

課題演習A1

Compton散乱

塚本大智，神村真志，長房俊之介，
木村直博，中村恭平，當銘啓

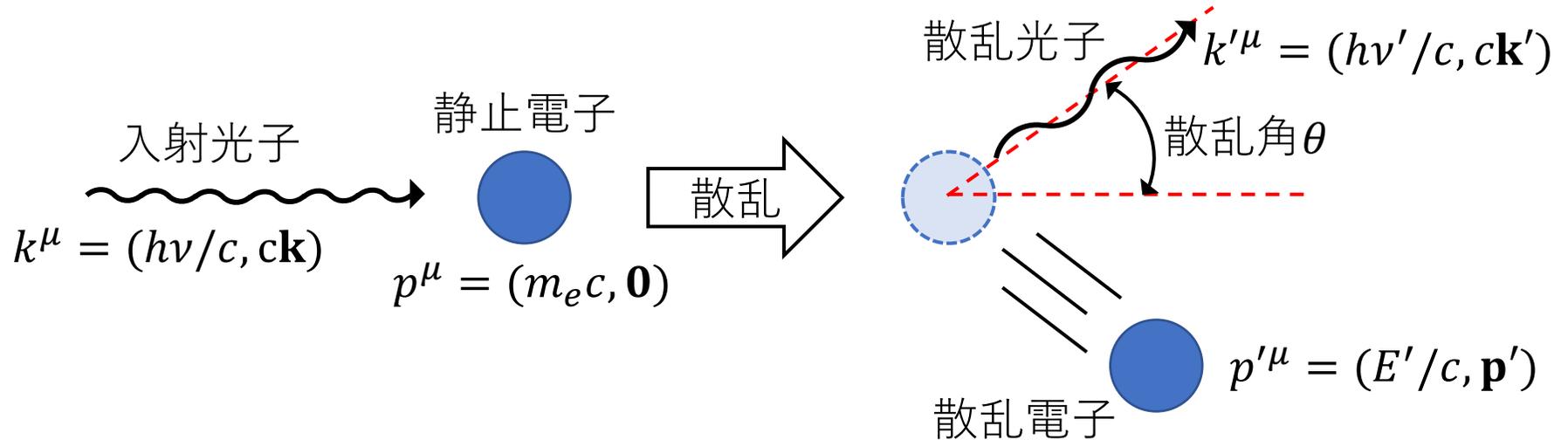
1. 実験背景（當銘）
2. 目的と実験概要（木村）
3. 実験方法（神村）
4. 解析方法（長房）
5. 実験結果（中村・木村）
6. 考察（塚本）
7. 結論（塚本）

1. 実験背景（當銘）
2. 目的と実験概要（木村）
3. 実験方法（神村）
4. 解析方法（長房）
5. 実験結果（中村・木村）
6. 考察（塚本）
7. 結論（塚本）

1. 実験背景

コンプトン効果：光（ γ 線）を物体に照射すると、散乱光の波長が長くなる現象。
古典論の範疇では説明不可。

- 1923年：コンプトンがアインシュタインの光量子仮説を用いて解決。
- 1927年：Klein-仁科の公式（後述）が導出される。



相対論的なエネルギー・運動量保存より、以下が求まる。

$$\text{散乱光子のエネルギー} : h\nu' = h\nu / \left[1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos\theta) \right]$$

$$\text{散乱電子のエネルギー} : E' = m_e c^2 + h(\nu - \nu')$$

散乱現象では、どんな粒子がどの方向にどの程度散乱されるかも重要.
⇒ 『**散乱断面積**』 という量を知ればよい.

古典論：トムソン散乱

自由電子による光の散乱. 長波長の光で起き、散乱の前後で光の波長は変化しない.

入射光が無偏極の場合のトムソン散乱の微分散乱断面積：

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} &= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cdot \frac{h}{2\pi m_e c}\right)^2 \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \\ &= \left(\frac{\alpha'\lambda_e}{2\pi}\right)^2 \frac{1 + \cos^2\theta}{2}\end{aligned}$$

$\lambda_e = h/m_e c$: 電子のコンプトン波長

$\alpha' = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$: 微細構造定数

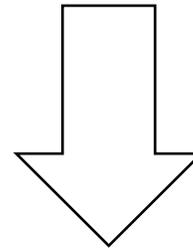
1. 実験背景

理論的にはQEDの摂動論から求まる（以下コンプトン散乱の例）。

(遷移の確率振幅)/ $ie^2 =$

$$\sum_{r,r',s,s'} \epsilon_{s,\mathbf{k}}^\mu \epsilon_{s',\mathbf{k}'}^\mu \bar{u}_{r,\mathbf{p}} \gamma_\mu \int dq i\tilde{S}_F(q) \gamma_\nu u_{r',\mathbf{p}'} \int dx_1 dx_2 c_{r_f,\mathbf{p}_f} a_{s_f,\mathbf{k}_f} c_{r,\mathbf{p}}^\dagger a_{s,\mathbf{k}}^\dagger a_{s',\mathbf{k}'} c_{r',\mathbf{p}'}^\dagger a_{s_i,\mathbf{k}_i}^\dagger c_{r_i,\mathbf{p}_i}^\dagger e^{-ix_1(p'+k'+q)+ix_2(p+k+q)}$$

$$\frac{\mathcal{M}}{ie^2} = -\epsilon_{s_f,\mathbf{k}_f}^\mu \epsilon_{s_i,\mathbf{k}_i}^\nu \bar{u}_{r_f,\mathbf{p}_f} \gamma_\mu i\tilde{S}_F(p_i + k_i) \gamma_\nu u_{r_i,\mathbf{p}_i} + \epsilon_{s_f,\mathbf{k}_f}^\nu \epsilon_{s_i,\mathbf{k}_i}^\mu \bar{u}_{r_f,\mathbf{p}_f} \gamma_\mu i\tilde{S}_F(p_i - k_f) \gamma_\nu u_{r_i,\mathbf{p}_i} \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + k_i - p_f - k_f)$$



- フラックスの導入
- デルタ関数の部分的な積分
- エネルギーの関係式 Etc. ...

実験室系の微分散乱断面積：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{v'}{v}\right)^2 |\mathcal{M}|^2$$

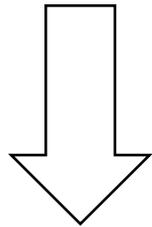
1. 実験背景

入射光とターゲット電子のスピンの無偏極の場合のコンプトン散乱の断面積

Klein-仁科の公式 (実験室系)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \left(\frac{\alpha'}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_e^2}{2} \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 \left[\frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} - \sin^2 \theta\right]$$

$\lambda_e = h/m_e c$: 電子のコンプトン波長
 $\alpha' = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c$: 微細構造定数



$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos\theta)}, \quad r_0 = \frac{\alpha' \lambda_e}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{h\nu}{m_e c^2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = r_0^2 \left[\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}\right]^2 \left[\frac{1 + \cos^2\theta}{2}\right] \left[1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \alpha(1 - \cos\theta)]}\right]$$

c.f. トムソン散乱 : $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \left(\frac{\alpha' \lambda_e}{2\pi}\right)^2 \frac{1 + \cos^2\theta}{2} = r_0^2 \frac{1 + \cos^2\theta}{2}$ (長波長極限 $\nu \rightarrow 0$)

1. 実験背景（當銘）
2. 目的と実験概要（木村）
3. 実験方法（神村）
4. 解析方法（長房）
5. 実験結果（中村・木村）
6. 考察（塚本）
7. 結論（塚本）

目的

- ① 散乱角度を変えて散乱光子と反跳電子のエネルギーを測定し、コンプトン散乱の理論から導かれるエネルギーと散乱角の関係式の検証を行う。

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos \theta)} \quad E' = m_e c^2 + h(\nu - \nu')$$

- ② 各角度ごとのコンプトン散乱の反応頻度を測定し、Klein-仁科の公式の検証を行う。

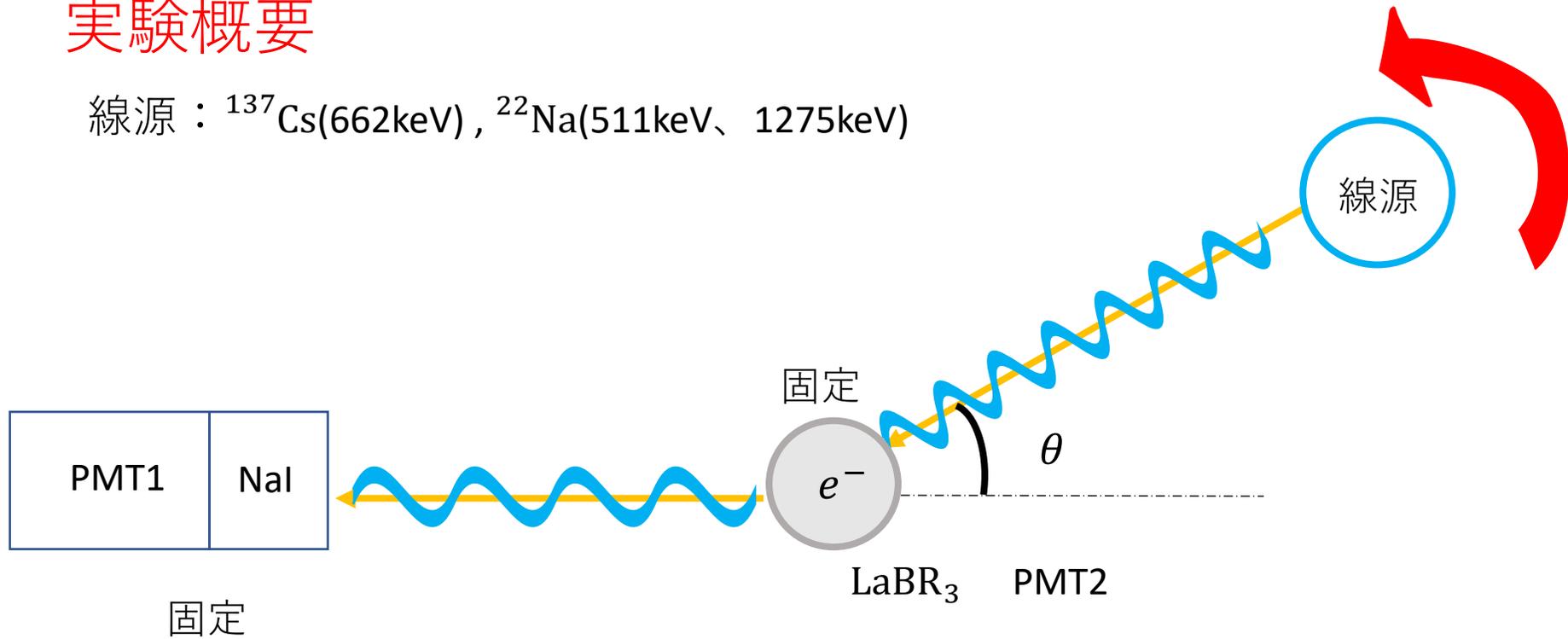
Klein-仁科の公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Zr_0^2 \left[\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \right]^2 \left[\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right] \left[1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]} \right]$$

