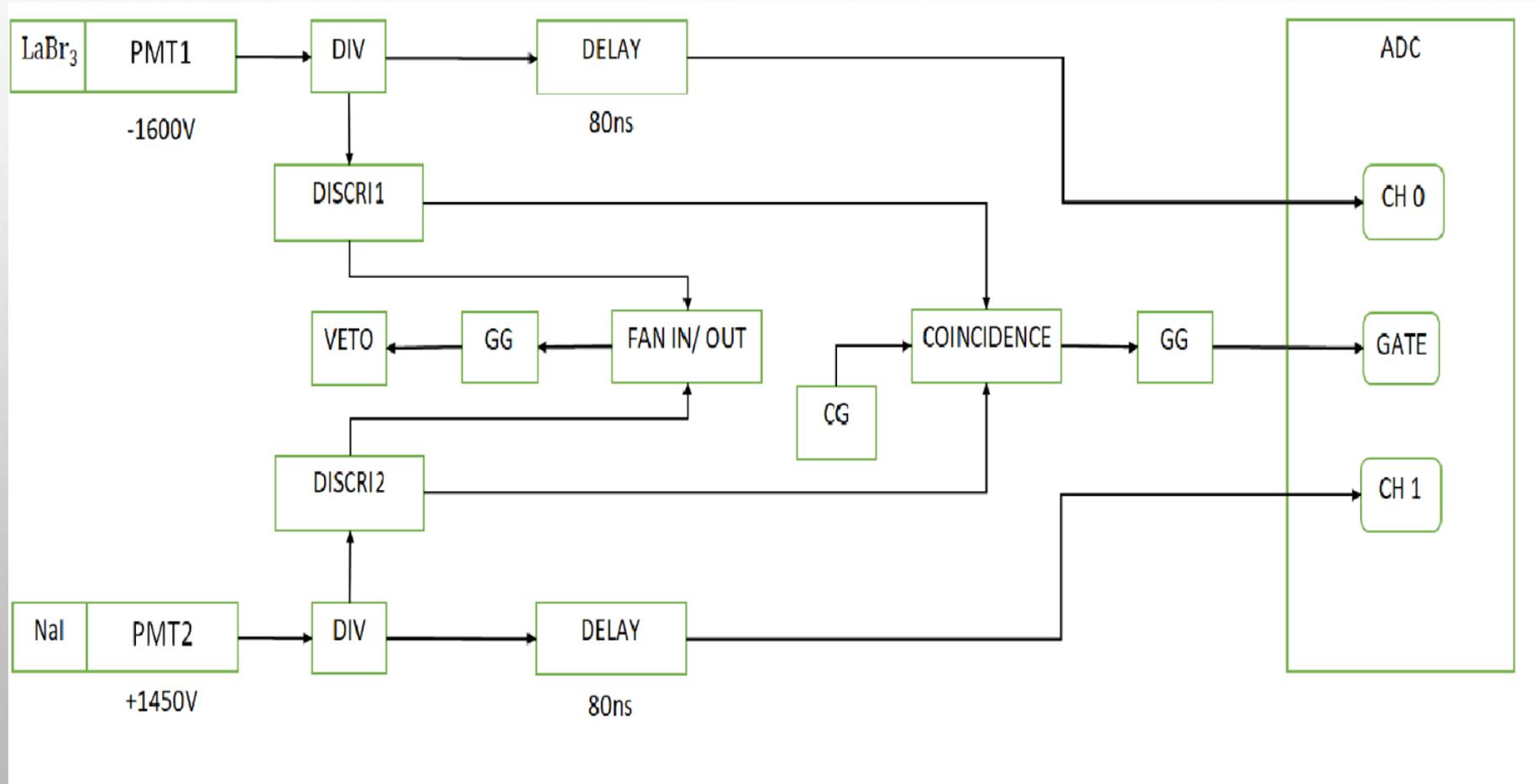


NIM (論理信号)
積分範囲を指定

CAMAC
電流を時間積分



回路概略



DIV=Divider
DISCRI=Discriminator
GG=Gate Generator
CG=Clock Generator

CALIBRATION方法

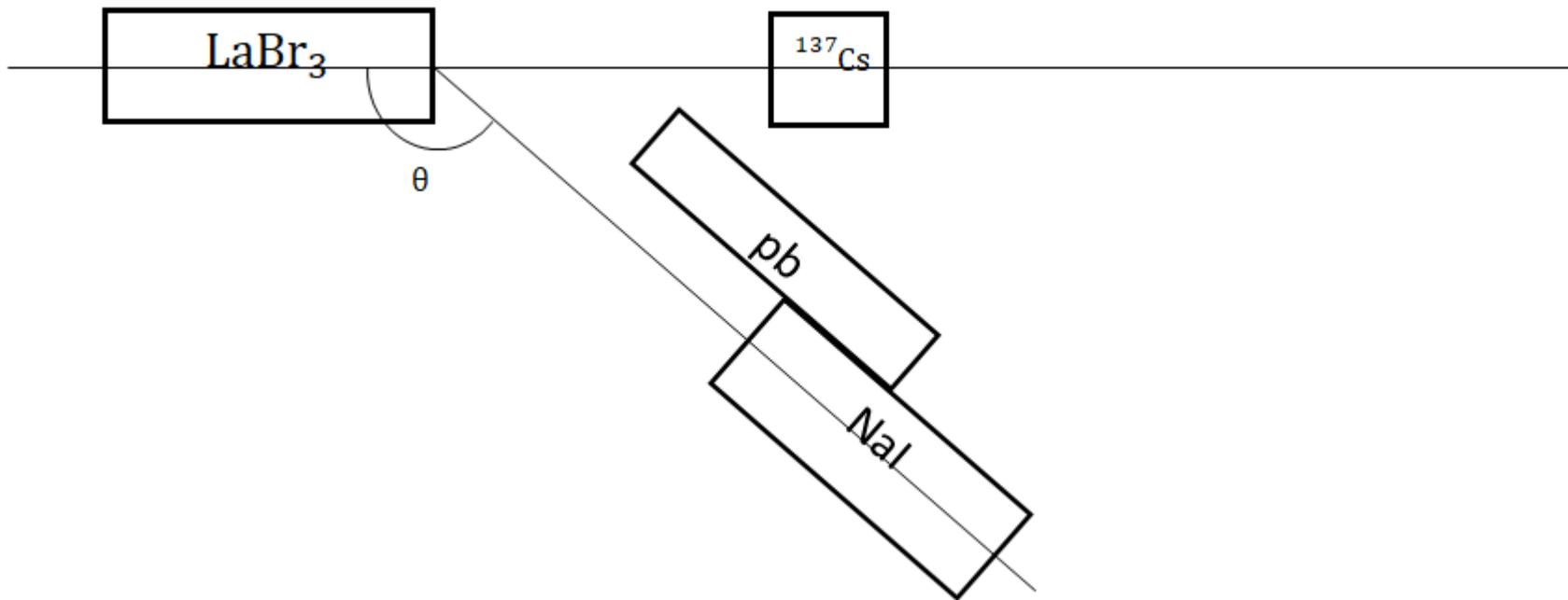
線源 : ^{137}Cs

- ・ 線源からのエネルギーを既知 (662keV) として,各検知器の光電吸収が起こったときのADCカウントと比較
- ・ 線源を置かず(0keV)Clock Generatorの信号のみでADCカウント(Pedestal)を測定

→線形だと仮定してエネルギーとADCカウントの関係式を得る

COMPTON散乱 方法

^{137}Cs の γ 線と LaBr_3 シンチレータ結晶内の電子のcompton散乱の測定



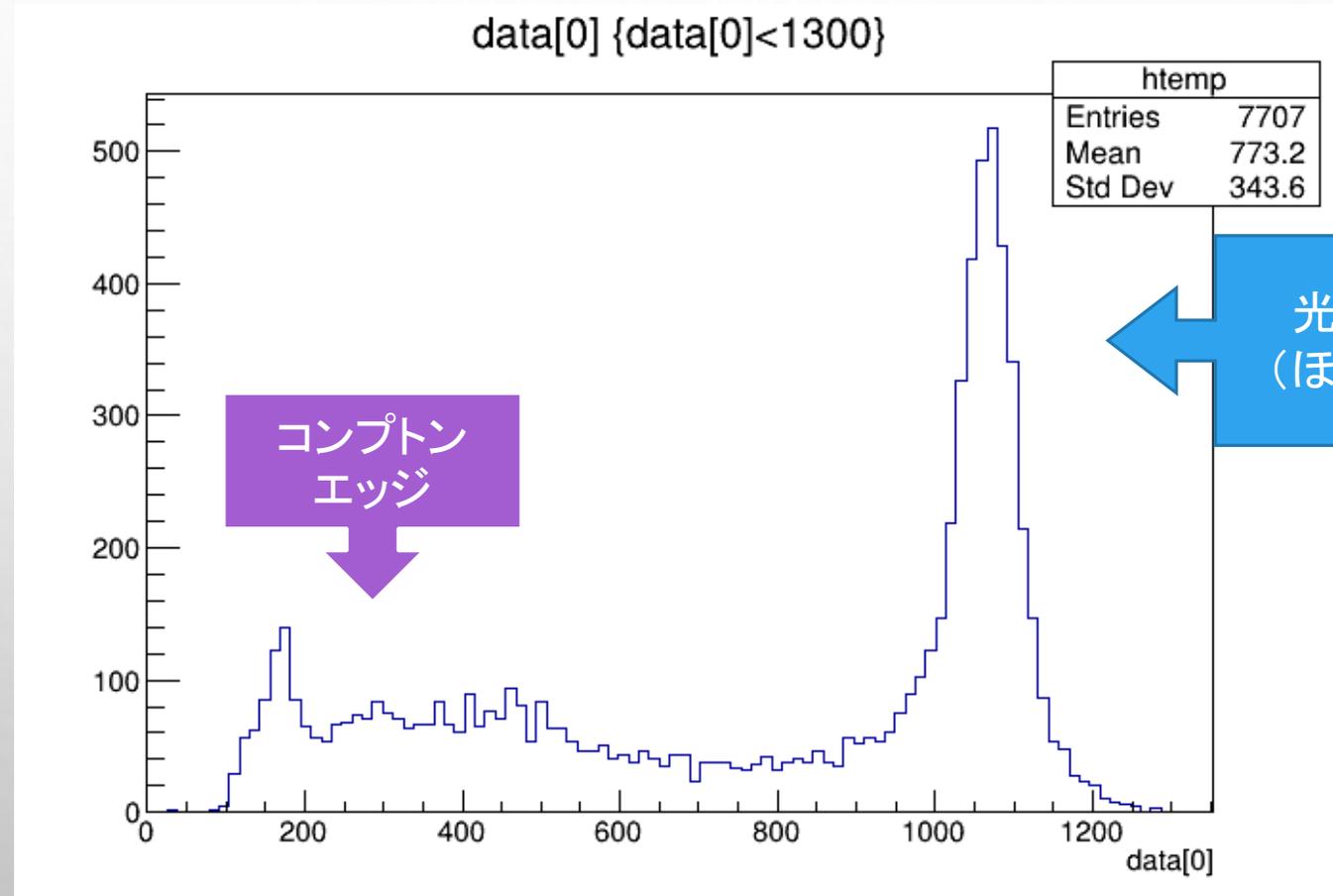
LaBr_3 の方が NaI よりも
低エネルギーを観測で
きる
→ LaBr_3 で電子のエネル
ギーを測定

Pb で線源から NaI に直
接入射する γ 線を遮断

$\theta=30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$

実験結果

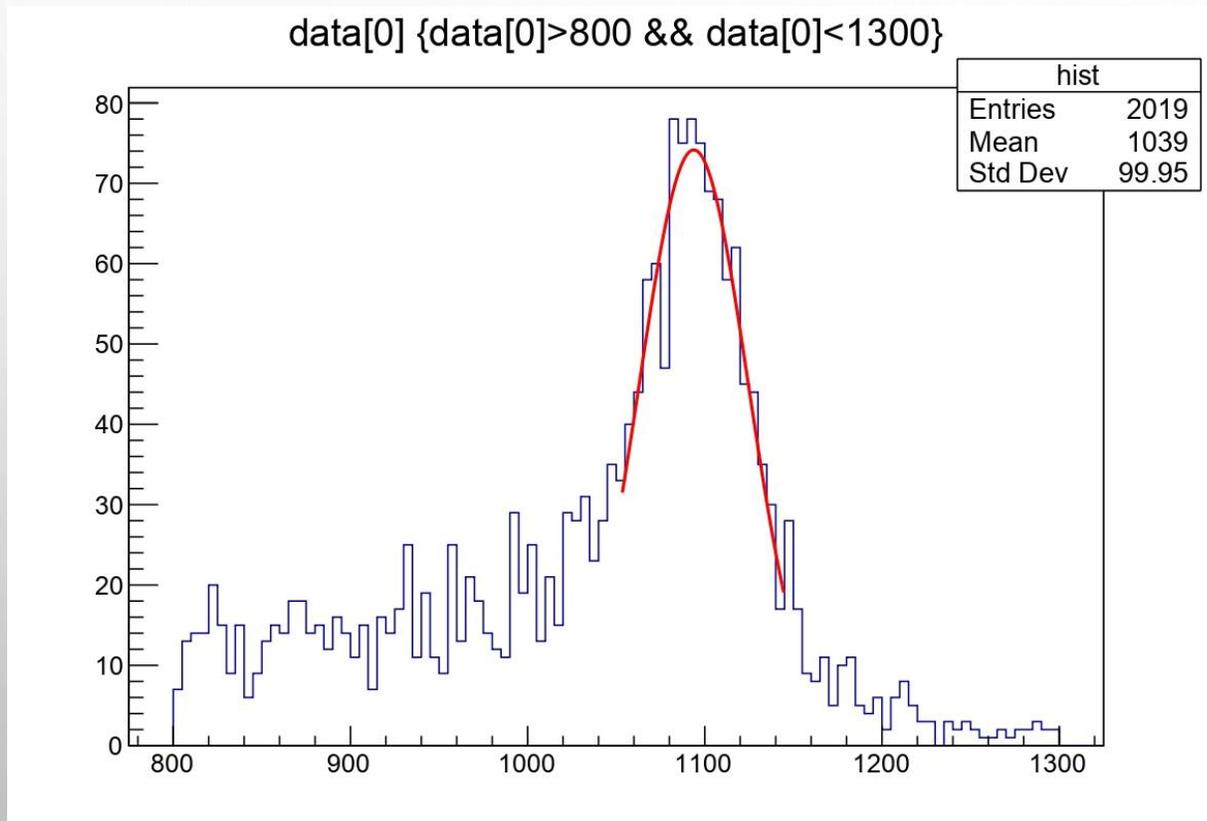
解析対象となるデータ



フィッティング

フィッティングの方法

➤ ROOTのガウシアンフィッティングを用いてピークの位置を求める

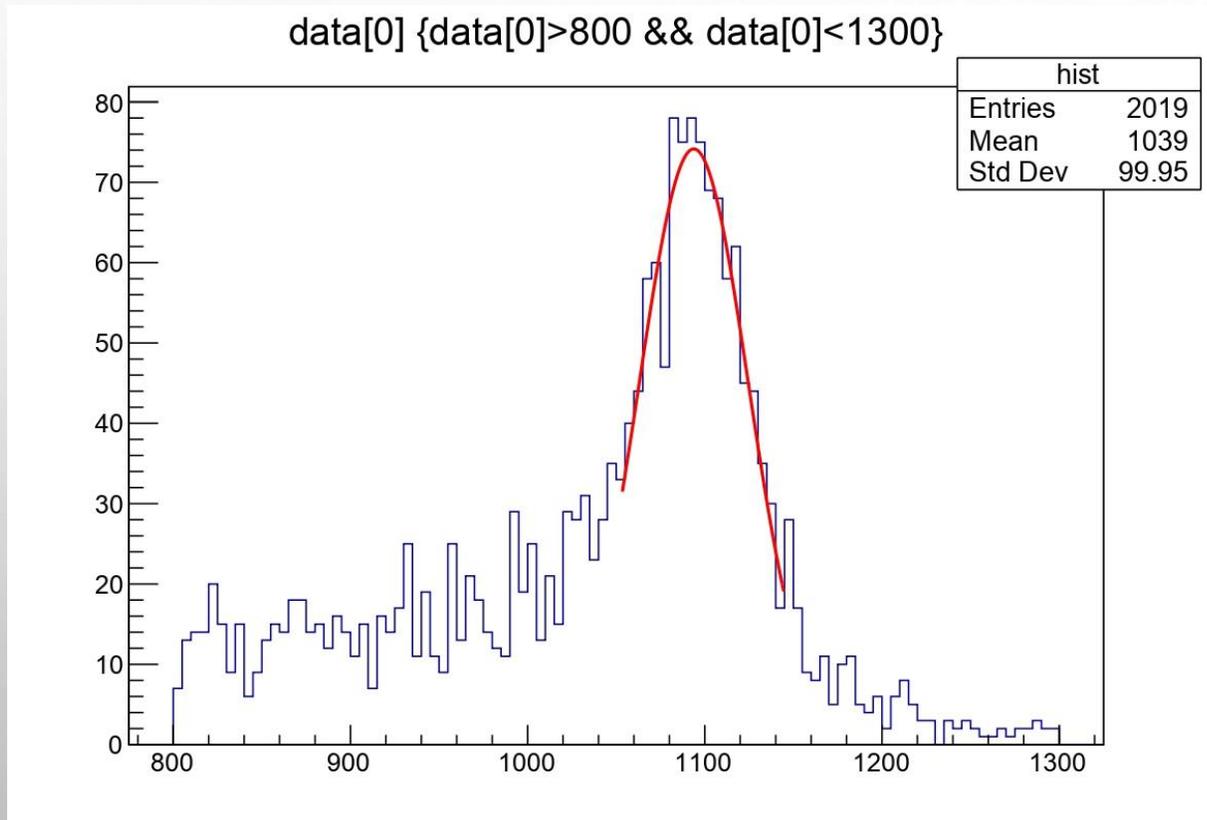


- フィッティングの心得

- ピークの位置を合わせる

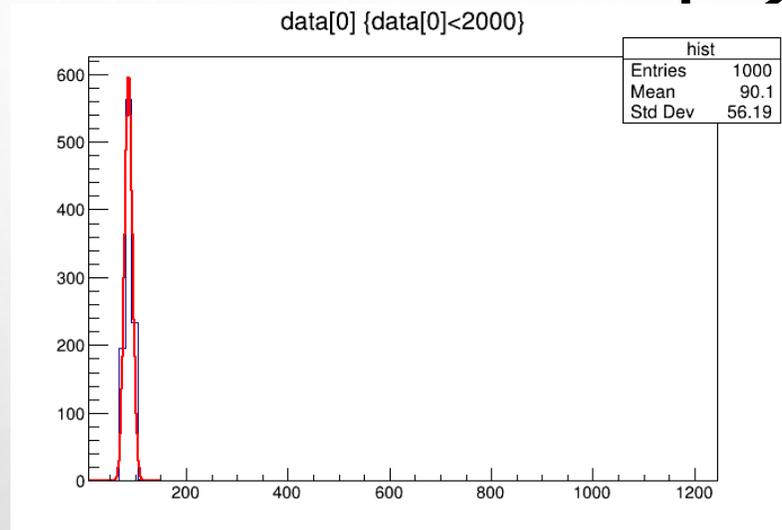
- フィッティング曲線とヒストグラムが明らかにずれた部分があればフィッティング範囲から除く

