

課題演習 A1

μ の性質に関する実験

岡村和弥、小野田秀樹、川口維男、高橋将太、新居慶太
京都大学理学部物理科学系 3 年生

2008 年 3 月 26 日

概要

今回の実験では、宇宙線に含まれる μ^+ の寿命を測定するために、 μ^+ が崩壊して電子になる性質を利用した。また、磁場をかけることにより、 μ^+ の g 因子も合わせて測定した。

目次

1	実験目的	2
2	実験原理	2
2.1	μ の生成過程とその偏極	2
2.2	μ^+ の寿命測定の方法	3
2.3	μ 粒子のスピン磁気モーメントの測定	4
3	実験装置	6
3.1	装置の種類	6
3.2	装置の設定	8
4	実験データの解析	10
4.1	測定データ	10
4.2	μ の寿命	18
4.3	μ^+ の g 因子測定	18
5	実験結果と考察	23
5.1	検出効率	23
5.2	実験結果	23
5.3	シンチレータの高さを変えたことによる影響	24
5.4	反省点	26
6	謝辞	26

A	実験原理に関する補足	26
A.1	μ^+ の微分崩壊率	26
A.2	Pauli-Lubanski ベクトル	30
A.3	Dirac 粒子の Lande の g 因子	31
B	さらなる解析	33

1 実験目的

素粒子の μ は弱い相互作用によって $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$ と崩壊し、その寿命は $2.2\mu\text{sec}$ であることが知られている。(Appendix A.1) また、 μ 粒子はスピン $1/2$ の粒子であり、スピンの大きさ $1/2$ に比例したスピン磁気モーメントをもつ。このことは、軌道角運動量と軌道磁気モーメントの間にある比例関係と同じである。スピン角運動量の比例係数と軌道角運動量の比例係数の比は Lande の g 因子と呼ばれ、ほぼ 2 であることが知られている。(Appendix A.3)

本実験の目的は以下の 2 つである。

1. μ 粒子の寿命を測定する。
2. μ 粒子のスピン磁気モーメントを測定する。

2 実験原理

2.1 μ の生成過程とその偏極

今回観測に使う μ は宇宙線に含まれるものである。その宇宙線 μ がどのように生成されるのかを考える。この機構は完全にわかっているわけではないが、ここでは空気シャワーによって多数の粒子群が生成される過程を考える。

地球大気に入射してくる宇宙線は一次宇宙線といい、その大部分は高エネルギーの原子核である。高エネルギー原子核は大気の原子核と衝突して中間子などからなる二次宇宙線を生成する。こうして生成された二次宇宙線はさらに衝突を繰り返して核子カスケードを生み出す。その中の π^0 は二つのガンマ線に崩壊し、このガンマ線からは電磁カスケードも生成する。また $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ で生成する μ や ν も降ってくる。

しかしながら、地表付近での宇宙線の大部分が μ であることが知られている。(参考文献 [0]) 電子成分やハドロン成分がミューオンよりも急速に減少する理由は次の様にして理解できる。

電子成分は電磁カスケードに含まれている。電磁カスケード内では γ の対生成と e^\pm の制動放射によって粒子数が増えていく。こうして、粒子の平均エネルギーが臨界値(大気中では 84MeV)を下回ると電離損失や Compton 散乱によって減衰してしまう。

メソンはその寿命がせいぜい 10^{-8}sec 程度で、 μ の寿命 $2.2 \times 10^{-6}\text{sec}$ よりも短い。また、バリオンは強い相互作用をするため大気中での減衰は速い。そのため、バリオンも地表付近での宇宙線の主成分とはなりえない。

こうして、地表付近での宇宙線の多くは μ であることが分かった。ところで、 μ の多くは π や K の崩壊によって発生し、ほぼ親粒子の方向に進行する。例えば $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ で μ^+ が生成する様子を重心系で見ると ν のヘリシティは負なので μ^+ は進行方向と逆向きに 100% 偏極している。この μ^+ を実験室系で観測すれば前方に放出されたものは進行方向と反

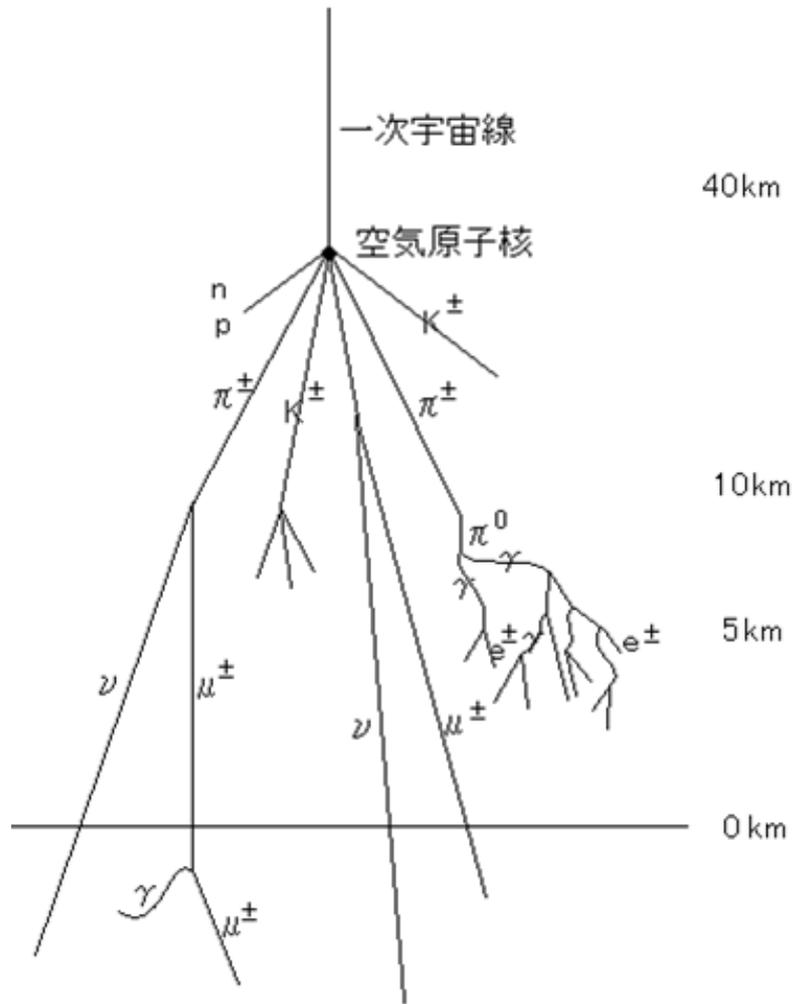


図 1: μ の生成

並行、後方に放出されたものは進行方向と平行にスピン偏極をしている。

実験室系であるエネルギーを持つ μ^+ を観測する。この μ^+ の偏極が反並行であれば重心系で前方に放出されたものであり、並行であれば重心系で後方に放出されたものであることが分かる。すなわち並行に偏極した μ^+ の親粒子は反並行に偏極した μ^+ の親粒子よりも高いエネルギーを持っていることが分かる。

もし宇宙線 π のエネルギースペクトルが平坦であれば結局 μ は偏極しない。しかし実際には π のスペクトルは平坦ではないので μ は偏極している。

2.2 μ^+ の寿命測定の原理

この実験は次の事実に基づいている。

μ は物質中でエネルギーを損失する。このとき稀に静止することがある。それは物質中の電子との間にクーロン相互作用が働いて速さが下がり、その結果急激にエネルギーを失う過程と制動放

射によってエネルギーを失う過程によるものである。

光速に近い速度で降ってくる大量の μ が物質中に入ってきたときにその一部がこれらの過程により物質中で静止する。静止した μ のうち特に μ^- は原子核とクーロン相互作用で水素原子と同様の束縛状態になる。 μ の質量は e の約 200 倍あるので原子核と非常に近い位置に束縛され、



という反応が生じる。これは真空中での崩壊より一般にとっても早い。そのため物質中の μ^- の寿命は真空中に比べて短くなる (例えば銅の中では $0.160 \pm 0.004 \mu\text{sec}$)。しかし μ^+ は原子核との束縛状態をつくらないので基本的には真空中で静止しているときの崩壊をする。その結果 μ^+ の寿命の精密な測定が原理的に可能となる。ゆえに μ^+ の崩壊に焦点を絞る。なぜなら μ^- は真空中での寿命より短く、 μ^- の崩壊を観測することは本来 (真空中) の μ の寿命よりも測定結果で得られる寿命の方が短くなる要因となるので、 μ^- の崩壊であると思われるイベントは排除する必要が出てくる。

粒子 α の全崩壊率 Γ は単位時間あたりに

$$\alpha \rightarrow \text{something}$$

という反応が起こる確率である。よって $t = 0$ に μ が存在することが分かっている、ある時刻 t の粒子 α の存在確率を $p(t)$ とする。このとき時刻 t と時刻 $t + dt$ に α が別の状態に遷移する確率は $p(t)\Gamma dt$ である。それゆえ粒子 α の寿命 τ を全崩壊率の逆数で定義すると

$$p(t + dt) = p(t)(1 - \Gamma dt)$$

すなわち

$$\frac{dp}{dt} = -\Gamma p = -\frac{p}{\tau}$$

となる。これを解くと

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

を得る。よって α の寿命が知りたければある時刻に存在した α がいつ崩壊するかを調べればよい。

今回の実験では μ の寿命を測りたいので μ が崩壊した際に e を放出するという性質を使うことにする。すなわち、ある時刻に μ が存在することが分かっているならばそれから何秒後に e が放出されるかを見ることにする。

2.3 μ 粒子のスピン磁気モーメントの測定

磁気モーメントは一樣静磁場中で歳差運動をする。これはスピン磁気モーメントでも同じである。磁気モーメントの大きさを知るには、この歳差運動の周期を知ることが出来ればよい。

磁気モーメント M に一樣磁場をかけると磁場に直交した面内で歳差運動する。その周期は M に比例するので、歳差運動の周期を調べることで磁気モーメントを測定できる。

磁気モーメント M を外部磁場 B の中におくと、磁気モーメントの相互作用 Hamiltonian は

$$H = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$$

である。(Appendix A.3)

スピンと磁気モーメントの比例係数を $ge/2mc$ ($e > 0$) と書き、磁場方向に z 軸をとると

$$H = -\frac{geB}{2mc} S_z$$

となる。

$\omega = geB/2mc$ と置くと、

$$H = -\omega S_z$$

は2つの固有状態 $\psi(\pm)$ をもち、それぞれ固有値 $\mp\hbar\omega/2$ をもつ。

これらはそれぞれ、スピンの上向きの状態と下向きの状態に対応している。任意のスピン状態は $\psi(\pm)$ の線形結合で表現できる。 μ 粒子は時刻 $t = 0$ の時に状態 $\Psi(0)$ にあったとする：

$$\Psi(0) = c_+ \psi(+) + c_- \psi(-)$$

時間 t だけたった状態 $\Psi(t)$ は $\Psi(0)$ に $\exp\{-(i/\hbar)Ht\}$ を作用させたものであり

$$\Psi(t) = c_+ \exp(+i\omega t/2) \psi(+) + c_- \exp(-i\omega t/2) \psi(-)$$

となる。この状態における S_x 、 S_y 、 S_z の期待値はそれぞれ以下ようになる：

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \hbar \Re \{ c_+ c_-^* \exp(i\omega t) \} \\ \langle S_y \rangle &= \hbar \Im \{ c_+ c_-^* \exp(i\omega t) \} \\ \langle S_z \rangle &= \frac{\hbar}{2} \{ |c_+|^2 - |c_-|^2 \} \end{aligned}$$

$\langle S_z \rangle$ は変化せず、 $\langle S_x \rangle$ と $\langle S_y \rangle$ は角振動数 ω で振動している。このようにスピン磁気モーメントは期待値の意味で歳差運動をしている。したがって例えば $\langle S_x \rangle$ を測定することができれば μ のスピン磁気モーメントが分かることになる。 μ 崩壊によって生成される e^+ は μ のスピンの向きに放出されやすいことから (Appendix A.1) μ 崩壊によって生成された e^+ の放出方向を調べることで μ のスピンの向きが分かる。すなわち μ の位置を $x = 0$ として e^+ が x 軸のプラス方向に放出されたのか、マイナス方向に放出されたのかを調べればよい。

3 実験装置

3.1 装置の種類

実験に用いた装置として次の3つに分類される。

1. 検出装置

光電子増倍管 (PMT)	5 個	レンズ表面が汚れておらず、検出効率の高いものを選ぶ
プラスチックシンチレータ	3 枚	破損して (割れて) いない、完全に遮光したものをを用いる $100\text{cm} \times 48\text{cm} \times 1\text{cm}$
銅板	2 枚	μ を静止させるため、ある程度の厚さのものを用意 $50\text{cm} \times 48\text{cm} \times 1\text{cm}$

光電子増倍管は光漏れをするので、その部分をテープで塞ぐ必要があった。

もっとも高い位置のあるプラスチックシンチレータ A につける PMT を ch1、銅板の上におくプラスチックシンチレータ B につける PMT を ch2 と ch3、銅板の下におくプラスチックシンチレータ C につける PMT を ch4 と ch5 とする (すなわち図 2 での PMT の番号は ch とは無関係である)。ただし ch の奇数番号と偶数番号で揃えて配置した。

銅板を用いる理由として、密度が比較的高く、しかも強磁性体ではないことがあげられる。シンチレータ A は装置から高さ 1m の位置においた。

シンチレータ A の高さの設定は非常に重要である。シンチレータの大きさに比べてあまりに高い場所にするとうイベント数が減少して統計による誤差が大きくなる。一方低い場所にするとう斜めに入射してくる μ の割合が増し偏極度が下がるので、スピン歳差運動による振幅が小さくなる。そのため、(参考文献 [P1]) の 2m と比較して 1m に設定した。