$$Z : \text{原子番号、} r_0 : \text{電子半径} \quad \alpha = \frac{h\nu}{m_e c^2}$$

実験概要

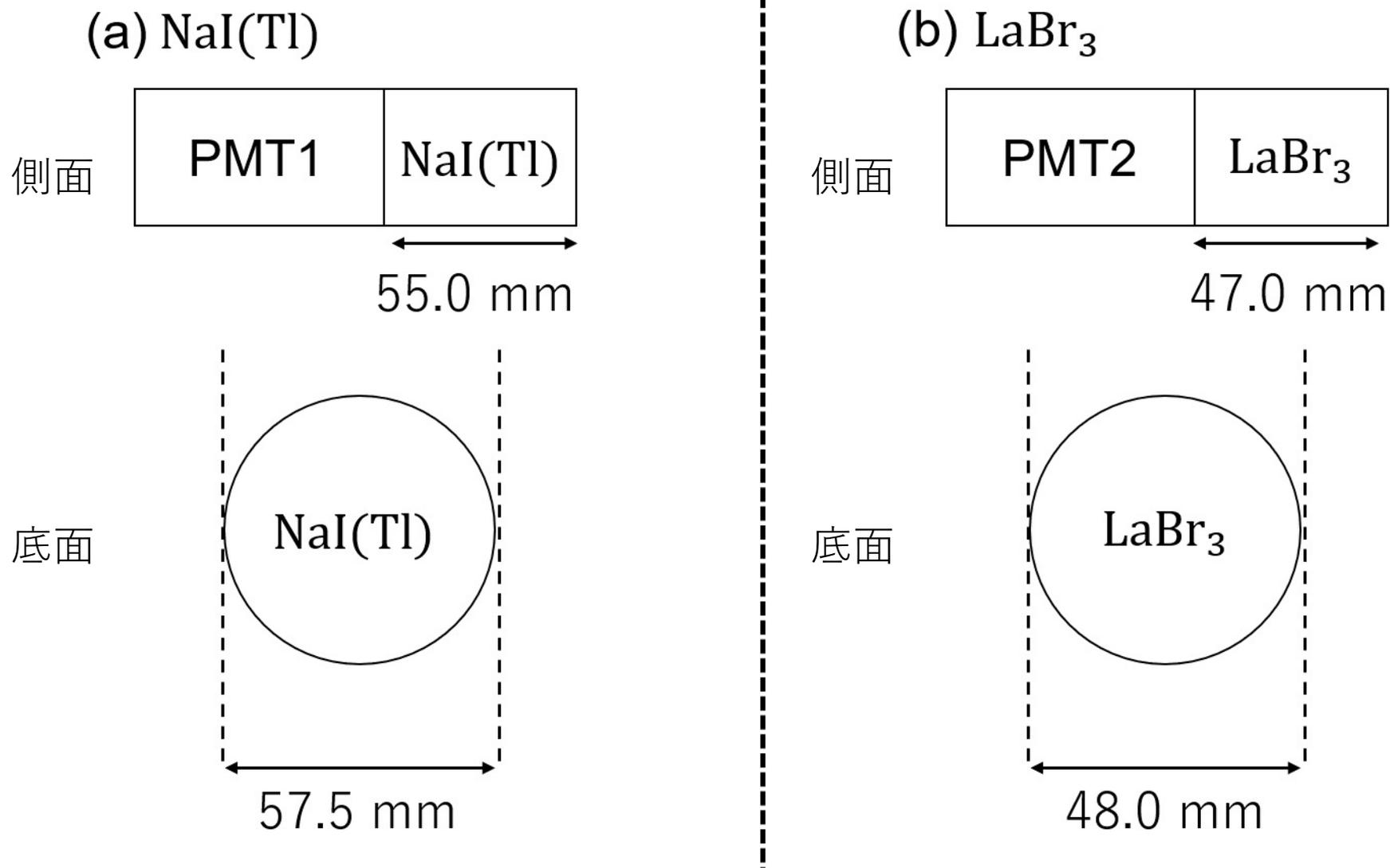
線源： ^{137}Cs (662keV), ^{22}Na (511keV、1275keV)



線源を置く角度を変えることで、散乱ガンマ線と散乱電子のエネルギーやコンプトン散乱の反応頻度の角度依存性を測定。

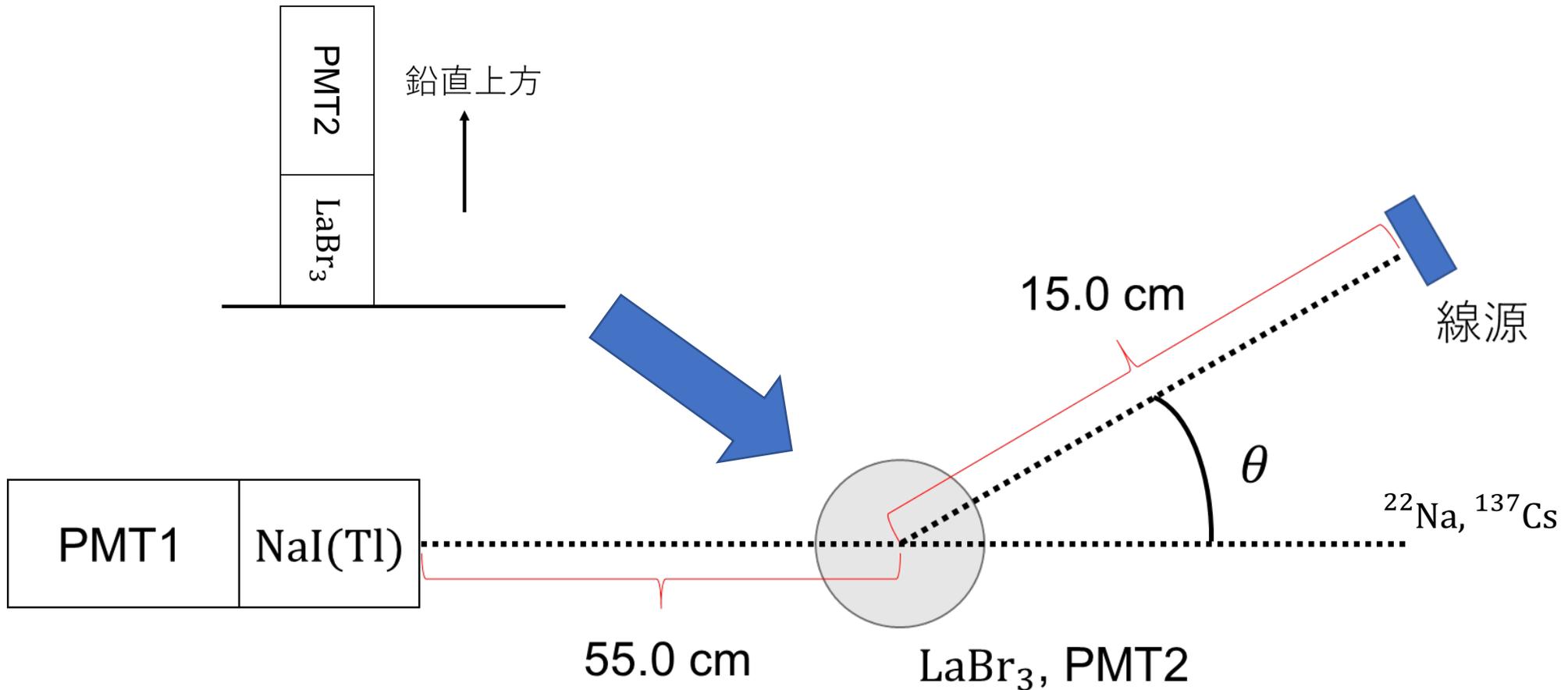
1. 実験背景（當銘）
2. 目的と実験概要（木村）
3. 実験方法（神村）
4. 解析方法（長房）
5. 実験結果（中村・木村）
6. 考察（塚本）
7. 結論（塚本）