フィッティング

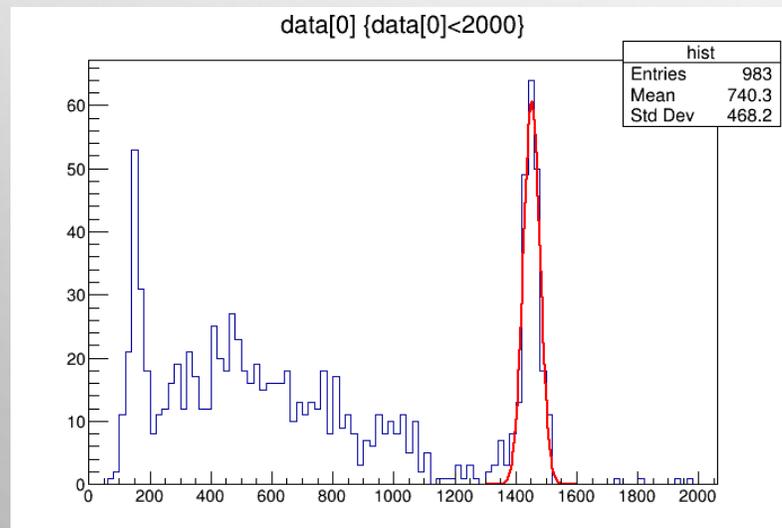


- フィッティングの誤差評価
 - ROOTの機能でガウシアンフィッティングのパラメータの誤差が評価できる
- 平均値Mの場合
 - $\sigma_{\mu} \sim \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

エネルギー較正



- ADC値とエネルギーを1対1で対応付ける
 1. エネルギー0のADC値 X_{ped} を求める
 2. エネルギー662KEVのADC値 X_{cal} を求める
 3. 線形を仮定しこの二点から $E = AX + B$ の関係を求める



エネルギー較正

- ADC値とエネルギーの関係

- $E = AX + B$

- $A = \frac{661}{X_{cal} - X_{ped}} [keV]$

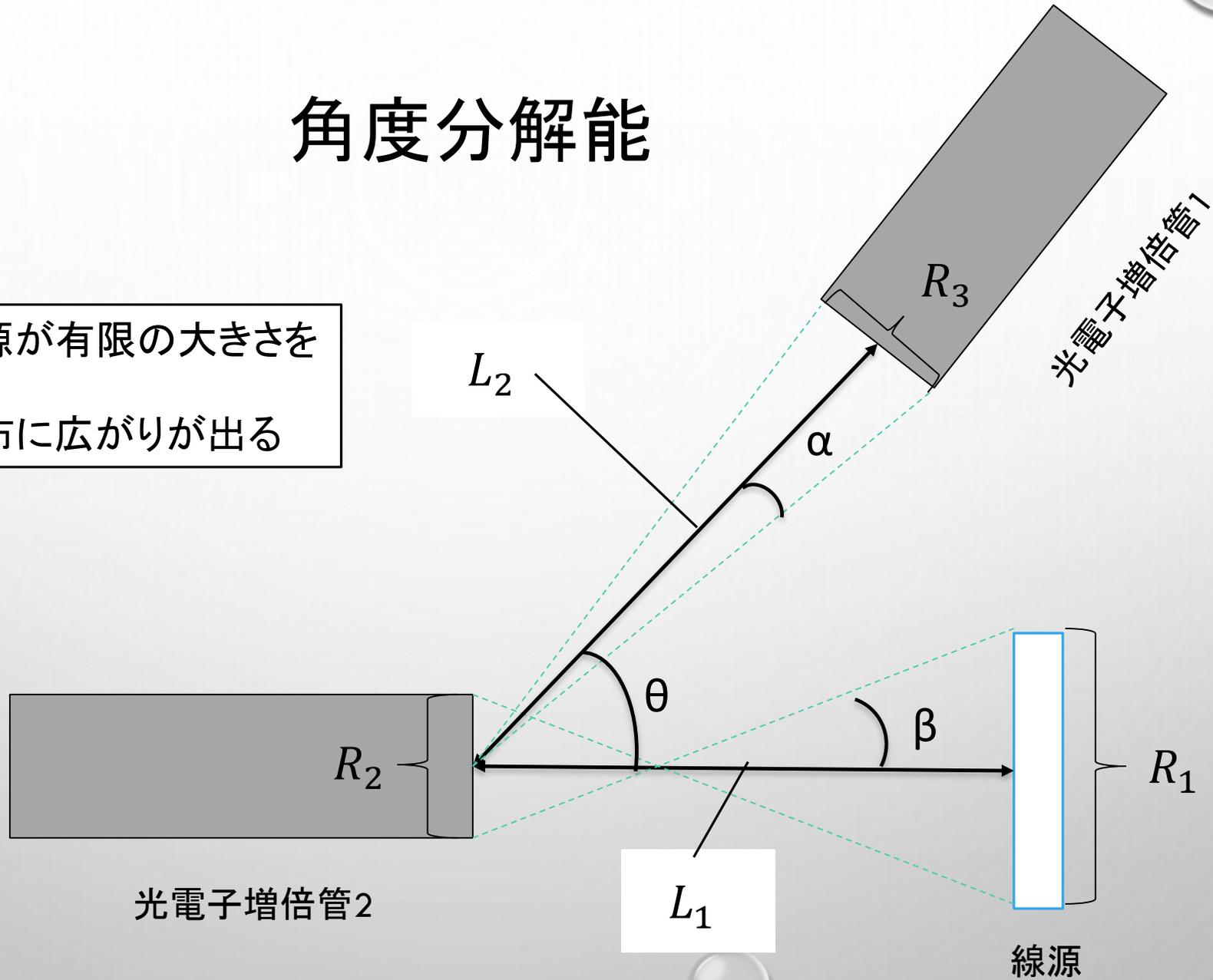
- $B = -\frac{661}{X_{cal} - X_{ped}} X_{ped} [keV]$

- 誤差評価

- $\sigma_E^2 = \left[\frac{E}{X_{cal} - X_{ped}} \sigma_{X_{cal}} \right]^2 + \left[\frac{(E - 662)}{X_{cal} - X_{ped}} \sigma_{X_{ped}} \right]^2 + [A\sigma_X]^2$

角度分解能

光電子増倍管、線源が有限の大きさを持つ
→データの角度分布に広がりが出る

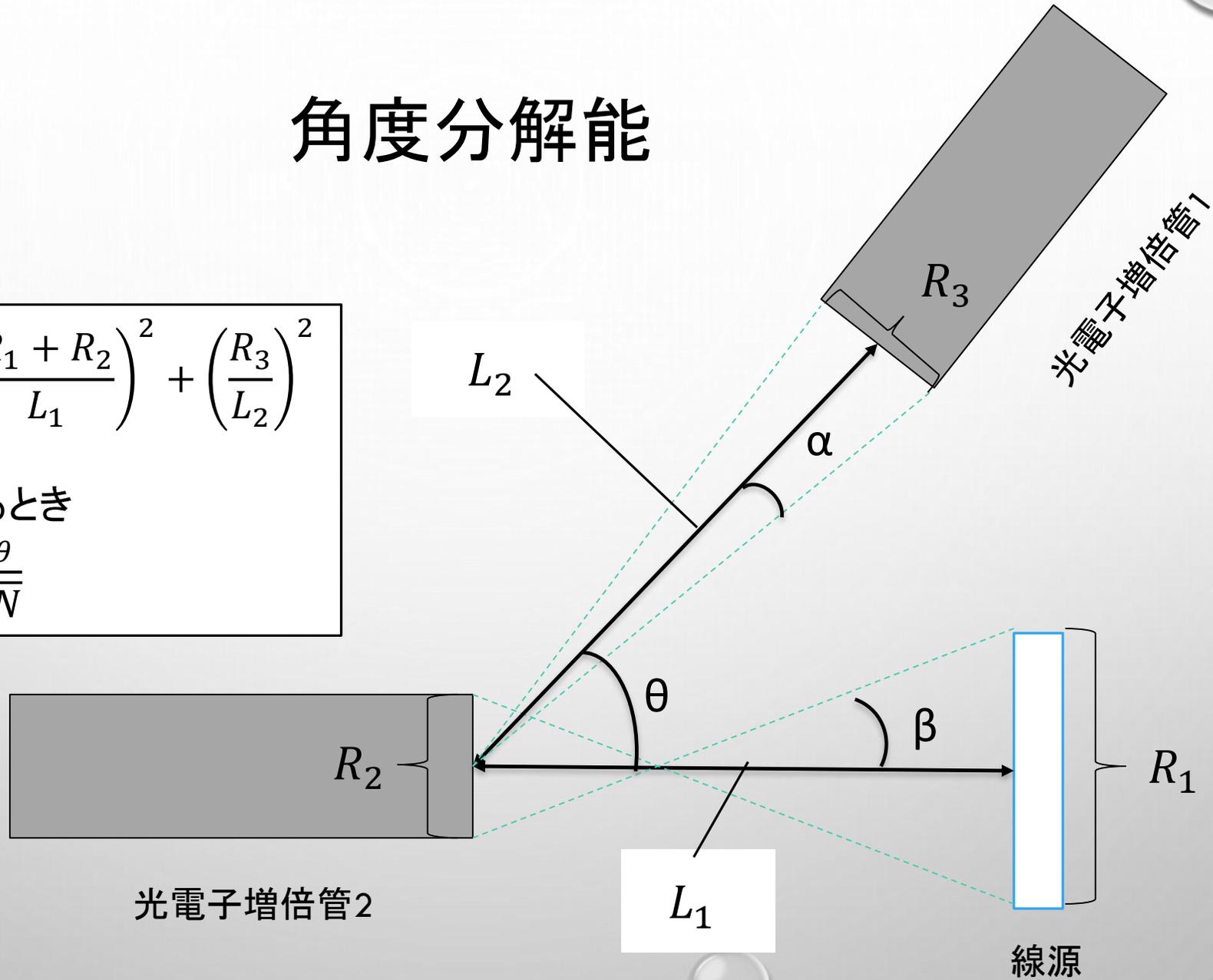


角度分解能

$$\sigma_{\theta}^2 \sim \alpha^2 + \beta^2 \cong \left(\frac{R_1 + R_2}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{R_3}{L_2}\right)^2$$

- N個データがあるとき

$$\frac{\sigma_{\theta}}{\sqrt{N}}$$

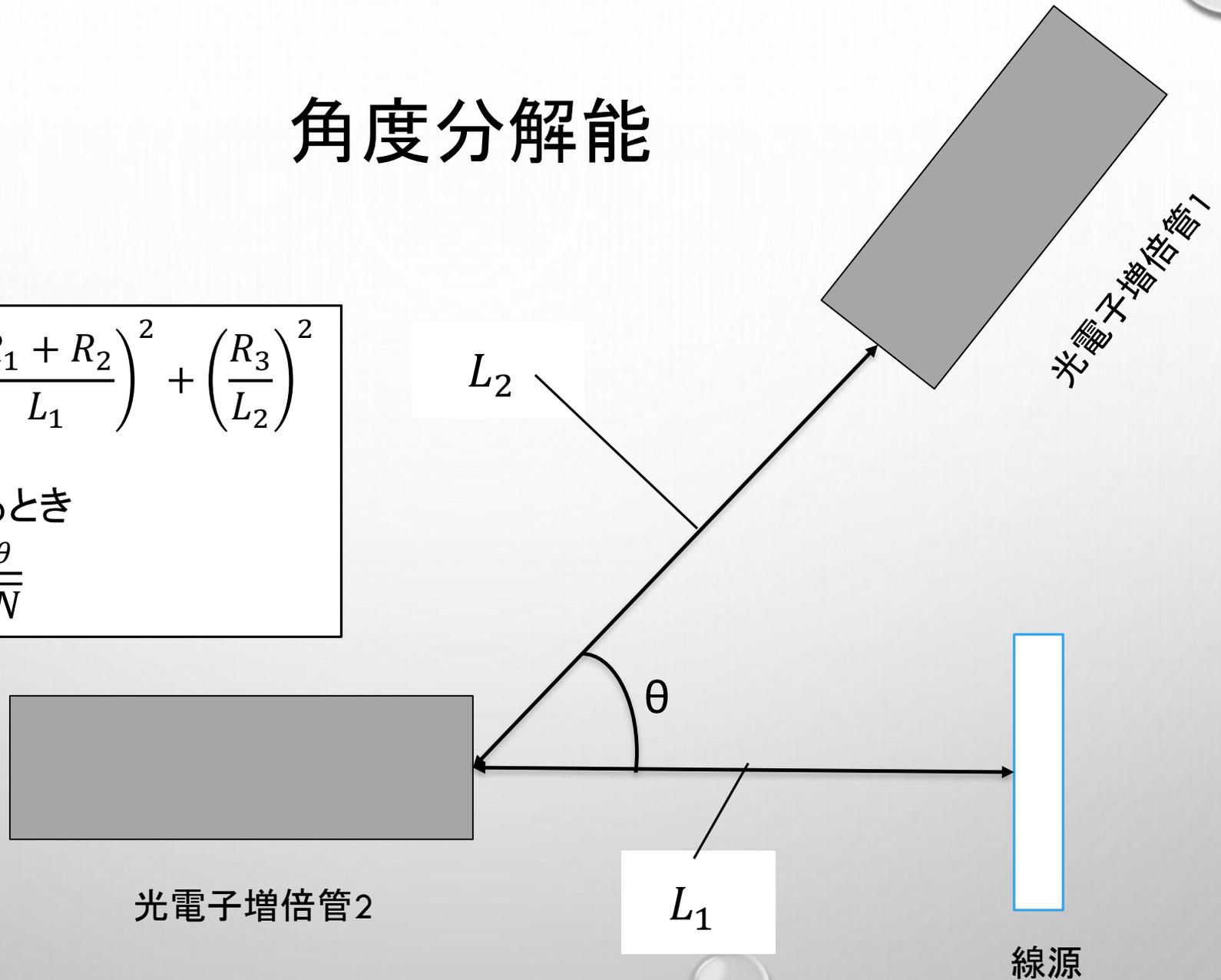


角度分解能

$$\sigma_{\theta}^2 \sim \alpha^2 + \beta^2 \cong \left(\frac{R_1 + R_2}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{R_3}{L_2}\right)^2$$

- N個データがあるとき

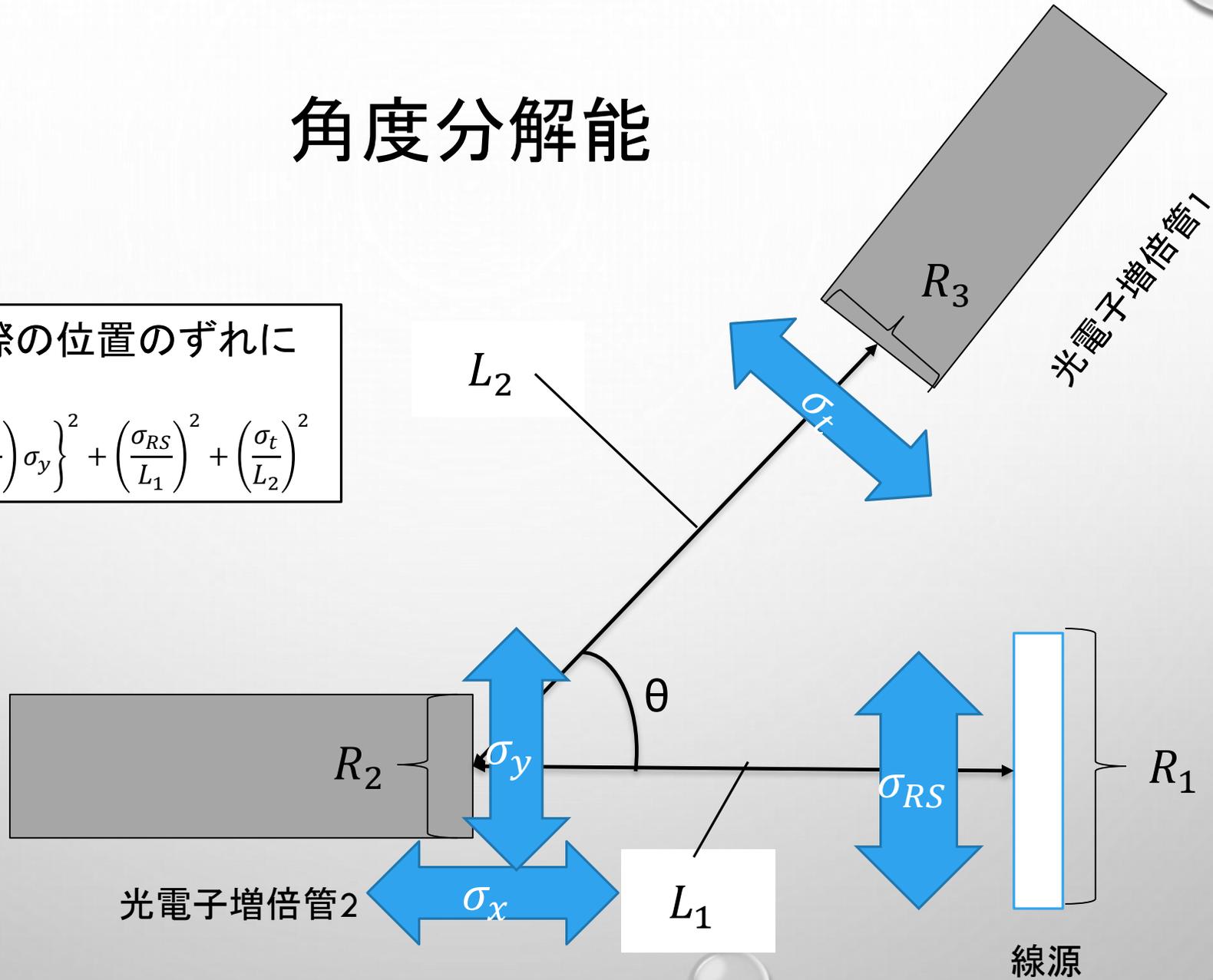
$$\frac{\sigma_{\theta}}{\sqrt{N}}$$



角度分解能

セッティングをする際の位置のずれによるもの

$$\left(\frac{\sigma_x \sin \theta}{L_2}\right)^2 + \left\{\left(\frac{\cos \theta}{L_2} + \frac{1}{L_1}\right)\sigma_y\right\}^2 + \left(\frac{\sigma_{RS}}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{L_2}\right)^2$$



