

Compton 散乱の観測による光の粒子性と QED の検証

川上 木下 戸田 仲里 藤原

平成 31 年 10 月 1 日

概要

本実験は Compton 散乱の測定を通して量子力学の諸公式を検証するとともに、実験参加者が素粒子実験の手法に対する理解を深めることを目的としている。まず、散乱光子のエネルギーの角度依存性を測定し、光の粒子性を検証した。この実験においては公式を支持するような結果は得られなかったが、これは誤差の解析手法の問題であり改善の余地が存在する。次に、光子の散乱断面積の角度依存性を測定し、量子電磁気学の検証を行った。実験データから Compton 散乱によるイベントであると思われるものを抜き出し、適切なフィッティング関数が存在するかどうかを調べたところ、理論を支持するような結果を得ることができた。

目次

第 1 章	研究の動機	2
1.1	研究の動機	2
1.2	Compton 散乱モデル	2
1.2.1	反射光子の振動数の角度依存性	2
1.2.2	Klein-仁科の公式	3
第 2 章	実験方法	8
2.1	実験装置	8
2.1.1	シンチレータ	8
2.1.2	光電子増倍管	9
2.1.3	回路モジュール	9
2.1.4	線源	10
2.2	Calibration	10
2.3	Compton 散乱の測定	11
2.3.1	測定の概要	11
2.3.2	測定の手順	11
第 3 章	エネルギー分布の解析及び結果	13
3.1	Calibration	13
3.1.1	Gaussian フィッティングについて	13
3.1.2	Calibration とエネルギーの求め方	14
3.2	実験結果	14
3.3	考察	15
第 4 章	Klein-仁科の式	16
4.1	解析	16
4.1.1	積分範囲の決定方法	16
4.1.2	バックグラウンド及び光電吸収の影響について	17
4.1.3	線源-LaBr、LaBr-NaI 間の距離について	17
4.1.4	フィッティング関数	18
4.2	結果	18
4.3	考察	20

第1章 研究の動機

1.1 研究の動機

19世紀頃、それまでの力学や電磁気学では説明のできない現象が次々に見つかった。その一つに Compton 散乱という現象がある。X線を物質に照射すると、反射 X線の振動数は入射 X線よりも小さい値が観測されるというもので、光を波動だと考えた場合には説明がつかない。そうした現象を説明するため、量子力学という新たな力学体系が構築された。量子力学によると、光は粒子性を持ち、Compton 散乱は電子と光子の二体の弾性散乱として振る舞う。さらに、場の理論を量子力学に組み込んだ量子電磁気学 (QED) により、その散乱断面積を計算することができる。実際に Compton 散乱の実験を行ってこれらの理論との整合性を確認し、量子力学の正当性を検証するのがこの研究の目的である。

1.2 Compton 散乱モデル

1.2.1 反射光子の振動数の角度依存性

上述のように、電子と光子の2粒子の弾性散乱問題として Compton 散乱を考える。量子力学によると、振動数 ν の光の粒子としてのエネルギー E_ν と運動量 p_ν は

$$\begin{cases} E_\nu = h\nu \\ p_\nu = \frac{h\nu}{c} \end{cases} \quad (1.1)$$

と表せる。また、相対論によると電子のエネルギー E_e は、電子の質量を m 、運動量を p_e とすると

$$E_e = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_e^2} \quad (1.2)$$

始状態の電子の実験室系を取り、電子、光子の反射角度をそれぞれ θ 、 ϕ 、反射電子の運動量を p_e 、入射光子と反射光子の振動数をそれぞれ ν 、 ν' とすると、エネルギー保存より

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \sqrt{m^2c^4 + c^2p_e^2} \quad (1.3)$$

また、運動量保存より、

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi \\ 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - p_e \sin \phi \end{cases} \quad (1.4)$$

が成り立つ。これらから ϕ と p_e を消去すると、反射光子の振動数 ν' と反射角度 θ の関係式

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2} (1 - \cos \theta)} \quad (1.5)$$

を得る。

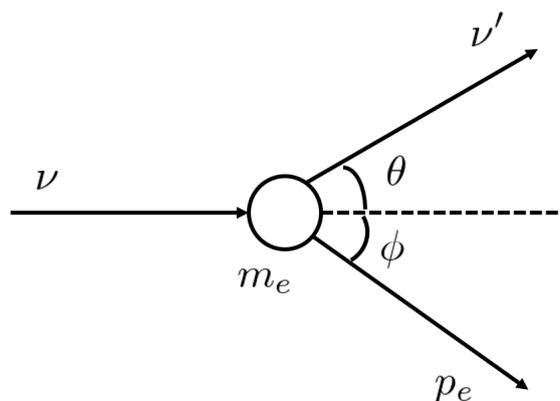


図 1.1: Compton 散乱の概念図

1.2.2 Klein-仁科の公式

次に、Compton 散乱の散乱断面積の角度依存性を求めたい。以下、簡単のため自然単位系を使用する。まず、始状態から終状態への遷移振幅を求める。始状態 $|i\rangle$ を終状態 $|f\rangle$ まで時間発展させる演算子を S とする。Heisenberg 方程式は相互作用ハミルトニアン H_I を用いて、

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = H_I(t) |\Phi(t)\rangle \quad (1.6)$$

と書ける。初期条件

$$|\Phi(-\infty)\rangle = |i\rangle \quad (1.7)$$

により、積分方程式

$$|\Phi(t)\rangle = |i\rangle + \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |\Phi(t_1)\rangle \quad (1.8)$$

を得る。逐次代入によって計算すると

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) |i\rangle \quad (1.9)$$

より近似的に解が求まる。 $t \rightarrow \infty$ の極限を取ると、 $|\Phi(\infty)\rangle = S |i\rangle$ だから演算子 S は

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \cdots \int dx_1^4 \cdots dx_n^4 \mathcal{T} [\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)] \end{aligned} \quad (1.10)$$

と表せる。但し T は時間順序積を表し、これによって積分は全て全時間において行われる。また、 \mathcal{H}_I は相互作用ハミルトニアン密度を表し、積分は全時空において行う。量子電磁気学によると、 \mathcal{H}_I は

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = -eN [\bar{\psi} \not{A} \psi] \quad (1.11)$$

で与えられる。但し、 N は正規順序積を表す。最低次の寄与は 2 次の項で

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2} \int dx_1^4 dx_2^4 T [(-e)^2 N(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} N(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] \quad (1.12)$$

