

2020 年

課題演習 A1 後期 実験レポート

コンプトン散乱の散乱角に対する
 γ 線・反跳電子のエネルギーと散乱頻度

指導教員

田島 治

氏名

小川 順生

澤崎 義仁

武市 宗一郎

長澤 広武

JUNEWOO PARK

目次

1	要旨	2
2	実験の目的	2
3	実験の理論	3
3.1	コンプトン散乱	3
3.2	Klein-仁科の式	4
4	実験方法	12
4.1	実験装置	12
4.2	MFP	14
4.3	本実験	16
4.4	本実験の結果	20
5	解析と考察	39
5.1	NaI,LaBr ₃ で記録したヒストグラムの解析手法	39
5.2	散乱 γ 線のエネルギー角度分布	40
5.3	反応頻度の角度分布	40
5.4	角度分解能による影響	45
6	結論	49
7	今後の課題	49
8	謝辞	50

1 要旨

コンプトン散乱における光子の散乱角ごとの反応頻度と散乱光子・反跳電子のエネルギーを測定し、コンプトン散乱の理論が正しいと言えるのかを検証する実験を行った。

コンプトン散乱を起こす入射光子には ^{137}Cs から出される 662keV の γ 線を用い、この γ 線を LaBr_3 に入射させて、散乱された γ 線を NaI に入射させた。光電子増倍管を LaBr_3 、 NaI に取り付けることでそれぞれに入射させた γ 線、反跳された電子のエネルギーを ADC 値から求めた。 NaI を置く角度を変化させる（この実験では 10° ごと）ことでエネルギーや反応頻度がどのように変化するのを見た。

結果は、散乱 γ 線・反跳エネルギーのエネルギー、コンプトン散乱の頻度ともに理論値と概ね一致したが、散乱角度が浅い領域 (30° 以下) において、反跳電子のエネルギーが低すぎて threshold に信号がかからずうまく測定ができなかった。

2 実験の目的

コンプトン散乱で散乱された光子と電子のエネルギー、また角度ごとの微分断面積の式である Klein-仁科の式が正しいのかを検証する。このことにより、場の理論（量子電磁力学）が正しいかを確認するのがこの実験の目的である。

3 実験の理論

3.1 コンプトン散乱

コンプトン散乱とは光子と電子の衝突現象である。散乱された光子は電子にエネルギーを与えることにより散乱前よりエネルギーが減少する。ここでは、散乱角と散乱光子のエネルギー、反跳電子の運動エネルギーの関係を求める。

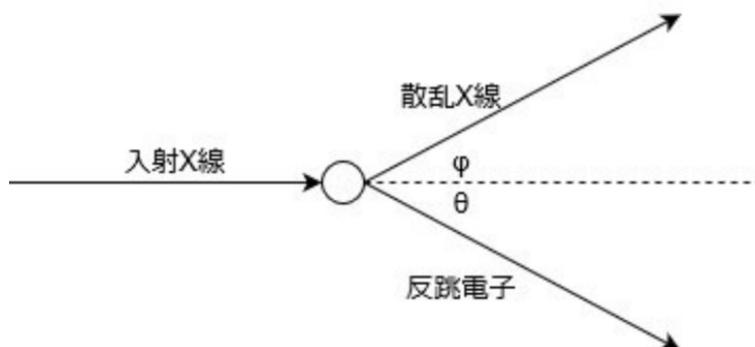


図 3.1 コンプトン散乱の概念図

光子の散乱角を ϕ 、電子の反跳角を θ と置く。また散乱前の光子の波長を ν 、散乱後の光子の波長を ν' 、反跳電子の速度を v と書く。エネルギー保存則より

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}m_e v^2 \quad (3.1)$$

と書ける。また、運動量保存則より

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \phi + m_e v \cos \theta \quad (3.2)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \phi - m_e v \sin \theta \quad (3.3)$$

と書ける。これを整理すると

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \phi)} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = h\nu - h\nu' \quad (3.5)$$

となり、 ϕ を決めることで散乱光子・反跳電子のエネルギーが求まる。この実験においては、 ^{137}Cs から出てくる γ 線を入射光子として用いたため $h\nu \cong 662\text{keV}$ 、電子の静止エネルギーより $m_e c^2 \cong 511\text{keV}$ である。