角度分解能

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \left(\frac{R_1+R_2}{L} \right)^2 + \left(\frac{R_3}{L} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\sigma_x \sin \theta}{L} \right)^2 + \left\{ \left(\frac{\cos \theta}{L} + \frac{1}{L} \right) \sigma_y \right\}^2 + \left(\frac{\sigma_{RS}}{L} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{L} \right)^2$$

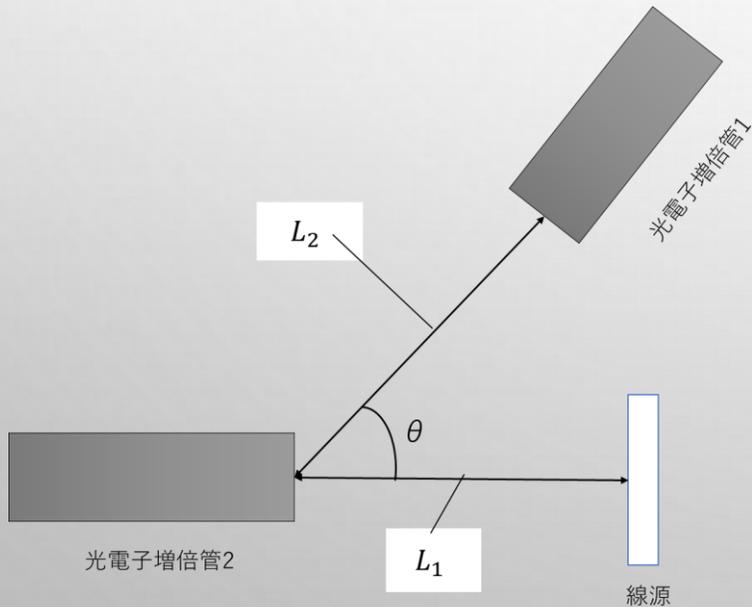
解析で用いた値

R_1	3.0cm
R_2	5.0cm
R_3	5.0cm
σ_x	0.5cm
σ_y	0.2cm
σ_t	0.2cm
σ_{RS}	0.2cm

コンプトン散乱(9/17)

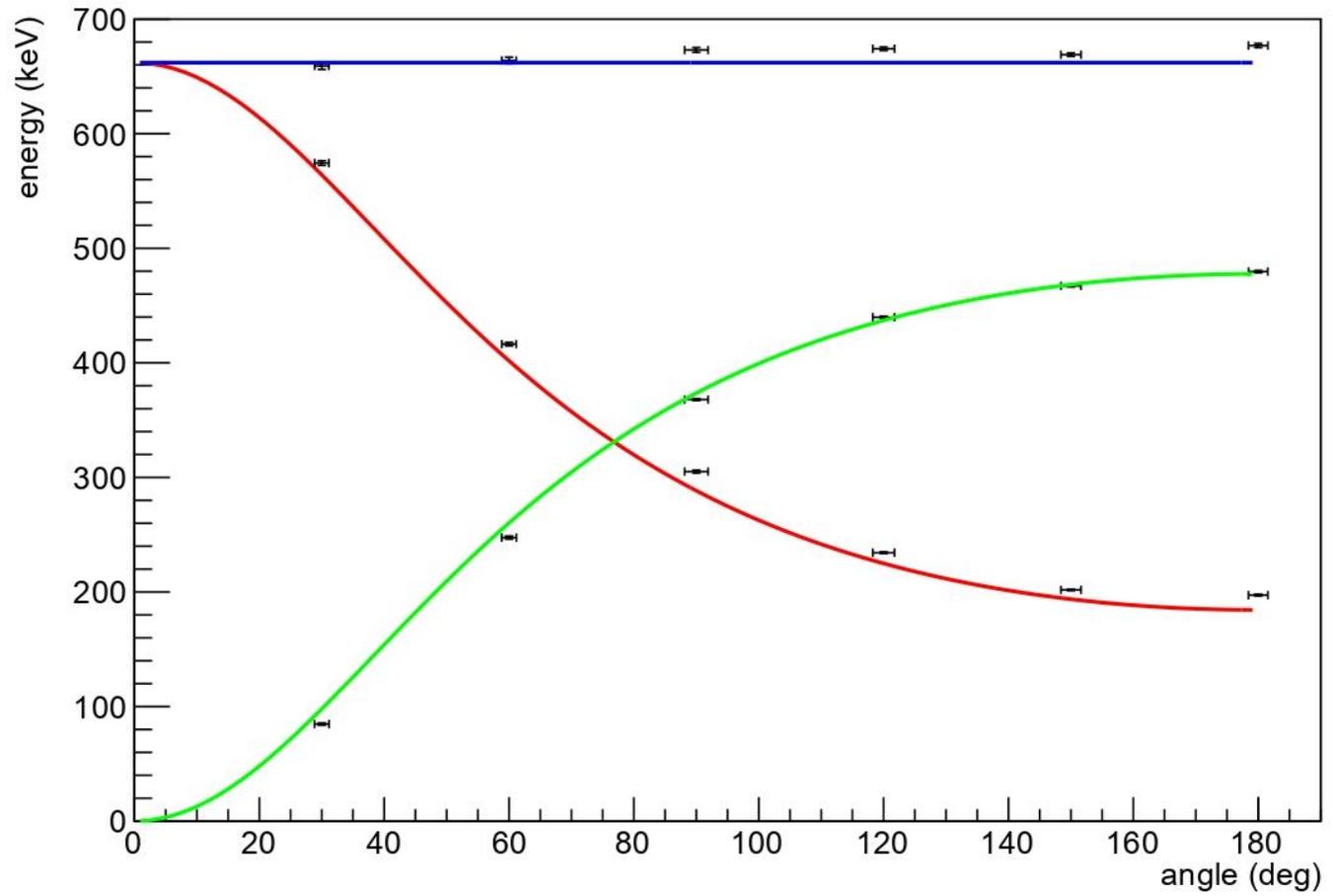
セッティング	
光電子増倍管1	NaIシンチレータ
光電子増倍管2	LaBrシンチレータ
線源	^{137}Cs

角度[deg]	L_1 [cm]	L_2 [cm]	イベント数
30	20	36	4000
60	20	36	4000
90	12	21	10000
120	13	23	10000
150	14	25	10000
180	15	27	10000



コンプトン散乱(9/17)

angle vs energy(0917)



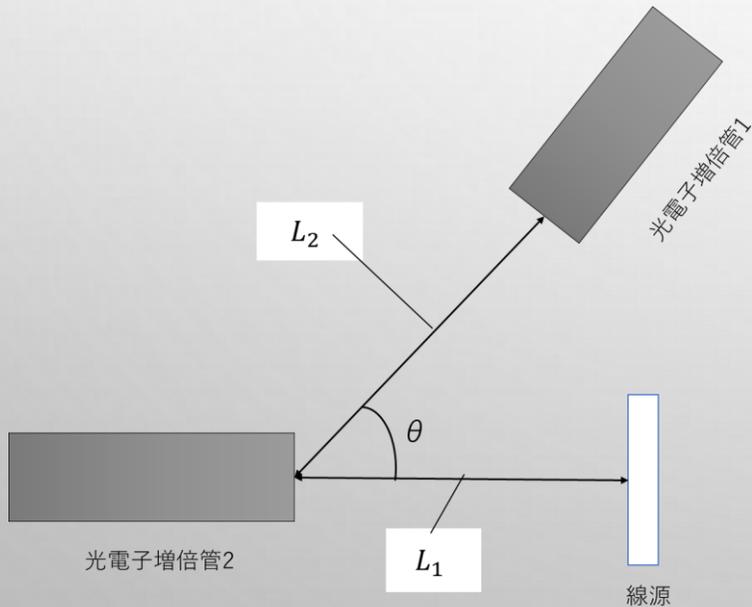
コンプトン散乱結果(9/17)

角度(deg)	光電子増倍管1エネルギー 実験値[keV]	光電子増倍管1エネルギー 理論値[keV]	光電子増倍管2エネルギー 実験値[keV]	光電子増倍管2エネルギー 理論値[keV]	合計エネルギー 実験値[keV]
30±1.14	574.40±2.00	557.86~570.25	84.70±1.02	91.75~104.14	659.10±3.02
60±1.15	416.32±1.58	396.31~407.29	243.493±1.32	254.71~265.69	663.85±2.91
90±1.89	305.10±1.27	283.12~293.86	367.94±0.85	368.14~378.88	673.04±2.12
120±1.74	234.30±0.76	222.37~227.58	439.81±0.79	434.42~439.63	674.11±1.56
150±1.61	201.83±0.61	192.71~194.78	467.10±0.92	467.22~469.29	668.93±1.53
180±1.55	197.27±0.82	184.35~184.37	479.64±1.00	477.63~777.65	676.90±1.82

コンプトン散乱(7/1)

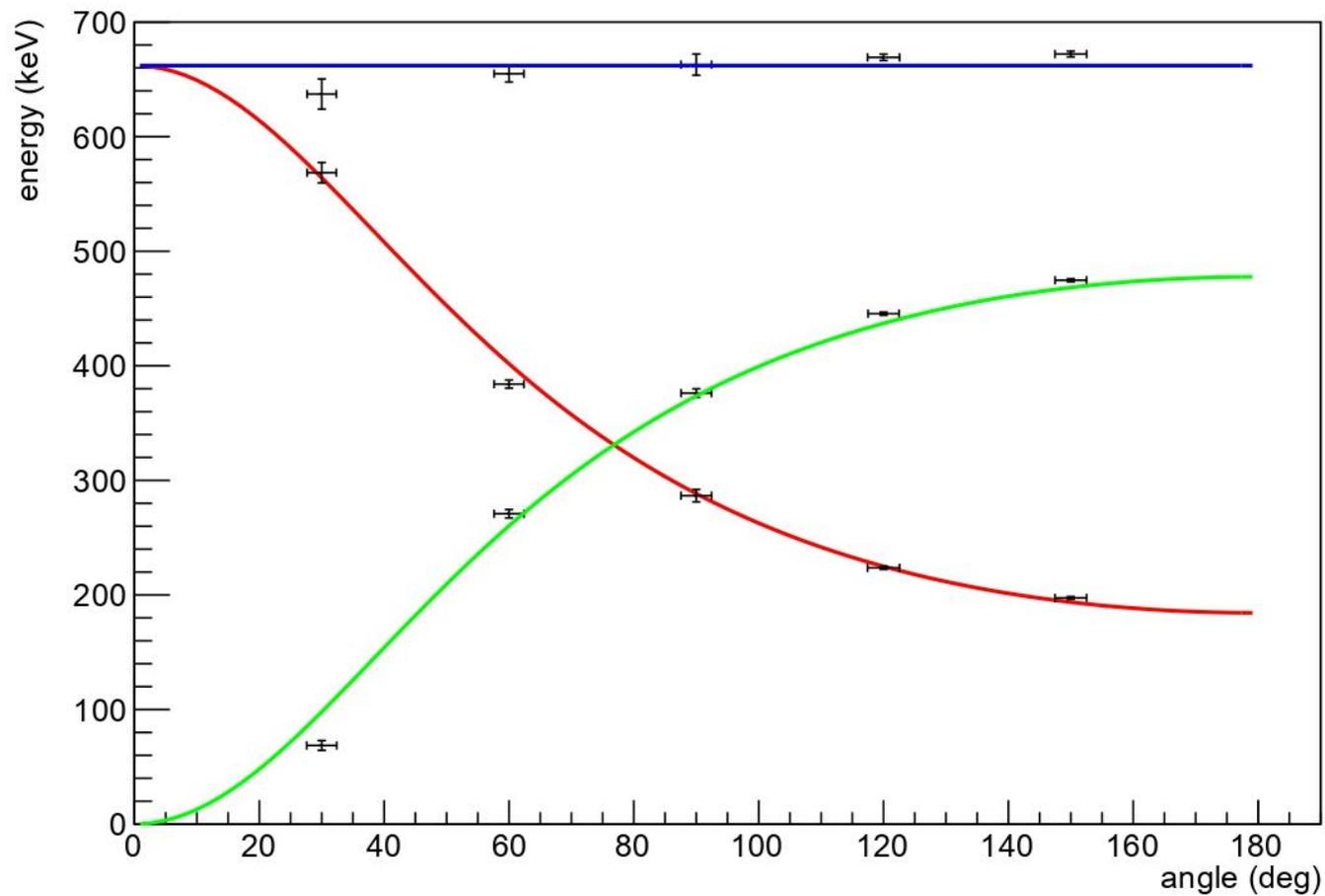
セッティング	
光電子増倍管1	NaIシンチレータ
光電子増倍管2	LaBrシンチレータ
線源	^{137}Cs

角度[deg]	L_1 [cm]	L_2 [cm]	イベント数
30	10	20	1000
60	10	20	1000
90	10	20	1000
120	10	20	1000
150	10	20	1000



コンプトン散乱(7/1)

angle vs energy(0701)



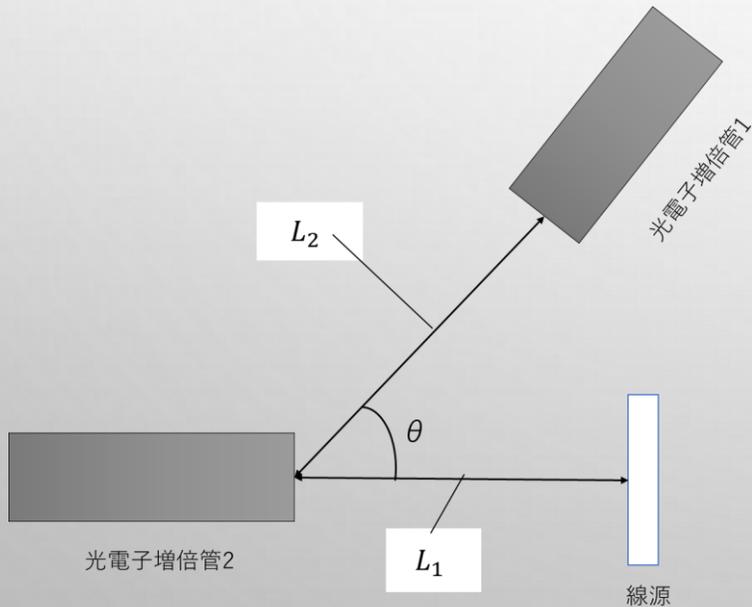
コンプトン散乱(7/1)

角度(deg)	光電子増倍管1エネルギー 実験値[keV]	光電子増倍管1エネルギー 理論値[keV]	光電子増倍管2エネルギー 実験値[keV]	光電子増倍管2エネルギー 理論値[keV]	合計エネルギー 実験値[keV]
30±2.34	568.56±8.94	551.23~576.63	68.62±4.25	85.37~110.77	637.18±13.19
60±2.39	384.06±3.56	390.54~413.36	270.87±3.70	248.64~271.46	654.93±7.26
90±2.46	286.68±5.45	281.57~295.55	376.16±3.80	366.45~380.43	662.84±9.24
120±2.56	223.69±1.40	221.20~228.87	445.50±1.37	433.13~440.80	669.19±2.77
150±2.54	197.42±1.17	192.16~195.42	474.67±1.35	466.58~469.84	672.09±2.52

コンプトン散乱(9/9)