これを Wick の定理によって展開すると

$$(ie)^2 \int dx_1^4 dx_2^4 N[(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] \quad (1.13)$$

なる項が表れる。これが Compton 散乱に寄与する項である。電子の場の縮約は伝播関数を表し、

$$\underline{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} = iS_F(x_1 - x_2) \quad (1.14)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq^4 iS_F(q) e^{-iq(x_1 - x_2)} \quad (1.15)$$

運動量空間の伝播関数は

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (1.16)$$

ここで、Dirac 方程式の基本解により電子の場を展開すると、

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^+ + \psi^- \\ &= \sum_{r, \mathbf{p}} \left(\frac{1}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

同様に Klein-Gordon 方程式の基本解によって電磁場を平面波展開すると

$$\begin{aligned} A &= A^+ + A^- \\ &= \sum_{r, \mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\epsilon_r(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \epsilon_r(\mathbf{p}) a_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ikx} \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

となる。これらを用いて正規積を計算すると

$$S_c = S_a + S_b \quad (1.19)$$

$$S_a \equiv (ie)^2 \int dx_1^4 dx_2^4 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\alpha^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2) \quad (1.20)$$

$$S_b \equiv (ie)^2 \int dx_1^4 dx_2^4 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\alpha^+(x_1) \psi^+(x_2) \quad (1.21)$$

と変形できる。

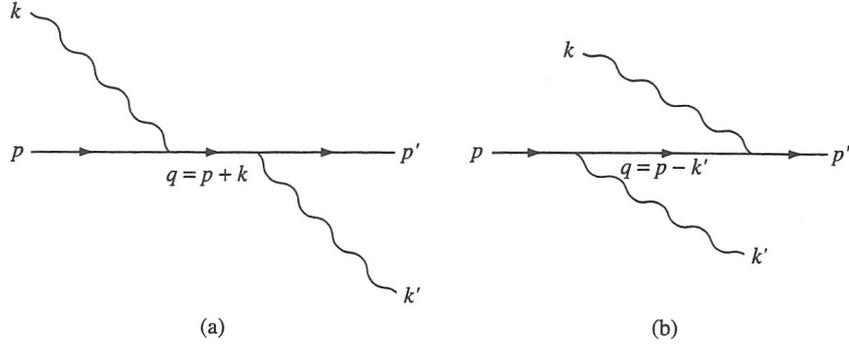


図 1.2: Compton 散乱に寄与する 2 種類の Feynman ダイアグラム [1]

S_a と S_b はそれぞれ図 (1.2.2) のダイアグラム (a)、(b) の寄与を表す。

x_1, x_2, q について積分を実行し、始状態 $|i\rangle = c^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ から終状態 $|f\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}')a^\dagger(\mathbf{k}')|0\rangle$ への遷移行列を求めると

$$\langle f | S_c | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \left(\frac{m}{VE} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE'} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2V\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2V\omega'} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} \quad (1.22)$$

となる。系の時間と体積をそれぞれ T, V とする (全ての計算が終わった後に十分大きい極限を取る)。 \mathcal{M} は Feynmann 振幅と呼ばれ

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b \quad (1.23)$$

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') i S_F(q = p + k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \quad (1.24)$$

$$\mathcal{M}_b = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) i S_F(q = p - k') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') u(\mathbf{p}) \quad (1.25)$$

と表される。単位時間当たりの遷移確率は

$$w = \frac{|\langle f | S_c | i \rangle|^2}{T} \quad (1.26)$$

$$= V (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \left(\frac{m}{VE} \right) \left(\frac{m}{VE'} \right) \left(\frac{1}{2V\omega} \right) \left(\frac{1}{2V\omega'} \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (1.27)$$

となる。運動量が $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i + d\mathbf{p}_i$ の範囲にある終状態に遷移する確率は

$$w \left(\frac{V d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \right) \left(\frac{V d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \right) \quad (1.28)$$

で与えられる。微分断面積は遷移確率を流束密度 $I = \frac{v_{rel}}{V}$ で割ったもので

$$\begin{aligned} d\sigma &= w \frac{V}{v_{rel}} \left(\frac{V d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \right) \left(\frac{V d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \right) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \frac{m^2}{4E\omega v_{rel}} \left(\frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 E'} \right) \left(\frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 \omega'} \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (1.29) \end{aligned}$$

式に現れるデルタ関数は4元運動量の保存を表す。この独立でない6変数 \mathbf{p}' 、 \mathbf{k}' を、式を4変数について積分することにより独立な2変数に直す。まず \mathbf{p}' について積分すると

$$d\sigma = \frac{m^2}{16\pi^2 v_{rel} EE' \omega \omega'} \delta(E' + \omega' - E - \omega) |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\Omega \quad (1.30)$$

さらに $|\mathbf{k}'|$ について積分すると

$$d\sigma = \frac{m^2}{16\pi^2 v_{rel} EE' \omega \omega'} |\mathbf{k}'|^2 \left[\frac{\partial(E' + \omega')}{\partial|\mathbf{k}'|} \right]^{-1} |\mathcal{M}|^2 d\Omega \quad (1.31)$$

したがって

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 \omega'}{16\pi^2 v_{rel} EE' \omega} \left[\frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} \right]^{-1} |\mathcal{M}|^2 \quad (1.32)$$

実験室系で

$$v_{rel} = c = 1 \quad (1.33)$$

$$E' = [m^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2]^{\frac{1}{2}} = [m^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta]^{\frac{1}{2}} \quad (1.34)$$

式(1.5)とエネルギー保存より、

$$\frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} = \frac{m\omega}{E'\omega'} \quad (1.35)$$

だから

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 |\mathcal{M}|^2 \quad (1.36)$$

を得る。ここで、便宜上

$$\begin{cases} f_1 \equiv p + k \\ f_2 \equiv p - k' \end{cases}$$

と置く。今回の測定ではスピンは測定しないから電子のスピン、光子の偏極は始状態について平均を、終状態について和を取る。スピノルの計算を行うと

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin, pol} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{spin, pol} [|\mathcal{M}_a|^2 + |\mathcal{M}_b|^2 + \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_b \mathcal{M}_a^*] \\ &= \frac{e^4}{64m^2} \left[\frac{X_{aa}}{(pk)^2} + \frac{X_{bb}}{(pk')^2} - \frac{X_{ab} + X_{ba}}{(pk)(pk')} \right] \end{aligned} \quad (1.37)$$