3. 実験方法：実験装置（シンチレータ）



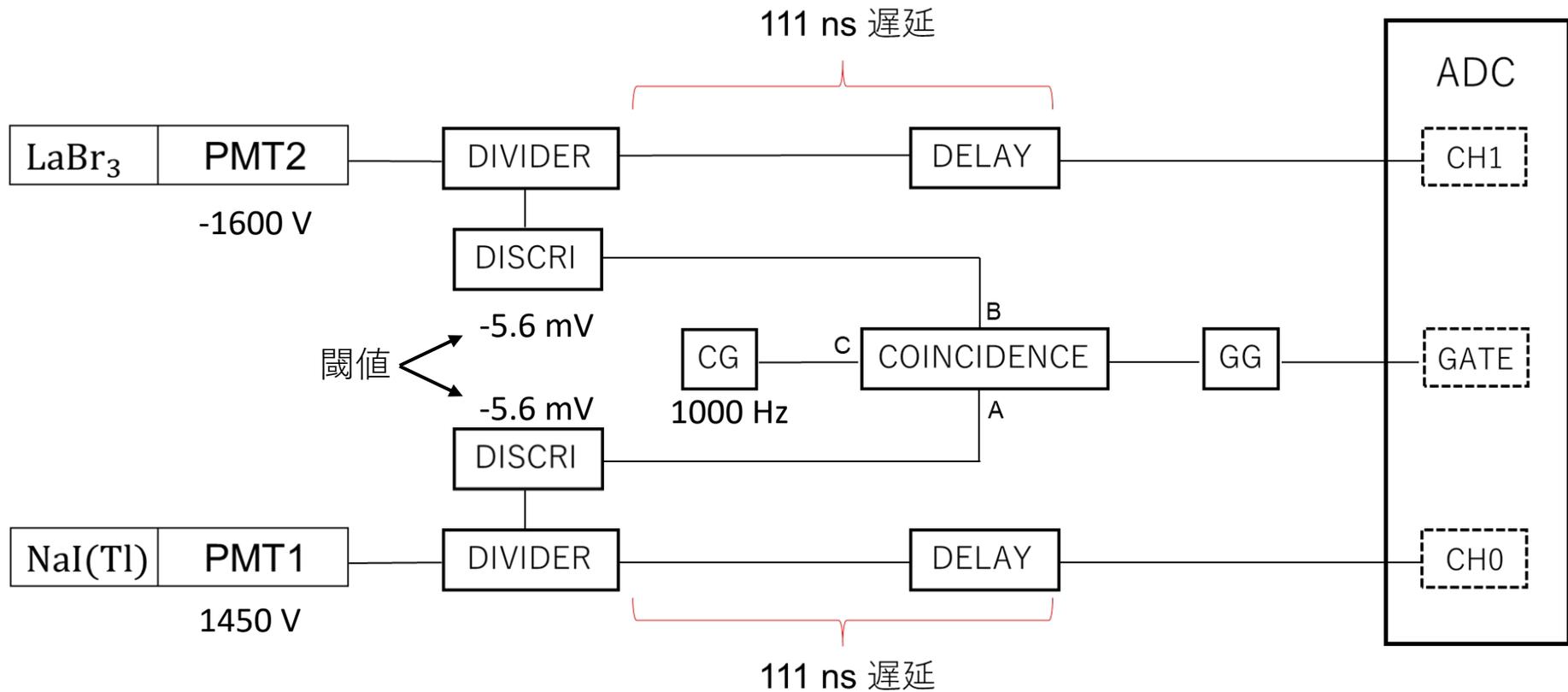
3. 実験方法：実験装置の配置

それぞれの散乱角 θ において、線源から見た LaBr_3 の立体角が等しくなるように、 LaBr_3 を**垂直**に設置

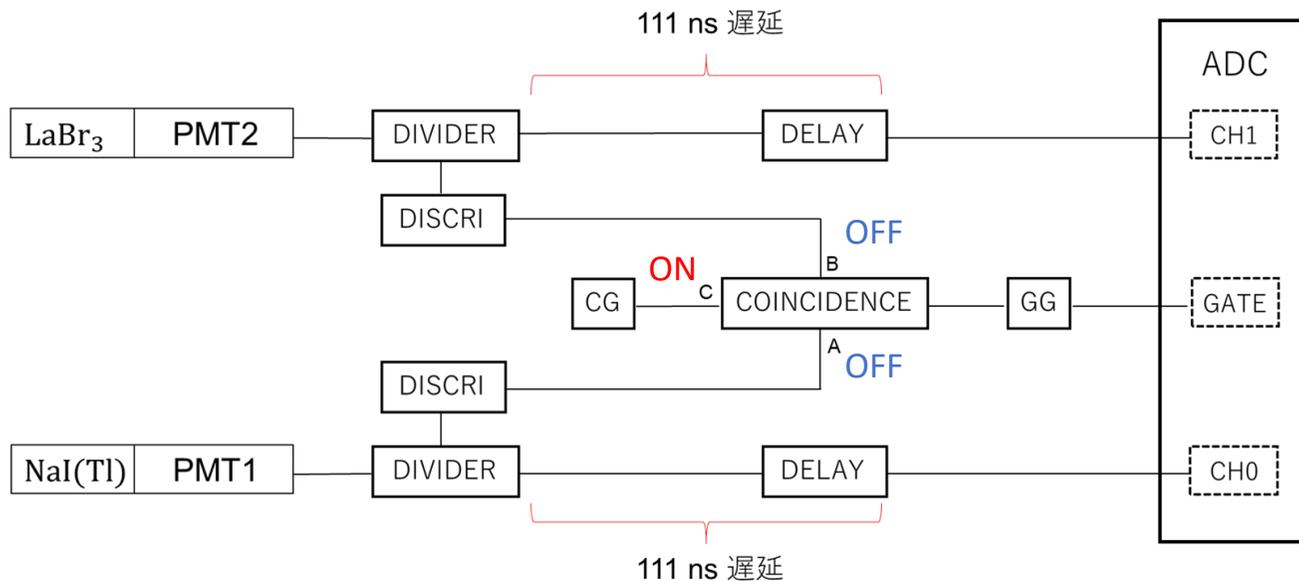


鉛直上方から見たシンチレータと線源の配置

3. 実験方法：実験装置（回路図）



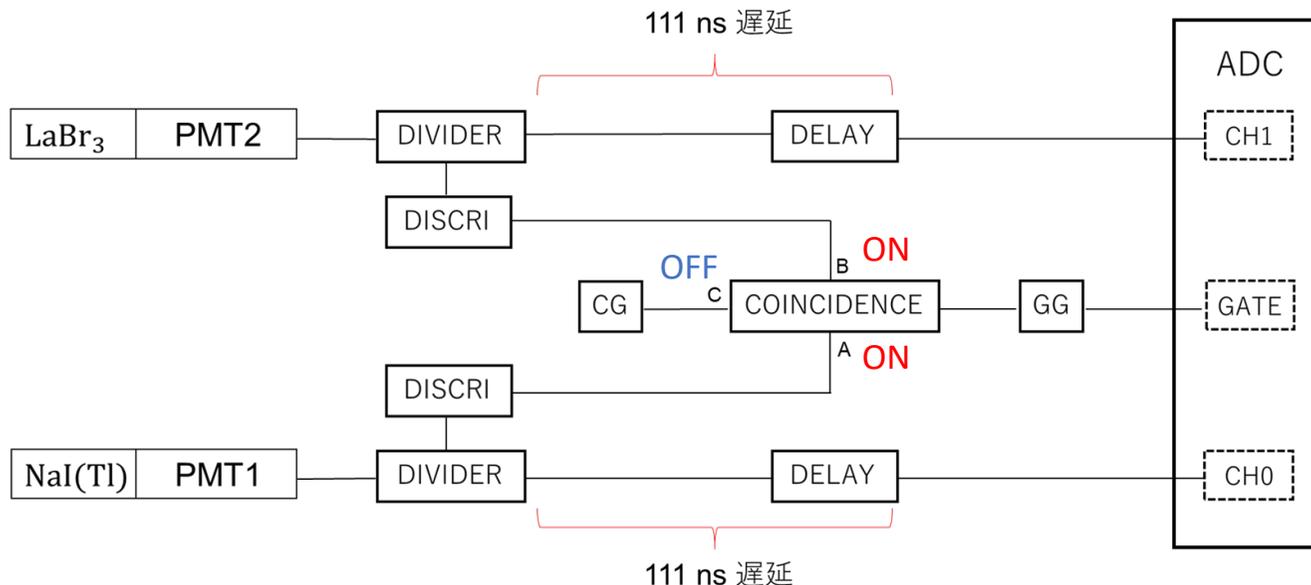
3. 実験方法：手順 (Pedestal)



COINCIDENCEのスイッチA, BをOFF, CをONにし,CGの信号でGATEを作りADC値を測定.

^{137}Cs で $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ で測定.

3. 実験方法：手順 (Coincidence)



- COINCIDENCEのスイッチA, BをON, CをOFF
⇒ 2つのシンチレータでほぼ同時に発光したときのADC値を測定.

- LaBr₃内でCompton散乱
⇒ 散乱電子のエネルギー：LaBr₃シンチレータで取得
散乱γ線のエネルギー：NaI(Tl)シンチレータで取得

¹³⁷Csについては $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ で測定.

²²Naについては $\theta = 180^\circ$ で各測定日の最初と最後に測定 (NaI(Tl)のシンチレーション特性は時間の経過に伴って変化するため).

3. 実験方法：手順 (Coincidence)



- 各シンチレータによる電気信号がGGで生成される**矩形波 (GATE)**の中に過不足無く収まるように調節.

3. 実験方法：ADCカウント数

線源が ^{137}Cs の場合のADCカウント数

θ [°]	Pedestal	Coincidence	測定日：年/月/日
30	2000	2000	2021/01/25
60	2000	2000	2021/01/25
90	2000	2000	2021/01/18
120	2000	2000	2021/01/18
150	10000	2000	2021/01/18
180	10000	2198	2021/01/18

線源が ^{22}Na の場合のCoincidenceのADCカウント数

θ [°]	1回目	2回目	測定日：年/月/日
180	2000	2000	2021/01/25
180	10000	2000	2021/01/18

1. 実験背景（當銘）
2. 目的と実験概要（木村）
3. 実験方法（神村）
4. 解析方法（長房）
5. 実験結果（中村・木村）
6. 考察（塚本）
7. 結論（塚本）

1. PedestalのピークをFitting, ADC値をエネルギー 0 keVと対応させる。
2. ^{22}Na , ^{137}Cs を線源としたCoincidenceのピークをガウシアンでFitting, それぞれのADC値をエネルギー511 keV, 662 keVと対応させる。
3. 入射放射線がシンチレータに付与したエネルギー E とADC値 X の間に

$$X = AE + B \Leftrightarrow E = \frac{X - B}{A}$$

と線形の関係があることを仮定,
最小二乗法で係数 A, B の値をそれぞれのシンチレータで計算



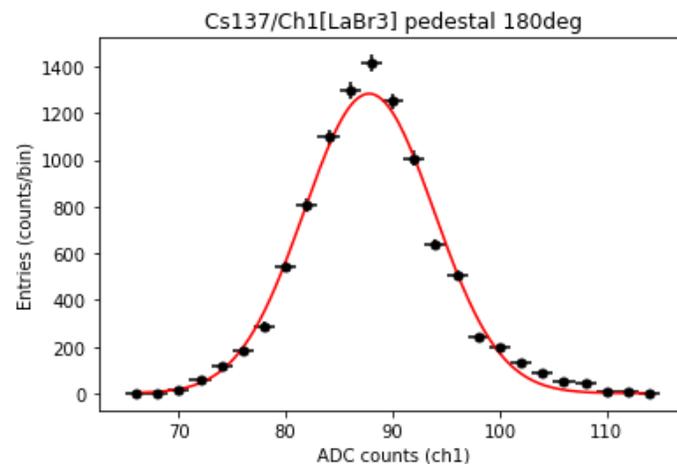
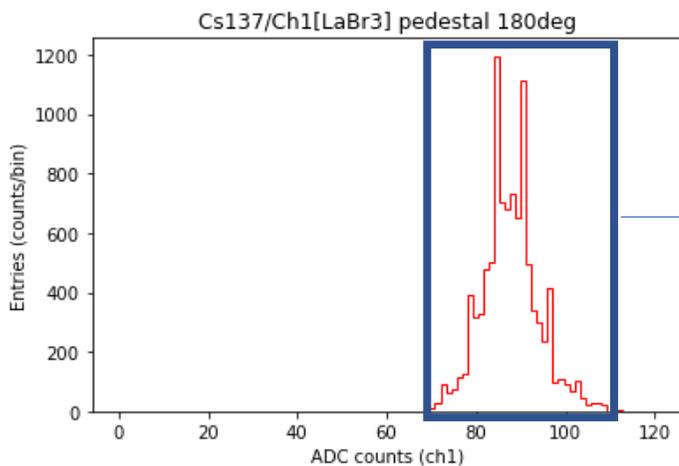
測定されたADC値をエネルギーとして解析できる

$$\text{誤差: } \sigma_E^2 = \frac{1}{A^2} \sigma_X^2 + \frac{(X - B)^2}{A^4} + \frac{1}{A^2} \sigma_B^2$$