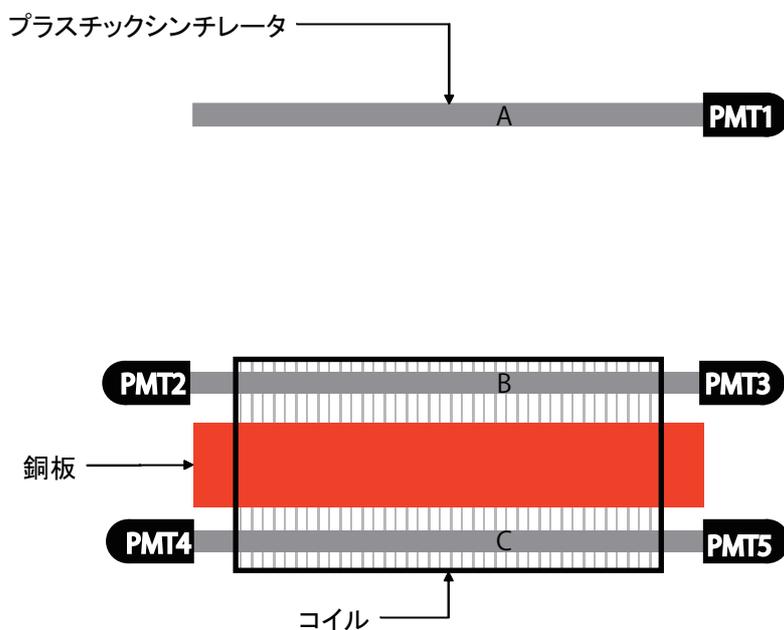


図 2: 実験装置概図

2. 論理回路

High Voltage	PMT に電圧をかける
Amplifier	アナログ信号の増幅のために用いる
Discriminator	アナログ信号をデジタル信号に変換する
Coincidence	信号が同時に検出されたときに新たに信号を出す
Delay	信号を遅らせるために用いる。計 $2.0\mu\text{s}$ の delay
Gate Generator	信号を 200ns 遅らせるために用いる
Clock Genaretor	時計として用いる

Discriminator の threshold は -20.1mV に設定した。回路の接続は図 3 の通りである。

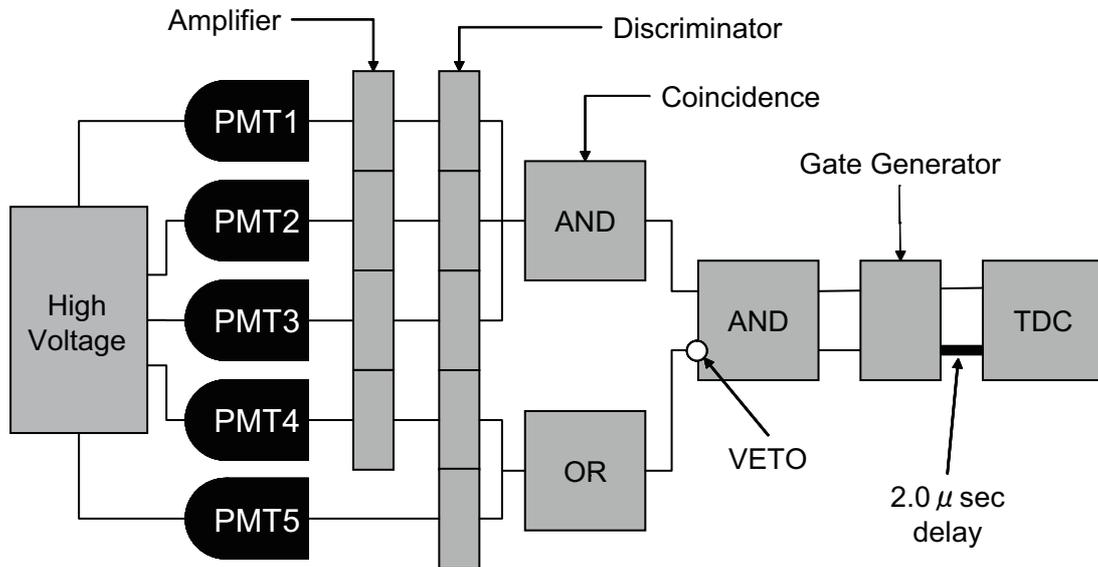


図 3: 論理回路図

図 3 のように回路を組むことで次のような場合にのみ TDC が動くようになっている。ch1、ch2 および ch3 のコインシデンスは ch1 と ch2 と ch3 が同時になったことを意味する。次に ch4 と ch5 の FAN IN/OUT は ch4 が ch5 のいずれかがなかったことを意味する。こうして ch4 と ch5 の FAN IN/OUT を VETO に、ch1 と ch2 と ch3 のコインシデンスを INPUT に入れたものを TDC のスタートに入れると、次のような場合にのみ TDC は測定を開始することになる。

”ch1、ch2、ch3 は反応し、ch4 と ch5 は反応しなかった”

これはシンチレータ A と B を通過した「何か」が C は通過しなかったことを意味する。このような状況は多くの場合”上から降ってきた「何か」が B と C の間で止まった”という状況に対応している。もちろんこの「何か」が μ であるという保証はないが実験原理のところでも述べたように、地表付近での宇宙線の大部分は μ である。したがって、このような信号が出たときは μ が銅板内に止まったと判断することにする。(実際には μ はシンチレータ C を通過したにもかかわらず ch4 も ch5 も反応しなかったということもあり得る。この点については PMT の電圧設定で詳しく述べる)

また技術的な問題ではあるが、単純に ch4 と ch5 の FAN IN/OUT を VETO に入れ、ch1

と ch2 と ch3 のコインシデンスを INPUT に入れると”ch1、ch2、ch3 は反応し、ch4 と ch5 は反応しなかった”というイベントだけを選んで取ることは出来ない。これは VETO に入れている ch4 と ch5 の FAN IN/OUT は通常反応していないからである。ch1 と ch2 と ch3 のコインシデンス信号のタイミングが ch4 と ch5 の FAN IN/OUT 信号のタイミングとずれれば単に”ch1、ch2、ch3 が反応した”というイベントであっても TDC が測定を始めてしまう。そのため ch4 と ch5 の FAN IN/OUT の出力を一旦ゲートジェネレータに入れてその幅を広げ、確実に ch1 と ch2 と ch3 のコインシデンス信号が ch4 と ch5 の FAN IN/OUT 信号が鳴っている間に入るようにしておかなければならない。

TDC のスタートトリガーに使う信号は複雑であった。しかし TDC をストップさせる信号は単に ch2 と ch3 と ch4 と ch5 の信号をそのまま TDC のストップトリガーとして入れるだけである。 μ が崩壊すれば e が出てくるので TDC の出力を見れば μ の寿命や歳差運動の周期がわかる。もちろん、各 PMT の出力を直接入れているので e 以外の原因で止まっているイベントも多く存在する。このようなイベントをどのようにして取り除くかはデータ解析のところで詳しく述べることにする。

3. コイル

900mm(width) × 494mm(depth) × 134mm(height)

このコイルはメインコイル、サブコイル1、サブコイル2によって構成されていて、図4の左右15cm(width)の領域にサブコイル1、2がそれぞれ配置され、中央の50cm(width)×40cm(height)の領域で一様な磁場が発生するように設計されている。

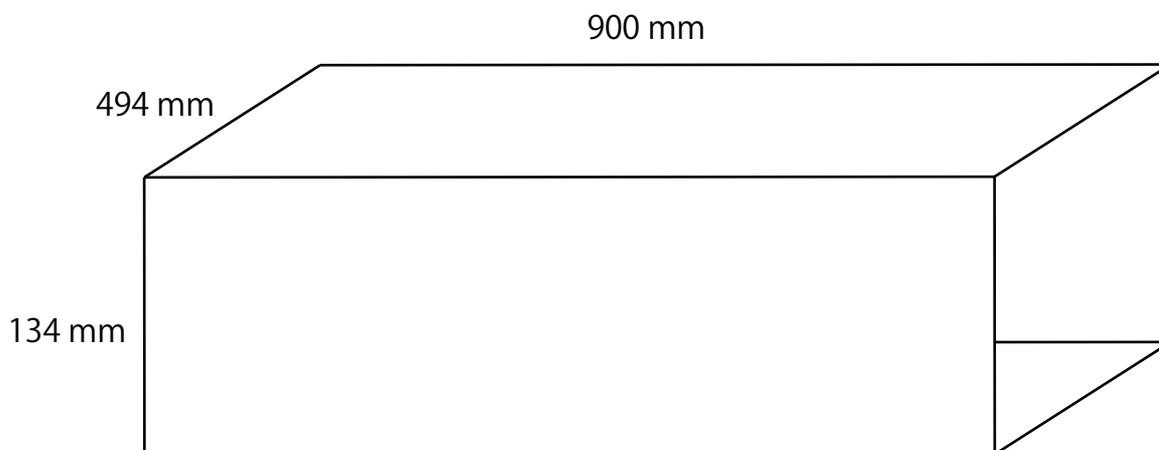


図 4: コイルの図

3.2 装置の設定

1. PMT のプラトー測定

上で述べたように μ がシンチレータを通過したにもかかわらず PMT が反応しないということがありうる。この点について詳しく考えよう。

光をキャッチした PMT がその光をどの程度の電気信号に変えられるかは PMT にかかっている電圧に依存する。つまり、電圧が高くなると同じ光でも強い電気信号に変換される。

したがって、電圧を上げれば上げるほど”実際にはシンチレータを通過したのに観測されない”というようなイベントは減るはずである。

それではできるだけ電圧を上げればよさそうに思うが電圧を上げすぎると別の問題が存在する。電圧を高くしすぎた場合 PMT はアフターパルスを出しやすくなる。アフターパルスとは光を受けた PMT が出す信号のうち 2 回目以降に出す信号である。アフターパルスの影響が大きいところのデータは解析で使うことが出来ない。したがって、電圧を上げすぎると使い物にならないデータが増えることとなる。そこで我々は電圧を可能な限り多くのイベントが取れるよう、しかし必要以上に高くないよう設定した。

またディスクリミネータの閾値も検出効率とアフターパルスの制御において重要である。すなわち閾値を上げればまた閾値にも依存するので今回の閾値は-20.1mV であることに注意する。

次のように各 ch で「他の PMT になる時にその ch の PMT になる割合」をあらわす efficiency を定義する

ch1 : 2 \cap 3 \cap 5 のカウント数で 1 \cap 2 \cap 3 \cap 5 のカウント数を割ったもの

ch2 : 1 \cap 4 \cap 5 のカウント数で 1 \cap 2 \cap 4 \cap 5 のカウント数を割ったもの

ch3 : 1 \cap 4 \cap 5 のカウント数で 1 \cap 3 \cap 4 \cap 5 のカウント数を割ったもの

ch4 : 1 \cap 2 \cap 3 のカウント数で 1 \cap 2 \cap 3 \cap 4 のカウント数を割ったもの

ch5 : 1 \cap 2 \cap 3 のカウント数で 1 \cap 2 \cap 3 \cap 5 のカウント数を割ったもの

(ここでは ch1 を 1 などと省略している)

そして下のグラフから HV の変更による efficiency の推移がわかるので、ch1 を 2004mV、ch2 を 1801mV、ch3 を 1800mV、ch4 を 2001mV、ch5 を 1999mV とすることに決めた。

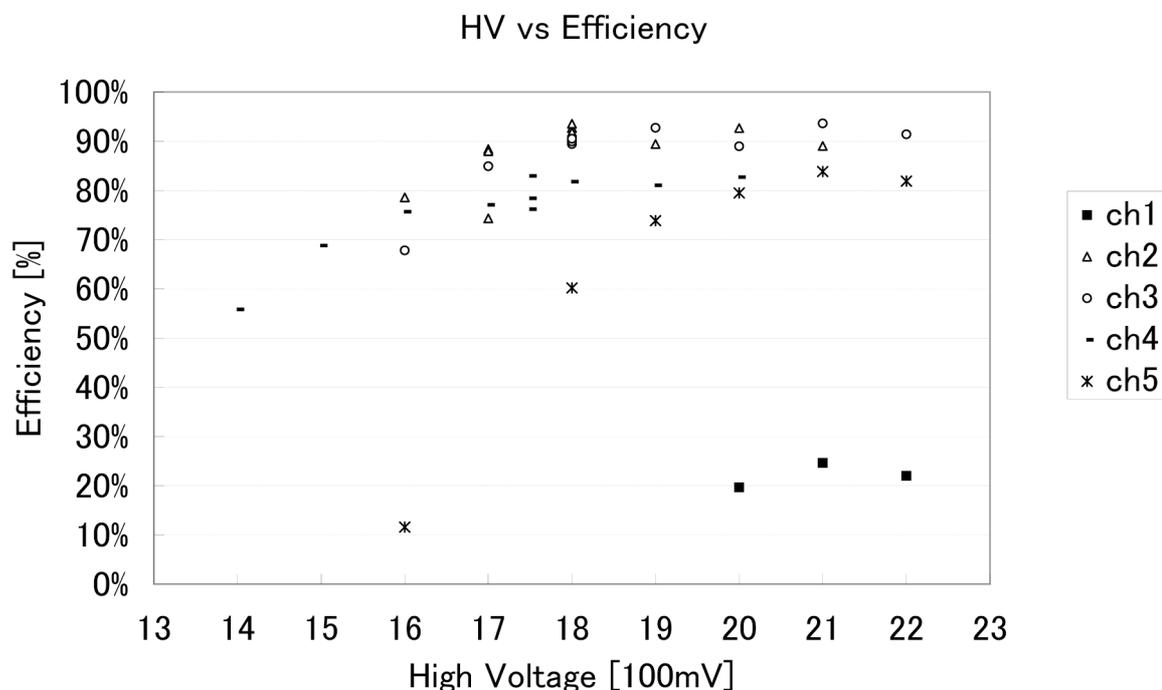


図 5: HV

2. 磁場の設定

磁場は図で見て上側にかける場合と下側にかける場合がある。どちらの場合でもかける磁場の強さは同じである。(参考文献 [P1]) によるとこのコイルではメインを 20A、サブ 1 を 1.2A、サブ 2 を 1.1A と設定したとき、中央の 50cm(width)×40cm(height) の領域において 54.1 ± 0.2 (測定誤差) ± 1.7 (系統誤差) Gauss の磁場が発生する。磁場の強さは電流に比例することから、今回メインを 16A、サブ 1 を 0.96A、サブ 2 を 0.88A と設定したので、中央の 50cm×40cm の領域において 43.3 ± 0.18 (測) ± 1.7 (系) Gauss の磁場が発生する。