但し、

$$X_{aa} \equiv \text{Tr} \left[\gamma^\beta (\mathbf{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\alpha (\mathbf{f}_1 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m) \right] \quad (1.38)$$

$$X_{bb} \equiv \text{Tr} \left[\gamma^\alpha (\mathbf{f}_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma_\beta (\mathbf{f}_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m) \right] \quad (1.39)$$

$$X_{ab} \equiv \text{Tr} \left[\gamma^\beta (\mathbf{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\beta (\mathbf{f}_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m) \right] \quad (1.40)$$

$$X_{ba} \equiv \text{Tr} \left[\gamma^\alpha (\mathbf{f}_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma_\alpha (\mathbf{f}_1 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m) \right] \quad (1.41)$$

X_{aa} について γ 行列の計算により

$$\begin{aligned}
X_{aa} &= \text{Tr} \left[\gamma^\beta (\mathbf{f}_1 + m)(-2\not{p} + 4m)(\mathbf{f}_1 + m)\gamma_\beta(\not{p}' + m) \right] \\
&= \text{Tr} \left[(4f_1\not{p}f_1 + m\{-16(pf_1) + 16f_1^2\} + m^2(4\not{p} - 16f_1) + 16m^3)(\not{p}' + m) \right] \\
&= 16[2(f_1p)(f_1') - f_1^2(pp') + m^2\{-4(pf_1) + 4f_1^2\} + m^2\{(pp') - 4(f_1p')\} + 4m^4]
\end{aligned} \tag{1.42}$$

四元運動量保存 $p+k = p'+k'$ と四元運動量の性質 $p^2 = p'^2 = m^2$ より $pk = p'k'$ 、 $p'k = pk'$ だから

$$X_{aa} = 32[m^4 + m^2(pk) + (pk)(pk')] \tag{1.43}$$

と計算できる。同様に X_{ab} は

$$X_{ab} = 16m^2[2m^2 + (pk) - (pk')] \tag{1.44}$$

と表せる。 X_{bb} 、 X_{ba} はそれぞれ X_{aa} 、 X_{ab} に

$$k \rightarrow -k' \Leftrightarrow f_1 \rightarrow f_2 \tag{1.45}$$

なる変換を施したものであって

$$\begin{cases} X_{bb} = 32[m^4 - m^2(pk') + (pk)(pk')] \\ X_{ba} = 16m^2[2m^2 + (pk) - (pk')] = X_{ab} \end{cases} \tag{1.46}$$

と求まる。これより、

$$\frac{1}{4} \sum_{spin, pol} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2m^2} \left[\left(\frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} \right) + 2m^2 \left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right)^2 \right] \tag{1.47}$$

始状態電子の実験室系で $p = (m, 0, 0, 0)$ より $pk = m\omega$ 、 $pk' = m\omega'$ が成り立つ。さらに式(1.5)を変形すると

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} = \frac{1}{m}(\cos\theta - 1) \tag{1.48}$$

であって、これらを代入すると

$$\frac{1}{4} \sum_{spin, pol} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2m^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right] \tag{1.49}$$

となる。したがって、Klein-仁科の公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right] \tag{1.50}$$

を得る。これを SI 単位系に直し、光子のエネルギーを $E = \hbar\omega$ 、 $E' = \hbar\omega'$ とおき直すと

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \frac{\lambda_e^2}{2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \left[\frac{E}{E'} + \frac{E'}{E} - \sin^2\theta \right] \tag{1.51}$$

である。但し、 $\lambda_e = \frac{\hbar}{mc}$ とおいた。

第2章 実験方法

2.1 実験装置

2.1.1 シンチレータ

シンチレータは、放射線を吸収し、光を放出する物質である。光電子増倍管と組み合わせることで、放射線の検出器として使用できる。測定には、NaI(Tl) と LaBr₃ の2種類のシンチレータを用いた。

- NaI(Tl)

比較的減衰時間が長い。大きな体積のものが安価で手に入るため、広い分野で用いられる。

- LaBr₃

比較的減衰時間が短い。優れたエネルギー分解能をもつ。

平均自由行路

γ 線は物質中で、光電吸収、Compton 散乱、電子対生成によって減衰する。深さ t での透過光子の数 I は、吸収物質がない時の光子数 I_0 を用いて、

$$I = I_0 e^{-\mu t} \quad (2.1)$$

と表せる。ただし、 μ は物質中での γ 線の減衰係数である。 μ は吸収物質によって異なる値をもつが、物質の密度を ρ としたとき、

$$\text{質量減衰係数} = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.2)$$

は物質に依らない値となる。662 keV の γ 線では、質量減衰係数は $7 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{g}$ である。よって、平均自由行路 λ は、

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{7 \times 10^{-2} \times \rho} \quad (2.3)$$

となる。NaI(Tl)、LaBr₃ について、 ρ はそれぞれ 3.67 g/cm^3 、 5.29 g/cm^3 であるから、平均自由行路 λ はそれぞれ

$$\lambda_{\text{NaI}} = \frac{1}{7 \times 10^{-2} \times 3.67} \simeq 4 \text{ (cm)} \quad (2.4)$$

$$\lambda_{\text{LaBr}_3} = \frac{1}{7 \times 10^{-2} \times 5.29} \simeq 3 \text{ (cm)} \quad (2.5)$$

と求めることができる。

2.1.2 光電子増倍管

光電子増倍管 (photomultiplier tube、以下 PMT) は、シンチレータから出た光を光電効果により、電子に変換し、電極に衝突させて増幅させる装置である。NaI(Tl) の PMT には +1450 V、LaBr₃ の PMT には -1600 V の電圧を加えた。