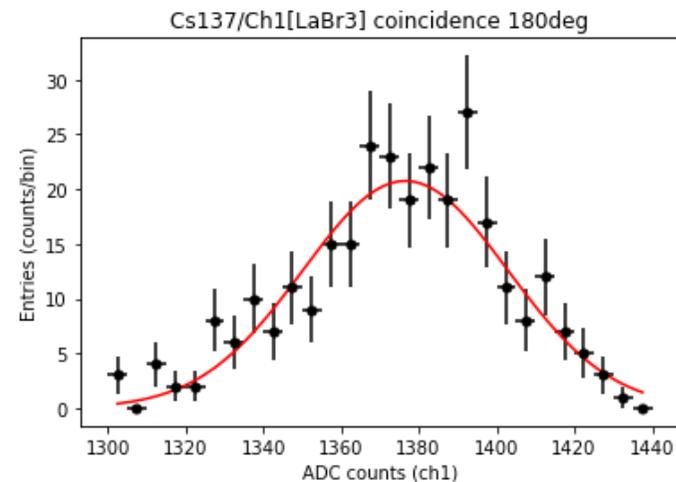
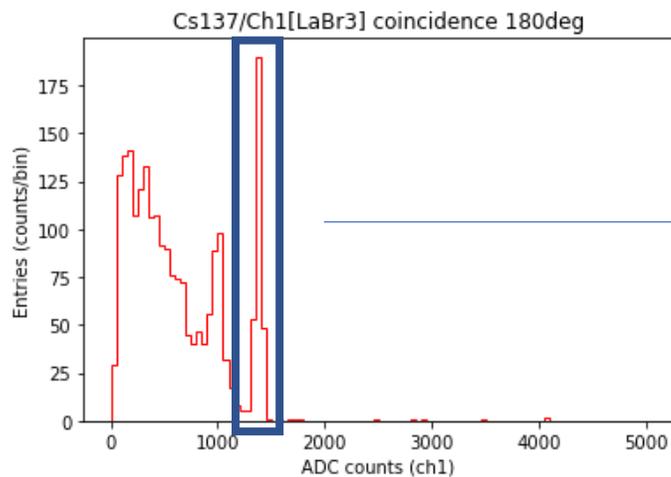
4. 解析方法 Calibration

例) 180° ,LaBr3シンチレータ

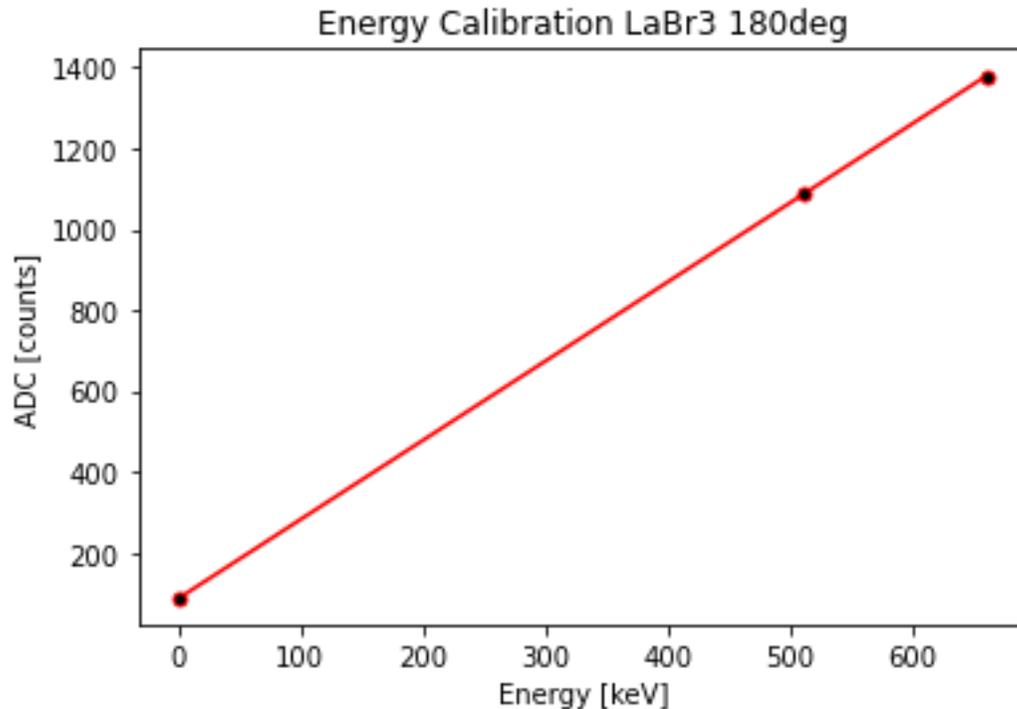
pedestal
 $E = 0$ keV



^{137}Cs 光電ピーク
 $E = 662$ keV



例) 180° ,LaBr3シンチレータ



511 keVに対応する値も同様に計算

0 keV, 511 keV, 662 keVの3点を
最小二乗法でFitting

$$X = AE + B \Leftrightarrow E = \frac{X - B}{A}$$

$$A = 1.95 \pm 0.01$$

$$B = 88.5 \pm 3.89$$

コンプトン散乱におけるエネルギーの角度分布が以下の式で得られる。



それぞれの角度でのエネルギーの値を見ることで
コンプトン散乱の計算の正当性を確かめることができる。

用いる放射線は ^{137}Cs による 662 keV のエネルギーを持つものなので、
各シンチレータでの各角度での
コンプトン散乱の測定値の和は 662 keV となると予想される。

$$\text{散乱光子のエネルギー} : h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

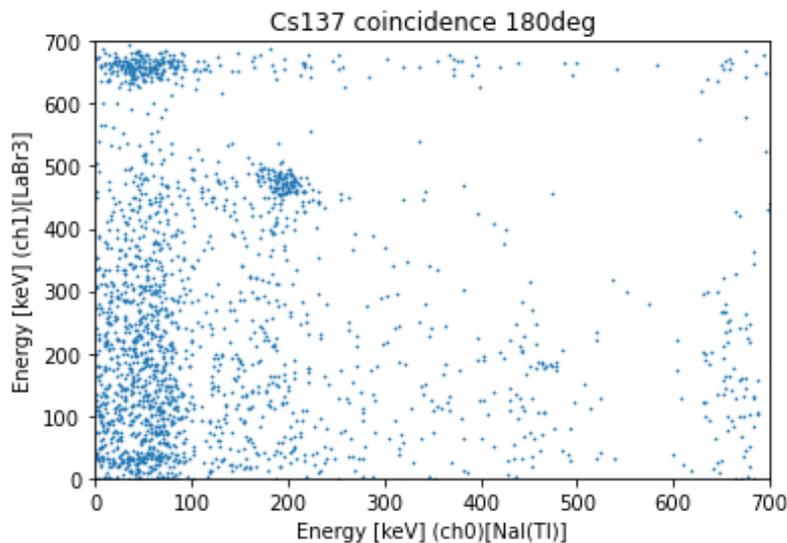
$$\text{散乱電子のエネルギー} : E' = m_e + h(\nu - \nu')$$

Coincidenceで測定データとして同時刻にそれぞれのシンチレータで測定された値が記録されている。

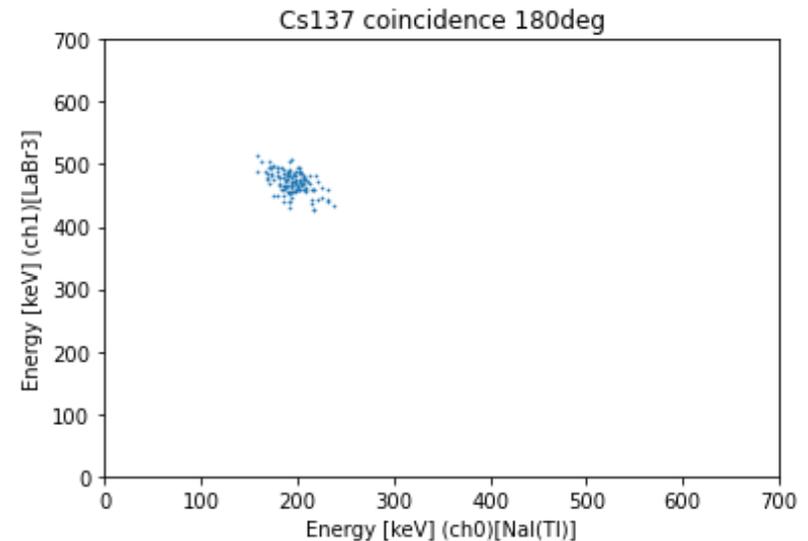


入射ガンマ線のエネルギーは662 keV

LaBr₃シンチレータ内でコンプトン散乱, NaI(Tl)内で全吸収されたデータを見積もることができる。



$$\begin{aligned} 150 &\leq E_\gamma \leq 250, \\ 420 &\leq E_e \leq 520, \\ 620 &\leq E_\gamma + E_e \leq 750 \end{aligned}$$



例) 180°でのコンプトン散乱が寄与するとみられるデータの取り出し

Compton散乱が起こったイベントの数を数え上げ、測定時間で割ることで単位時間当たりのイベント発生数 $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ を計算