4 実験データの解析

4.1 測定データ

測定によって得られた生のデータが直接解析に使えるわけではない。ここでは適切なデータの処理を行って、生データからほしい情報を得る方法について述べる。

寿命の測定におけるデータを例に取る。図 6 は 3/4 ~ 3/6 における測定データ (30000nsec 以下) である。

イベント数は ch2 で 256443events, ch3 で 96147events, ch4 で 180849events, ch5 で 15591events である。これはアフターパルスや環境放射線などのノイズを多く含んでいる。

また PMT ごとの個体差があるものの、上に置いた PMT のほうが下に置いた PMT よりもイベント数が多くなっていることが分かる。これは TDC のトリガーを「上のシンチレータが鳴って下のシンチレータが鳴らない」としたためである。つまり、下の PMT にはアフターパルスから生じるノイズは無い。

本当にほしいデータは、陽電子が崩壊したことによる信号だけである。このようなイベントでは ch2 と ch3、あるいは ch4 と ch5 は同時に反応するはずである。

そこで $(t_2 - t_3)$ のデータを図 7 に示す。

図 7 のグラフを見れば、 $(t_2 - t_3)$ は 0 を中心として 1000nsec 程度の領域にピークを持っている。そこでこの領域に制限してプロットしたものが下のグラフである。さらに下のグラフを見れば $(t_2 - t_3)$ のピークはさらに狭く、100nsec 程度の広がりであることが分かる。また ± 400 nsec 辺りにもピークが存在する。これはアフターパルスによるピークであると考えられる。そこで $(t_2 - t_3)$ を ± 1000 nsec 程度以下の領域でプロットしたグラフを図 8 に示す。

図 8 のグラフを見れば $(t_2 - t_3)$ のピークは正確には 0 では無く、30nsec 程度遅れていることが分かる。そこで、30nsec 程度早めたグラフをさらに狭い領域でプロットしたものが下のグラフである。

$(t_4 - t_5)$ のデータを図 9 および図 10 に示す。

徐々にピークを狭めていくのは $(t_2 - t_3)$ の場合と同じである。

これらのピークは ch2 と ch3 あるいは ch4 と ch5 が同時に反応したイベントである。 μ 崩壊のイベントはこれらのピークの中にもみ存在するはずなので、 $|t_2 - t_3 - 2| < 5$ ($|t_2 - t_3 - 2|/60 * 1000 < 83$) という条件の下での ch2 と、 $|t_4 - t_5| < 5$ ($|t_4 - t_5|/60 * 1000 < 83$) という条件の下での ch4 をプロットする。これが図 11 である。

この制限を加えたことによってイベント数は ch2 が 11792events, ch4 が 13328events になった。このカットは ch2 と ch3 あるいは ch4 と ch5 が同時に鳴ることを要求するので、これ以降 ch3 や ch5 のデータは必要ない。

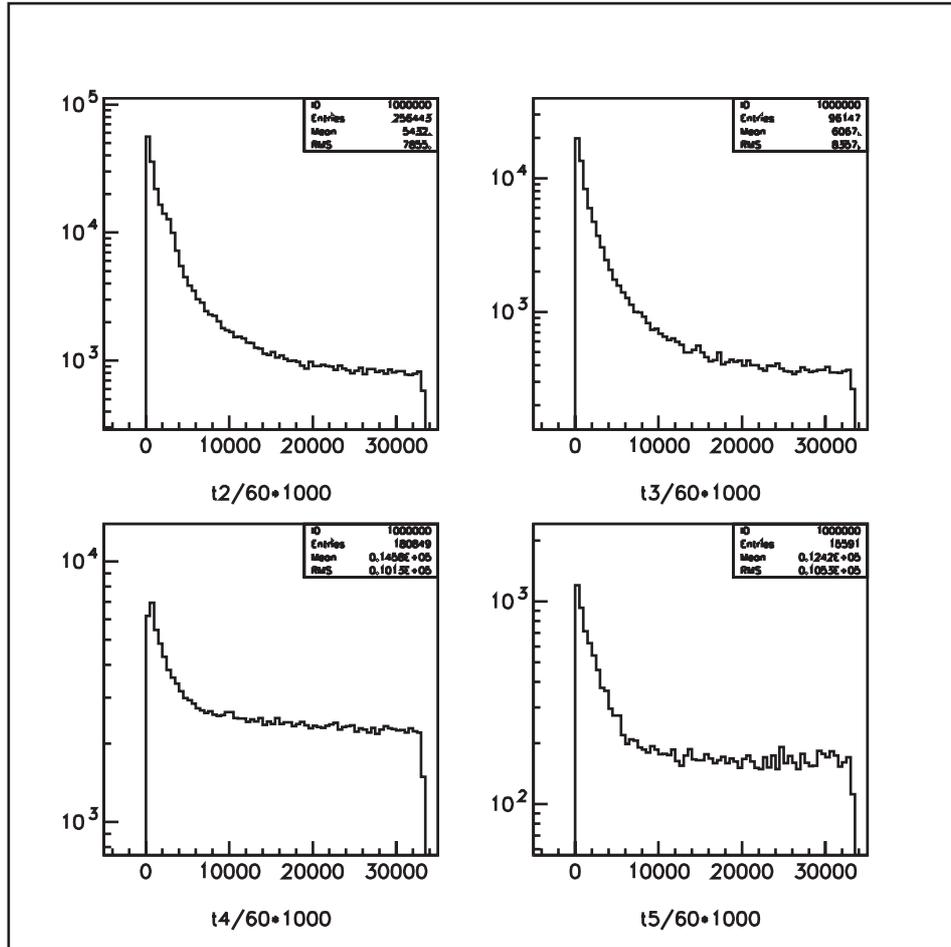


図 6: 未処理データ

ところで、陽電子以外の放射線がシンチレータにかかってしまうというイベントも存在するはずである。このようなイベントは、多くの場合放射線が上と下両方のシンチレータを通過することから ch2 と ch4 が同時に鳴る。これは μ 崩壊ではありえないことである。陽電子は上か下のどちらか一方のシンチレータのみを通過する。

そこで $(t2 - t4)$ のデータを図 12 に示す。

$(t2 - t4)$ は 0 を中心に 1000nsec 程度の領域にピークがある。これを詳しく見たものが図 13 のグラフである。再びこれを 100nsec 程度あるいは 50nsec 程度の領域に制限してプロットすると図 13 のようになっている。

こうして $|t2 - t4| > 5$ というカットを入れて再び ch2 のデータと ch4 のデータをそれぞれ図 14 と図 15 にプロットした。

この時のイベント数は ch2 が 9404events, ch4 が 11175events になった。

ここまでのカットを入れてもなお環境放射線に由来したノイズの一部は残っている。このようなバックグラウンドをデータのカット等によって取り除く方法は分からなかった。そこでこれらのバックグラウンドは定数であると仮定して、データを fitting する関数に定数項を加えることで対処した。

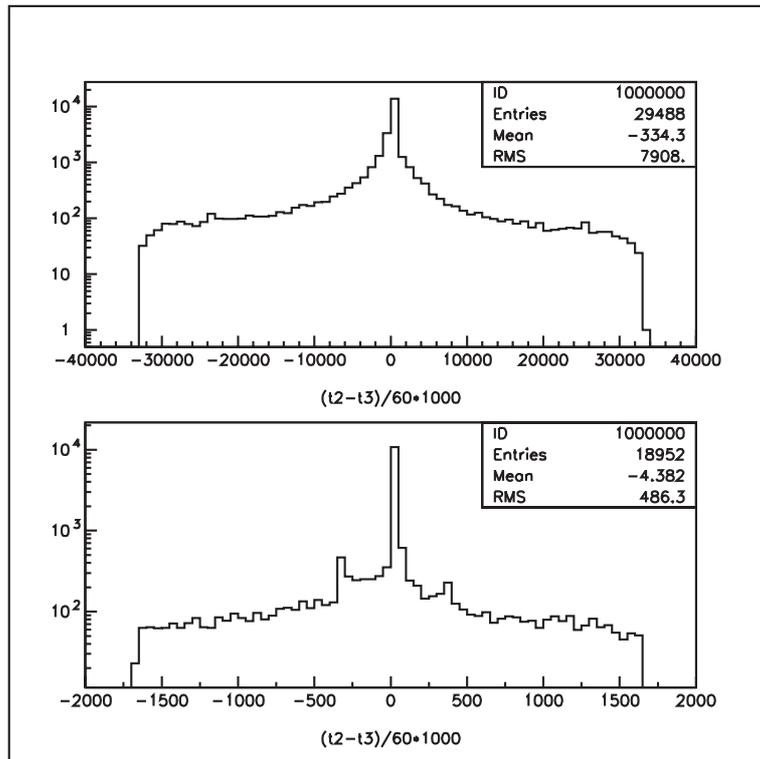


图 7: $t_2 - t_3$ (1)

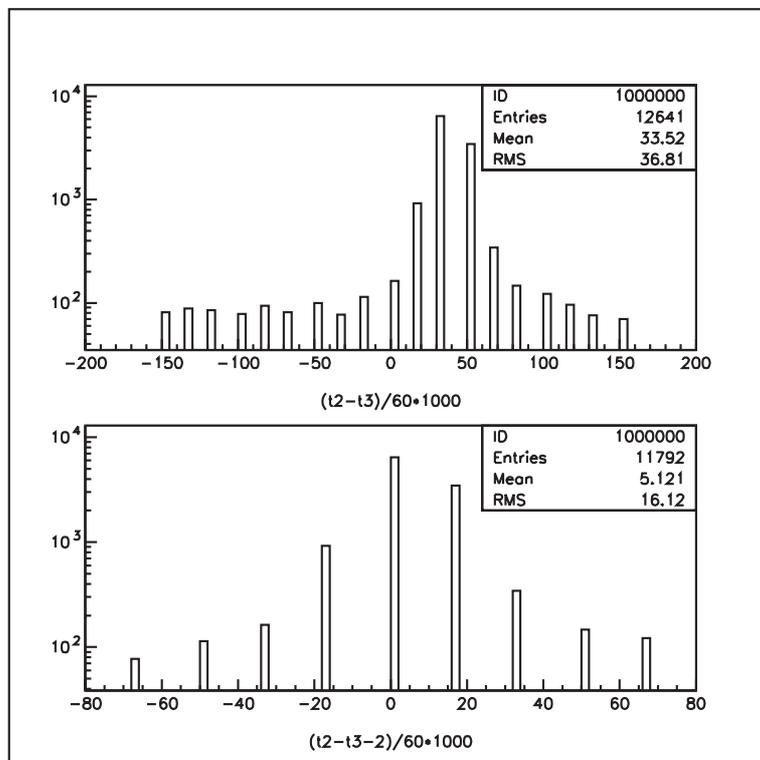
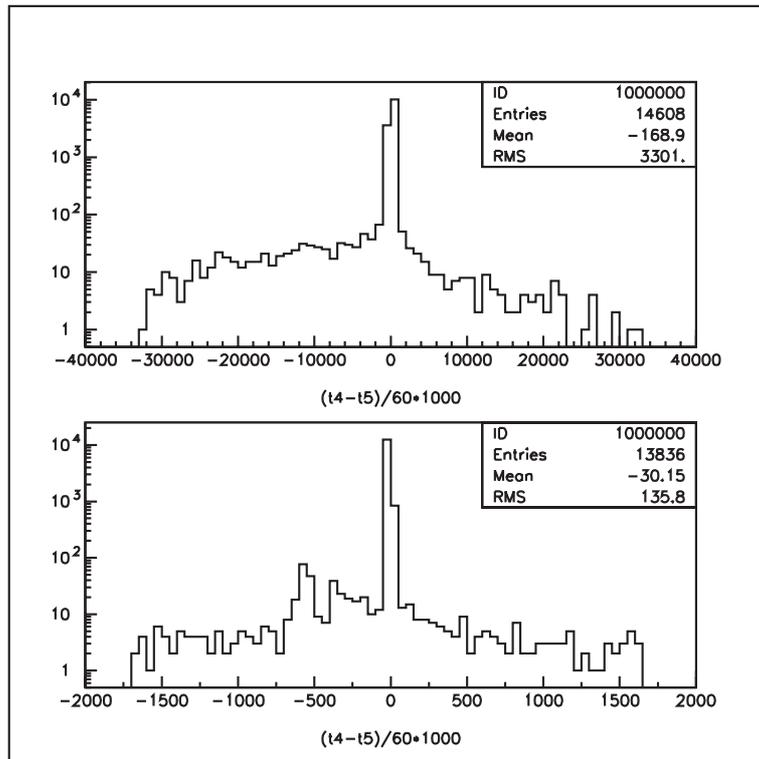
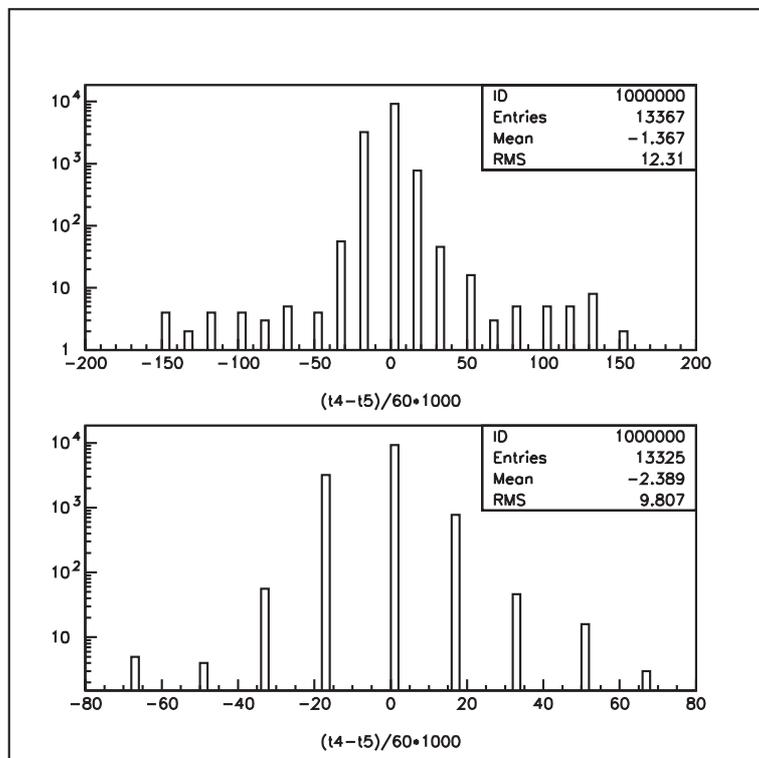