2.1.3 回路モジュール

図 2.1 のように回路をつなぐ。各素子の役割は以下の通り。

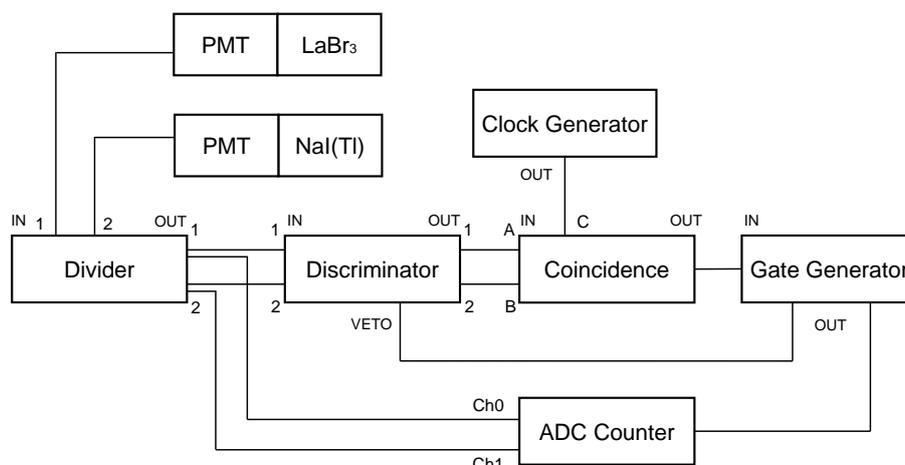


図 2.1: 回路図

Discriminator

信号の大きさが設定したあるしきい値以上であった場合に信号を出力する。検出器である大きさ以上のエネルギーをもった粒子が捕らえられた場合を選んで信号を出力することができる。

Clock Generator

設定したある大きさの周波数をもった信号を出力する。周波数は 10 kHz に設定した。

Coincidence

複数の信号が同時にいった場合にのみ信号を出力する。A に LaBr₃ の検出器からの信号を、B に NaI の検出器からの信号を、C に Clock Generator からの 10 kHz の信号を入力した。例えば、A、B ともにスイッチを入れると、2 つの検出器で同時に粒子が捕らえられた場合のみを選んで信号を出力することができる。

Gate Generator

入力した信号に対して、設定したある時間幅をもった信号を出力する。減衰時間のより長い NaI(Tl) の検出器からの波形が収まるような Gate を作るため、時間幅は $10 \mu\text{s}$ に設定した。

ADC Counter

Ch0 または Ch1 から入る信号を、Gate Generator の作る矩形波の時間幅の範囲で積分する。入射する γ 線のエネルギーの大きさに対応した、PMT で生じた電荷の量を求めることができる。ADC カウントと実際のエネルギーの対応関係がわかっているならば、これからエネルギーを測定することが可能である。

VETO

複数の信号が短い間隔で入力されると Gate Generator で作る矩形波が繋がり一つの大きな矩形波を作る。すると、ADC Counter での積分範囲が大きくなり、複数の信号に対して一つの大きな ADC カウントを出してしまう。VETO を通すことで、最初の信号に対してのみ矩形波を出すことができるため、これを回避できる。

2.1.4 線源

Calibration と Compton 散乱の測定ともに、線源として、 662 keV の γ 線を放射する ^{137}Cs を用いた。

2.2 Calibration

各シンチレーターの ADC カウントと実際のエネルギーの対応関係を調べる。この対応関係には角度による依存性はないが、各角度の測定を行った際の状況下での ADC カウントとエネルギーの依存性をより正確に知るため、各角度の測定を行う度に事前に Calibration (較正) を行った。Calibration では 10000 カウント分を計測した。各角度ごとに、以下の 3 通りの測定を行った。

- Coincidence の C のみスイッチを入れ、測定する。これにより、線源からの γ 線以外の要因によって生じる ADC カウント (pedestal) を調べる。
- Coincidence の B のみスイッチを入れ、 LaBr_3 の前に線源を置いて、測定する。これにより、 662 keV のエネルギーに対応した LaBr_3 の検出器の ADC カウントの値を調べる。
- Coincidence の A のみスイッチを入れ、 NaI(Tl) の前に線源を置いて、測定する。これにより、 662 keV のエネルギーに対応した NaI(Tl) の検出器の ADC カウントの値を調べる。

エネルギーと ADC カウントの関係は 1 次関数であると仮定し、これらの値を用いて、 LaBr_3 と NaI(Tl) についてエネルギーと ADC カウントの関係式を求める。

2.3 Compton 散乱の測定

2.3.1 測定の概要

線源から出た γ 線が、 LaBr_3 の結晶中の電子と Compton 散乱を起こす。散乱後の電子を LaBr_3 の検出器で、 θ 方向へ向かう γ 線を NaI(Tl) の検出器で検出する。Coincidence の A、B 両方のスイッチを入れて測定することで、

- 2つの検出器に同時に粒子が入るような場合に各検出器で測定されるエネルギー
- そのような場合が起こる頻度（単位時間当たりのカウント数）

が角度によってどのように変化するかを調べる。これにより、式 (1.5) 及び (1.51) を支持する結果が得られるのか検証する。

2.3.2 測定の手順

図 2.2、図 2.4 のように、 LaBr_3 と試料を 20.0 cm 離して一直線上に並べる。そして、 LaBr_3 の深さ 2.0 cm の位置を基準に角度 θ の位置に 60.0 cm 離して、 NaI(Tl) を置いた。ここでは、 LaBr_3 中で、式 (2.5) の λ_{LaBr_3} の長さで γ 線が十分減衰することから、深さ 2.0 cm の位置で Compton 散乱が起こると仮定している。試料と LaBr_3 間の距離、または、 LaBr_3 と NaI(Tl) 間の距離を変化させると、単位時間当たりのカウント数が変化してしまう。測定では、角度による単位時間当たりのカウント数の変化を確認したいため、角度 θ にかかわらず、これらの距離は一定とした。

角度 θ は、試料、 LaBr_3 、そして NaI(Tl) の順に一直線上に並ぶ時に、 θ が 0° となるようにとった。 θ は 30° から 180° まで 30° ずつの計 6 通りの角度で測定を行った。

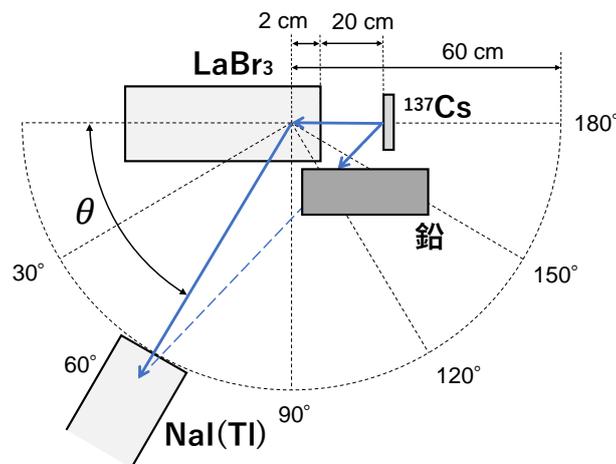


図 2.2: 線源と検出器の配置

図 2.2 の通り、2 種類ある検出器のうち、 LaBr_3 の方を線源の前に固定し、 $\text{NaI}(\text{Tl})$ を角度 θ ごとに動かしたのは、以下の理由による。