測定には同一の線源を利用しているため、入射 γ 線の数は時間当たり一定

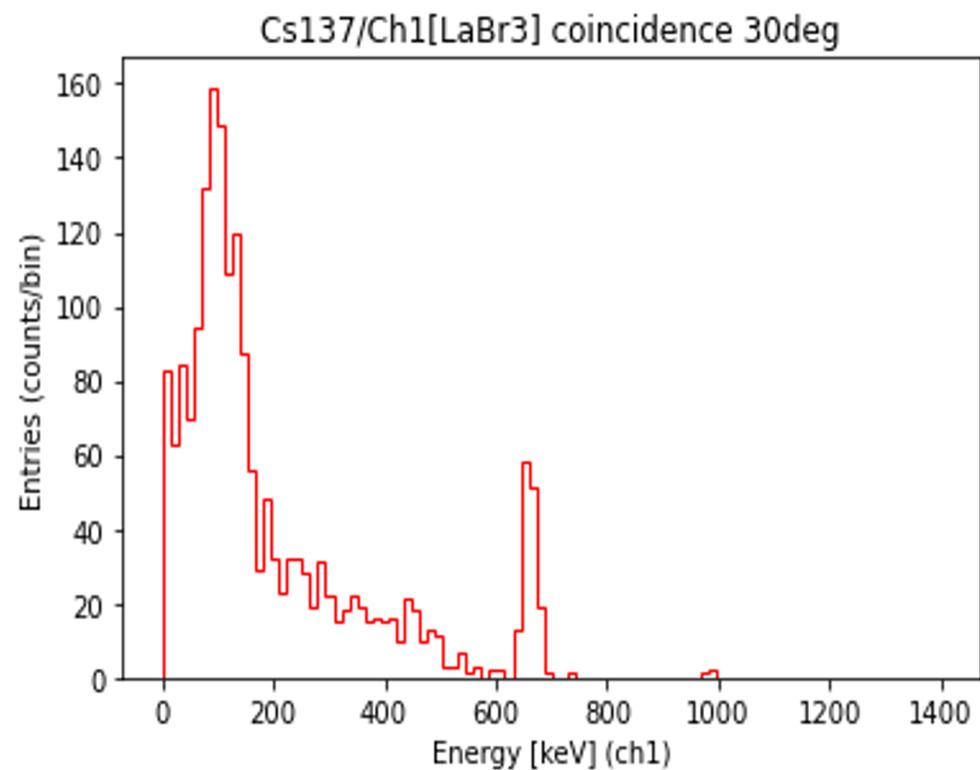
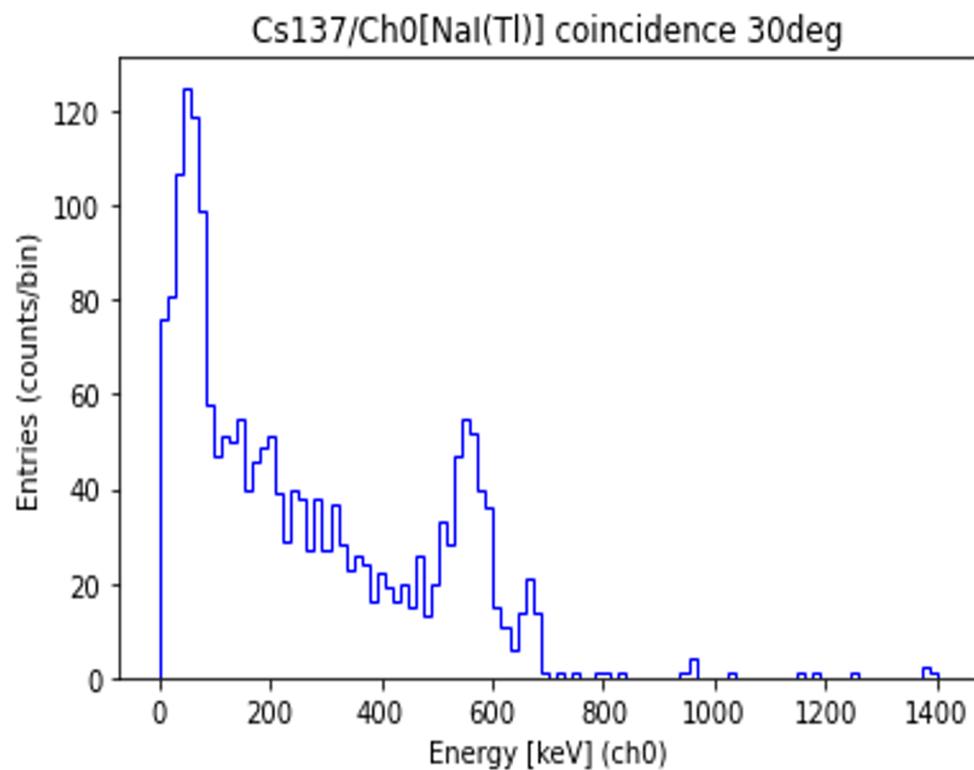
Klein-仁科の式により与えられる微分断面積を $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ とすると、

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \propto \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

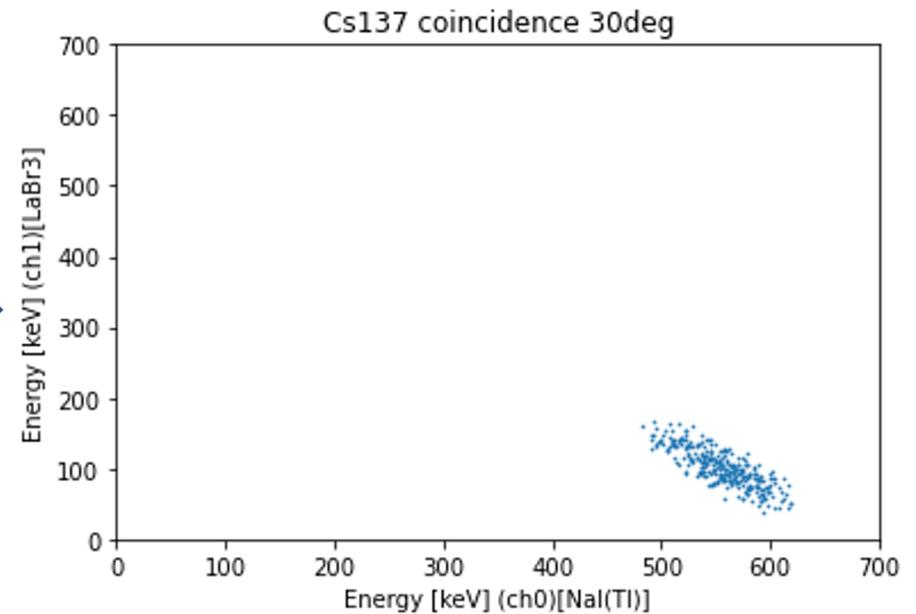
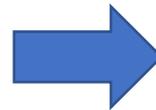
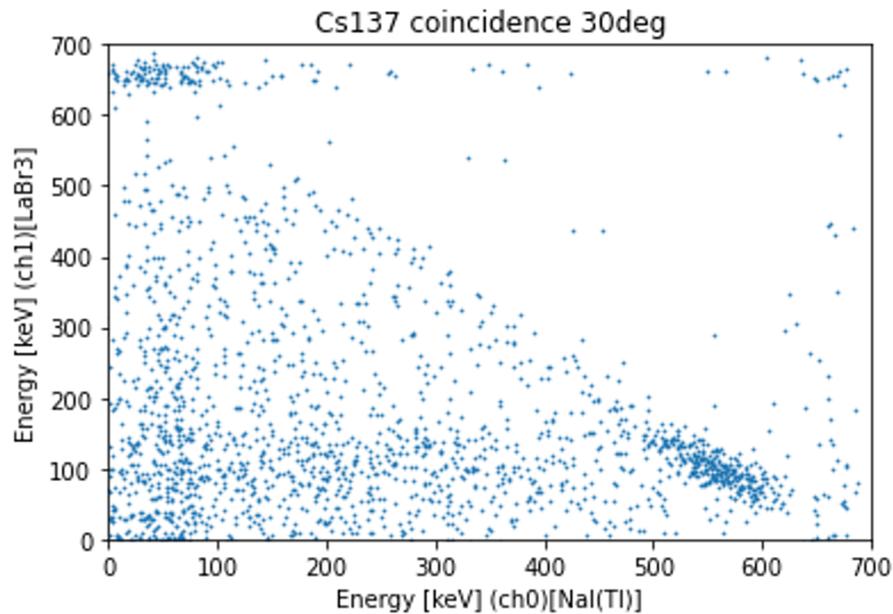
となるため、測定結果よりKlein-仁科の式について検証できる。

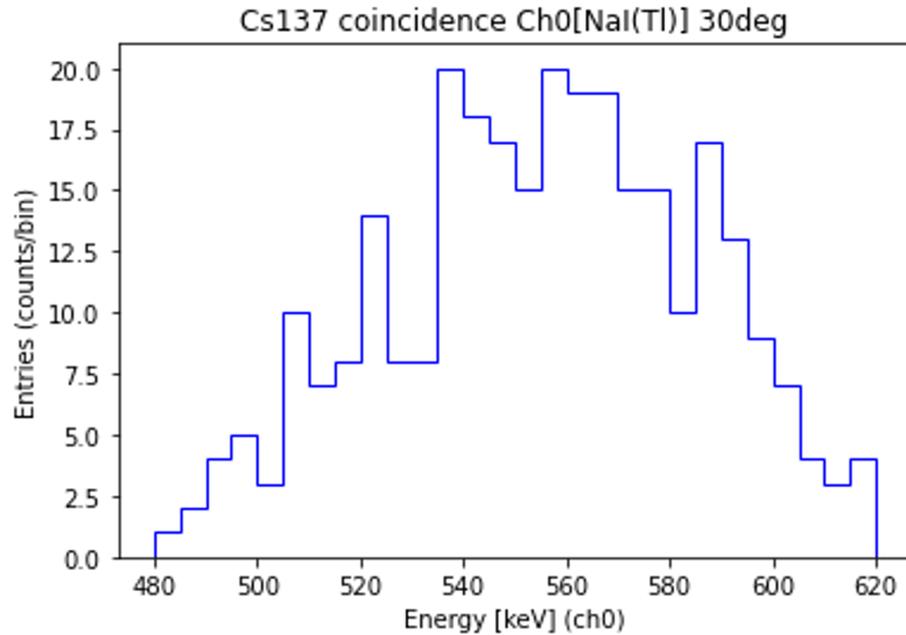
1. 実験背景（當銘）
2. 目的と実験概要（木村）
3. 実験方法（神村）
4. 解析方法（長房）
5. 実験結果（中村・木村）
6. 考察（塚本）
7. 結論（塚本）

$\theta=30^\circ$ の場合

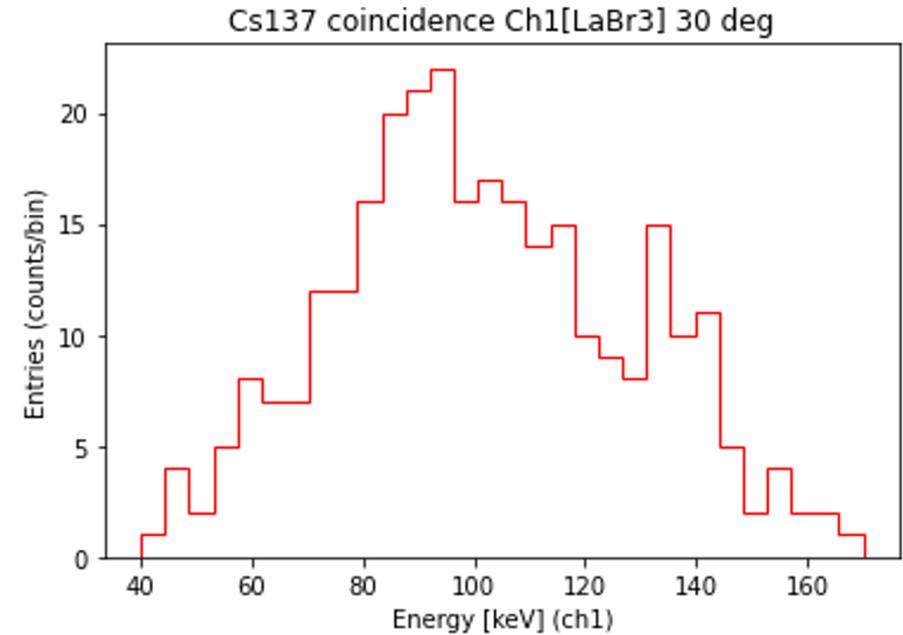


コンプトン散乱が起きているエネルギー範囲の見積もり





ガンマ線のエネルギー
 559.7 ± 4.2 [keV]