图 8: $t_2 - t_3$ (2)



☒ 9: $t_4 - t_5$ (1)



☒ 10: $t_4 - t_5$ (2)

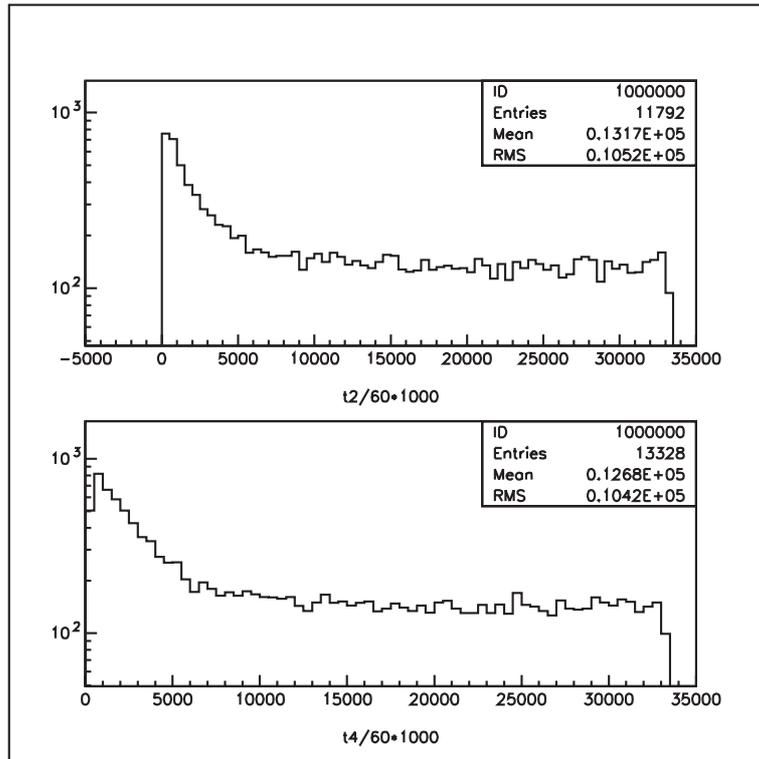


図 11: コインシデンス後

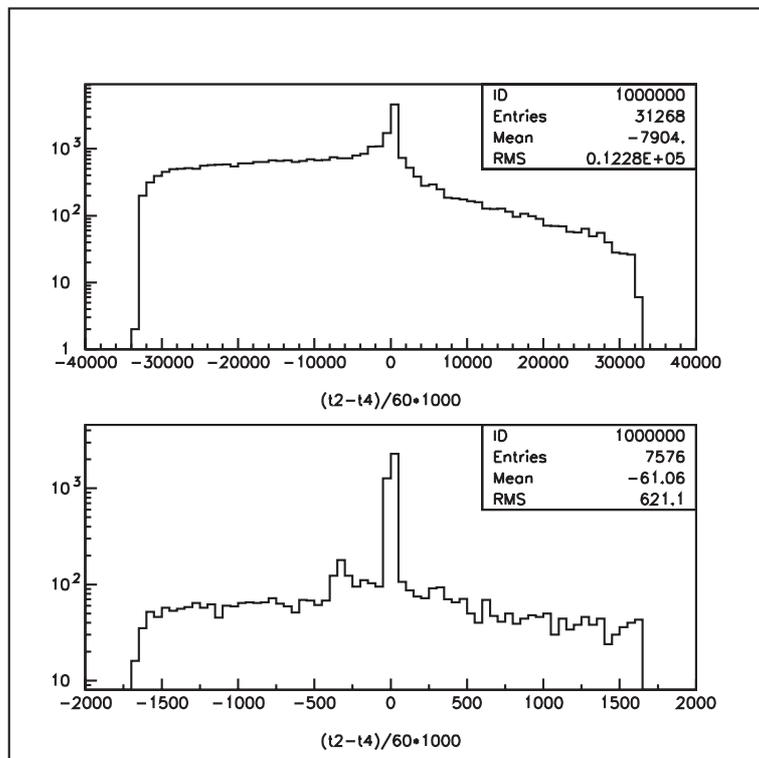


図 12: $t_2 - t_4$ (1)

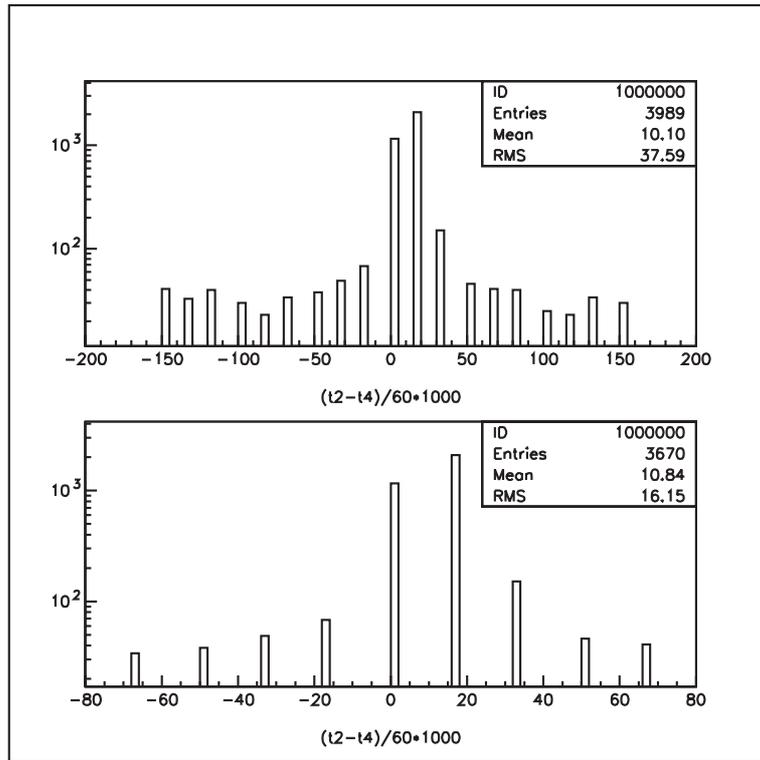


図 13: $t_2 - t_4$ (2)

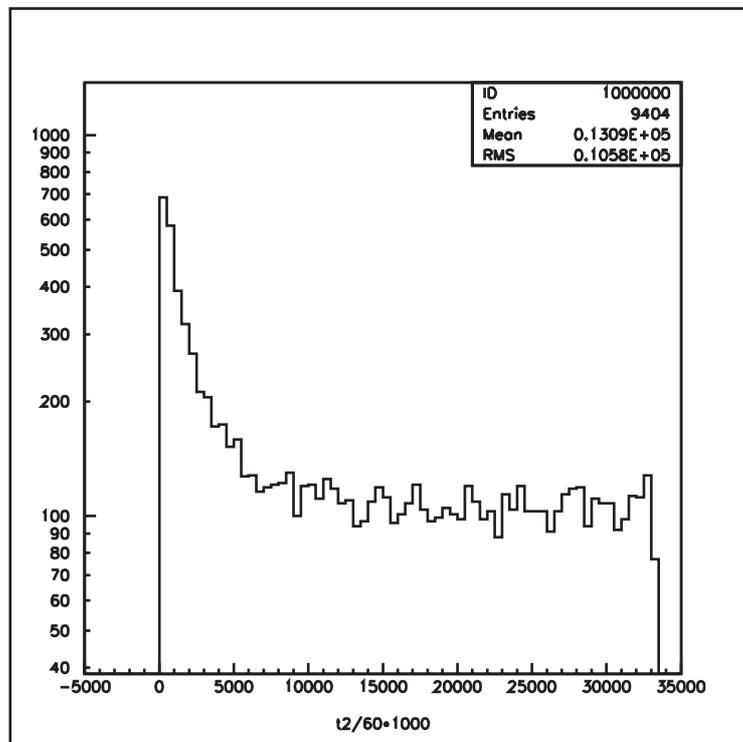


図 14: 貫通した放射線除去後の ch2

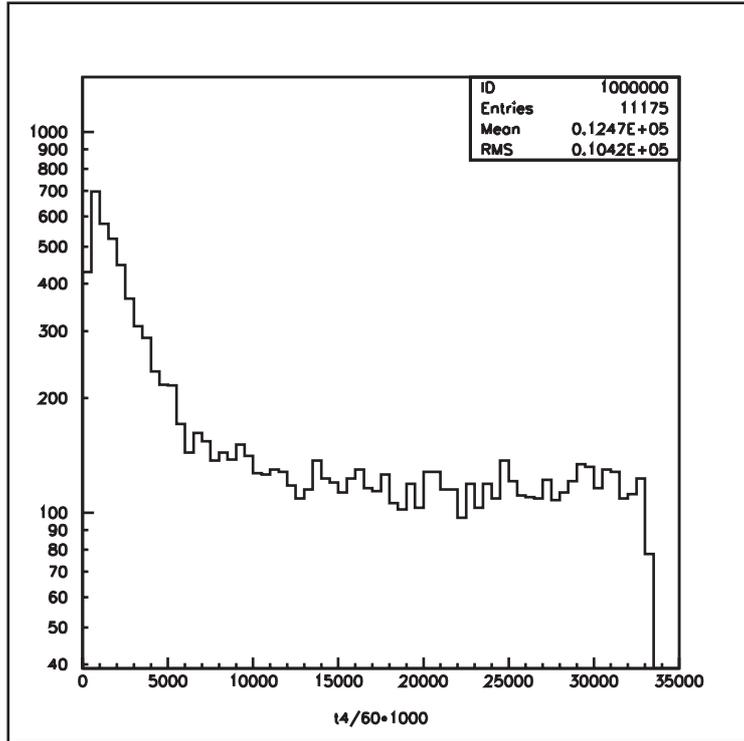


図 15: 貫通した放射線除去後の ch4

また、最初の $2\mu\text{sec}$ くらいまではアフターパルスなどのノイズが非常に多い。さらに、この辺りまでは μ^+ の崩壊だけではなく μ^- (Cu 中での寿命 $0.16\mu\text{sec}$) の崩壊によるイベントも多くある。そこでこれらの影響を除くために t_2 と t_4 で、それぞれはじめの $2\mu\text{s}$ 、 $1\mu\text{s}$ をカットした。このカットの違いはアフターパルスの影響の違いによる。なぜならば上述の通り t_2 は t_4 よりもアフターパルスが多いからである。そのときそれぞれ 図 16 や図 17 のようになった。