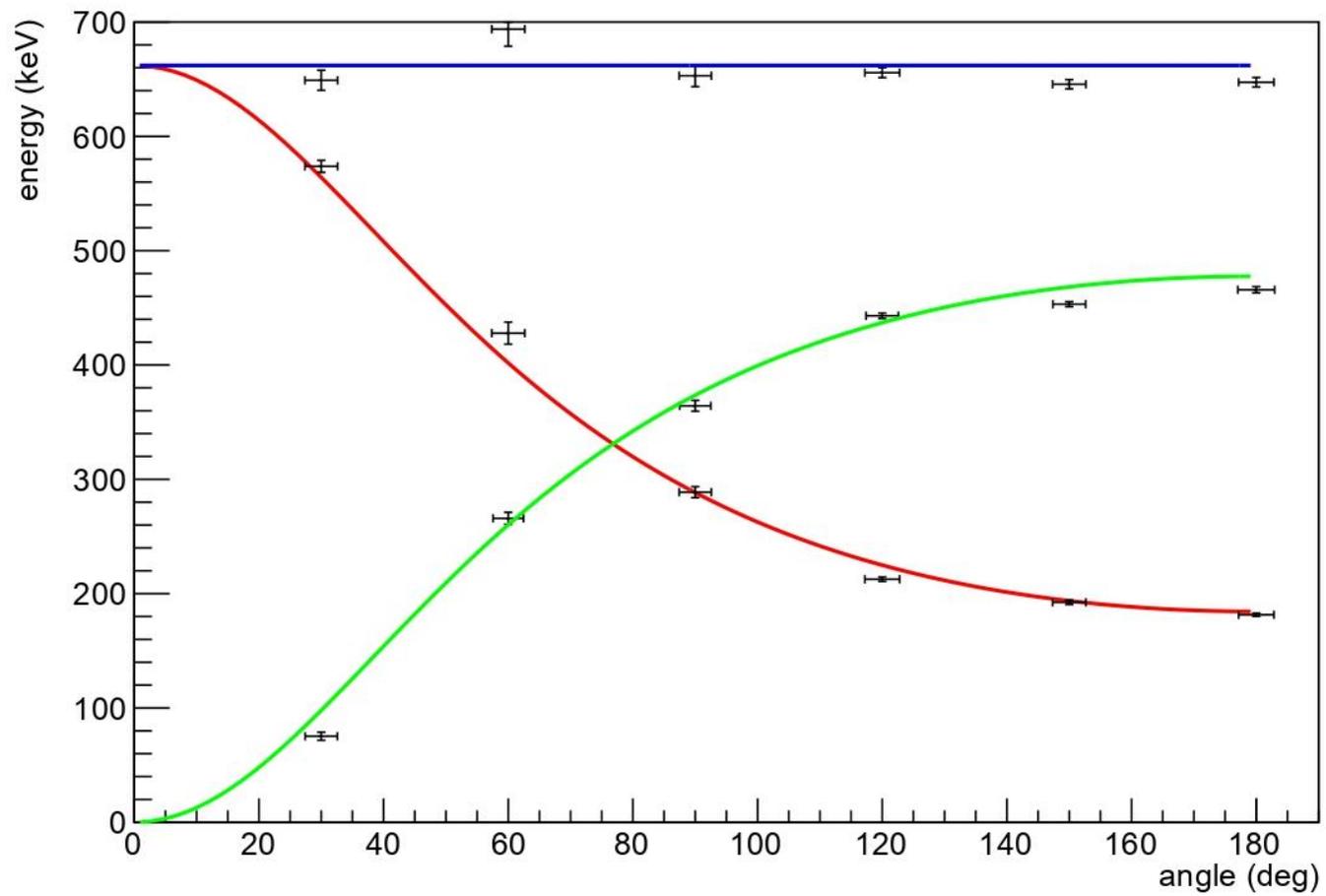
セッティング	
光電子増倍管1	LaBrシンチレータ
光電子増倍管2	NaIシンチレータ
線源	^{137}Cs

角度[deg]	L_1 [cm]	L_2 [cm]	イベント数
30	10	20	1000
60	10	20	1000
90	10	20	1000
120	10	20	1000
150	10	20	1000
180	10	20	1000



コンプトン散乱(9/9)

angle vs energy(0909)



コンプトン散乱結果(9/9)

角度(deg)	光電子増倍管1エネルギー 実験値[keV]	光電子増倍管1エネルギー 理論値[keV]	光電子増倍管2エネルギー 実験値[keV]	光電子増倍管2エネルギー 理論値[keV]	合計エネルギー 実験値[keV]
30±2.62	573.76±5.25	549.68~578.10	75.26±3.56	83.90~112.32	649.03±8.81
60±2.65	427.88±9.66	389.34~414.64	265.87±5.24	247.36~272.66	693.75±14.91
90±2.58	288.75±4.84	281.25~295.91	364.31±4.74	366.09~380.75	653.05±9.58
120±2.79	212.63±1.97	220.88~229.23	443.05±2.34	432.77~441.12	655.69±4.31
150±2.66	192.43±1.90	192.09~195.50	435.17±2.17	466.50~469.90	645.60±4.07
180±2.83	181.53±1.42	184.35~184.43	465.81±2.70	477.56~477.57	647.35±4.12

高め

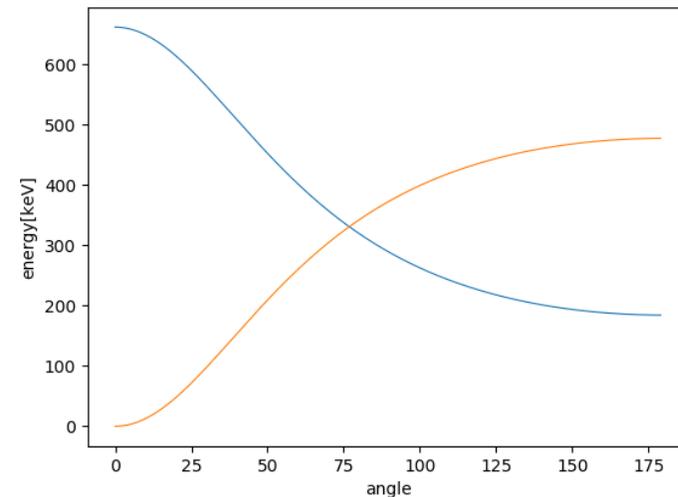
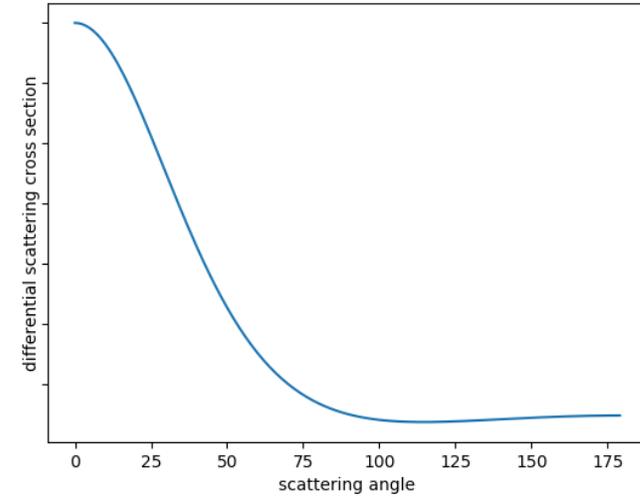
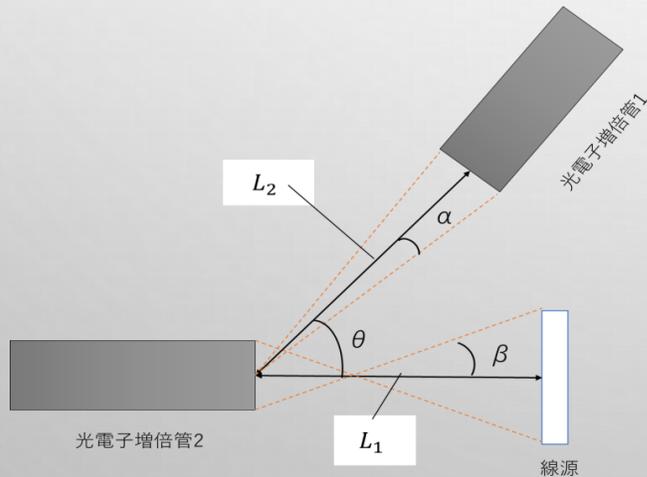
考察 低め

日付 角度(deg)	光電子増倍管1エ ネルギー 実験値[keV]	光電子増倍管1エ ネルギー 理論値[keV]	光電子増倍管2エ ネルギー 実験値[keV]	光電子増倍管2エ ネルギー 理論値[keV]	合計エネルギー 実験値[keV]
7/1 30±2.34	568.56±8.94	551.23~576.63	68.62±4.25	85.37~110.77	637.18±13.19
7/1 60±2.39	384.06±3.56	390.54~413.36	270.87±3.70	248.64~271.46	654.93±7.26
9/9 30±2.62	573.76±5.25	549.68~578.10	75.26±3.56	83.90~112.32	649.03±8.81
9/9 60±2.65	427.88±9.66	389.34~414.64	265.87±5.24	247.36~272.66	693.75±14.91
9/17 30±1.14	574.40±2.00	557.86~570.25	84.70±1.02	91.75~104.14	659.10±3.02
9/17 60±1.15	416.32±1.58	396.31~407.29	243.493±1.32	254.71~265.69	663.85±2.91 ⁴³

考察

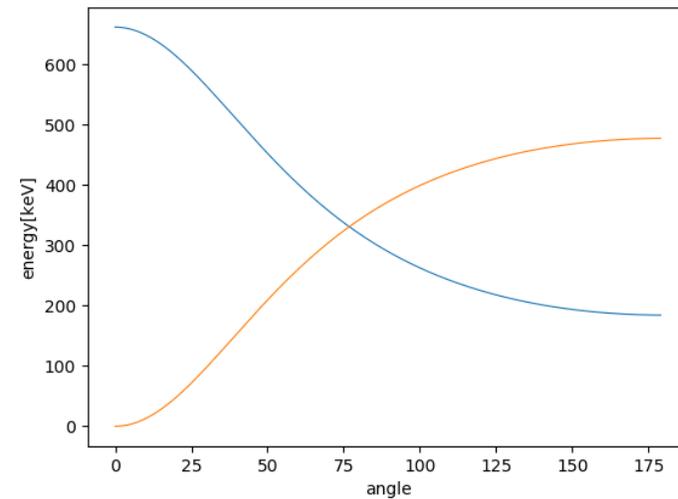
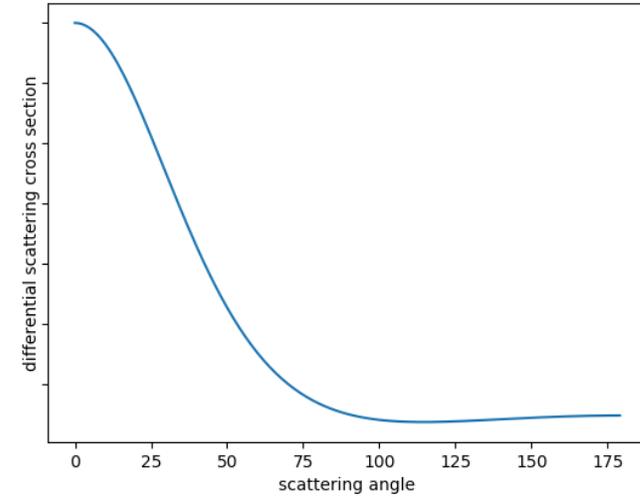
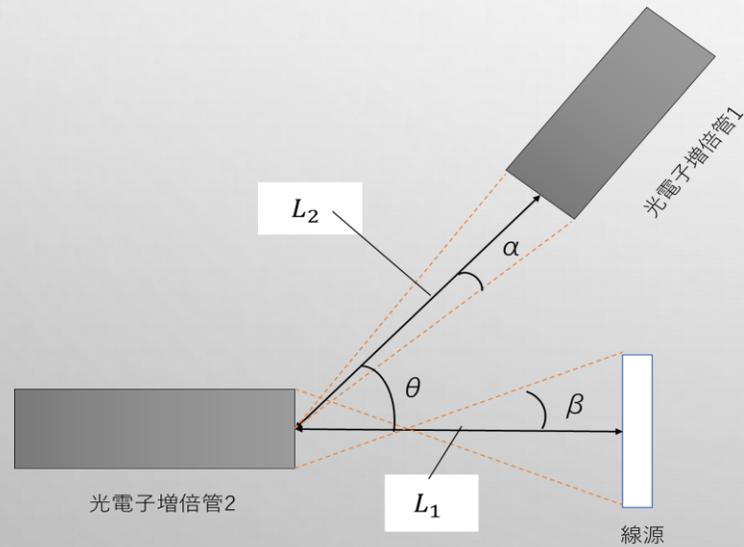
Klein-Nishinaの公式より浅い散乱角のイベントが多い

光電子増倍管が大きいため角度分布に広がりを持ち、浅い散乱角のデータが支配的になる？



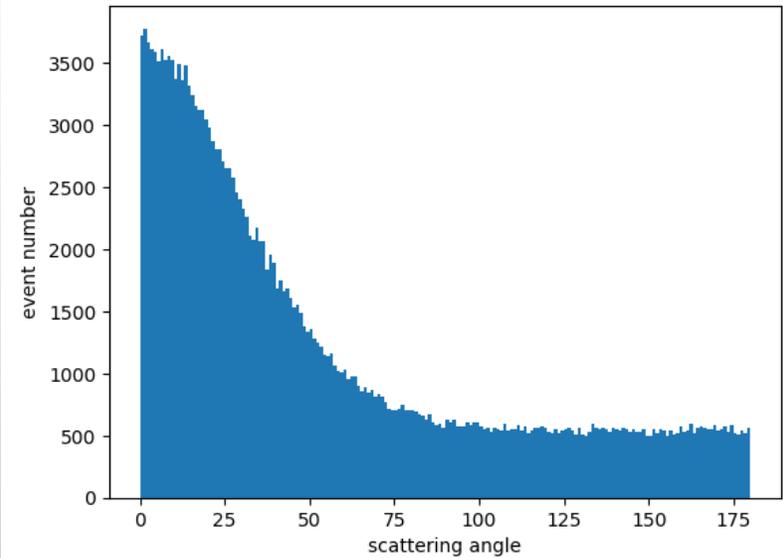
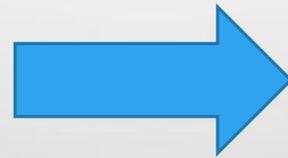
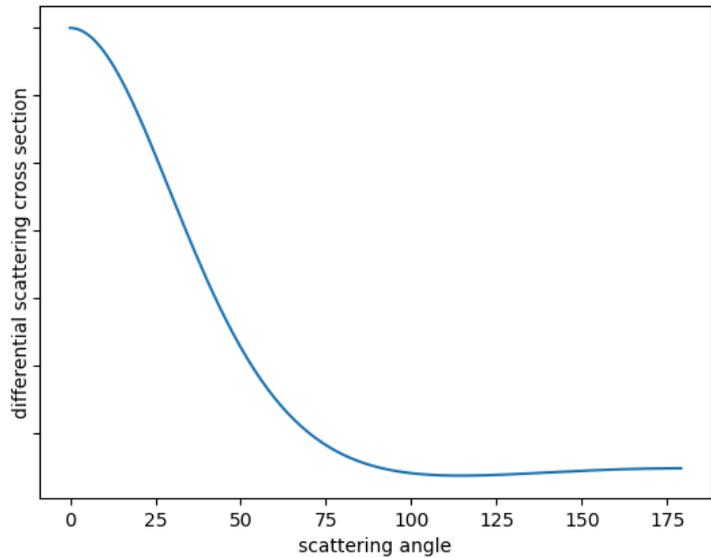
考察

実際に得られたエネルギーの値は実際は
もっと浅い散乱角での値だった？
➡シミュレーションで確かめる



シミュレーション

棄却サンプリングでKlein-Nishinaの公式に従うデータを
を用意する

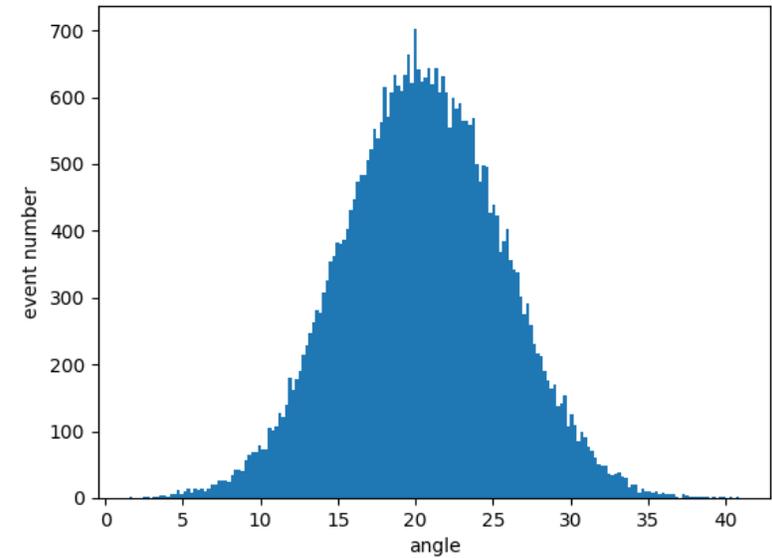
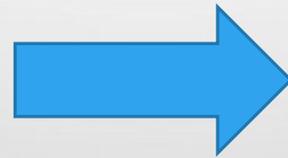
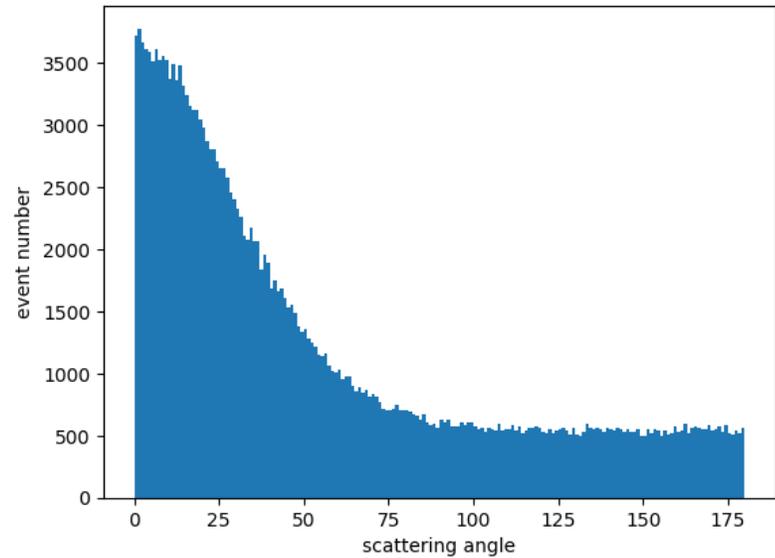