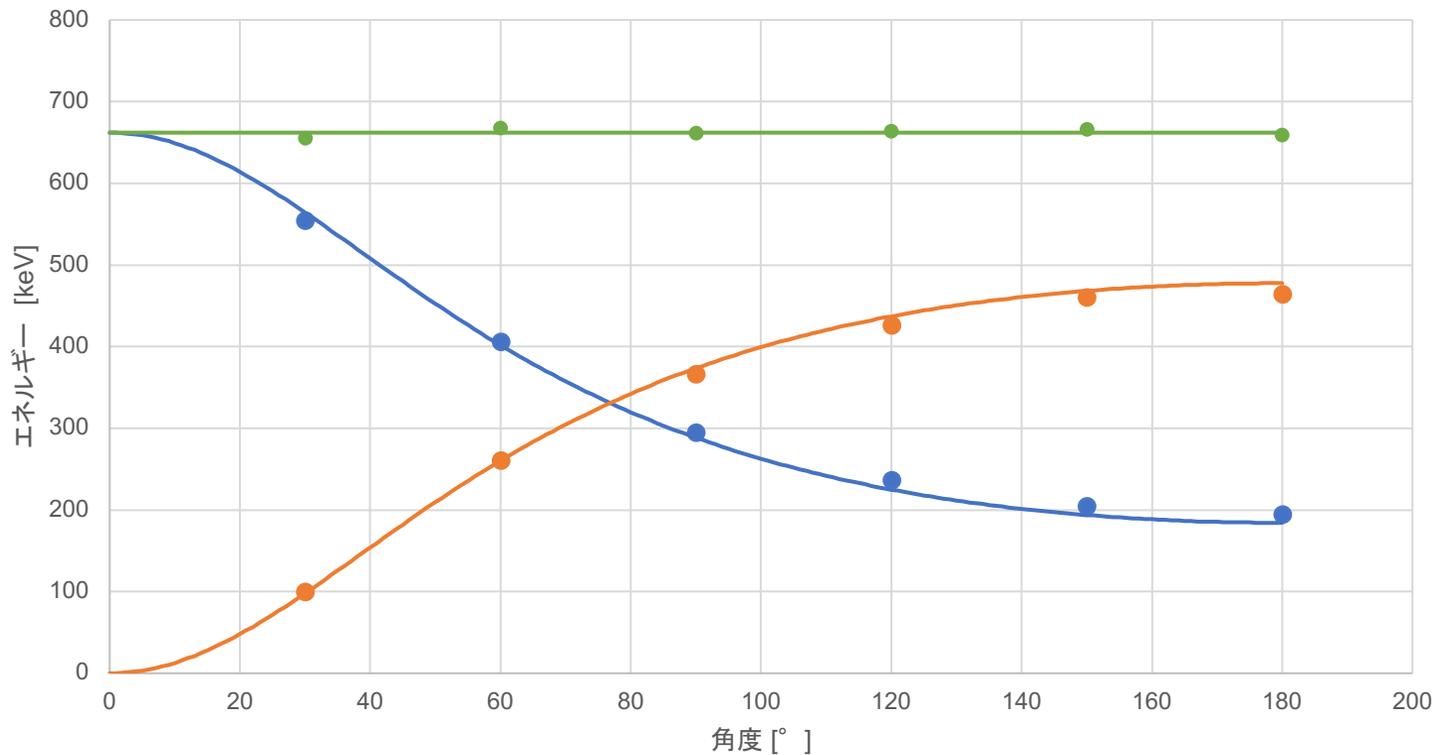
電子のエネルギー
 100.3 ± 2.6 [keV]

各角度のエネルギーの結果

θ [°]	ガンマ線のエネルギー [keV]	電子のエネルギー [keV]	全エネルギー [keV]
30	559.7±4.2	100.3±2.6	660.0±6.8
60	406.2±1.9	261.4±4.6	667.6±6.5
90	295.0±2.1	367.0±2.6	662.0±4.7
120	237.2±1.2	426.8±5.0	664.0±6.2
150	205.5±1.6	460.6±2.4	666.1±4.0
180	194.7±1.4	464.7±2.7	659.4±4.1

理論値との比較

ガンマ線と電子のエネルギー

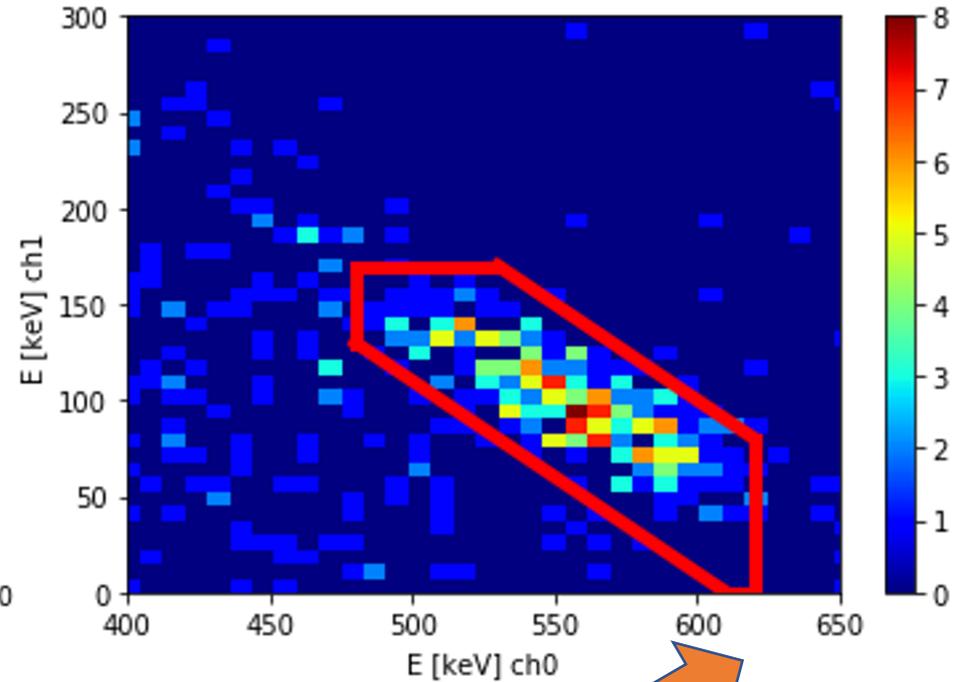
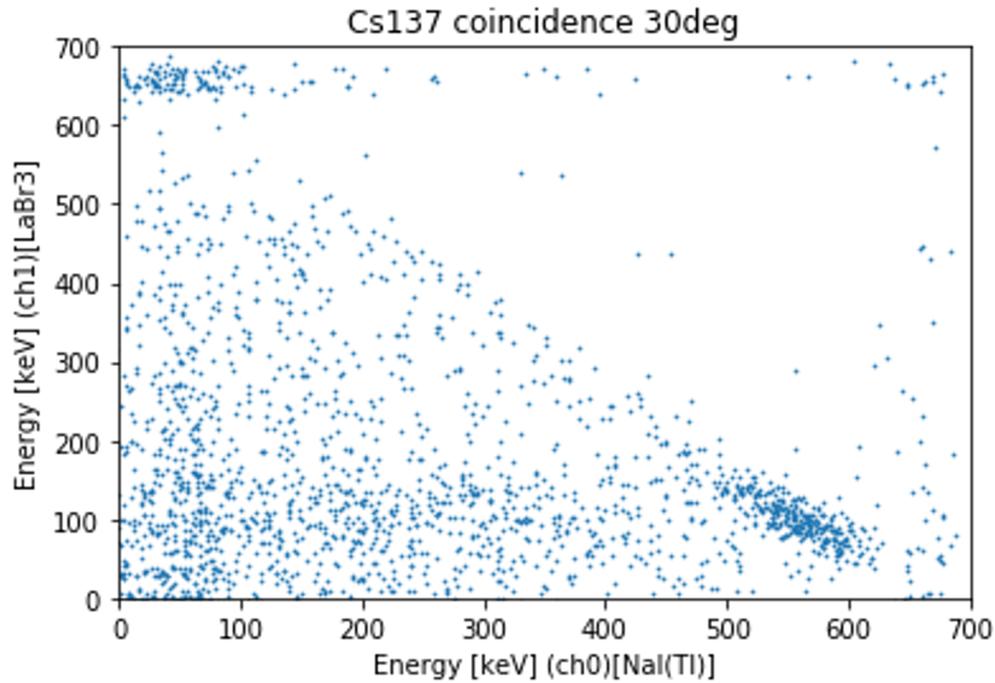


p値	
ガンマ線	0.820
電子	0.970
全エネルギー	1.00

理論値とほぼ一致
している

- ガンマ線のエネルギー(理論値)
- 電子のエネルギー(理論値)
- 全エネルギー(理論値)
- ガンマ線のエネルギー(実験値)
- 電子のエネルギー(実験値)
- 全エネルギー(実験値)