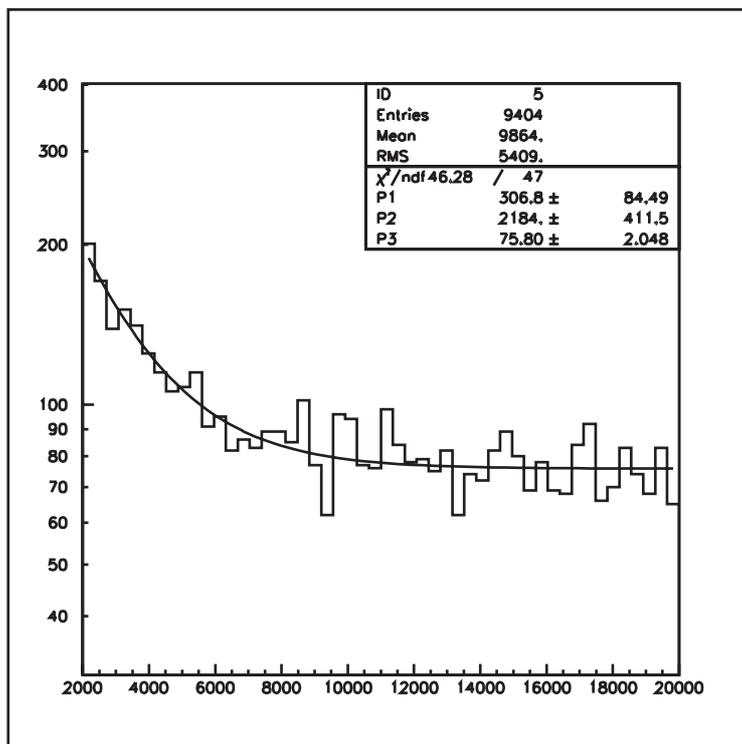


図 16: 2 μ sec 後の ch2

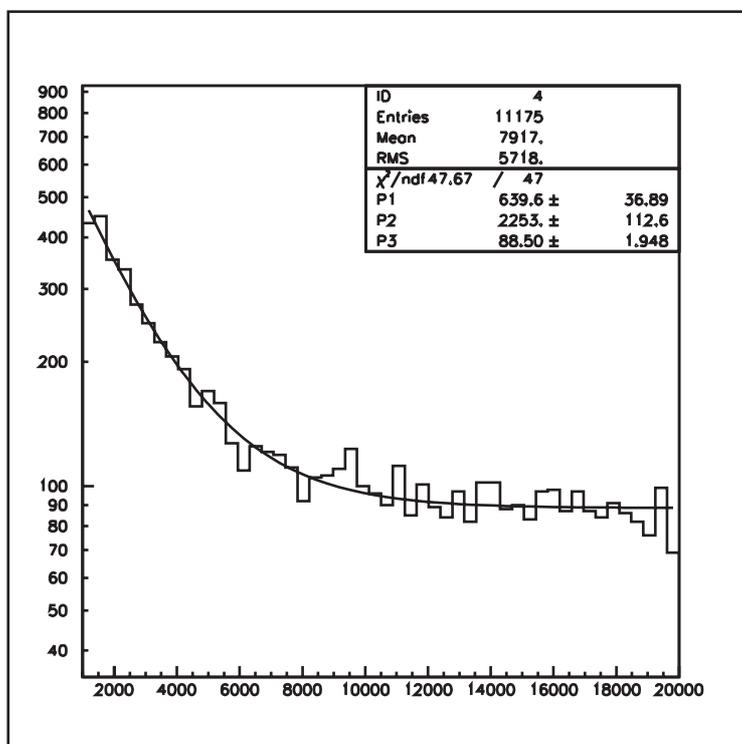


図 17: 1 μ sec 後の ch4

磁場があるときのデータ解析も同様である。ただしこの場合は1次元ヒストグラムを作る際に、1区間の幅をどうするかが重要となる。なぜならば後述するように、磁場がある場合のデータで見たいのは指数的な減衰ではなく sin カーブだからである。上手く振動の周期にあった幅を選ばなければきれいに振動数が見えない。

4.2 μ の寿命

μ の崩壊は弱い相互作用による確率現象なので、 N をイベント数、 τ_μ を μ の寿命としたとき、原子核の放射性崩壊の時を類推して

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau_\mu}$$

$$\therefore N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\mu}\right)$$

よって、 μ の寿命は、 μ^+ の入射時刻を $t = 0$ として e^+ が観測にかかった時刻を測定し、そのイベント数の落ちるスピードを指数関数に fit することで求めればよい。だが、実際にはアフターパルスやバックグラウンドがあるので

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\mu}\right) + R_0$$

という関数でアフターパルスの影響が少ないところでフィットする必要がある。

表 1: μ の寿命

	t_2	t_4
N_0	306.8 ± 84.49	639.6 ± 36.89
$\tau[nsec]$	2184 ± 411.5	2253 ± 112.6
R_0	75.80 ± 2.048	88.50 ± 1.948

4.3 μ^+ の g 因子測定

48G の磁場をかけることによって μ^+ の崩壊時に放出される電子の歳差運動の振動数を測定することにより、 μ の g 因子を求めた。はじめ上向きの磁場を 1 週間、下向きの磁場を 2 週間、最後にまた上向きの磁場を 1 週間と、上・下それぞれ 2 週間ずつデータを収集した。集めたデータを PAW で解析した。データをフィットするのに次の関数を用いた。

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\mu}\right) \{1 + \alpha \cos[\omega(t + t_0)]\} + R_0$$

ところで、 t_0 は μ がシンチレータを鳴らしてから TDC が動き出すまでの時間差に起因する。すなわち、 t_0 は回路を通したトリガー信号と生信号の時間差および信号が入ってから TDC が動き始めるまでの時間差から生じている。後者の時間差はほとんど無かったので、 t_0 の原因は回路を通し

たトリガー信号と生信号の時間差 200nsec である。こうして t_0 は固定できた。

また、寿命も約 2200nsec であることが分かっているので τ_μ も固定した。さらにバックグラウンドの高さも固定することが出来る。これには一度

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{2200}\right) \{1 + \alpha \cos[\omega(t + 200)]\} + R_0$$

によって fitting を行い、そのときの R_0 の値 (有効数字 1 ケタ) に固定する。その様子を図 18 に示す。

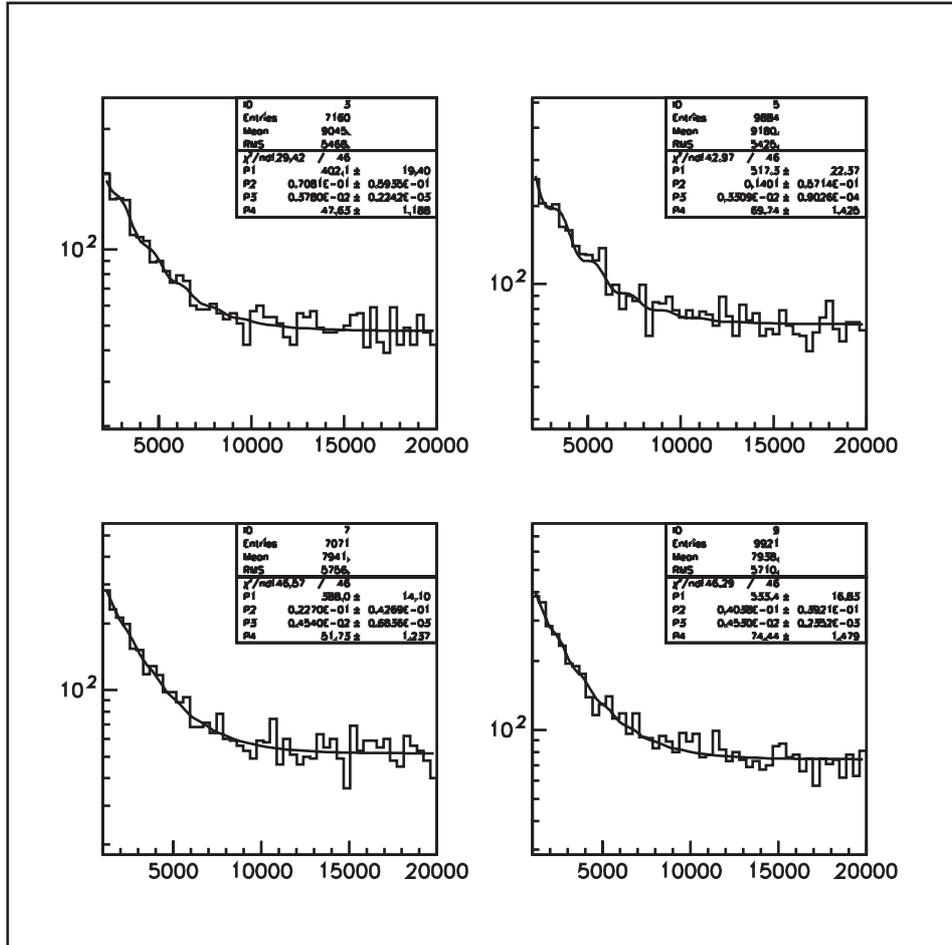


図 18: R_0 を固定するためのフィッティング

この後

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{t}{2200}\right) \{1 + \alpha \cos[\omega(t + 200)]\} + R_0^{(fixed)}$$

によってデータフィッティングを行った。

上磁場 ch2、下磁場 ch2、上磁場 ch4、下磁場 ch4 をフィッティングした結果がそれぞれ図 19、図 20、図 21、図 22 である。

得られた結果、おおよそそこから求まる g 因子の値は下に表にしてまとめておく。

表 2: 上向き磁場

	t_2	t_4
N_0	389.1 ± 17.65	367.8 ± 17.24
α	$0.7244 \times 10^{-1} \pm 0.5984 \times 10^{-1}$	$-0.1008 \pm 0.6986 \times 10^{-1}$
$\omega[nsec^{-1}]$	$0.3812 \times 10^{-2} \pm 0.1901 \times 10^{-3}$	$0.3441 \times 10^{-2} \pm 0.1473 \times 10^{-3}$
g -factor	2.066 ± 0.1030	1.865 ± 0.07983

表 3: 下向き磁場

	t_2	t_4
N_0	511.1 ± 20.16	502.2 ± 19.94
α	$-0.7547 \times 10^{-1} \pm 0.5771 \times 10^{-1}$	$0.1502 \pm 0.6024 \times 10^{-1}$
$\omega[nsec^{-1}]$	$0.4554 \times 10^{-2} \pm 0.3242 \times 10^{-3}$	$0.4835 \times 10^{-2} \pm 0.9406 \times 10^{-4}$
g -factor	2.468 ± 0.1757	2.621 ± 0.05098