シミュレーション

光電子増倍管の角度分解能: $\sigma_\theta = 27^\circ$

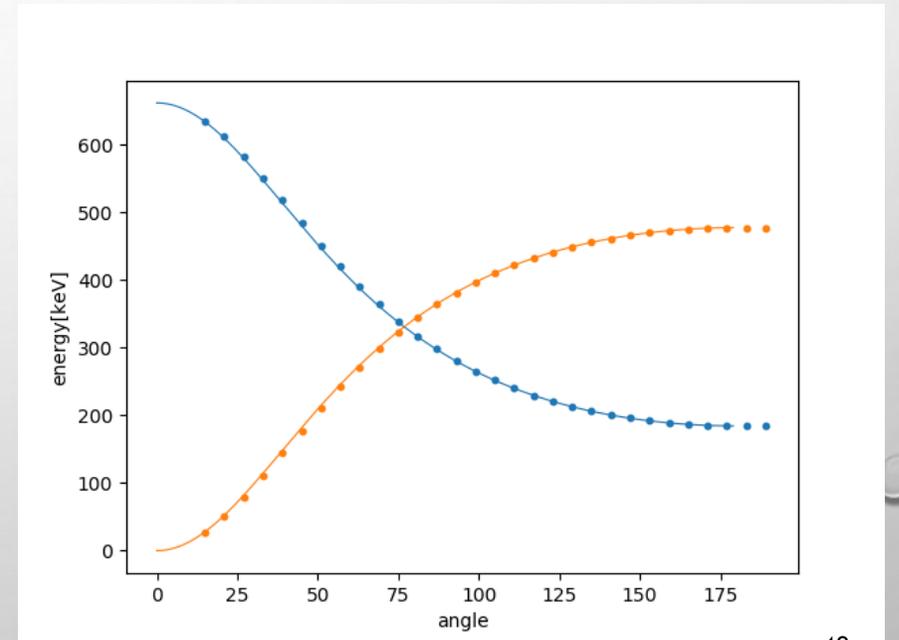
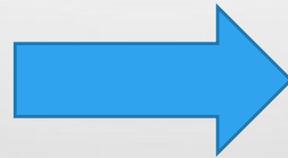
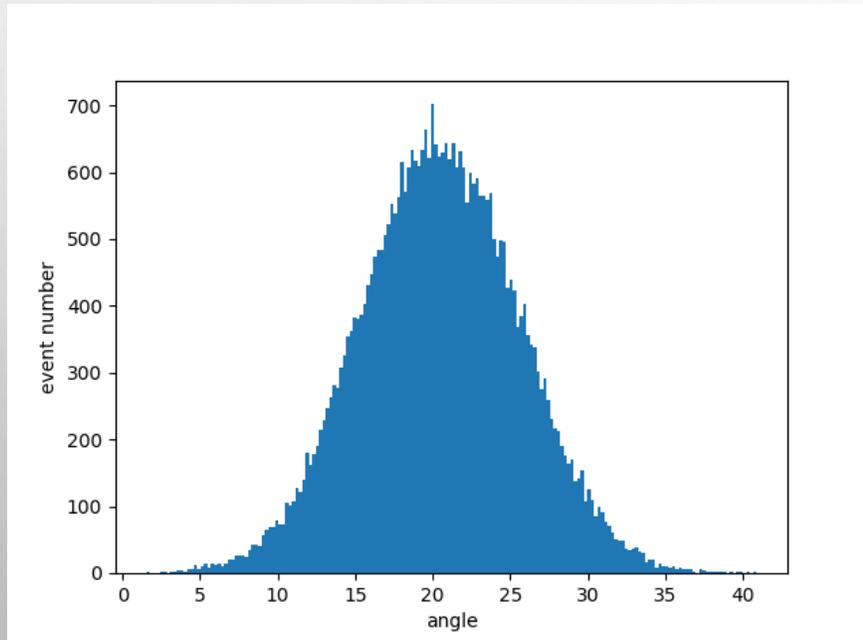
$$\sigma_\theta^2 \sim \alpha^2 + \beta^2 \cong \left(\frac{R_1 + R_2}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{R_3}{L_2}\right)^2, L_1 = 10\text{cm}, L_2 = 20\text{cm}$$

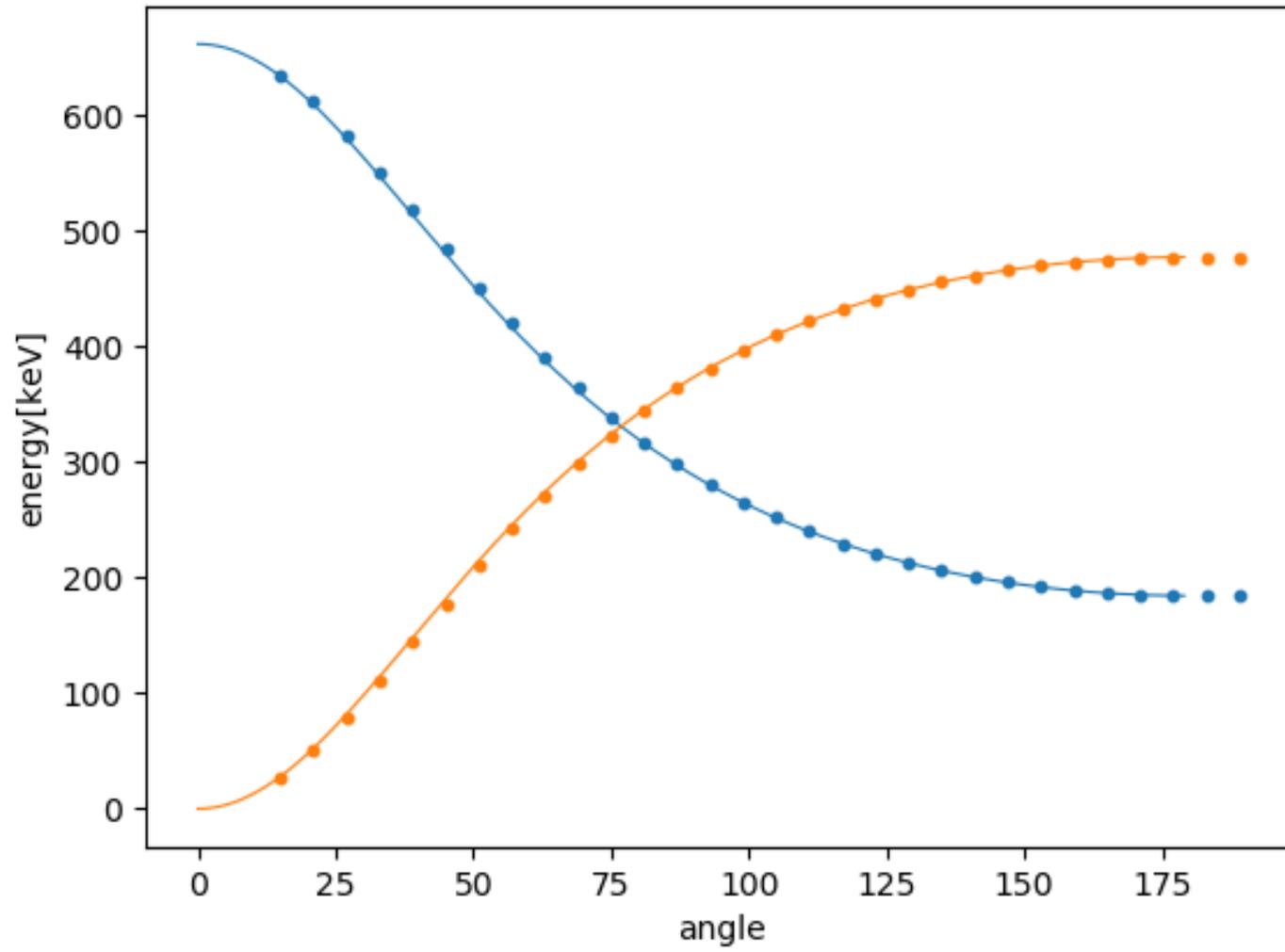
ガウス分布でサンプリングする

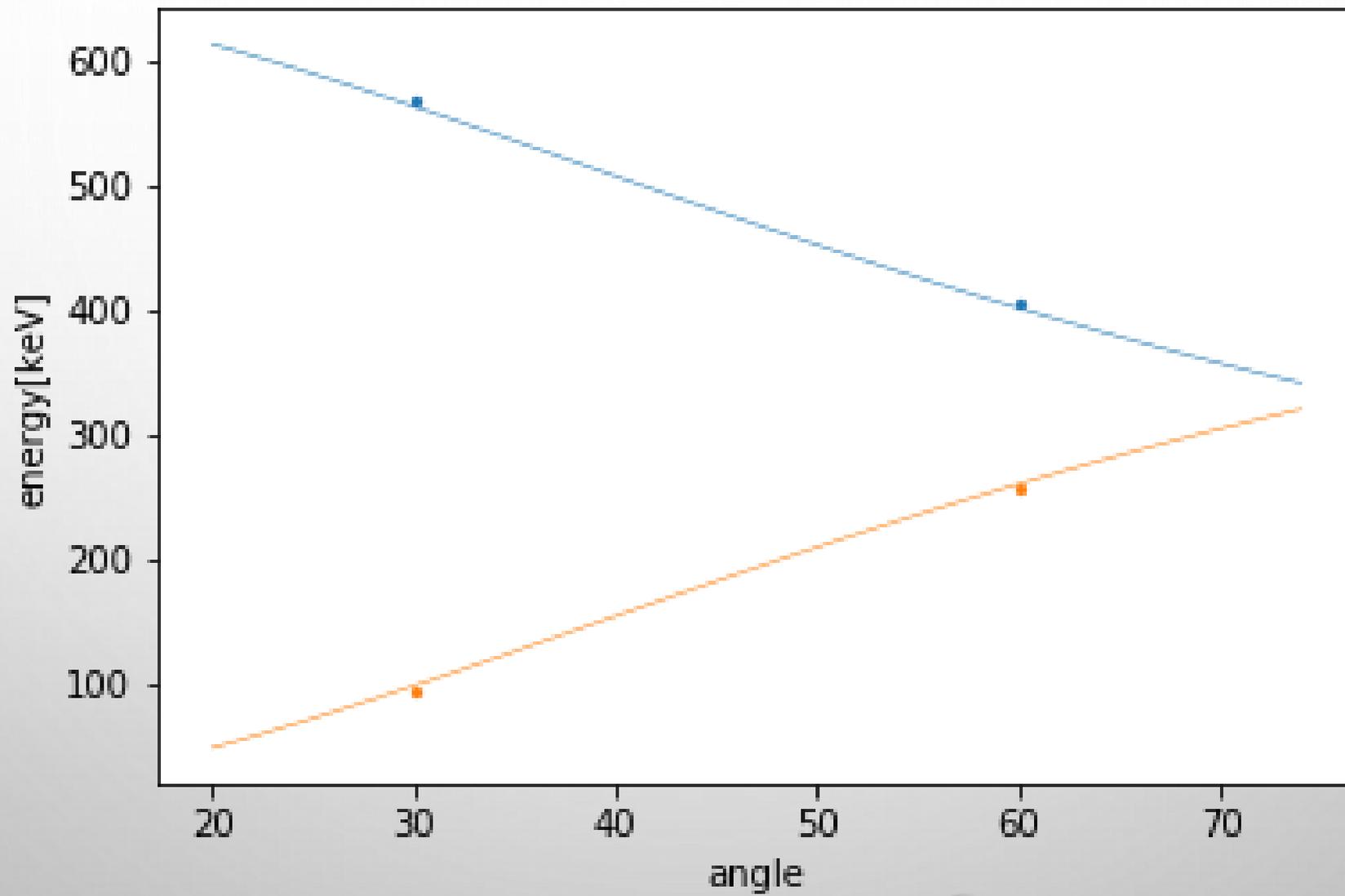


シミュレーション

作ったデータのヒストグラムをガウシアンフィッティングしピーク的位置を求める



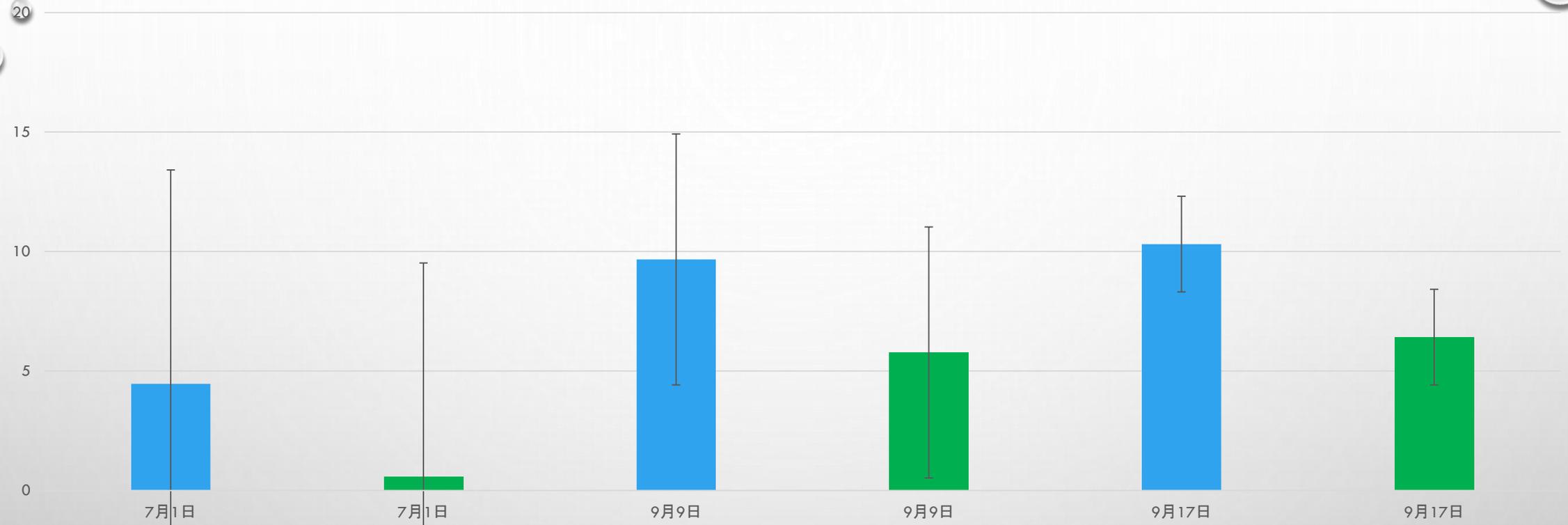




シミュレーション結果

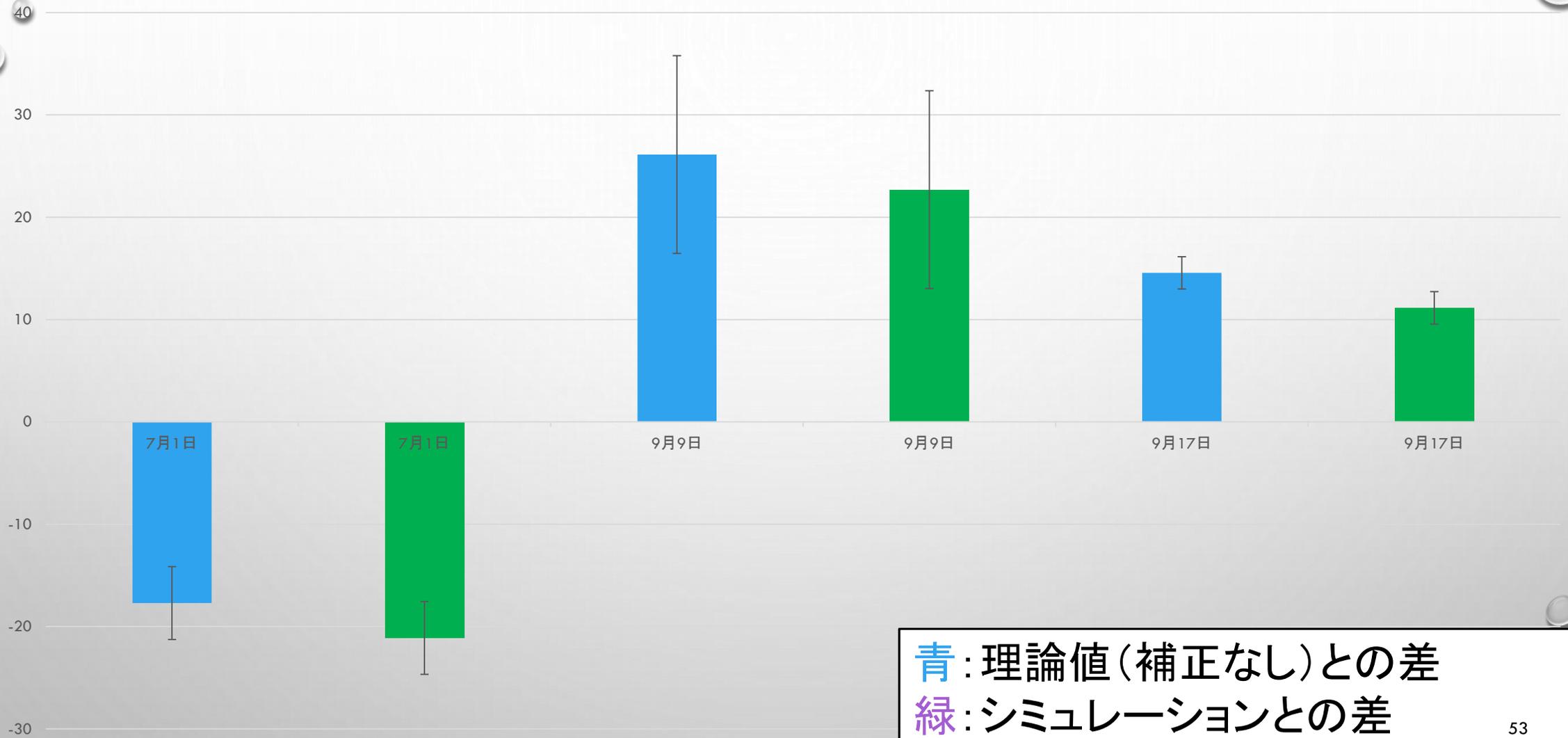
光電子増倍管 角度	理論値[keV]	シミュレーション結 果[keV]	7/1実験値[keV]	9/9実験値[keV]	9/17実験値[keV]
光電子増倍管1 30度	564.09	567.98	568.56 ± 8.94 4.47 ± 8.94 0.58 ± 8.94	573.76 ± 5.25 9.67 ± 5.25 5.78 ± 5.25	574.40 ± 2.00 10.31 ± 2.00 11.14 ± 2.00
光電子増倍管1 60度	401.76	405.18	384.06 ± 3.56 -17.7 ± 3.56 -21.12 ± 3.56	427.88 ± 9.66 26.12 ± 9.66 22.7 ± 9.66	416.32 ± 1.58 14.56 ± 1.58 11.14 ± 1.58
光電子増倍管2 30度	97.90	94.02	68.62 ± 4.25 -29.28 ± 4.25 -25.4 ± 4.25	75.26 ± 3.56 -22.64 ± 3.56 -18.76 ± 3.56	84.70 ± 1.02 -13.2 ± 1.02 -9.32 ± 1.02
光電子増倍管2 60度	260.23	256.82	270.87 ± 3.70 10.64 ± 3.70 14.05 ± 3.70	265.87 ± 5.24 5.67 ± 5.24 9.05 ± 5.24	243.49 ± 1.32 -16.74 ± 1.32 -13.33 ± 1.32