3.2 Klein-仁科の式

前節でコンプトン散乱の角度ごとにおける散乱光子のエネルギーを求めたが、どの角度に散乱するのは確率過程である。この確率 (微分断面積) を与える式が Klein-仁科の式である。以下では、この式の導出を行う。

3.2.1 S 行列展開

量子電磁気学 (QED) においては、電子-陽電子場と電磁場が相互作用している系を対象とする。この系においてはラグランジアン密度は以下のように表される。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (3.6)$$

自由場のラグランジアン密度 \mathcal{L}_0 は

$$\mathcal{L}_0 = N[\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\nu A^\mu(x))] \quad (3.7)$$

相互作用ラグランジアン密度 \mathcal{L}_I は

$$\mathcal{L}_I = N[-e\bar{\psi}(x)A(x)\psi(x)] \quad (3.8)$$

と与えられる。これに対応して、系の全ハミルトニアン H も自由場のハミルトニアン H_0 と相互作用ハミルトニアン H_I に分割される。

$$H = H_0 + H_I \quad (3.9)$$

ここで相互作用表示を採用すると系の状態ベクトル $|\Phi(t)\rangle$ 、相互作用ハミルトニアン H_I は以下のように時間依存する。

$$i\frac{d}{dt}|\Phi(t)\rangle = H_I|\Phi(t)\rangle \quad (3.10)$$

$$H_I = e^{iH_0(t-t_0)}H_I^S e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (3.11)$$

H_I^S と H_0 はシュレディンガー描像における相互作用ハミルトニアンと自由場のハミルトニアンである。

これより、この時間発展に従った状態の遷移について考える。系の初期状態を $|i\rangle$ とおき、この時の時刻を $t = t_i$ とおくと

$$|\Phi(t_i)\rangle = |i\rangle \quad (3.12)$$

と書ける。また、時間発展はユニタリ変換であるため状態ベクトルのノルムは時間経過に対して保存される。

$$\langle\Phi(t)|\Phi(t)\rangle = const. \quad (3.13)$$

ここで、衝突過程を扱うにおいて始状態を $t = -\infty$ とすると、始状態からの時間発展より終状態 $|\Phi(\infty)\rangle$ が決まる。ここで S 行列 (S 演算子) を始状態を終状態に変換するような演算子と定義すると以下ようになる。

$$|\Phi(\infty)\rangle = S|\Phi(-\infty)\rangle = |i\rangle \quad (3.14)$$

一般に衝突過程の終状態は様々な状態が確率的に生じることが考えられるが、ここにおける終状態 $|\Phi(\infty)\rangle$ は全ての可能性が含まれているものとする。これに対して、個別の終状態 $|f\rangle$ に遷移している確率を求めたい。この確率は

$$|\langle f|\Phi(\infty)\rangle|^2 \quad (3.15)$$

で与えられ、対応する確率振幅は

$$\langle f|\Phi(\infty)\rangle = \langle f|S|i\rangle \equiv S_{fi} \quad (3.16)$$

と書ける。これを用いて終状態 $\Phi(\infty)$ を個別の終状態で展開する。

$$|\Phi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f|\Phi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle S_{fi} \quad (3.17)$$

$|\Phi(\infty)\rangle$ のノルムを 1 とし、両辺のノルムをとると

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{f_1} |f_1\rangle S_{f_1 i} \right)^\dagger \left(\sum_{f_2} |f_2\rangle S_{f_2 i} \right) \\ &= \left(\sum_{f_1} S_{f_1 i}^* \langle f_1| \right) \left(\sum_{f_2} |f_2\rangle S_{f_2 i} \right) \\ &= \sum_f |S_{fi}|^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

これは確率保存則を示している。

S 行列を計算するには (3.11) 式を解けばよい。初期条件は $|\Phi(-\infty)\rangle = |i\rangle$ より、

$$|\Phi(t)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |\Phi(t_1)\rangle \quad (3.19)$$

この方程式は逐次代入によって解かれる。よって得られる摂動解は H_I の冪級数の形で与えられるが、QED においては光子-電子相互作用の強さを表す結合定数は微細構造定数であり、その大きさは $\alpha \cong \frac{1}{137}$ と小さいため、摂動解でも良い近似が与えられる。