- $\text{NaI}(\text{Tl})$ と比べて、 LaBr_3 の方が低いエネルギーの測定に適しているが、式 (1.5) から予想される通りのエネルギーが得られるとすると、 γ 線よりも電子の方が最低のエネルギーが低い。
- LaBr_3 の方が $\text{NaI}(\text{Tl})$ に比べて密度が大きく、 $\lambda_{\text{LaBr}_3} < \lambda_{\text{NaI}}$ である。散乱角 θ をより正確にとるためには、より γ 線の平均自由行程の短く、Compton 散乱が起こる深さが限定できる LaBr_3 の結晶中で Compton 散乱を起こす方が適している。

線源から直接 $\text{NaI}(\text{Tl})$ に入射する γ 線 (図 2.2 の破線) を遮断するため、線源と $\text{NaI}(\text{Tl})$ を結ぶ直線を塞ぐようにして鉛を置いた。ただし、 180° の測定では、直接 $\text{NaI}(\text{Tl})$ へ入射する γ 線と、 LaBr_3 の結晶中で起きた Compton 散乱による γ 線の経路が重なり、一方だけを遮断することができないため、鉛を置かずに測定を行った。

測定は全ての角度について 1000 カウントで行い、得られた ADC カウントと Calibration の結果から、エネルギーを求めた。また、1000 カウントの計測に要した時間をそれぞれの角度で調べた。



図 2.3: 回路モジュール

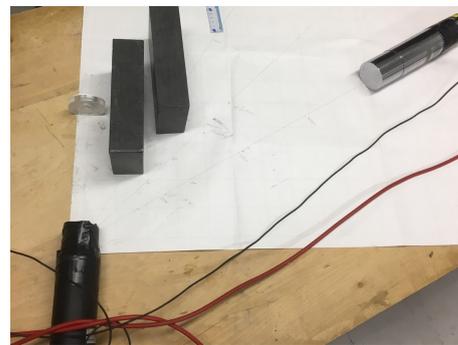


図 2.4: 線源と検出器の配置

第3章 エネルギー分布の解析及び結果

この章ではコンプトン散乱が生じたとき、光子が四方に散乱されるが、その散乱角によってエネルギーの変化が生じる。これは4元運動量が保存することからエネルギー分布の式(1.5)が導かれ、よってこの実験は光の粒子性の裏づけとなることを確認する実験である。

3.1 Calibration

3.1.1 Gaussian フィッティングについて

シンチレーターを用いた測定では、実験装置が及ぼすズレやセットアップ時に生じる角度の不定性ズレなどが生じてしまう。そのため今回は ADC カウントで得られた生データのグラフを Gaussian でフィッティングして中央値とその中央値のエラーを解析に用いた。

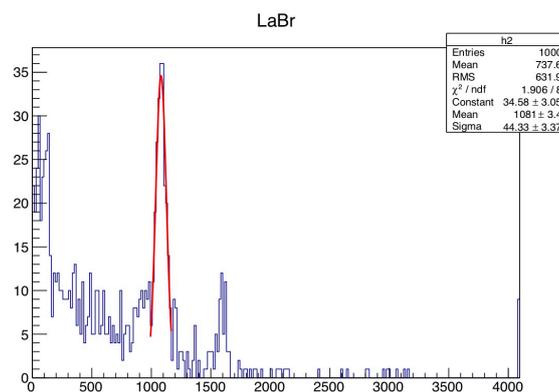


図 3.1: LaBr の Gaussian フィッティング

元データにはスレシヨルド付近にデータが溜まったり、光電ピークが存在したりした。特に、180度するときには、光子ではなく粒子のエネルギーを計測してしまう場合のピークも存在したので、エネルギーの理論値と照らし合わせつつ手動で Gaussian フィッティングをした。また、少しでも恣意性が下がるように同じ人がフィッティングするようにした。さらに、バックグラウンドのことを考慮して、フィッティングするときは山の端を広く取りすぎないようにした。

3.1.2 Calibration とエネルギーの求め方

Calibration は ADC カウントで得られた実験データをエネルギーの値と紐付ける行為である。ペDESTALをとったとき、線源から放射線は飛んでいないので、ADC カウントのピークの中央値をエネルギーの値を 0keV と対応させ、LaBr や NaI で直接線源からでた放射線を測定してカウントがピークとなった部分の中央値を線源 Cs のエネルギー値 662keV と対応させる。これらを直線で結びカウントの値とエネルギーの値を対応させ、Coincidence で得られた中央値をその直線からエネルギーの値を求める。これらの Calibration は角度ごと、測定器ごと (LaBr と NaI) で行う。Coincidence をとった時の LaBr の値から、Calibration で得られた直線の式に代入すると ADC の値から、光子が当たった後の粒子のエネルギーの値を求めることができる。同様に NaI からは散乱した光子のエネルギーが得られる。これを各角度で行うとコンプトン散乱の角度分布が得られる。以下の図は実際に行った実験の NaI の Calibration のグラフを表している。