$\theta=30^\circ$ の場合

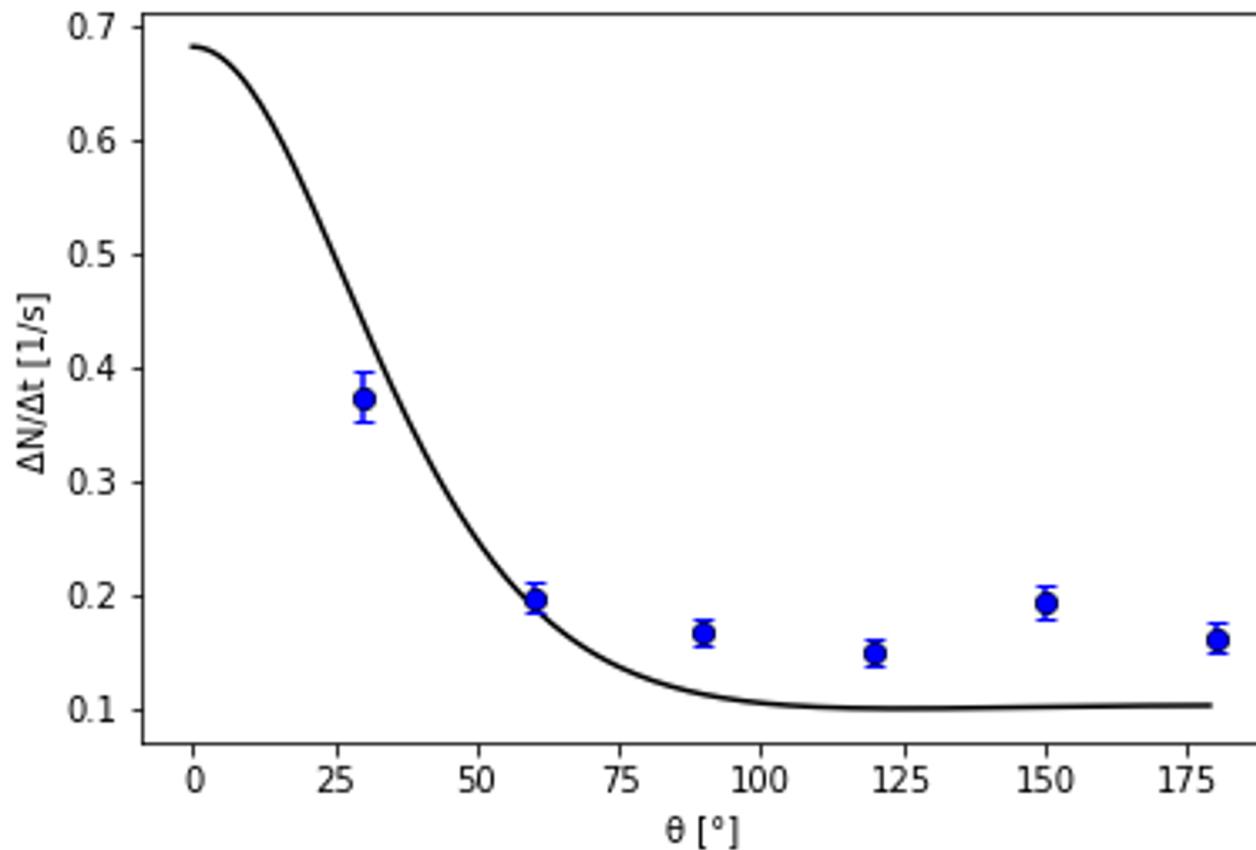


赤色の枠の範囲でイベント数 295

各角度のイベント数 N 、測定時間 t [s]、反応頻度 $\Delta N/\Delta t$ [1/s]

θ [°]	N	t [s]	$\Delta N/\Delta t$ [1/s]
30	295	789	0.374±0.022
60	203	1026	0.197±0.013
90	199	1187	0.168±0.012
120	162	1078	0.150±0.012
150	168	868	0.194±0.015
180	130	802	0.162±0.014

理論値との比較

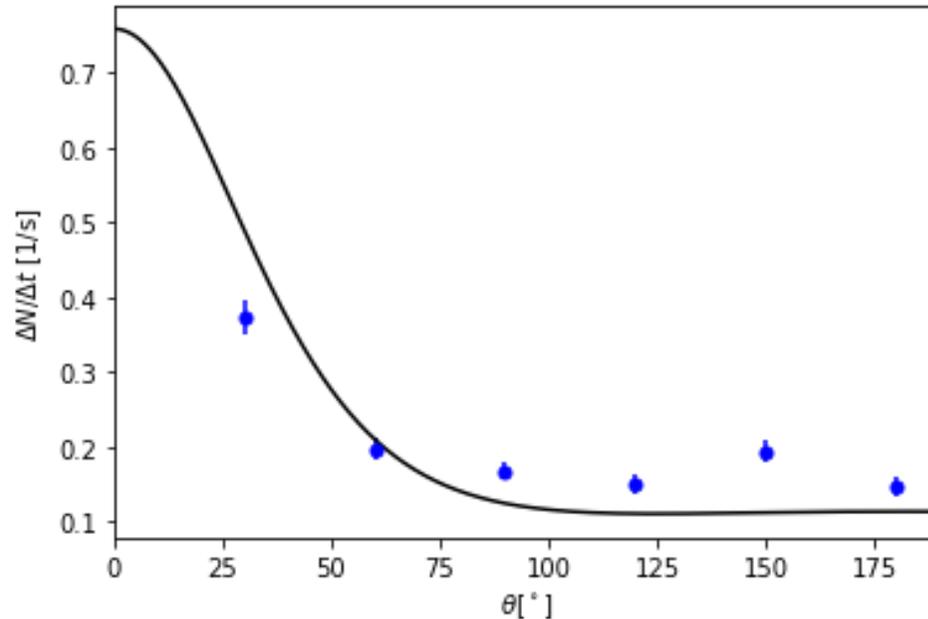


理論値とあまり一致していない



次ページ以降で考察

1. 実験背景（當銘）
2. 目的と実験概要（木村）
3. 実験方法（神村）
4. 解析方法（長房）
5. 実験結果（中村・木村）
6. 考察（塚本）
7. 結論（塚本）



反応頻度の図を見ると測定データと理論式が一致していない
→次の二つが原因として考えられる

- 散乱角の角度幅

γ 線は LaBr_3 の中央でコンプトン散乱しNaIに垂直に入射するとは限らない

- NaIシンチレータの γ 線吸収効率

散乱 γ 線の一部はNaIシンチレータを透過し、その補正が必要

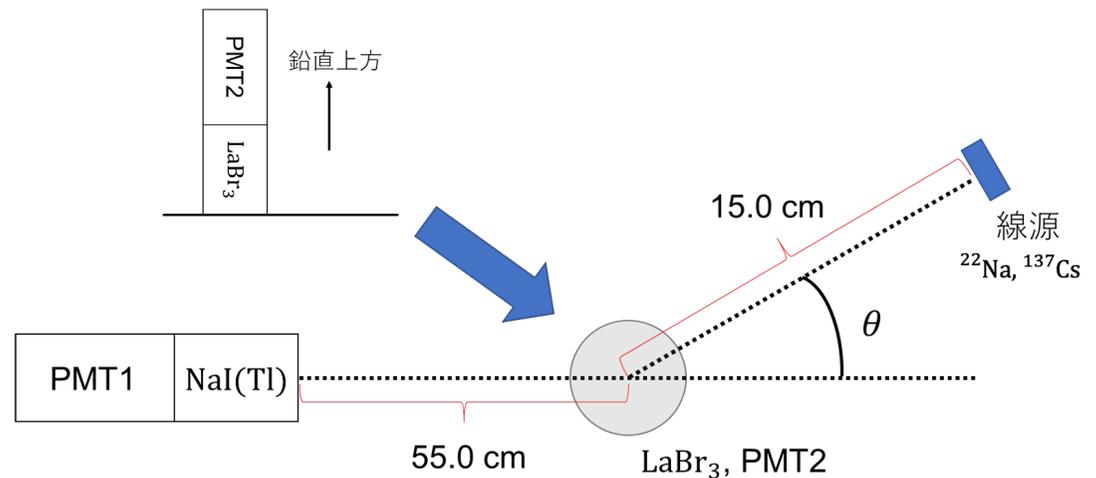
- 散乱角の角度幅

測定装置の形状と配置から計算した散乱角の最大値、最小値は表7.1の通り

表6.1 各角度 θ に対しとりうる散乱角の最大値と最小値

θ [°]	30	60	90	120	150	180
θ_{\max} [°]	40.5	69.7	98.6	127.4	156.5	180
θ_{\min} [°]	19.1	49.7	80.7	111.9	143.1	173.8

θ_{\min} から θ_{\max} まで Klein-仁科の式の平均を取ると
図7.1のようになった



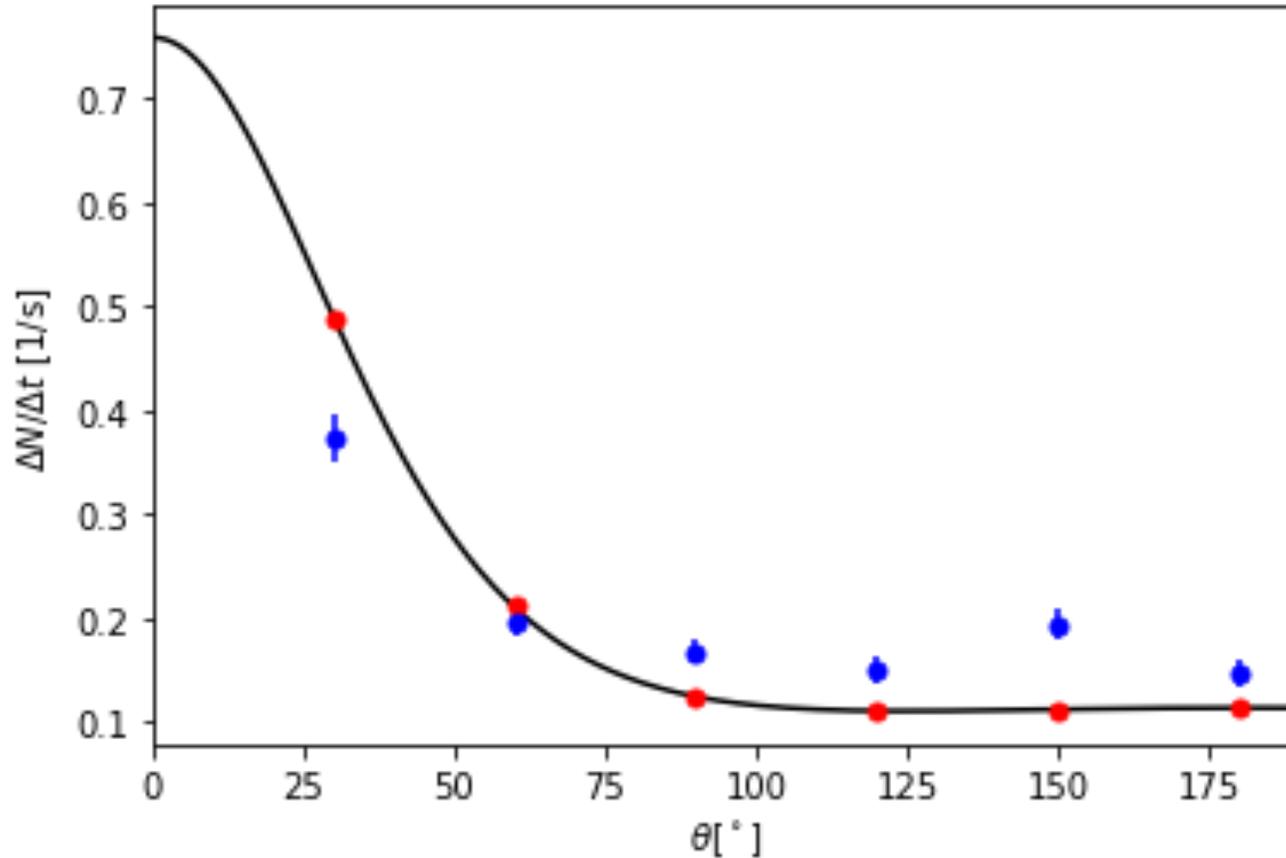


図6.1 角度幅の補正を加えた反応頻度:赤の点が角度幅に対し理論値の平均を取ったもの

角度幅に対し理論値の平均をとっても元の曲線からあまり変化しなかった

- シンチレータの γ 線吸収効率

透過した γ 線の光子数 N_{trans} は入射した光子数 N_0 で次の式で表される

$$N_{\text{trans}} = N_0 e^{-\mu l} = N_0 e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho l}$$