(3.19) 式を繰り返すと、

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) \left(|i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) |\Phi(t_2)\rangle \right) \\ &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |i\rangle + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) |\Phi(t_2)\rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

同様に逐次近似を続け、 $t \rightarrow \infty$ の極限を考えると $|\Phi(\infty)\rangle = S|i\rangle$ と書けることから、S 行列が以下のような級数で与えられる。

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで、 $T\{\dots\}$ は時間順序化積である。これを相互作用ハミルトニアンを用いて書き換えると

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n) \quad (3.22)$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \quad (3.23)$$

これが S 行列の Dyson 展開である。

3.2.2 Compton 散乱の Feynman ダイアグラムと Feynman 振幅

前節で S 行列を展開したので、ここに QED における H_I を代入する。

$$\begin{aligned} H_I &= -eN\{\bar{\psi}(x)\mathbf{A}(x)\psi(x)\} \\ &= -eN\{(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)(\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-)(\psi^+ + \psi^-)\}_x \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで、 $\psi^+(\bar{\psi}^-)$, $\bar{\psi}^+(\psi^-)$, $A^+(A^-)$ はそれぞれ電子、陽電子、光子の消滅（生成）演算子である。この相互作用は各項の選び方によって $2^3 = 8$ 個の項に分けられる。これらは、(3.23) 式の一次の摂動項 $S^{(1)}$ において 8 種類の過程を表す。しかし、これらの過程はどれもエネルギー保存則と運動量保存則を両立できない。よって、

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = 0 \quad (3.25)$$

である。よって実過程を得るためには二次の摂動項 $S^{(2)}$ が必要である。Wick の定理を $S^{(2)}$ に適応して展開し、 $S^{(2)}$ を 6 つに分割する。

$$S^{(2)} = \sum_{i=A}^F S_i^{(2)} \quad (3.26)$$

$$S_A^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_2}] \quad (3.27)$$

$$S_B^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{N[(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_2}]\} \quad (3.28)$$

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}] \quad (3.29)$$

$$S_D^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}]\} \quad (3.30)$$

$$S_E^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_2}] \quad (3.31)$$

$$S_F^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 (\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2} \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

ここで $S_A^{(2)}$ については、 $S^{(1)}$ の過程が二回独立に起こるだけなので、 $S^{(1)}$ の時同様実過程ではない。 $S_B^{(2)}$ について考える。 $S_B^{(2)}$ には二つの項が存在するがこれらは等しい。これは実際に演算子を入れ替えるとわかる。よって、以下のように書ける。

$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\mathbf{A}\psi)_{x_2}] \quad (3.34)$$

この式はフェルミオン場の縮約を一つ含んでいる。この縮約は

$$\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) = -\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1) = iS_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \quad (3.35)$$

で与えられる c-数関数であり、中間状態における仮想的なフェルミオンに対応する。これは $t_2 < t_1$ ならば仮想電子の x_2 から x_1 への伝播を表し、 $t_1 < t_2$ ならば仮想陽子の x_1 から x_2 への伝播を表す。この定式化において時間の順序は固定されていないため、二通りの組み合わせを求めたものであり、 x_2 ($\bar{\psi}$ の時空点) から x_1

(ψ の時空点) までの仮想フェルミオン伝播関数と呼ばれる。

$S_B^{(2)}$ は様々な過程に寄与するが、ここからはコンプトン散乱について考える。コンプトン散乱の過程は

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- \quad (3.36)$$

と書けるが、これは $\psi(x_2)$ において始状態に電子を消滅させる正振動部分 $\psi^+(x_2)$ を選び、終状態に電子を生成する負振動部分 $\bar{\psi}^-(x_1)$ を選んだ過程である。しかし $A^+(x_1)$ と $A^+(x_2)$ はどちらも始状態の電子を消滅させることができ、 $A^-(x_2)$ と $A^-(x_1)$ はどちらも終状態の電子を生成することができるため。(3.34) 式は以下のように書くことができる。

$$S^{(2)}(\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-) = S_a + S_b \quad (3.37)$$

$$S_a \equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\alpha^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2) \quad (3.38)$$

$$S_b \equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\alpha^+(x_1) \psi^+(x_2) \quad (3.39)$$