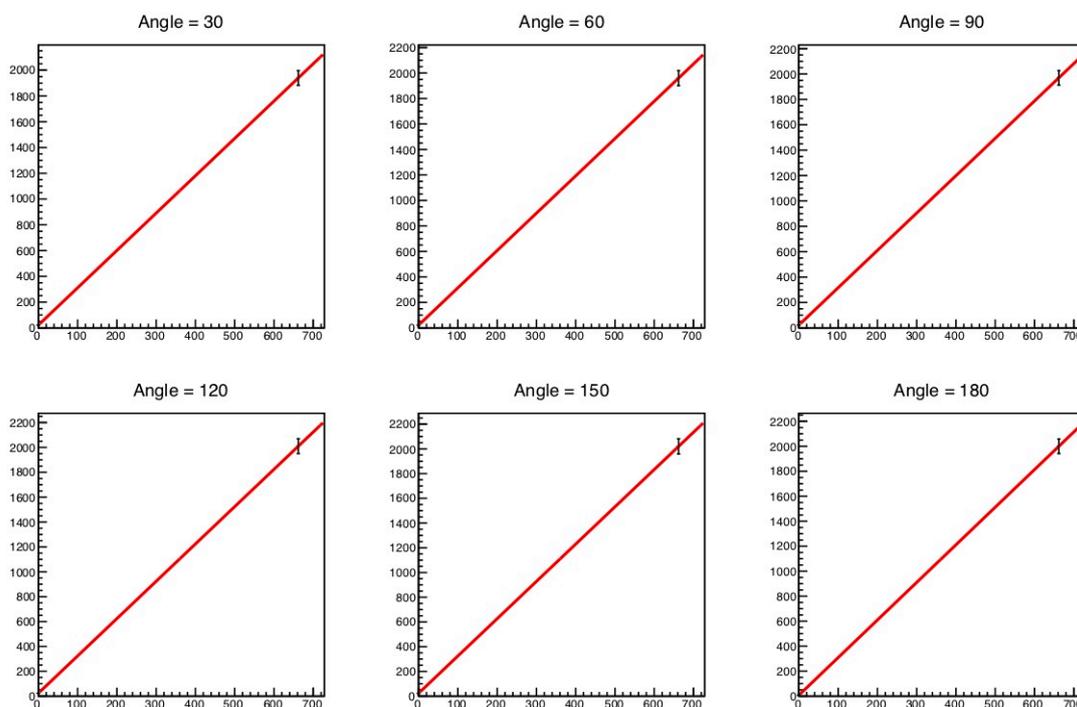


図 3.2: NaI の Calibration の直線

3.2 実験結果

実際に実験を行なった結果、以下のようになった。

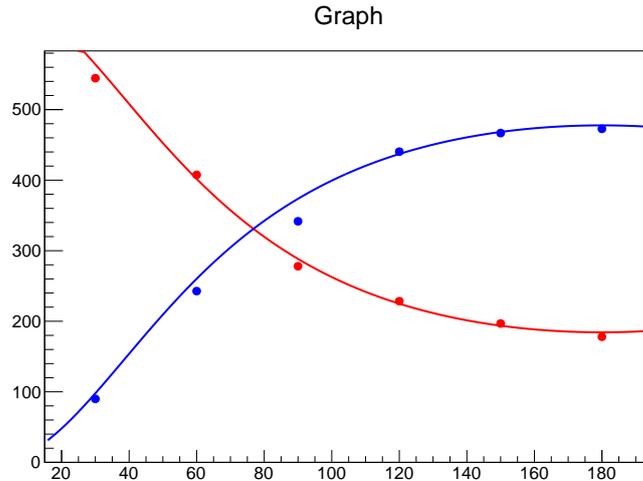


図 3.3: Compton 散乱の反射光と粒子の角度とエネルギー関係

ここで図の赤い曲線が反射光、青い曲線が粒子のエネルギーの理論値を表している。また、各角度における、計測値、および誤差が同じ色のドットとバーでプロットしてある（が、バーがスケールに対して小さすぎてほぼ見えていない）。

3.3 考察

以上の結果からわかるように、実際にコンプトン散乱が起こった時の理論値に対し、実験値はズレてしまっている。これは Calibration に含まれる誤差をきちんと考慮できなかったことが原因であると考えられる。今回の実験では Calibration の直線を 0keV と 662keV の 2点のみから割り出し、そこからエネルギーの値を定めた。この 2 点は各角度で一度ずつしか測定しておらず、そこに含まれる誤差は非常に大きいと見積もられる。この改善策としては単純に測定回数を増やす他、他のエネルギーを持つ線源を用意して測定点を増やし直線を定めるなどの方法がある。この場合、直線の傾きや切片に誤差が含まれ、それがエネルギーの値の誤差に伝搬するはずであり、上の結果と（主に誤差が）異なる結果を得られたのではないかと考えられる。その他の課題としては、もちろん Gaussian フィッティングを手動で行ったこと、正確には Gauss 分布でないことから恣意性や誤差が生まれていることや、今回の誤差の計算では角度など幾何学的な誤差を考慮しきれていないことなどがある。

第4章 Klein-仁科の式

今回の実験では導入部にもあった通り、量子力学的仮定のもとで構築された電磁量子力学 (QED) により導出された Klein-仁科の式との実験結果の整合性を見ることにより、QED の正しさを裏付ける根拠の一つとなることを見ていきたい。それにあたって本実験で得られた全データからコンプトン効果によるものを正しく選択し、妥当性のある結果をどのようにして得るかというのが焦点となる。本章では今回行った解析方法、及びそこから得られた実験結果とその考察について述べていく。

4.1 解析

4.1.1 積分範囲の決定方法

下のヒストグラム (図 4.1) を見ると分かるようにサンプルはある直線状に沿って広がりを持って分布しているが、これはそれぞれの検出器に落ちるエネルギーの和が一定 (662keV) となる直線に沿って分布している。したがって、積分範囲を決める際は軸に沿った長方形ブロック状にするのではなく、傾きが -1 の 2 つの直線で囲まれた領域でカウントする方が適当な (ノイズやバックグラウンドではない) サンプルの取りこぼしが少なくなる。この 2 つの直線の切片については適当なサンプルだろうと思われるものを取りこぼさないように決定した。