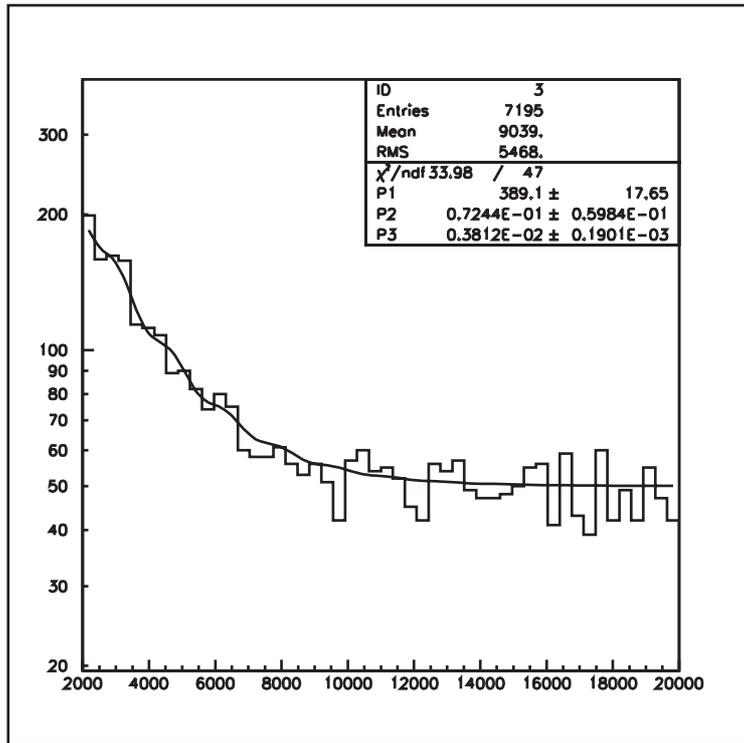


図 19: 上磁場 ch2

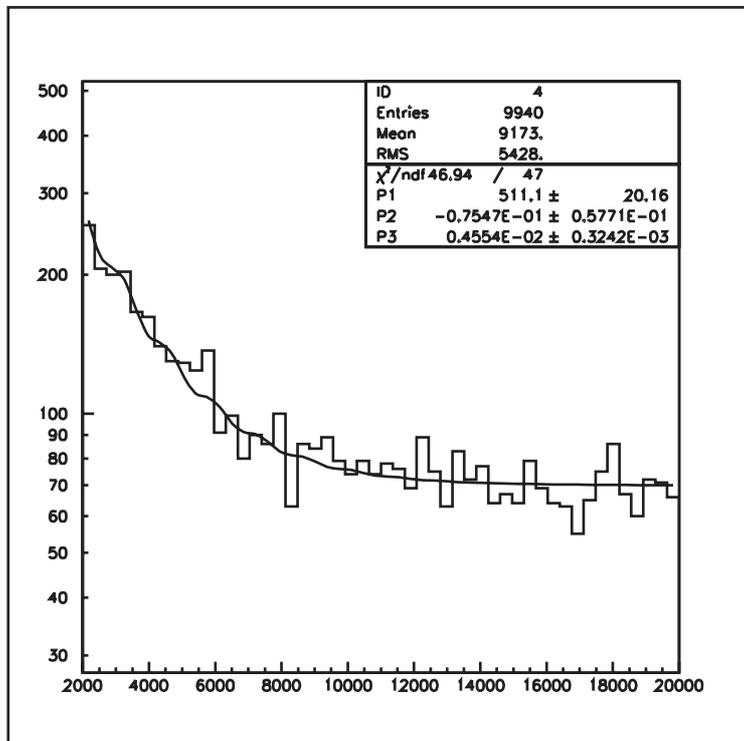


図 20: 下磁場 ch2

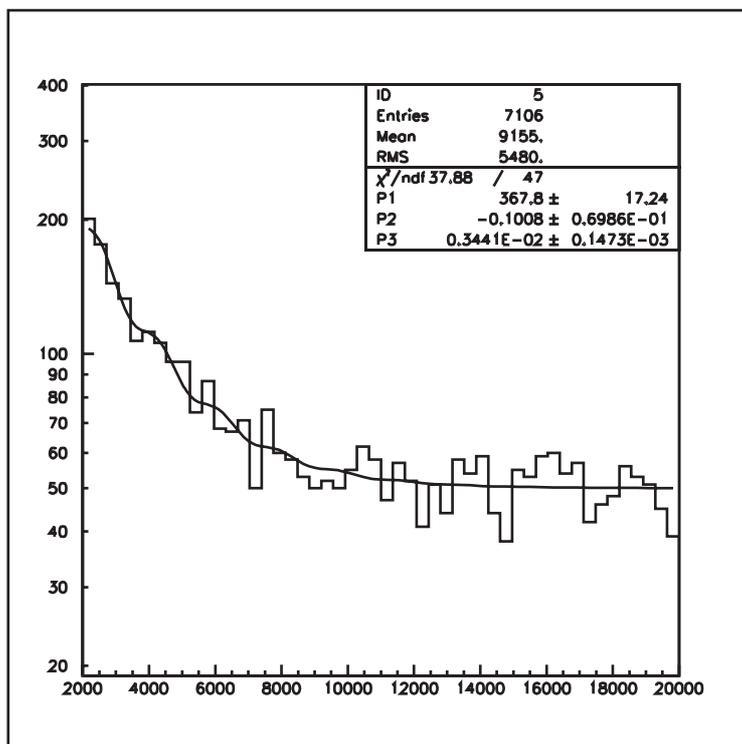


图 21: 上磁場 ch4

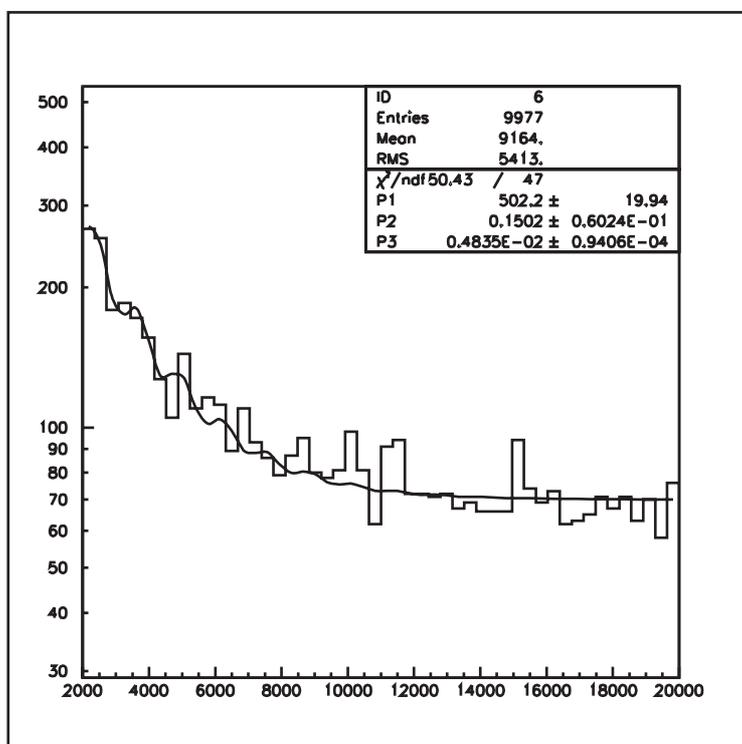


图 22: 下磁場 ch4

5 実験結果と考察

5.1 検出効率

全体のイベント数に対する μ のイベント数の割合は非常に小さい。例えば磁場なしのデータの場合、エントリーしたイベント数は 500000 であるが、 t_2 で検出された μ のイベント数は「 t_3 とのコインシデンス」、「 t_4 と同時計測したものを排除」と「アフターパルスの多い $2\mu\text{sec}$ 未満、不要なバックグラウンドの $20\mu\text{sec}$ 以上の排除」を行って（グラフを用いた外挿によるものだが）真の μ の崩壊イベント数は 1500 という結果を得る。これは 10 秒当たりのイベント数が 90 であり測定時間がおよそ 36 時間であったことから、 μ^+ が静止したと思われるイベント数は約 1100000 であり、1500 という数字はその約 0.1% にあたる。これはシンチレータ A を下げて測定した磁場なしのときのレートであり、磁場ありの場合はもう少し高いレートでとれていたと考えられる。

5.2 実験結果

今までに得られた μ の寿命と g 因子をまとめる。

表 4: μ の寿命

	t_2	t_4
$\tau[nsec]$	2184 ± 411.5	2253 ± 112.6

表 5: 上向き磁場

	t_2	t_4
g -factor	2.066 ± 0.1030	1.865 ± 0.07983

表 6: 下向き磁場

	t_2	t_4
g -factor	2.468 ± 0.1757	2.621 ± 0.05098

これらのデータに適切な平均操作を行って今回の実験値を出し、理論値との比較を行う。

まず、2 つのデータから誤差を最小とするような平均のとり方を考える。ある 2 つの量とその誤差 $\tau_A \pm \delta_A$ と $\tau_B \pm \delta_B$ から

$$\tau \equiv (1-n)\tau_A + n\tau_B \quad (0 \leq n \leq 1)$$

という平均を定める。 τ の誤差を δ とすると、誤差の伝播則から

$$\delta^2 = (1-n)^2\delta_A^2 + n^2\delta_B^2$$

を得る。この誤差は

$$n = \frac{\delta_A^2}{\delta_A^2 + \delta_B^2}$$

のときに最小値

$$\delta_{min}^2 = \frac{\delta_A \delta_B}{\sqrt{\delta_A^2 + \delta_B^2}}$$

をとる。このときの τ の値は

$$\tau = \frac{\delta_B^2 \tau_A + \delta_A^2 \tau_B}{\delta_A^2 + \delta_B^2}$$

と求まる。

この結果を今回の実験で得られた値に適用すると以下ようになる：

表 7: 結果

$\tau[\mu sec]$	g -factor
2.248 ± 0.1086	2.358 ± 0.0387

ただし g 因子は磁場上向きと磁場下向きするときそれぞれで平均をとった後に改めて平均をとった。

ところで、知られている理論値は $\tau = 2.197(\mu sec), g = 2.002$ である。したがって τ の実験値は誤差の範囲で理論値と一致している。しかし g 因子は理論値よりも大きい値で、誤差の範囲には収まらない結果であった。これは、統計量の少なさなどが原因である。しかしながら単にイベントの数が足りなかったことだけではなく、fitting にも問題があったと考えられる。この点に関しては後述する。(反省点を参照)

5.3 シンチレータの高さを変えたことによる影響

以前、シンチレータ A の高さの設定が重要であることを述べた。なぜならば高すぎるとイベント数が減少し、低すぎるとスピン歳差運動による振幅が小さくなるからであった。我々は、(参考文献 [P1]) の 2m と比較して 1m に設定した。この設定のもとで 24 日間データを取ったが、偏極度についての誤差が(参考文献 [A1]) の値よりも大きかった。データを取った日数の差(参考文献は 49 日間)もあるが、今回の設定では高さを下げたことによるデメリットが大きかったと思われる。そこで、どのような高さにシンチレータ A を置けば最も効率(”単位時間当たりの μ の入射数 $\times \mu$ の偏極度”を銅板全体について積分したもの)が最大になるのかをあらかじめ考えておくべきだった。(ここで定義した効率がどこまで妥当なものかは甚だ疑問であるが)

しかしながら、この値の計算には地表における μ の偏極度、 μ の角度分布等の情報が必要である。これらについては μ は運動量方向に 100 % 偏極しており、 μ はどの方向からも等確率で飛んでくると仮定する。このような仮定をにおいても、有限の大きさを持つ銅板に対しての効率を求めることは非常に難しい。そこでさらにシンチレータの形は円であるとし、無限に小さい銅板がその中心軸上にあるという状況を考えた。ここまで極端な設定にすると実験結果と比較できるような結果は出ないが、上で議論した直感的なシンチレータの高さと効率の関係と定性的に一致する。

シンチレータの半径を a 、シンチレータの高さを h とし $\tan \theta = a/h$ とおく。このとき、銅板が

ら見たシンチレータの立体角は $2\pi(1 - \cos\theta)$ である。 μ の角度分布がフラットであるという仮定から単位時間当たりの入射 μ の数はその立体角に比例するはずである。よって、単位時間当たりの μ の入射数は $(1 - \cos\theta)$ に比例する。

次に μ の偏極度を計算しよう。角度 θ' と $\theta' + d\theta'$ の間の角度で入射してくる μ の割合は

$$2\pi(h \tan \theta')d(h \tan \theta') \cos \theta'$$

に比例している。従って偏極度 P は θ' について 0 から θ まで積分したものに比例する：

$$\begin{aligned} P &\propto \int_0^\theta 2\pi(h \tan \theta')d(h \tan \theta') \cos \theta' \\ &= 2\pi h^2 \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) \end{aligned}$$

偏極度は $h \rightarrow \infty$ の極限で 1 に近づくように規格化すれば

$$\begin{aligned} P &= 2 \frac{h^2}{a^2} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{\tan^2 \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) \end{aligned}$$

となる。

こうして効率 $f(\theta)$ は

$$f(\theta) \propto \frac{\cos \theta(1 - \cos \theta)}{1 + \cos \theta}$$

となることが分かる。ここで $\cos \theta$ は 0 から 1 までを動く。

この関数は $\cos \theta \rightarrow 0$ あるいは $\cos \theta \rightarrow 1$ の極限で 0 に近づく。これはシンチレータを上げすぎても下げすぎても効率が下がる様子を表している。一方この関数は $\cos \theta = \sqrt{2} - 1$ に唯一の極大を持つ。このとき、 a と h の間には

$$h = a\sqrt{2(\sqrt{2} + 1)}$$

という関係が成り立つ。状況設定が極端なのでこの定量的関係に意味は無いが、適切な高さを選ぶことで効率を最大にすることが出来ることを表している。

今回用いたシンチレータは長方形で大きさは $100\text{cm} \times 50\text{cm} = 5000\text{cm}^2$ なので、円で言えば半径は約 40cm である。よって、上の関係を信用するならばシンチレータの高さは約 90cm に設定すればよいことになる。

銅板に大きさを持たせたり、もっと複雑な形のシンチレータを考えるにはシミュレーションなどを行えばよいと思われる。あるいはもう少し直接的な方法も考えることが出来る。シンチレータの高さを変えながら、それぞれの高さで一定時間（上磁場 10 日+下磁場 10 日の 20 日程度で十分だと思われる）測定した際の偏極度についての誤差を調べればよい。偏極度についての誤差と、ここで定義した効率の定量的な関係は分からなかった。しかし今回のデータ解析において偏極度につく誤差が最も大きかったことから、一定期間の測定における偏極度の誤差の大きさはその測定の効率と関係していると思われる。したがって、この方法でシンチレータの高さと効率の関係を実験的に測定できると考えられる。

5.4 反省点

1. データ数の不足

今回の実験で最も問題だったのは、装置のセットアップに時間を取られて十分なイベントが稼げなかったところにある。測定時間さえ十分にあればシンチレータ高さを下げてイベントレートを増やす必要も無かった。

2. fitting の手法

今回の実験では PAW を使って得られたデータの fitting を行った。PAW はデータの fitting を行う際にどの時刻までが μ の崩壊によるイベントが支配的で、どの時刻からはバックグラウンドによるイベントが支配的であるかは識別しない。寿命の解析ではこの点はあまり問題とならなかった。しかし g 因子の解析ではこのような fitting の仕方はまずいのではないかとされる。 g 因子の測定では指数関数周りでの振動の周期を知る必要があった。このため μ がなくなったところまで fitting の範囲に入れると、バックグラウンドの揺らぎまで fitting の領域に入ってしまうので、本当の周期がわかりにくくなる。

この問題点は上磁場データと下磁場データの差をとるとき、特に深刻になる。なぜならば差をとらない片側だけのデータを解析するときに用いた関数はバックグラウンドを定数と見ており、sin 関数は μ のイベントである指数関数にのみついていた。

しかし差のデータでは 0 の周りでの揺らぎを調べており、バックグラウンドは完全に相殺したとして fitting 関数を選んでいる。言い換えれば sin 関数は μ の崩壊だけではなくバックグラウンドにもついていることになる。このような関数を用いて差のデータを fitting すればバックグラウンドの揺らぎによってスピン歳差の周期はほとんど見えなくなってしまう。

その反省を踏まえて Appendix.B では差のグラフを μ のイベントのあるところ ($2.0\mu\text{sec}$ から $8.0\mu\text{sec}$) のみで fitting を行った。この解析が Appendix に回っている理由はデータ fitting に用いた範囲をより狭くした結果、統計がさらに減ったためである。振幅についた誤差の大きさからいっても Appendix の結果はそれほど信用できない。もしさらに時間をかけてイベントを増やすことが出来れば差のグラフから信用できる g 因子の実験値が得られると思われる。

6 謝辞

この実験を行うにあたって中家先生、横山先生、TA の河崎さんには様々なご助言およびご指導を頂きました。この場を借りて、皆様にお礼を申し上げます。ありがとうございました。

A 実験原理に関する補足

A.1 μ^+ の微分崩壊率

μ^+ は弱い相互作用によって次のように崩壊する。

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

この反応の（ニュートリノの運動量・スピン、および電子のスピンについて積分した）微分崩壊率を求める。

この反応を引き起こす相互作用 Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\rho^+ \left(\bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\rho \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_l \right)$$

なので

$$\mu^+(\mathbf{p}_\mu, s_\mu) \rightarrow e^+(\mathbf{p}_e, s_e) + \bar{\nu}_\mu(\mathbf{k}_\mu, r_\mu) + \nu_e(\mathbf{k}_e, r_e)$$