ρ と l はそれぞれシンチレータ物質の密度と厚さ、 $\frac{\mu}{\rho}$ は質量減衰係数
吸収された光子数を N とすると

$$N = N_0 - N_{\text{trans}} = N_0 \left(1 - e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho l}\right)$$

$$N_0 = \frac{N}{1 - e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho l}}$$

反応頻度の計算で N の代わりに N_0 を用いた

また $\rho = 3.67 \text{ [g/cm}^3\text{]}$ と $l = 55.0 \text{ mm}$ を用いた

μ/ρ は図6.2から読み取った

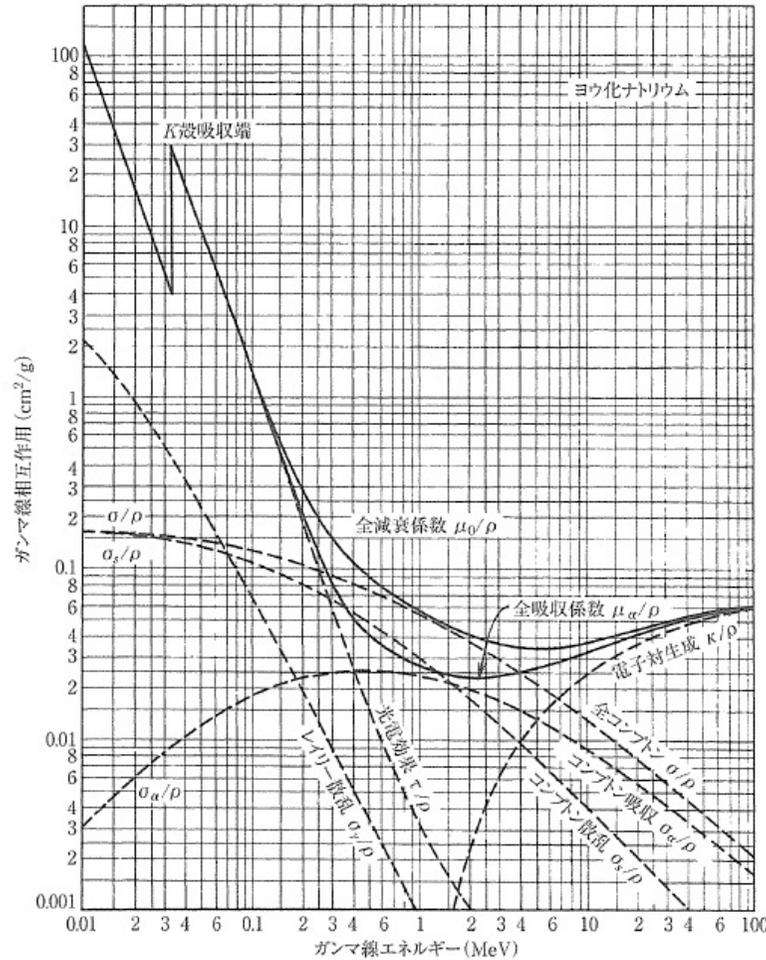


図 2.18 ヨウ化ナトリウム (NaI) の中の種々のガンマ線相互作用のエネルギー依存性. (R. D. Evans, *The Atomic Nucleus* (1955) より引用)

図6.2 NaIの γ 線相互作用のエネルギー依存(出典:Knoll,放射線計測ハンドブック)

γ 線のエネルギーが200 keVから400 keV程度では光電吸収が支配的
光電吸収の質量減衰係数 τ/ρ を読み取った

表6.2 各角度 θ での光電吸収の質量減衰係数

θ [°]	30	60	90	120	150	180
τ/ρ [cm ² /g]	0.011	0.033	0.055	0.16	0.18	0.20

$\mu/\rho = \tau/\rho$ として補正をかけた

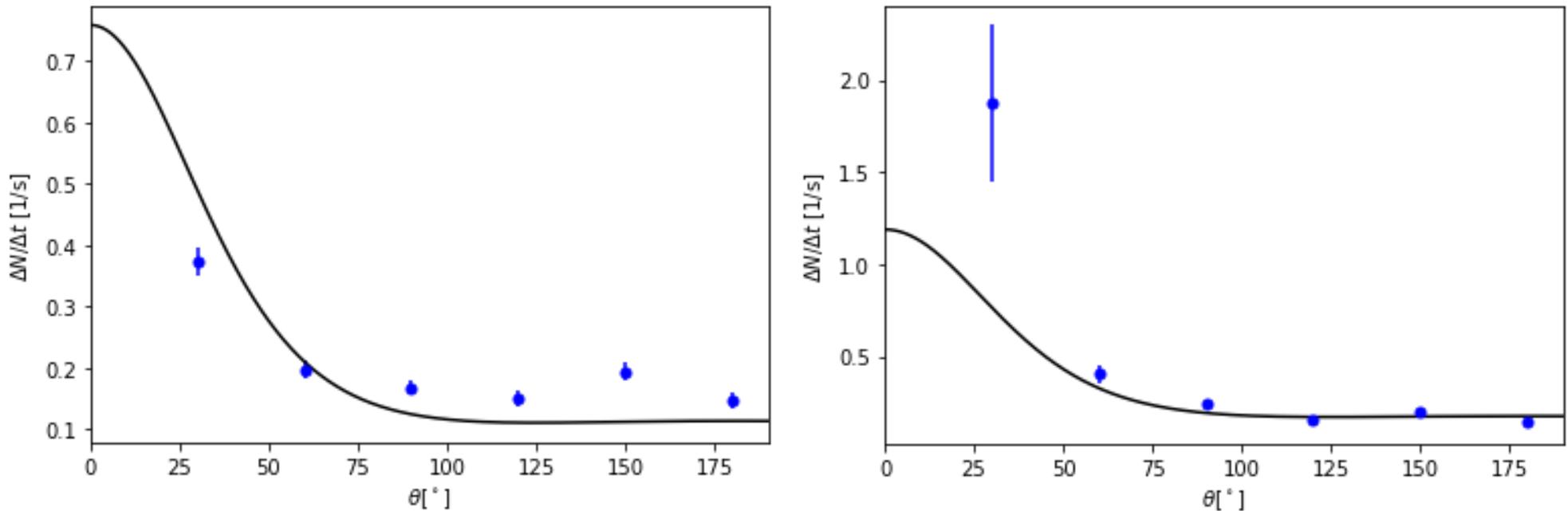


図6.3 光電吸収の効果を検討した反応頻度と Klein-仁科の式(左が考慮前、右が考慮後)

角度が大きい領域では測定データが理論曲線とよく一致した

$\theta = 30^\circ$ では理論曲線よりも大きい値を取った

γ 線のエネルギーが500 keV以上ではコンプトン散乱された後に光電吸収される過程も多い→コンプトン吸収の寄与も必要
コンプトン吸収の質量減衰係数 σ_α/ρ を読み取った

表6.3 各角度 θ でのコンプトン吸収の質量減衰係数

$\theta [^\circ]$	30	60	90	120	150	180
$\sigma_\alpha/\rho [\text{cm}^2/\text{g}]$	0.025	0.025	0.025	0.024	0.023	0.022

$\mu/\rho = \tau/\rho + \sigma_\alpha/\rho$ として補正をかけた

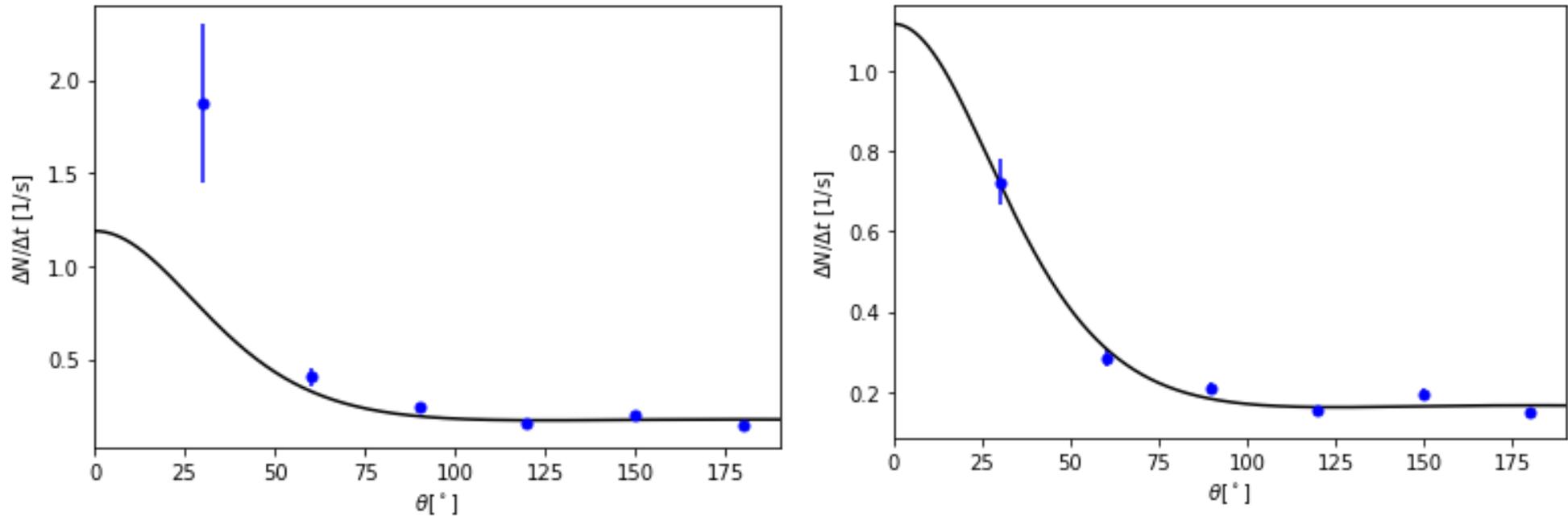


図6.4 光電吸収とコンプトン吸収の効果を考慮した
反応頻度とKlein-仁科の式(左が光電効果のみ、右が光電効果とコンプトン効果)

ほぼ全ての領域で測定データが理論曲線とよく一致した

1. 実験背景（當銘）
2. 目的と実験概要（木村）
3. 実験方法（神村）
4. 解析方法（長房）
5. 実験結果（中村・木村）
6. 考察（塚本）
7. 結論（塚本）

- 散乱電子および散乱γ線のエネルギーと散乱角の関係
測定値はコンプトン散乱の理論による関係式

$$hv' = \frac{hv}{1 + \frac{hv}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

と、30° から180° までで概ね一致

- コンプトン散乱の反応頻度と散乱角の関係
測定された反応頻度は、NaIの吸収効率を考慮すればKlein-仁科の公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Zr_0^2 \left[\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \right]^2 \left[\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right] \left[1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]} \right]$$

$$Z: \text{原子番号、} r_0: \text{電子半径} \quad \alpha = \frac{hv}{m_e c^2}$$

に概ね一致