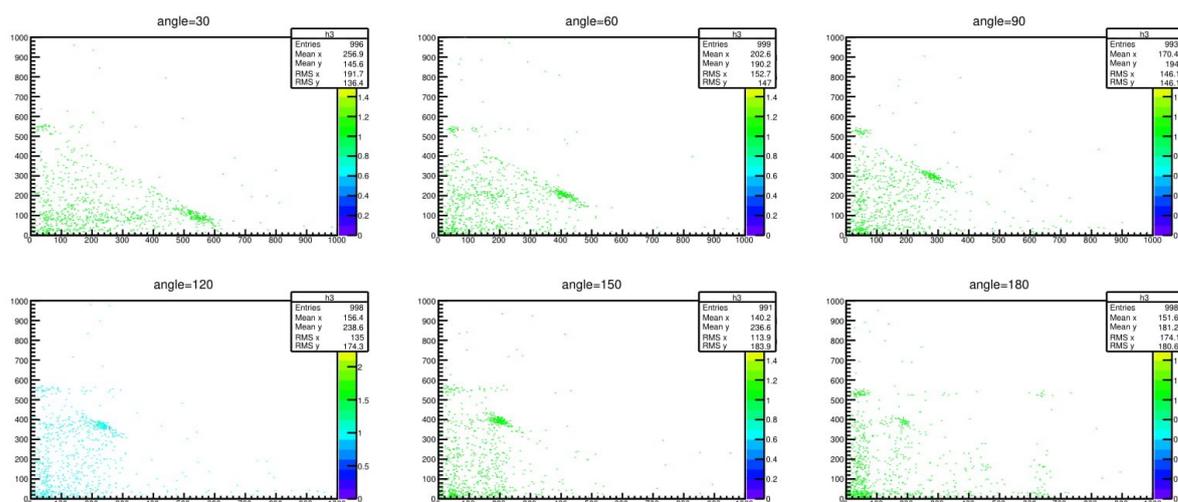


図 4.1: NaI-LaBr のヒストグラム, 縦軸: LaBr で測定されたエネルギー (keV), 横軸: NaI で測定されたエネルギー (keV)

4.1.2 バックグラウンド及び光電吸収の影響について

ヒストグラム (図 4.1) の左端を見てみると、LaBr に全てエネルギーが吸収されたような場所にサンプルが集中しているが、これは LaBr で光電吸収が起きた際に NaI に偶発的な電氣的ノイズなどが起きてコインシデンスが取られてしまったものと予想され、これは測定したい現象ではないので、これを排除するように範囲を決定した。

また、コインシデンスを取っているため単純なノイズやバックグラウンドの影響については他の要素に比べて大変小さく、さして考慮する必要はない。また、考慮したとしても全ての角度について一様に影響を及ぼすだけなので後述するフィッティング関数の切片が上下するだけである。

しかし、 180° の場合についてだけは注意深く考える必要がある。これについては以下の写真 (図 4.2) を見るとわかりやすいが、他の角度とジオメトリ的に鉛ブロックの配置が異なる (線源と NaI の間に鉛ブロックが置かれていない)。この配置によって、 180° の時には上のヒストグラム 4.1 を見るとわかる通り、他の角度の時と異なり、エネルギーが一定である斜めの線上での分布の広がり横軸 (NaI) 正方向に大きく伸びているのだ。これは線源から NaI 側に入った電子がコンプトン散乱を起こし、その後 LaBr 側に入ったものによる影響が大きいと考えられる。よってこの効果による測定点を除く必要があり、この散乱は元来の散乱に対し NaI 側と LaBr 側で測定されるエネルギーの値が丁度反対になると予想されるので、今回は 180° のデータに対して、NaI 側と LaBr 側で測定されたエネルギーが同じ線 (つまり $y = x$ となる線) よりも右側 (横軸正方向) にある測定点を除くようにカットした。

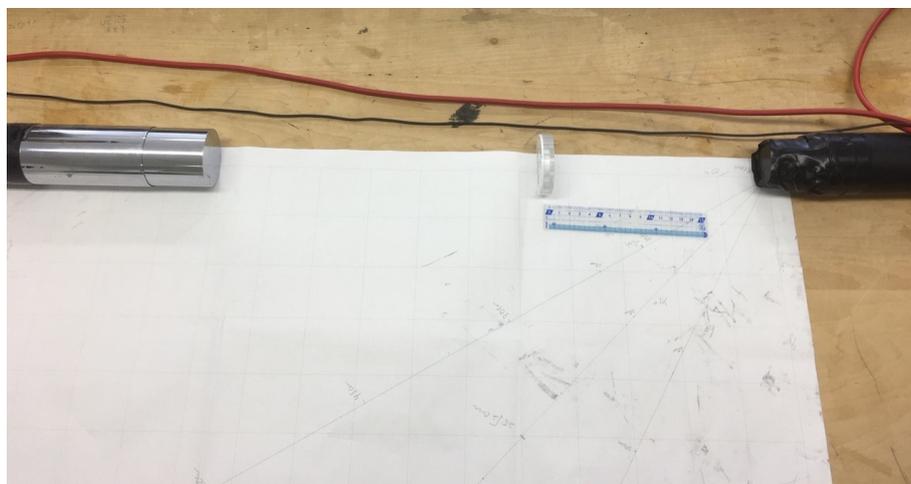


図 4.2: 180° における本実験の様子

4.1.3 線源-LaBr、LaBr-NaI 間の距離について

試料、検出器には大きさがあるため、本来測定したい角度以外の散乱も同時に測定してしまう。したがって、このバラツキを減らすためにはできる限り距離を取る方が望ましい。しかし、距離の二乗に比例して測定にかかる時間が増えてしまう。

今回の実験では線源-LaBr 間の距離を 22cm、LaBr-NaI 間の距離を 60cm として行うことにした。これによって、我々が事前に行った実験の際に、線源-LaBr 間の距離を 10cm、LaBr-NaI 間の距離を 40cm としたときと比べて散乱角度の広がりによる測定誤差を大きく減らすことに成功した。

4.1.4 フィッティング関数

得られた実験結果と Klein-仁科の式がどのくらい整合性があるかを視覚的に見やすくするために、フィッティング関数を用意し実験結果のプロットの上から描いた。今回用いたフィッティング関数は、Klein-仁科の式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{\lambda_e^2}{2} \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left[\frac{E}{E'} + \frac{E'}{E} - \sin^2\theta\right] \quad (4.1)$$

に対して式 (1.5) をエネルギー E 及び E' に代入する。ここで本実験では $h\nu = 662(\text{keV})$, $m_e c^2 = 511(\text{keV})$ であるのでこれを代入し、角度のみに依存する形に直した。最終的なフィッティング関数 F の形としては、規格化定数 A_0 とオフセットを決める A_1 の 2 つのパラメータを用いて以下のように定めた。

$$F = A_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{662}{511}(1 - \cos\theta)}\right)^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{662}{511}(1 - \cos\theta)} + 1 + \frac{662}{511}(1 - \cos\theta) - \sin^2\theta\right) + A_1 \quad (4.2)$$

本実験ではコンプトン散乱が何回起こったかをカウントし、それを計測時間で割ることにより単位時間当たりの散乱回数、つまり散乱頻度を各角度ごとに算出した。Klein-仁科の式の左辺は散乱断面積、つまり単位立体角・単位時間当りの遷移確率であるが、流速密度が一定とするとこれは散乱頻度に比例する。よってフィッティング関数全体を規格化定数によってパラメトライズすれば、実験結果と Klein-仁科の式にどれくらい整合性があるかが確認できる。またバックグラウンドの影響がプロット全体に一様にかさましされていると考えられるのでオフセットのパラメータ A_1 も導入した。