に対応した Feynman ダイアグラムは摂動の 0 次で図 23 のようになり、その不変散乱振幅は

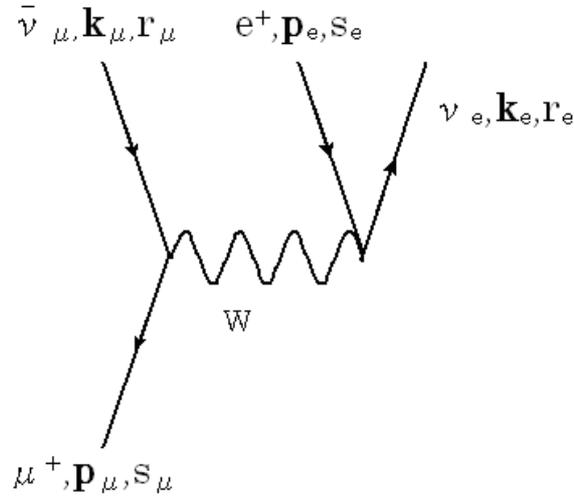


図 23: μ 崩壊

$$\mathcal{M} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\frac{\bar{v}_\mu(\mathbf{p}_\mu, s_\mu)}{(2\pi)^{3/2}} \gamma^\rho \frac{1-\gamma_5}{2} v_{\nu_\mu}(\mathbf{k}_\mu, r_\mu) \right] \frac{g_{\rho\sigma}}{-q^2 + M_W^2} \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\frac{\bar{u}_{\nu_e}(\mathbf{k}_e, r_e)}{(2\pi)^{3/2}} \gamma^\sigma \frac{1-\gamma_5}{2} v_e(\mathbf{p}_e, s_e) \right]$$

である。ここで q 、 M_W はそれぞれ W ボソンの 4 元運動量と質量である。またレプトンを区別するラベルとして、Pauli-Lubanski ベクトル W^μ と不変長が -1 で粒子の 4 元運動量と直交する適当な e_μ から定義される $-e \cdot W$ の固有値を使った。(Appendix A.2)

この反応では $q^2 \ll M_W^2$ であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^6} [\bar{v}_\mu(\mathbf{p}_\mu, s_\mu) \gamma^\rho (1-\gamma_5) v_{\nu_\mu}(\mathbf{k}_\mu, r_\mu)] [\bar{u}_{\nu_e}(\mathbf{k}_e, r_e) \gamma_\rho (1-\gamma_5) v_e(\mathbf{p}_e, s_e)] \\ \frac{G}{\sqrt{2}} &= \frac{g^2}{8M_W^2} \end{aligned}$$

となる。
よって

$$\begin{aligned}
& \overline{|\mathcal{M}|^2} \\
&= \sum_{s_e, r_e, \Gamma_\mu} |\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{G^2}{2(2\pi)^{12}} \text{tr} \left[\frac{1}{2p_\mu^0} (\not{p}_\mu - m_\mu) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}_\mu}{2} \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \frac{1}{2k_\mu^0} \not{k}_\mu \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) \right] \\
&\quad \times \text{tr} \left[\frac{1}{2p_e^0} (\not{p}_e - m_e) \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \frac{1}{2k_e^0} \not{k}_e \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \right] \\
&= \frac{G^2}{4(2\pi)^{12}} \frac{1}{16p_\mu^0 p_e^0 k_\mu^0 k_e^0} \text{tr} [(\not{p}_\mu - m_\mu)(1 + \gamma_5 \not{s}_\mu) \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \not{k}_\mu \gamma^\sigma (1 - \gamma_5)] \\
&\quad \times \text{tr} [(\not{p}_e - m_e) \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \not{k}_e \gamma_\rho (1 - \gamma_5)]
\end{aligned}$$

となる。
トレースは

$$\begin{aligned}
& \text{tr} [(\not{p}_\mu - m_\mu)(1 + \gamma_5 \not{s}_\mu) \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \not{k}_\mu \gamma^\sigma (1 - \gamma_5)] \\
&= \text{tr} [\not{p}_\mu \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \not{k}_\mu \gamma^\sigma (1 - \gamma_5)] - m_\mu \text{tr} [\gamma_5 \not{s}_\mu \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \not{k}_\mu \gamma^\sigma (1 - \gamma_5)] \\
&= 2\text{tr} [\not{p}_\mu \gamma^\rho \not{k}_\mu \gamma^\sigma (1 - \gamma_5)] + m_\mu \text{tr} [\not{s}_\mu \gamma^\rho \not{k}_\mu \gamma^\sigma (1 - \gamma_5)] \\
&= 2\text{tr} [(\not{p}_\mu + m_\mu \not{s}_\mu) \gamma^\rho \not{k}_\mu \gamma^\sigma (1 - \gamma_5)] \\
&= 2 \cdot 4(g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} + g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} - g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} - i\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma})(p_\mu + m_\mu s_\mu)_\alpha k_{\mu\beta}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\text{tr}[(\not{p}_e - m_e) \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \not{k}_e \gamma_\rho (1 - \gamma_5)] &= 2\text{tr}[\not{p}_e \gamma_\sigma \not{k}_e \gamma_\rho (1 - \gamma_5)] \\
&= 2 \cdot 4(g_{\gamma\sigma} g_{\delta\rho} + g_{\gamma\rho} g_{\delta\sigma} - g_{\gamma\delta} g_{\rho\sigma} + i\varepsilon_{\gamma\delta\rho\sigma}) p_e^\gamma k_e^\delta
\end{aligned}$$

となるので、

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{4G^2}{(2\pi)^{12}} \frac{1}{E_\mu E_e |\mathbf{k}_\mu| |\mathbf{k}_e|} (p_\mu + m_\mu s_\mu e) \cdot k_e k_\mu \cdot p_e$$

を得る。ここで

$$(g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} + g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} - g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} - i\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta})(g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} + g_{\sigma\gamma} g_{\rho\delta} - g_{\rho\sigma} g_{\gamma\delta} + i\varepsilon_{\rho\sigma\gamma\delta}) = 4\delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta$$

をつかった。

μ^+ の静止系では $p_\mu = (m_\mu, \mathbf{0})$ であり、 $e=(0, \mathbf{n})$ ととれる。また $m_e/m_\mu \ll 1$ なので電子の質量

は無視すると

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= |\overline{\mathcal{M}}|^2 (2\pi)^7 \delta^4(p_\mu - p_e - k_e - k_\mu) d^3\mathbf{p}_e d^3\mathbf{k}_e d^3\mathbf{k}_\mu \\
&= \frac{4G^2}{(2\pi)^5} \frac{1}{m_\mu} (p_\mu + m_\mu s_\mu)_\rho p_{e\sigma} k_e^\rho k_\mu^\sigma \frac{d^3\mathbf{k}_e d^3\mathbf{k}_\mu}{|\mathbf{k}_e||\mathbf{k}_\mu|} \delta^4(p_\mu - p_e - k_e - k_\mu) \frac{d^3\mathbf{p}_e}{E_e} \\
&= \frac{G^2}{48\pi^4} \frac{1}{m_\mu} [(p_\mu + m_\mu s_\mu e) \cdot p_e (p_\mu - p_e)^2 + 2(p_\mu + m_\mu s_\mu e) \cdot (p_\mu - p_\mu) p_e \cdot (p_\mu - p_e)] \frac{d^3\mathbf{p}_e}{E_e} \\
&= \frac{G^2}{48\pi^4} \frac{1}{m_\mu} \left[m_\mu^3 E_e \left(1 - \mathbf{s}_\mu \cdot \frac{\mathbf{p}_e}{E_e}\right) \left(1 - 2\frac{E_e}{m_\mu}\right) + 2m_\mu^3 E_e \left(1 - \frac{E_e}{m_\mu} + \mathbf{s}_\mu \cdot \frac{\mathbf{p}_e}{m_\mu}\right) \right] \frac{2\pi E_e^2 dE_e d(\cos\theta)}{E_e} \\
&= \frac{G^2 m_\mu^5}{24\pi^3} \frac{E_e}{m_\mu} \left[\frac{E_e}{m_\mu} (1 - \mathbf{s}_\mu \cdot \hat{\mathbf{p}}_e) \left(1 - 2\frac{E_e}{m_\mu}\right) + 2\frac{E_e}{m_\mu} \left(1 - \frac{E_e}{m_\mu} + \mathbf{s}_\mu \cdot \hat{\mathbf{p}}_e \frac{E_e}{m_\mu}\right) \right] d\left(\frac{E_e}{m_\mu}\right) d(\cos\theta) \\
&= \frac{G^2 m_\mu^5}{24\pi^3} \left(\frac{E_e}{m_\mu}\right)^2 \left[\left(3 - 4\frac{E_e}{m_\mu}\right) + s_\mu \cos\theta \left(4\frac{E_e}{m_\mu} - 1\right) \right] d\left(\frac{E_e}{m_\mu}\right) d(\cos\theta)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\int k_e^\rho k_\mu^\sigma \frac{d^3\mathbf{k}_e d^3\mathbf{k}_\mu}{|\mathbf{k}_e||\mathbf{k}_\mu|} \delta^4(P - k_e - k_\mu) = \frac{\pi}{6} (P^2 g^{\rho\sigma} + 2P^\rho P^\sigma)$$

を使った。これを示すには Lorentz 不変性から

$$\int k_e^\rho k_\mu^\sigma \frac{d^3\mathbf{k}_e d^3\mathbf{k}_\mu}{|\mathbf{k}_e||\mathbf{k}_\mu|} \delta^4(P - k_e - k_\mu) = Ag^{\rho\sigma} + BP^\rho P^\sigma$$

となることを用いて、 $P = (M, \mathbf{0})$ となる系で計算すればよい：

$$\begin{aligned}
\int k_e^\rho k_\mu^\sigma \frac{d^3\mathbf{k}_e d^3\mathbf{k}_\mu}{|\mathbf{k}_e||\mathbf{k}_\mu|} \delta^4(P - k_e - k_\mu) &= \int k_e^\rho (P - k_e)^\sigma \frac{d^3\mathbf{k}_e}{|\mathbf{k}_e||\mathbf{k}_e|} \delta(M - 2|\mathbf{k}_e|) \\
&= \frac{2}{M^2} \int k_e^\rho (P - k_e)^\sigma d^3\mathbf{k}_e \delta\left(|\mathbf{k}_e| - \frac{M}{2}\right)
\end{aligned}$$

縮約を取ると

$$\begin{aligned}
4A + M^2 B &= \frac{2 \cdot 4\pi}{M^2} \int_0^\infty |\mathbf{k}_e| M |\mathbf{k}_e|^2 d|\mathbf{k}_e| \delta\left(|\mathbf{k}_e| - \frac{M}{2}\right) \\
&= \pi M^2
\end{aligned}$$

(0,0) 成分を取ると

$$\begin{aligned}
A + M^2 B &= \frac{2 \cdot 4\pi}{M^2} \int_0^\infty |\mathbf{k}_e| (M - |\mathbf{k}_e|) |\mathbf{k}_e|^2 d|\mathbf{k}_e| \delta\left(|\mathbf{k}_e| - \frac{M}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} M^2
\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi}{6} M^2 = \frac{\pi}{6} P^2 \\
B &= \frac{2\pi}{6}
\end{aligned}$$

である。

しかし、今回の実験では電子のエネルギーも観測しなかったので電子のエネルギーについても積分しなければならない。電子のエネルギーが最大となるのは2つのニュートリノが電子と反対方向に出るときなので、 $E_e^{max} = m_\mu/2$ である。

よって、

$$d\Gamma = \frac{G^2 m_\mu^5}{24\pi^3} \left(\frac{E_e}{m_\mu}\right)^2 \left[\left(3 - 4\frac{E_e}{m_\mu}\right) + s_\mu \cos\theta \left(4\frac{E_e}{m_\mu} - 1\right) \right] d\left(\frac{E_e}{m_\mu}\right) d(\cos\theta)$$

を $0 \leq E_e/m_\mu \leq 1/2$ で積分して

$$d\Gamma = \frac{G^2 m_\mu^5}{384\pi^3} \left(1 + \frac{s_\mu}{3} \cos\theta\right) d(\cos\theta)$$

となる。

寿命を見る実験では、運動量の方向も観測しないので θ についても積分して、全崩壊率

$$\Gamma = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

を得る。

Fermi 結合定数と μ の質量は

$$\begin{aligned} G &= 1.17 \times 10^5 GeV^{-2} \\ m_\mu &= 106 MeV \end{aligned}$$

であるから、 μ の寿命は、

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma} = 2.17 \times 10^{-6} sec$$

である。

A.2 Pauli-Lubanski ベクトル

Dirac 方程式の正振動解 $u(\mathbf{p})$ と負振動解 $v(\mathbf{p})$ はそれぞれ以下を満たす：

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = (\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0$$

これらはそれぞれ2つの独立な解をもつ。

有限質量の Dirac 粒子に対して Pauli-Lubanski ベクトルを

$$W^\mu = -\frac{1}{4m} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\nu\rho} p_\sigma, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

で定義し、

$$e^2 = -1, \quad e \cdot p = 0$$

である任意の e^μ に対して行列

$$-e_\mu W^\mu = \frac{1}{2m} \gamma_5 \not{e} \not{p}$$

を考えると、 $(\gamma_5 \not{\epsilon})^2 = \gamma_5 \not{\epsilon} \gamma_5 \not{\epsilon} = -\not{\epsilon} \not{\epsilon} = 1$, $\text{tr}(\gamma_5 \not{\epsilon}) = 0$ であるから、 $\gamma_5 \not{\epsilon}$ の固有値は ± 1 である。

また、

$$\left[\not{\epsilon} \pm m, \frac{1}{2m} \gamma_5 \not{\epsilon} \not{\epsilon} \right] = 0$$

より $-e \cdot W$ の固有値によって 2 つの独立な $u(\mathbf{p})$ 、 $v(\mathbf{p})$ を区別できる。

よって

$$-e \cdot W u(\mathbf{p}, s) = \frac{s}{2} u(\mathbf{p}, s) \quad , \quad -e \cdot W v(\mathbf{p}, s) = -\frac{s}{2} v(\mathbf{p}, s)$$

とする。ここで $s = \pm 1$ である。

$\gamma^0 (\gamma_5 \not{\epsilon}) \dagger \gamma^0 = \gamma_5 \not{\epsilon}$ より 2 つの独立な解の規格化を

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') = \frac{m}{p^0} \delta_{s', s} \quad , \quad \bar{v}(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s') = -\frac{m}{p^0} \delta_{s', s}$$