光電子増倍管1 30度



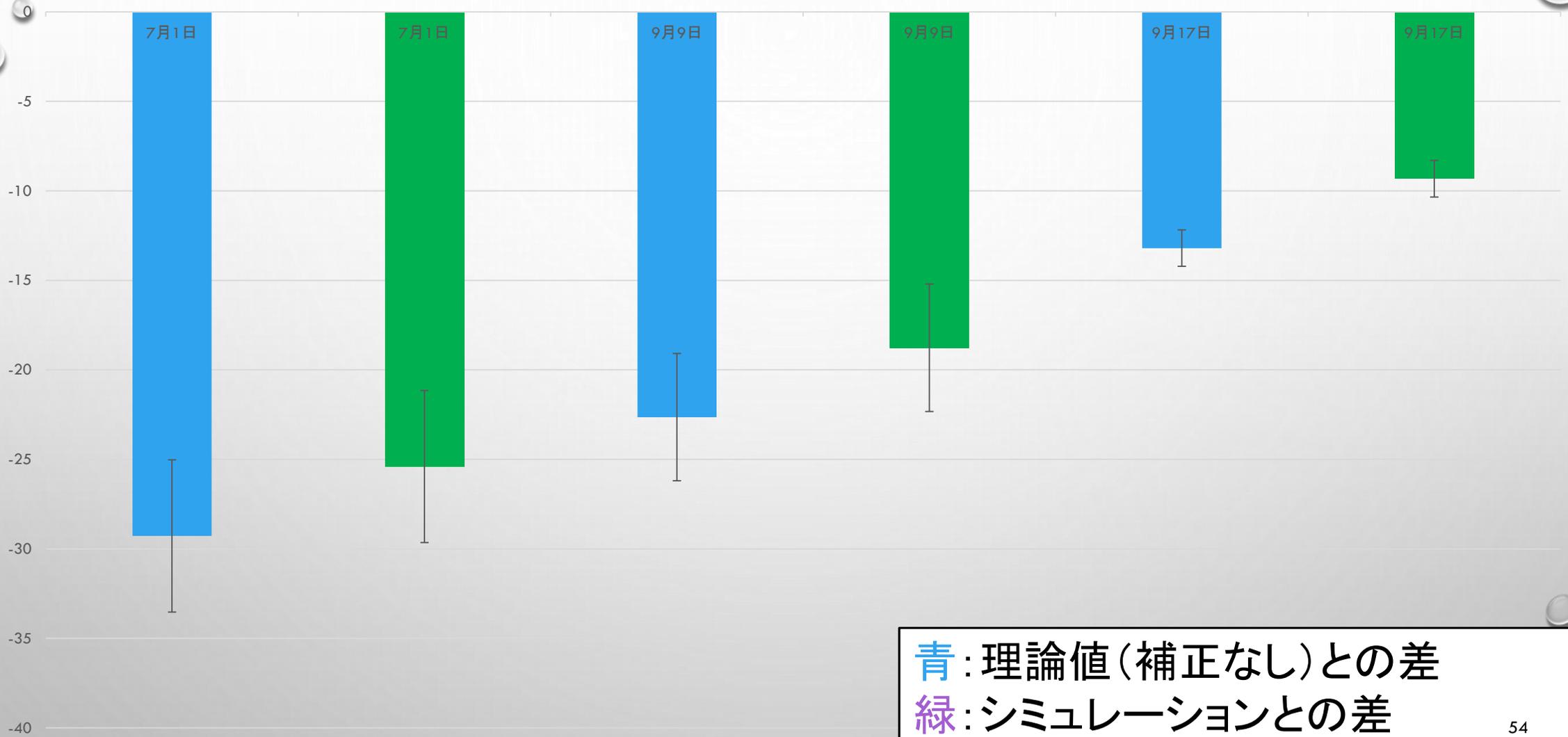
青 : 理論値(補正なし)との差
緑 : シミュレーションとの差

光電子増倍管1 60度



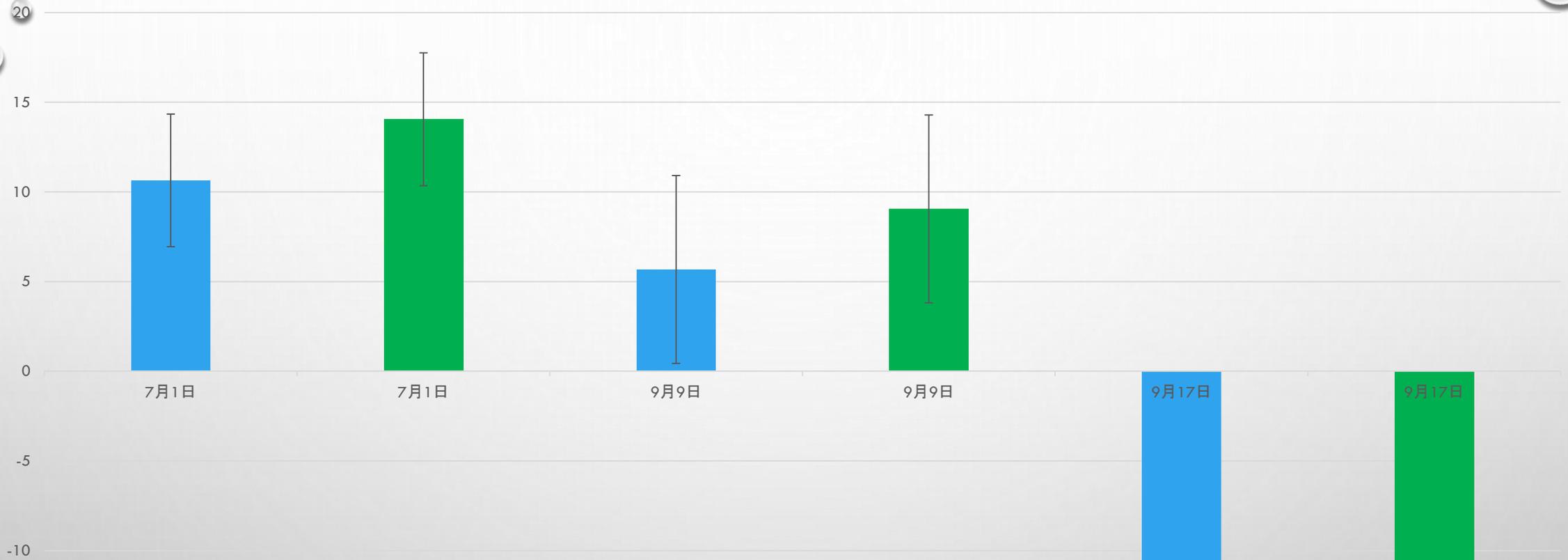
青 : 理論値 (補正なし) との差
緑 : シミュレーションとの差

光電子増倍管2 30度



青 : 理論値 (補正なし) との差
緑 : シミュレーションとの差

光電子増倍管2 60度



青: 理論値(補正なし)との差

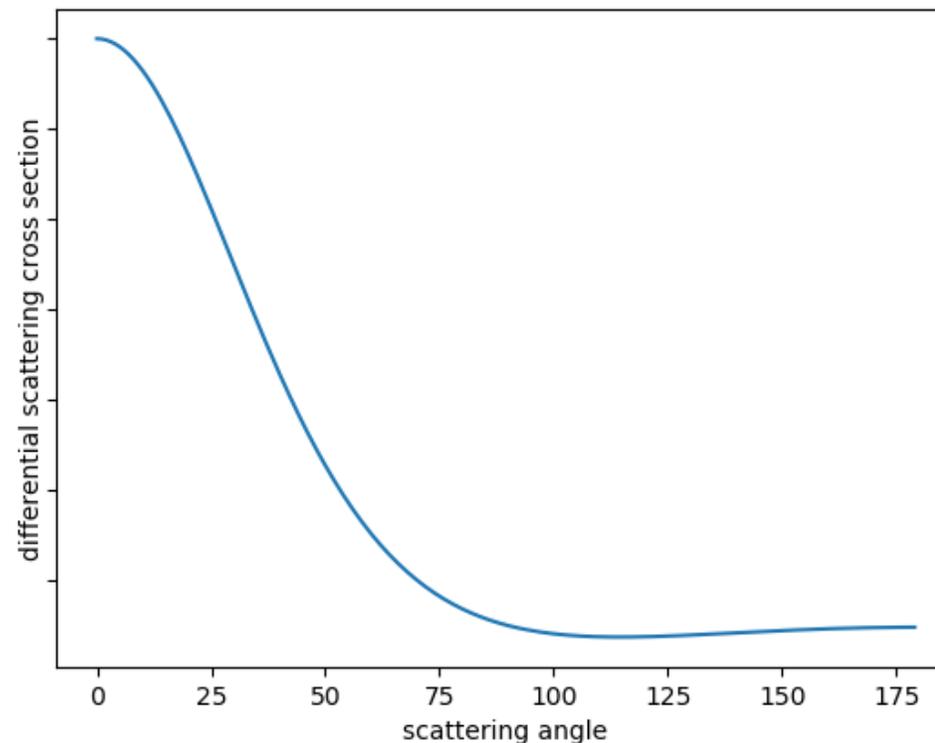
緑: シミュレーションとの差

KLEIN-NISHINAの公式の検証

Klein-Nishinaの公式 ➡

散乱角ごとの微分散乱断面積の
相対値を調べる
(絶対値の評価は難しいため)

定数倍のパラメータはrootのフイッ
ティング機能で求める

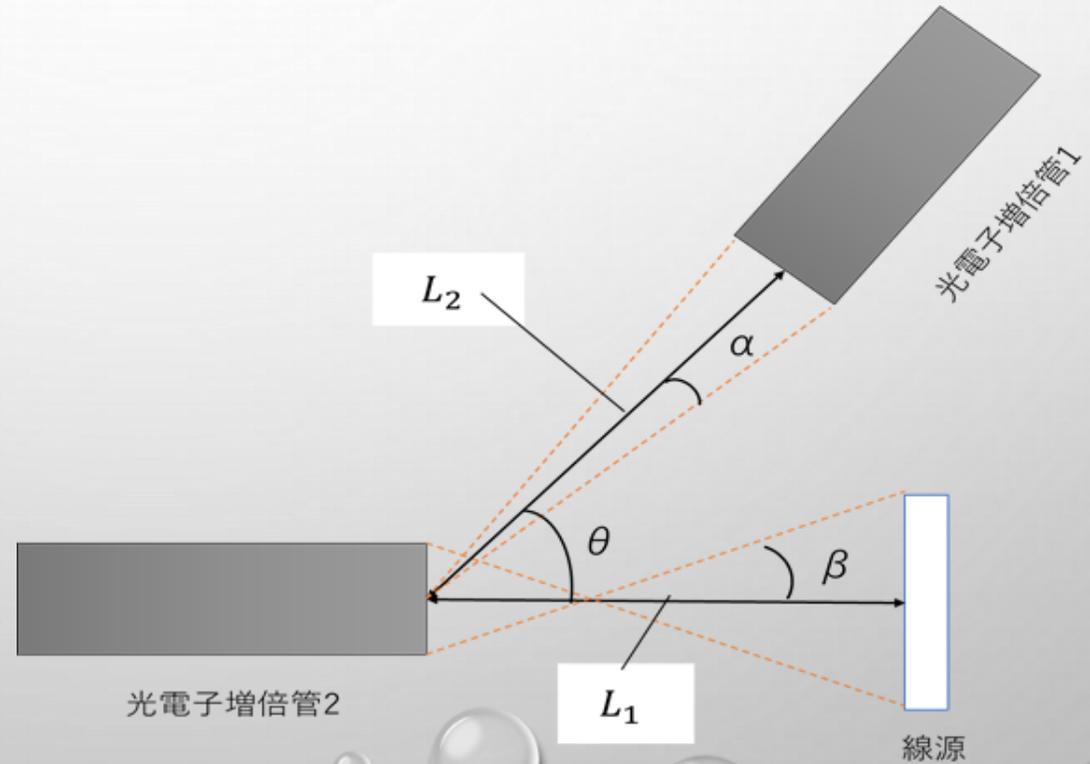


解析方法

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{const} * \text{Event Number} * \frac{1}{T} * L_1^2 * L_2^2$$



測定時間: T



EVENT NUMBER の求め方

ピークをガウシアンフィッティングをして
 A, σ を出す

$$A \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

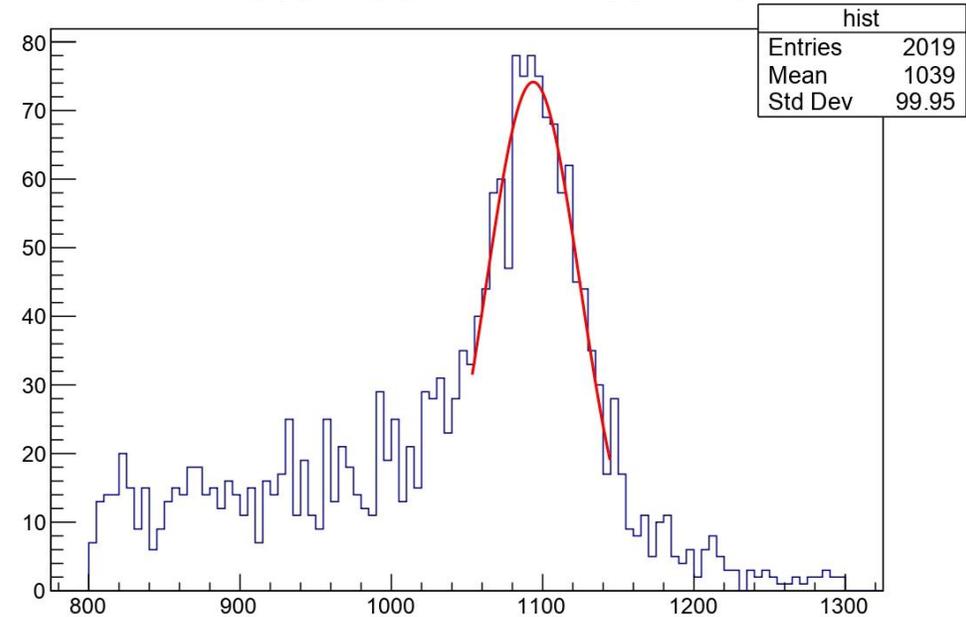
このとき、Event Number N は

$$N = A\sigma\sqrt{2\pi}$$

また誤差評価について

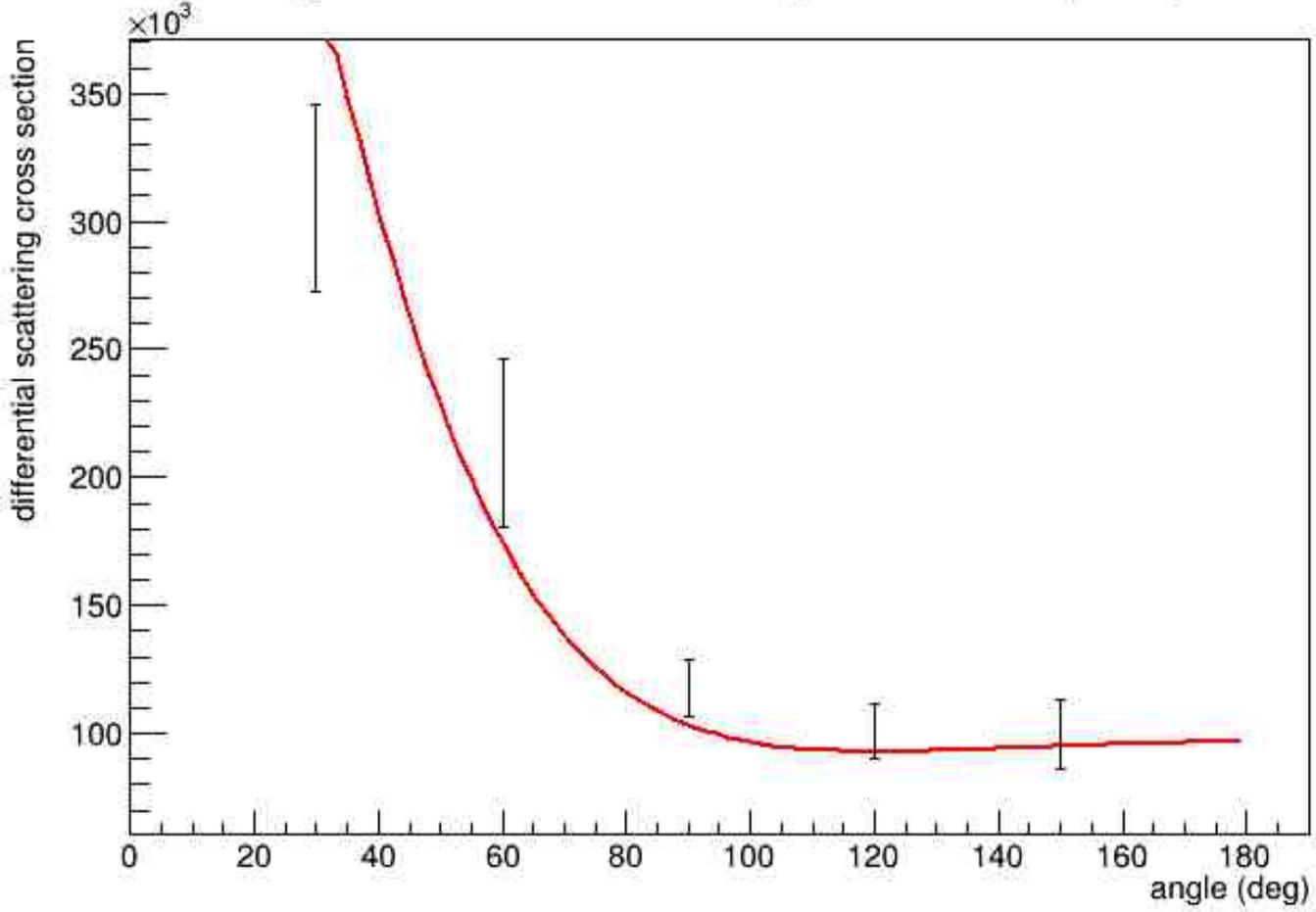
$$\sigma_N^2 = 2\pi(A^2\sigma^2 + \sigma^2\sigma_A^2)$$