4.2 結果

以上で述べたように、得られたデータから適切なコンプトン効果によるものだけを抽出するように処理したデータと、そこから得られた角度ごとの散乱頻度のグラフが以下の図 4.3 及び図 4.4 である。

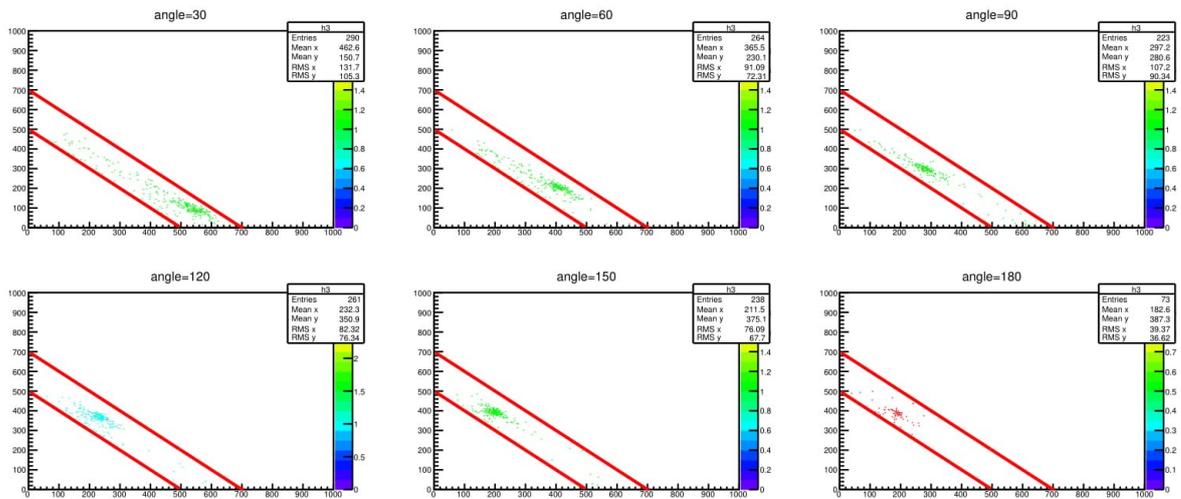


図 4.3: NaI-LaBr のヒストグラム (解析後)

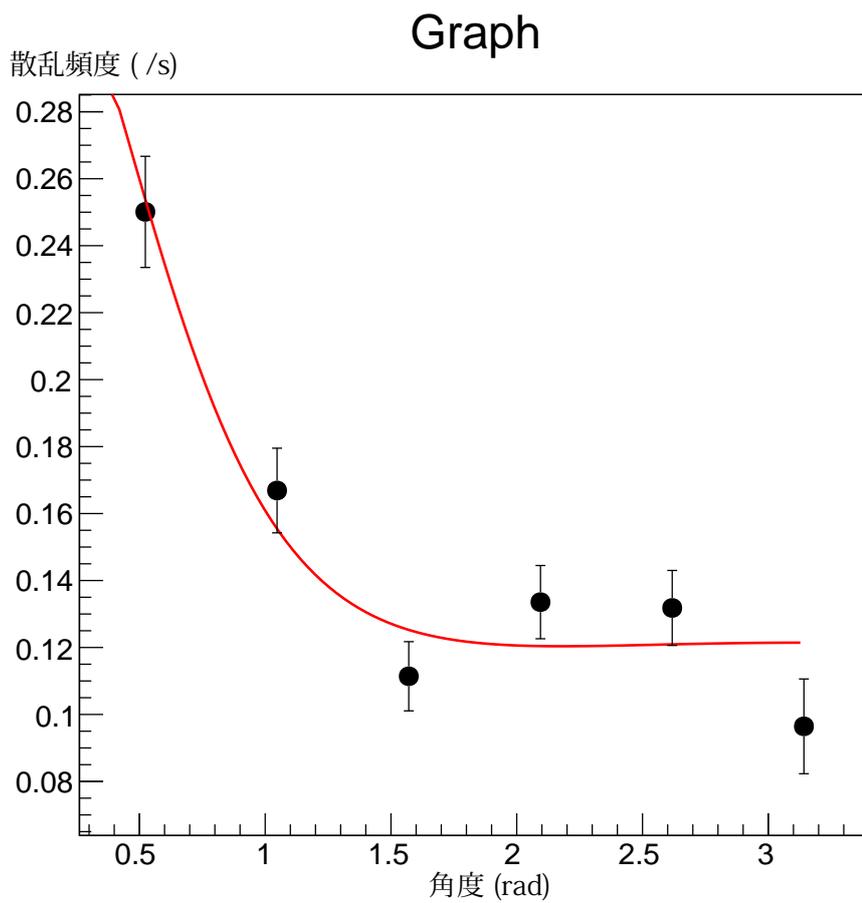


図 4.4: 角度ごとの散乱頻度

4.3 考察

以上の結果からわかる通り、フィッティング関数との整合性が良く、Klein-仁科の式を肯定するような結果を得ることができたと言えるだろう。

しかし、どの測定点が適切なコンプトン散乱によるものかというのを判断し、他の測定点をカットしたという行程においては実験者の目方によって恣意的に線引きをしたところが多く、その正当性に欠ける部分もある。また、 180° の場合に少しずれてしまったが、これは前述したとおり、 180° の場合だけ線源と NaI の間に鉛ブロックを置かなかったことによる差異を正しく処理することができなかったことに起因すると思われる。これらの解析方法についてはより正確で恣意性の低い方法を上手く探していき、改善していくことが今後の課題になるであろう。

謝辞

実験・解析にあたり全面的に協力・指導してくださった教員の田島さん、TAの中村さん、三野さんには大変お世話になりました。この場を借りてお礼申し上げます。

参考文献

- [1] F. マンドル G. ショー 著 樺沢 宇紀 訳 場の量子論 第 1 巻 量子電磁気学 丸善出版 (2016)
- [2] Glenn F. Knoll 著、神野郁夫・木村逸郎・阪井英次 訳、放射線計測ハンドブック第 4 版、オーム社 (2013)