ととれて、このとき、

$$u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2p^0} (\not{\epsilon} + m) \frac{1 + s \gamma_5 \not{\epsilon}}{2} \quad , \quad v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2p^0} (\not{\epsilon} - m) \frac{1 + s \gamma_5 \not{\epsilon}}{2}$$

となる。

また、 s に関して和をとれば

$$\sum_s u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2p^0} (\not{\epsilon} + m) \quad , \quad \sum_s v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2p^0} (\not{\epsilon} - m)$$

となる。

この関係は、 $\sum_s u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s)$ 、 $\sum_s v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s)$ が、それぞれ正振動解、負振動解のみを取り出す射影行列であることから従うのでゼロ質量 Dirac 粒子でも成り立つ。

特に有限質量粒子については静止系 $p^\mu = (m, \mathbf{0})$ がとれて、 $e_\mu = (0, \mathbf{n})$ とすると ($|\mathbf{n}| = 1$) chiral 表示では

$$-e \cdot W = \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}$$

となる。つまり、 $-e \cdot W$ の固有値は \mathbf{n} 軸周りの粒子のスピンを意味する。

A.3 Dirac 粒子の Lande の g 因子

Dirac 粒子の g 因子が古典的には 2 になることを示す。

このために外場 (ベクトルポテンシャル) A_μ の下での相互作用 Hamiltonian $H = \int d^3x j^\mu A_\mu$ の 1 レプトン (質量 m 、電荷 e) 状態間の行列要素を計算する。 A_μ はあたえられた外場なので、 j^μ の期待値が分かればよい:

$$\langle \mathbf{p}', s' | j^\mu(x) | \mathbf{p}, s \rangle = \exp(-i(p - p') \cdot x) \langle \mathbf{p}', s' | j^\mu(0) | \mathbf{p}, s \rangle$$

$\langle \mathbf{p}', s' | j^\mu(0) | \mathbf{p}, s \rangle$ に対応する Feynman ダイアグラムは図 24 のようになる。

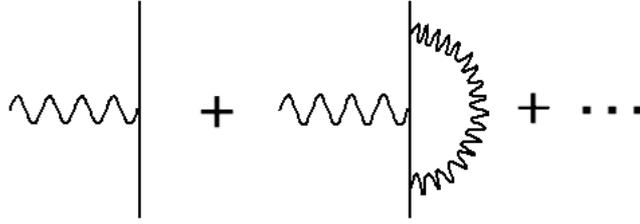


図 24: 電子-光子頂点

よって求める行列要素は摂動の 0 次で

$$\langle \mathbf{p}', s' | j^\mu(0) | \mathbf{p}, s \rangle = \frac{e}{(2\pi)^3} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s)$$

となる。摂動の高次を取り入れたければ、あとに続くダイアグラムを評価すればよい。 $\langle \mathbf{p}', s' | j^\mu(0) | \mathbf{p}, s \rangle$ の値は量子補正によってずれる。量子補正の入った具体的な値が知りたければ実際にダイアグラムを評価しなければならないが、Lorentz 不変性からその一般形は以下のような形になることが分かる：

$$\langle \mathbf{p}', s' | j^\mu(0) | \mathbf{p}, s \rangle = \frac{e}{(2\pi)^3} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, s)$$

ここで $\Gamma^\mu(p', p)$ は Lorentz 変換に対して 4 元ベクトルとして変換する 4 次正方行列である。任意の 4 次正方行列は $1, \gamma^\mu, [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^5 \gamma^\mu, \gamma^5$ の線形結合で書けることと、 $\bar{u}(\mathbf{p}', s')$ や $u(\mathbf{p}, s)$ の満たす関係式

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s')(\not{p}' - m) = (\not{p} - m)u(\mathbf{p}, s) = 0$$

を使えば以下を得る：

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F - \frac{i}{2m}(p + p')^\mu G - \frac{1}{2m}(p - p')^\mu H$$

ここで F, G, H は全てスカラーであるから q^2 (ただし $q = p' - p$) の関数である。カレント保存から $(p' - p)_\mu \langle \mathbf{p}', s' | j^\mu(0) | \mathbf{p}, s \rangle = 0$ となり、 $H = 0$ である。こうして

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F - \frac{i}{2m}(p + p')^\mu G$$

となる (摂動の 0 次では $F = 1, G = 0$ であった)。

ここでは特に $|\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'| \ll m$ の場合に興味がある。この場合に $\bar{u}(\mathbf{p}', s') \Gamma^\mu(p', p) u(\mathbf{p}, s)$ がどのように振る舞うかを見る。また、静磁場との相互作用が知りたいので空間成分について見る。 \mathbf{p}, \mathbf{p}' について 1 次の項までを残すと

$$u(\mathbf{p}, s) \simeq \begin{pmatrix} 1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} u(\mathbf{0}, s)$$

となる。

よって $(p + p')$ に比例する項 (運動項の一部) は落として、

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma u(\mathbf{p}, s) \simeq - \left[\frac{i}{2m} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma} \right]_{s', s}$$

を得る。
従って

$$\langle \mathbf{p}', s' | \mathbf{j}(0) | \mathbf{p}, s \rangle \simeq -\frac{eF(0)}{(2\pi)^3 m} \left[\frac{i}{2m} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma} \right]_{s', s}$$

となる。

A_μ は時間・空間座標に依らず空間成分しかもたないとする

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}', s' | H | \mathbf{p}, s \rangle &= -\int d^3 \mathbf{x} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \langle \mathbf{p}', s' | \mathbf{j}(0) | \mathbf{p}, s \rangle \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{eF(0)}{(2\pi)^3 m} \int d^3 \mathbf{x} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \left[i\mathbf{q} \times \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right]_{s', s} \cdot \mathbf{A} \\ &= -\frac{eF(0)}{(2\pi)^3 m} \int d^3 \mathbf{x} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right]_{s', s} \cdot \mathbf{B} \\ &= -\frac{eF(0)}{m} [\mathbf{S}]_{s', s} \cdot \mathbf{B} \delta^{(3)}(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

となる。

こうしてレプトンのスピン磁気モーメントを

$$[\mathbf{M}]_{s', s} = \frac{eF(0)}{m} [\mathbf{S}]_{s', s}$$

で定義すると、

$$\langle \mathbf{p}', s' | H | \mathbf{p}, s \rangle = -[\mathbf{M}]_{s', s} \cdot \mathbf{B} \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$$

となる。これが波動力学における相互作用 Hamiltonian 演算子である。

一方 Lande の g 因子は $M = (ge/2m)\mathbf{S}$ で定義されたので、 $g = 2F(0)$ となる。摂動の 0 次では $F(0) = 1$ だったので、確かに g 因子は古典的には 2 になる。

B さらに解析

我々は g 因子を解析する際に、磁場をかけたときの ch2 と ch4 のデータに直接 fitting を行った。この場合、指数関数の上に sin カーブが乗るため fit 関数は複雑な形になる。そこで ch2 と ch4 のデータにさらに処理を行って、より単純な関数で fitting することを考える。

例えば、ch2 のデータと ch4 のデータの差を取るという方法が考えられる。単純に差をとるのではなく、二つのデータのバックグラウンドの高さを重みとして差を取るのが良いと考えられる。これによって二つのデータのバックグラウンドは相殺する。

しかしながらこの方法では PMT2 と PMT4 の性能の違いが影響する虞がある。つまり同じエネルギーの陽電子が通過したにも拘らず、PMT2 は反応するが PMT4 は反応しないというようなことがある。ところで、磁場の向きを一定にして上に出てきた陽電子の数と下に出てきた陽電子の数を比べるのは、上に出てくる陽電子の数を数えながら磁場の向きを変えることと同じである。そこで我々は同じ PMT の上向き磁場の場合のデータと下向き磁場の場合のデータを比べることにする。この方法は状況としては PMT2 と PMT4 のデータを比べることと同じであるが、二つの

PMT の性能の違いによる影響が無いという点で優れている。

いずれにしてもバックグラウンドが相殺すれば fit 関数は

$$f(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau_\mu}\right) \cos[\omega(t + t_0)]$$

となるはずである。ここで $\tau_\mu = 2200$ および $t_0 = 200$ と固定した。

上向き磁場 ch2、下向き磁場 ch2、上向き磁場 ch4、下向き磁場 ch4 のデータのバックグラウンドの高さはそれぞれ 50、70、50、70 であったからこれを重みとして差を取った。このデータを fitting したのグラフが図 25 および図 26 である。

得られた結果を表 8 にまとめた。この結果から、5.1 節と同様な方法で平均を取ると実験値と

表 8:

	t_2	t_4
A	119.0 ± 162.6	279.6 ± 205.1
$\omega[\text{nsec}^{-1}]$	$0.3785 \times 10^{-2} \pm 0.1802 \times 10^{-3}$	$0.3983 \times 10^{-2} \pm 0.1519 \times 10^{-3}$
$g - \text{factor}$	2.051 ± 0.09767	2.159 ± 0.08233

して $g = 2.114 \pm 0.06295$ を得る。これでも理論値 $g = 2.002$ とは一致しないが多少の改善は見られる。

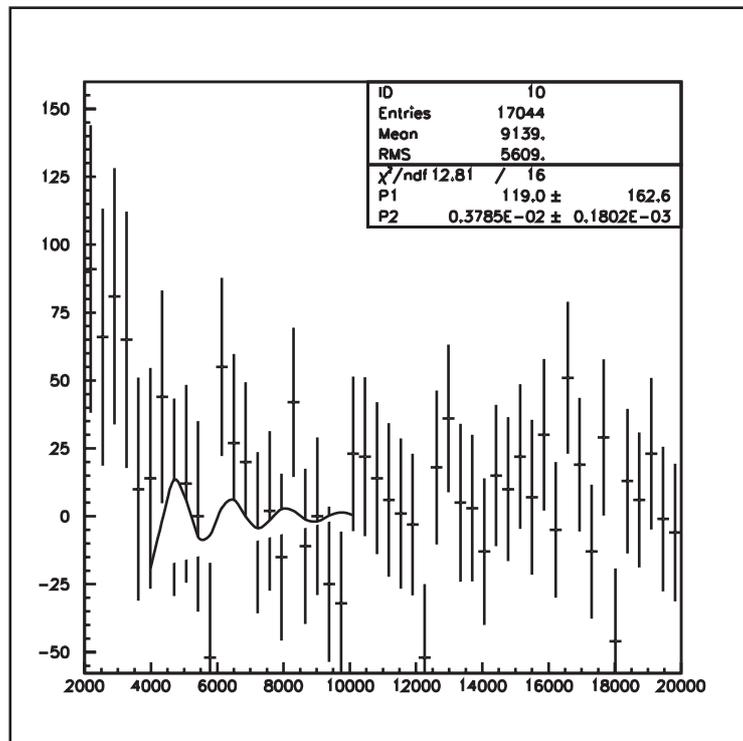


図 25: ch2

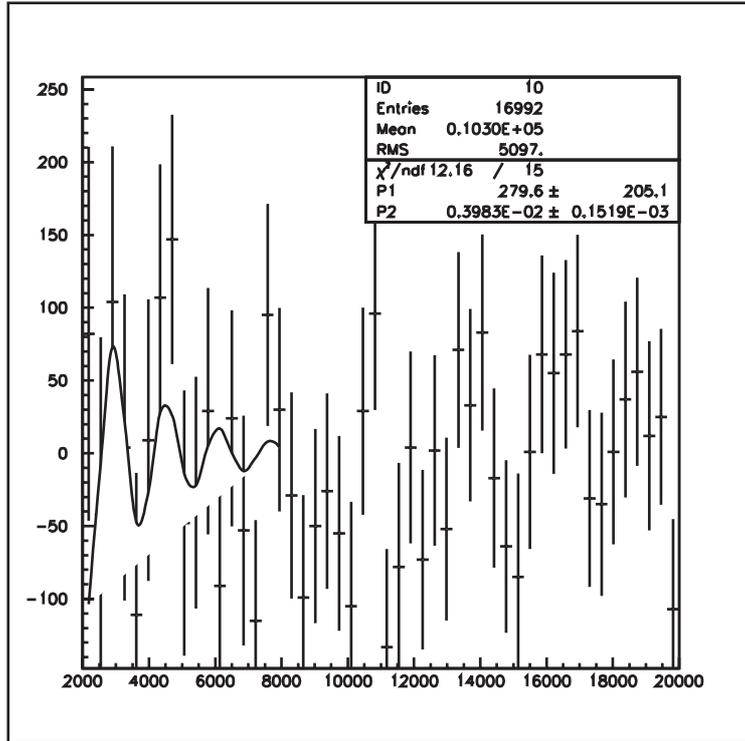


図 26: ch4

参考文献

- [A] C. Amsler, *The Determination of the Muon magnetic Moment from Cosmic Rays*, AJP **42** (1974) 1067
- [A1] 北川 俊作, 佐田 優太, 柴田 将光, 高橋 智洋, 高橋 慶在, 谷 峻太郎, 『 μ^+ の寿命及び磁気能率の測定』 2006 年度前期 A1 レポート (2006)
- [KU] 九後 汰一郎, 『ゲージ場の量子論 I』 培風館 (1989)
- [KN] Knoll, 『放射線計測ハンドブック 第 2 版』 日刊工業新聞社 (1991)
- [N] 長島 順清, 『素粒子物理学の基礎 I,II』 (朝倉物理学体系) 朝倉書店 (1998), 『素粒子標準理論と実験的基礎』 (朝倉物理学大系) 朝倉書店 (1999)
- [O] 小田 稔, 『宇宙線物理学』 朝倉書店 (1983)
- [P1] 松岡 広大, 横田 尚, 『ミューオンの磁気能率の測定』 2004 年度 P1 レポート (2004)
- [W] S.Weinberg, *The Quantum Theory Of Fields Vol.I,II*, Cambridge University Press