data[0] {data[0]>800 && data[0]<1300}



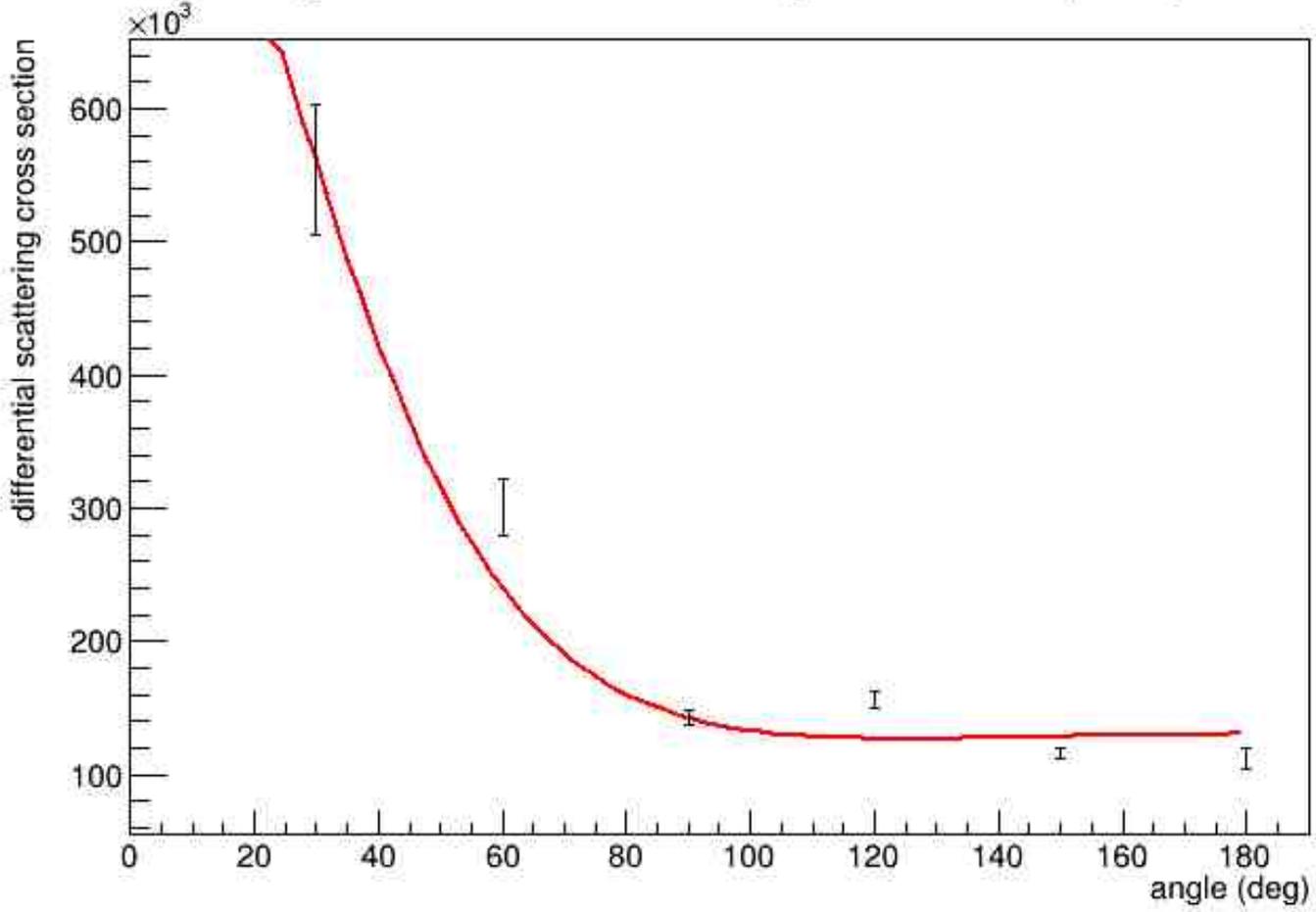
KLEIN-
NISHINA結
果(7/1)

angle vs differential scattering cross section(0701)



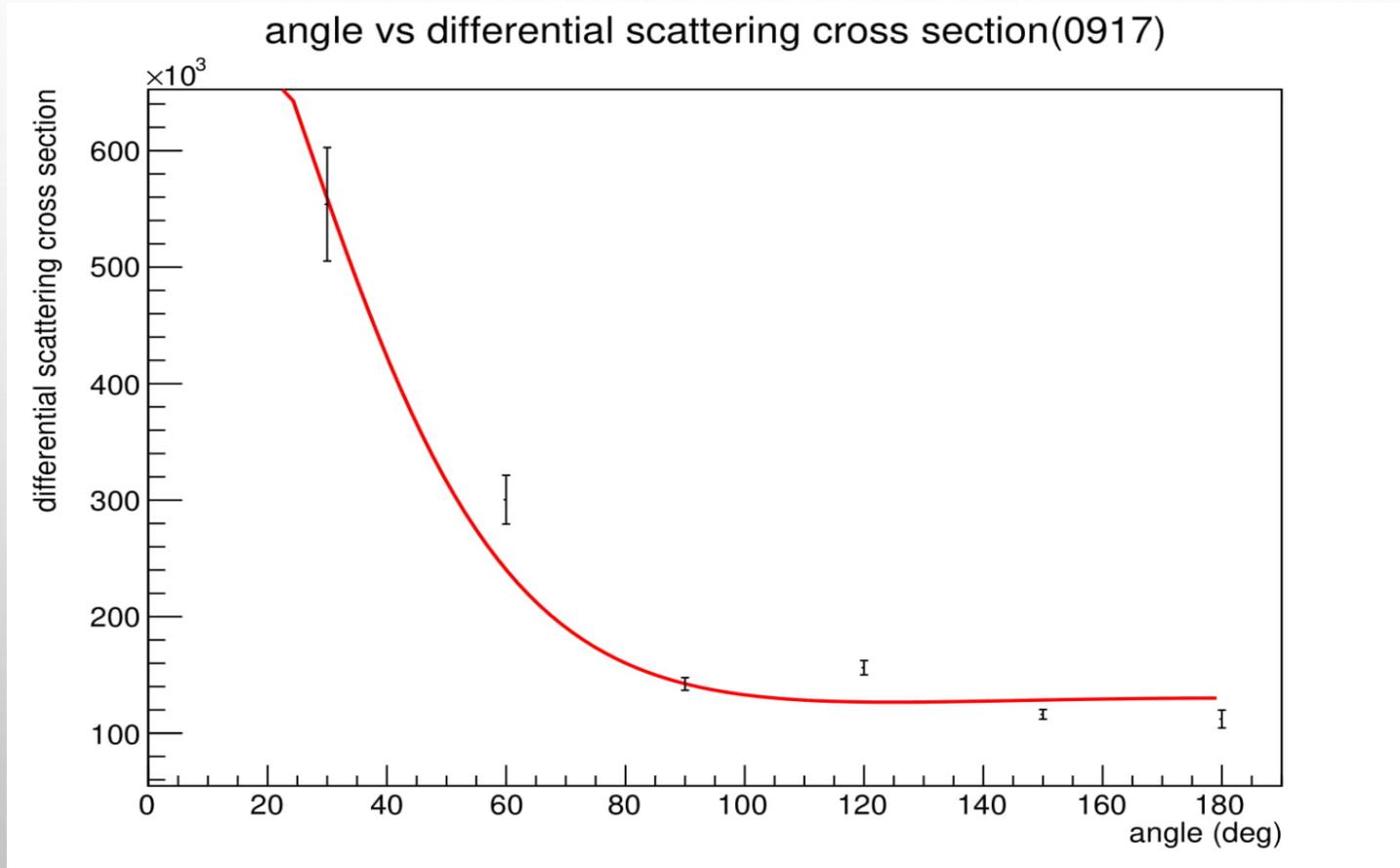
KLEIN-
NISHINA結
果(9/17)

angle vs differential scattering cross section(0917)



分析・考察

KLEIN-NISHINAの公式と実験結果の比較



Klein-Nishinaの公式は実験値とよく合っていることがわかる

THOMSONの公式には従うか

THOMSONの公式・・・

電磁波と電子の散乱 (THOMSON散乱) の断面積に対する公式

古典電磁気学の公式

KLEIN-NISHINAの公式・・・

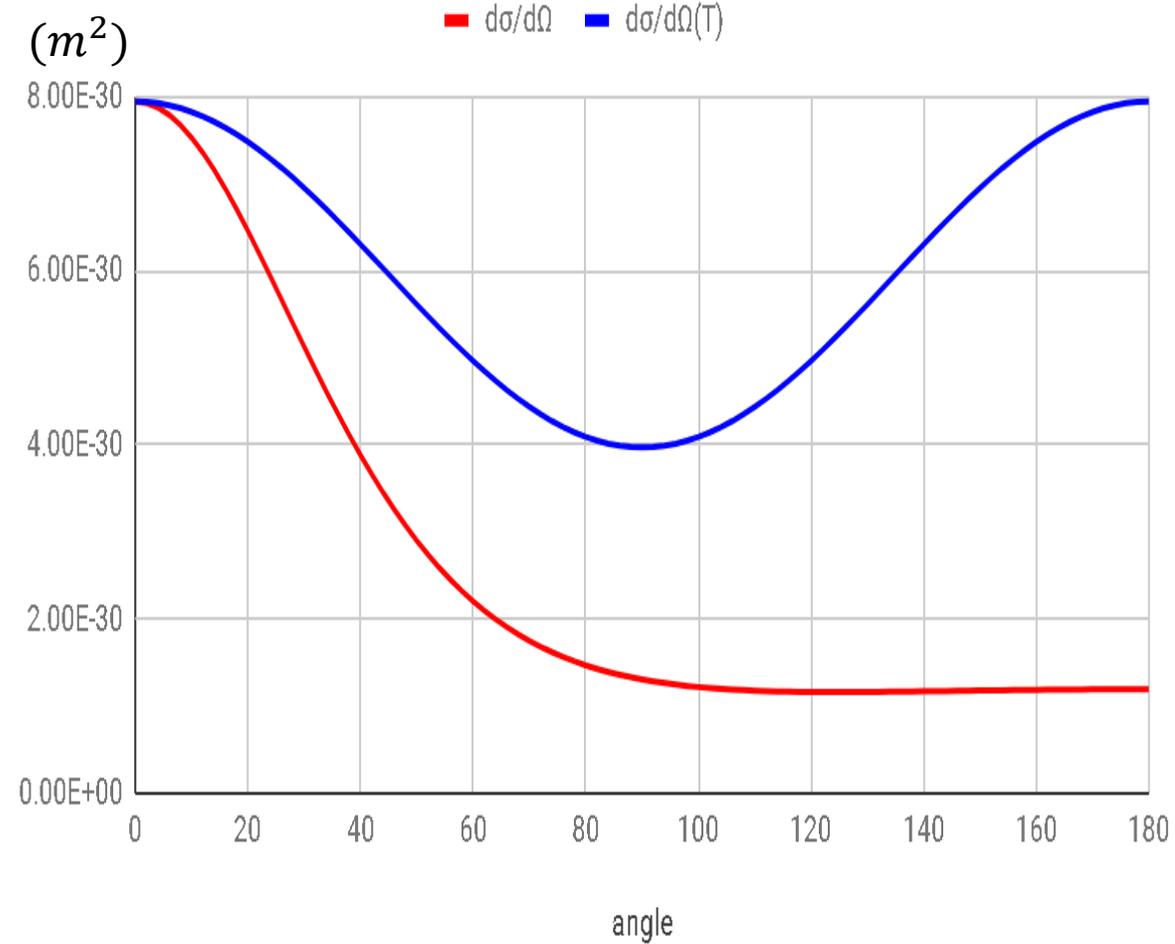
光子と電子の散乱 (COMPTON散乱) の断面積に関する公式

THOMSONの公式とKLEIN-NISHINAの公式の違い

	Thomsonの公式	Klein-Nishinaの公式
想定されている入射エネルギー	低エネルギー	高エネルギーでも可
電子が動くか	静止している(と近似)	動く
散乱後の光子の振動数	変わらない	変わる
具体的表式	$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_e^2}{2} (1 + \cos^2\theta)$	$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_e^2}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \sin^2\theta\right)$

グラフで見る違い

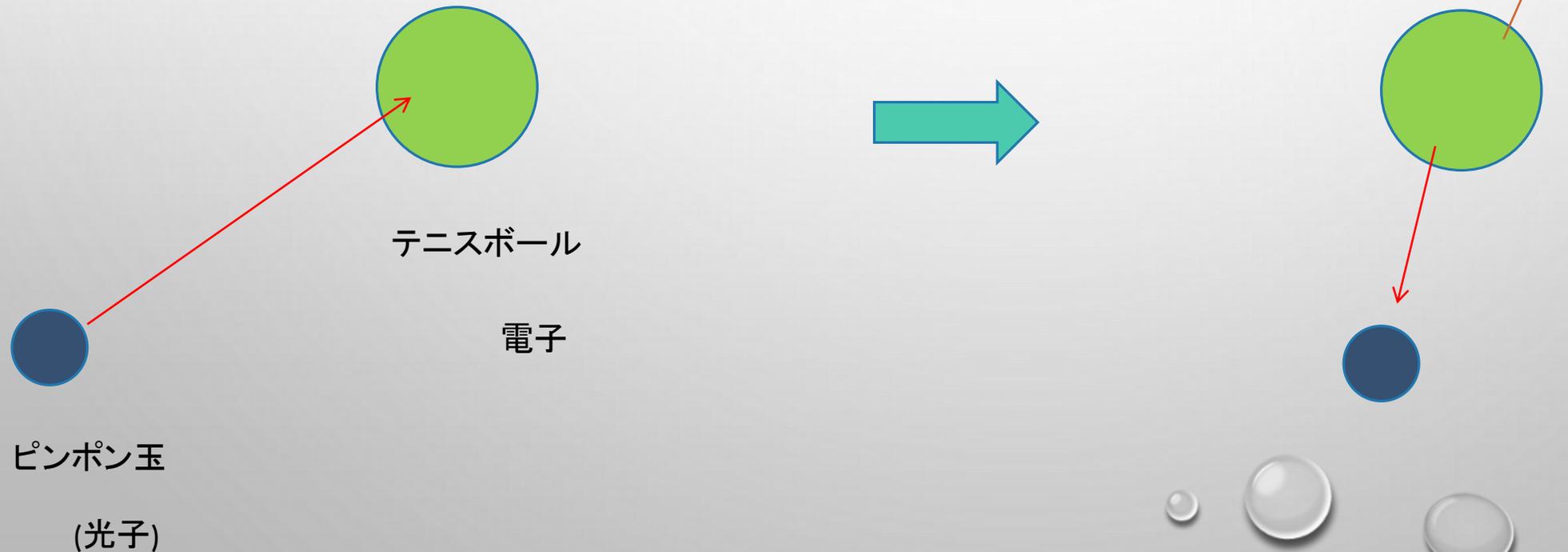
$d\sigma/d\Omega(\theta)$ (Compton)と $d\sigma/d\Omega(\theta)$ (Thomson)



KLEIN-NISHINAの公式の直観的考察

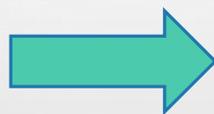
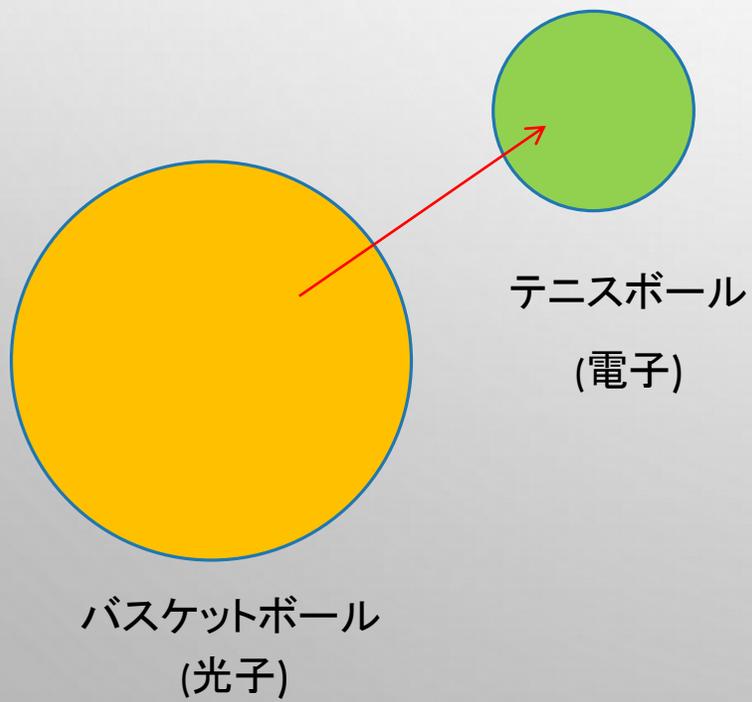
THOMSONの公式での状況

$h\nu \ll mc^2$ のとき

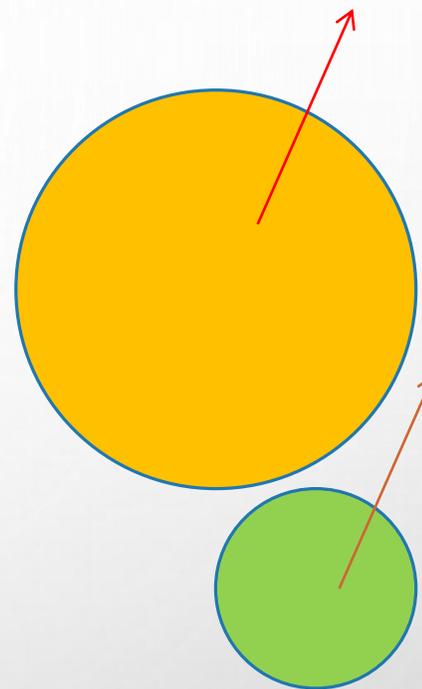


入射光子のエネルギーが大きい場合

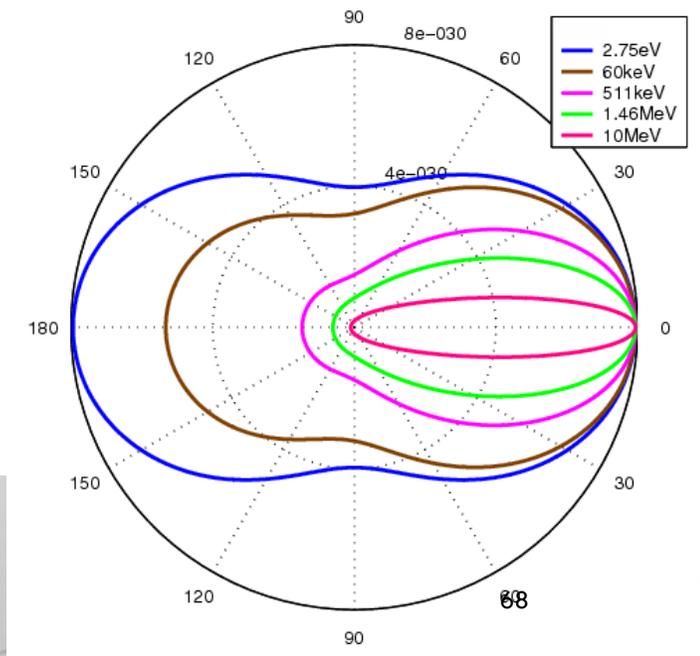
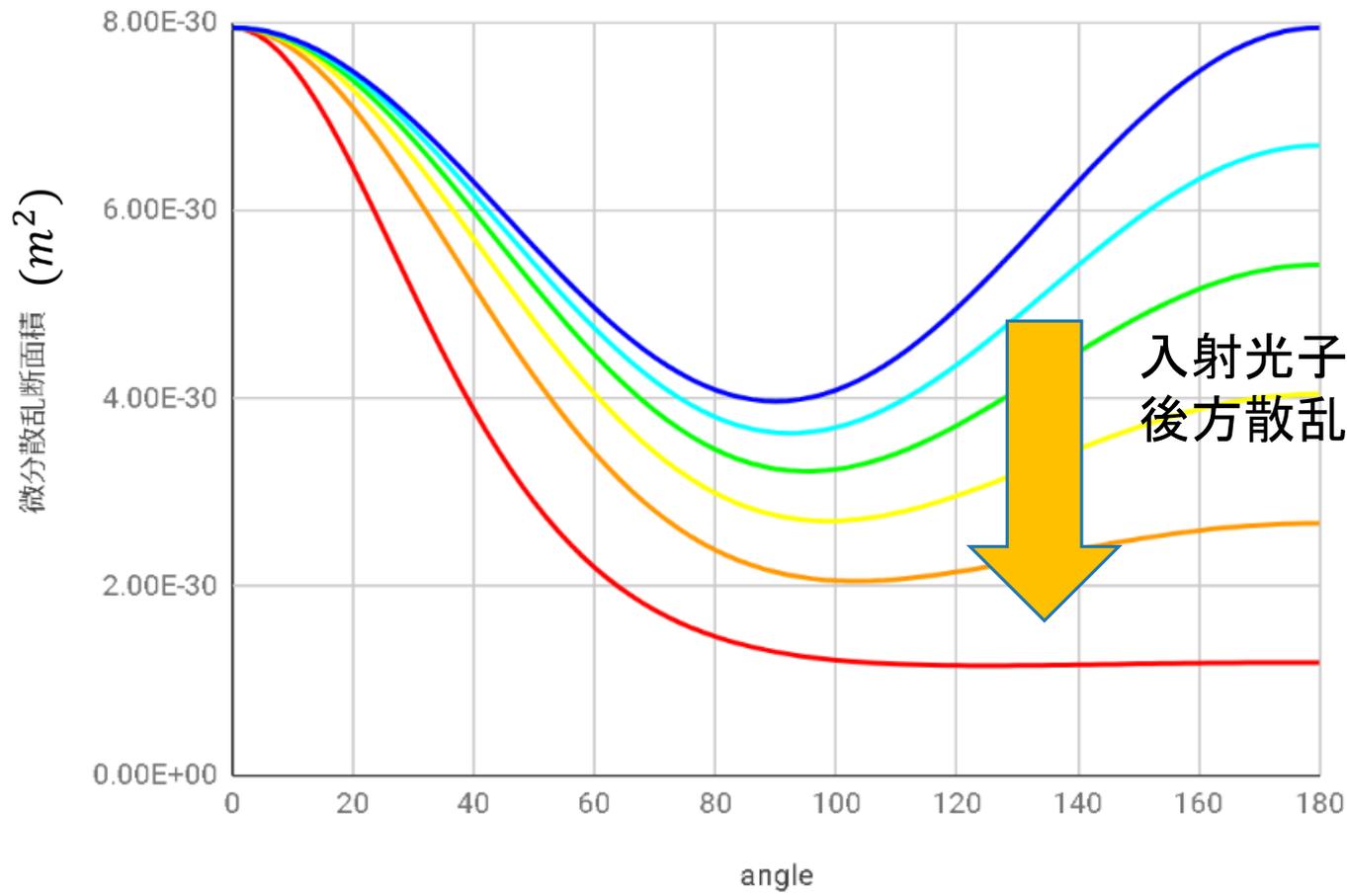
入射光子のエネルギーが大きいと電子が押されて光子が後方散乱しにくくなる



押し流して
しまう

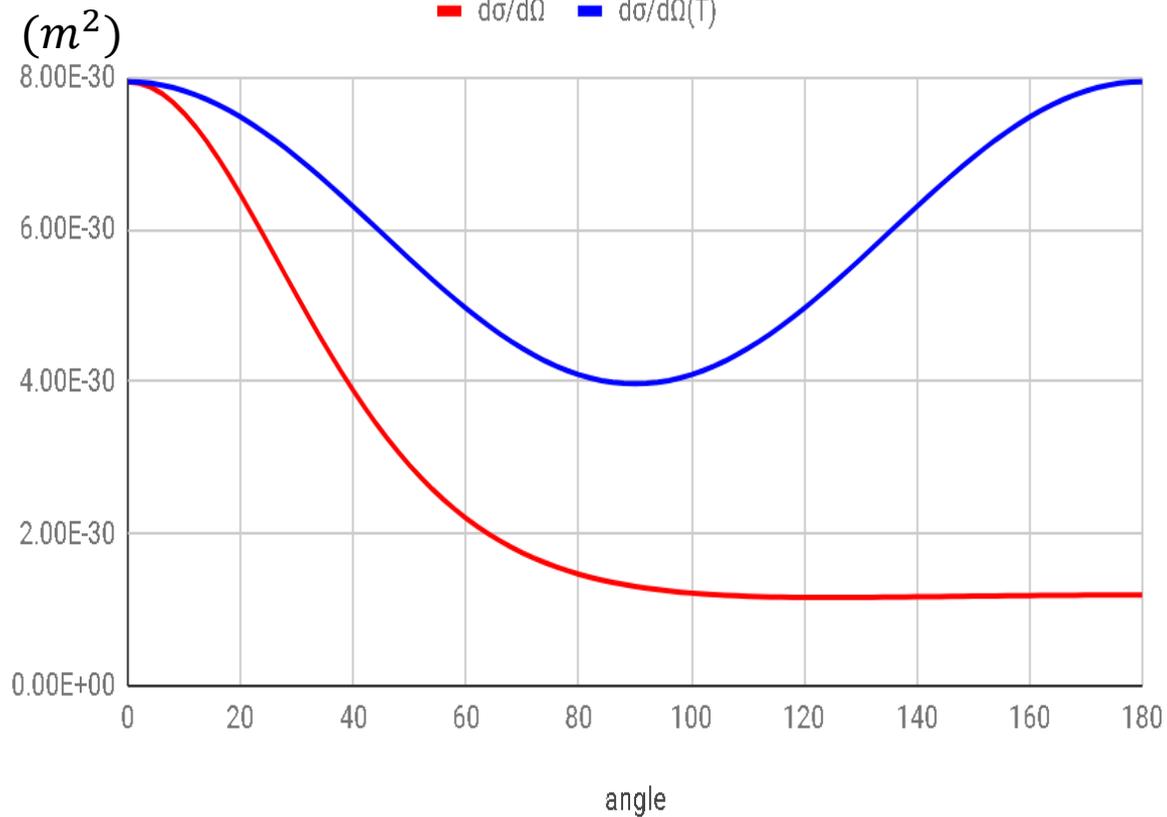


$d\sigma/d\Omega(\theta)$ (Compton)と $d\sigma/d\Omega(\theta)$ (Thomson)

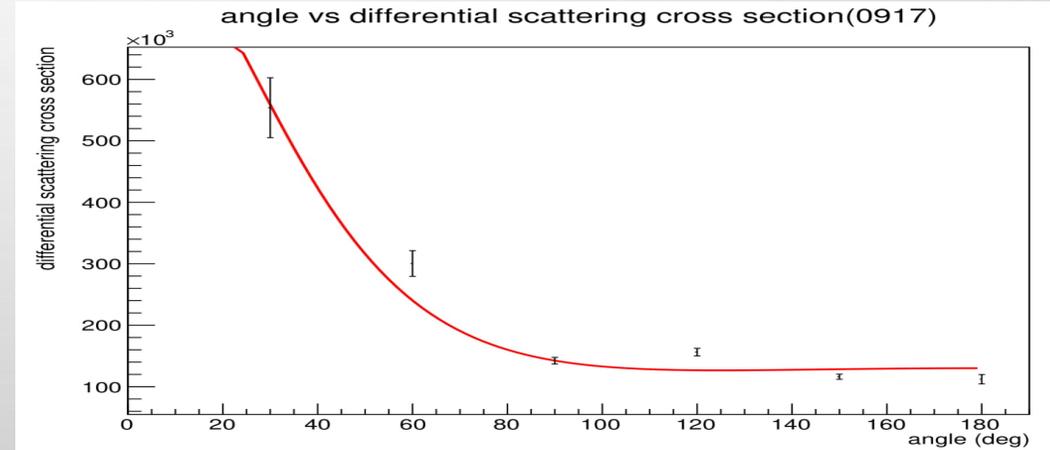


両公式と実験データとの比較

$d\sigma/d\Omega(\theta)$ (Compton)と $d\sigma/d\Omega(\theta)$ (Thomson)



実験データ



なぜTHOMSONの公式では合わないのか

入射光子のエネルギーが比較的大きいため

定量的に書くと、THOMSONの公式が成立するための条件

$h\nu \ll mc^2$ (Nは光子の振動数、Mは電子の質量) が**不成立**

$h\nu = 662\text{KEV}$, $mc^2 = 511\text{KEV}$

高エネルギーでは光(γ線)はほとんど粒子としてのふるまいを示す。

光を波ではなくて光子という粒々の粒子的描像でみるという視点が古典電磁気学には欠けていた(電磁場の量子化)⁷⁰

微分散乱断面積の絶対量についての考察

そもそも

- KLEIN-NISHINAの公式は、
「1つの電子に1つの光子を当てた状況」を考えている。
- しかし実験では
「多数の電子に1つの光子を当てた状況」になっている。
→実測値と理論値にずれがあるのはあたりまえ。

対象電子が大量にあることの影響

- $LaBr_3$ の基本データは
 - 自由電子: 最外殻電子の和24個に等しいと仮定
 - 密度: $5.06\text{g}/\text{cm}^3$
 - 分子量: $377\text{g}/\text{mol}$
 - アボガドロ定数: $6.0 \times 10^{23}/\text{mol}$
 - 自由電子数密度は $1.93 \times 10^{23}/\text{cm}^3$

対象電子が大量にあることの影響

- これにより、散乱断面積が増加する。
- 乱暴ではあるが、純粹に粒子の数に比例すると仮定
→約 10^{23} 倍程度の差が生まれてもおかしくはない。

しかし、

- ・散乱断面積の理論値と実験値にはさらに大きな値の差がある。

試算値 (30°) $(1.93 \times 10^{-31}) \times (1.69 \times 10^{23}) [m^2]$

実験値 (30°) $6.18 \times 10^{-3} [m^2]$

→まだ約 10^5 倍もの差が残っている

文献値との比較

- 全COMPTON散乱断面積を文献値と比較してみる。
- 今回の実験値は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_{scat}}{J_{in}} r^2$$

に従って微分散乱断面積を出し、

反跳角	散乱断面積[m ²]
30°	6.18 × 10 ⁻³
60°	3.71 × 10 ⁻³
90°	1.68 × 10 ⁻³
120°	1.37 × 10 ⁻³
150°	1.85 × 10 ⁻³

- KLEIN-NISHINAの公式を用いて多数電子の影響があるので、形式的に古典的電子半径をだし、

$$r_e = 14.8 \text{cm}$$

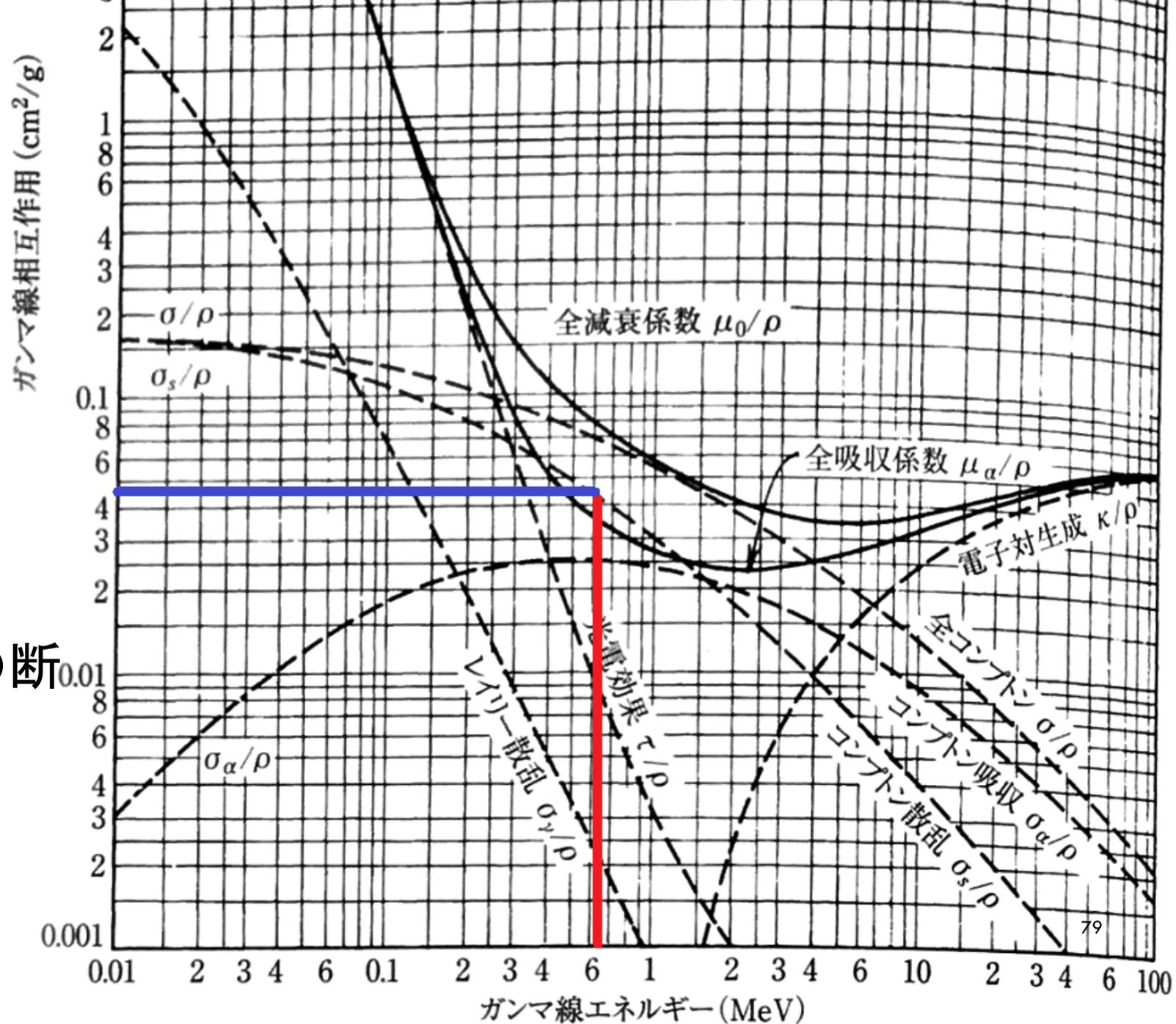
- それを用いて全COMPTON散乱断面積を出すと、

$$\sigma_c = 1.38 \times 10^3 \text{cm}^2$$

文献値との比較

- ・ 理論値は放射線計測ハンドブック P.52のNAIのCOMPTON散乱断面積の値で代用して評価してみる。
 - ・ 実際に使用したのは $LaBr_3$ だが、微分散乱断面積は原子番号に比例するため、大きな差にはならない。

- NAIのコンプトン散乱の断面積は約 $0.06\text{cm}^2/\text{g}$



- ・ こちらの場合にも値に非常に大きな差があり、大量のシンチレーターが入っていることになってしまう。
→何か別の要因が考えられる。

まとめ

- エネルギーと角度分布の関係、およびエネルギー保存については多少のずれはみられたが、角度分布を考えることで説明することができた。
- KLEIN-NISHINAの式の成立は確かめられたが、絶対量についての評価はうまくいかなかった。