これを Feynman ダイアグラムで書くと以下ようになる。

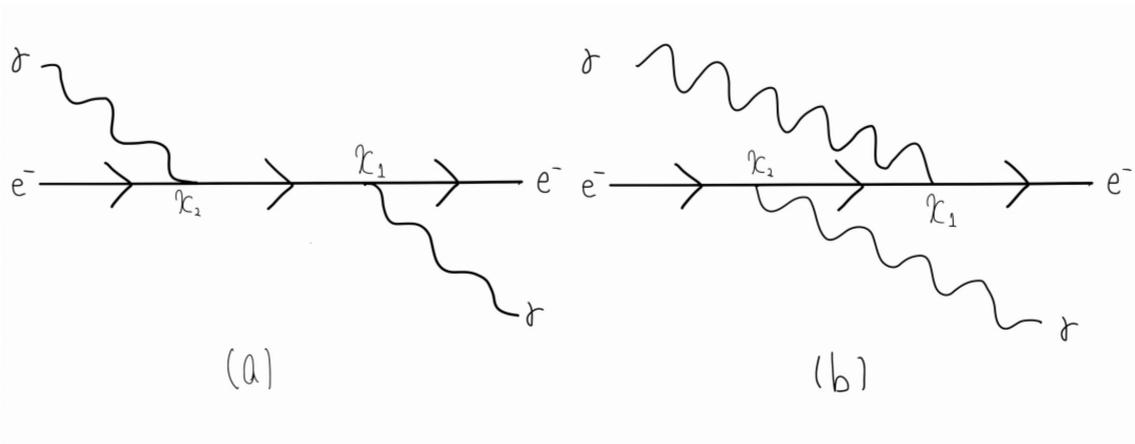


図 3.2 (3.38),(3.39) 式の Feynman Diagram

これらのコンプトン散乱の行列要素を計算する。運動量空間において始状態と終状態は以下のように書かれる。

$$|i\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \rightarrow |f\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}') a^\dagger(\mathbf{k}') |0\rangle \quad (3.40)$$

よって、計算すべきなのは $\langle f|S_a|i\rangle, \langle f|S_b|i\rangle$ である。これを計算するにおいて、 $S_{a,b}$ も Fourier 変換することで運動量空間に移行した形にしなければならない。まず、伝播関数に関しては

$$\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) = iS_F(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p iS_F(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} \quad (3.41)$$

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (3.42)$$

また、縮約されていない演算子についても以下のように書ける。

$$\psi^+(x) |e^- \mathbf{p}\rangle = |0\rangle \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} u(\mathbf{p}) e^{-ipx} \quad (3.43)$$

$$\bar{\psi}^+(x) |e^+ \mathbf{p}\rangle = |0\rangle \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(\mathbf{p}) e^{-ipx} \quad (3.44)$$

$$A_{\alpha}^+(x) |\gamma \mathbf{k}\rangle = |0\rangle \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \quad (3.45)$$

$$\bar{\psi}^-(x) |0\rangle = \sum |e^- \mathbf{p}\rangle \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}) e^{ipx} \quad (3.46)$$

$$\psi^-(x) |0\rangle = \sum |e^+ \mathbf{p}\rangle \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} v(\mathbf{p}) e^{ipx} \quad (3.47)$$

$$A_{\alpha}^- |0\rangle = \sum |\gamma \mathbf{k}\rangle \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{ikx} \quad (3.48)$$

ここで、 $|e^- \mathbf{p}\rangle, |\gamma \mathbf{k}\rangle$ は以下のような 1 電子状態、1 光子状態である。

$$\begin{aligned} |e^- \mathbf{p}\rangle &\equiv |e^- \mathbf{p} r\rangle = c_r^{\dagger}(\mathbf{p}) |0\rangle \\ |\gamma \mathbf{k}\rangle &\equiv |\gamma \mathbf{k} r\rangle = a_r^{\dagger}(\mathbf{k}) |0\rangle, (r = 1, 2) \end{aligned}$$

これらをもとに散乱振幅を計算する。

$$\begin{aligned} \langle f | S_a | i \rangle &= -e^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \left[\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}') e^{ip'x_1} \right] \left[\left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \not{\epsilon}(\mathbf{k}') e^{ik'x_1} \right] \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q i S_F(q) e^{-iq(x_1 - x_2)} \\ &\quad \times \left[\left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \not{\epsilon}(\mathbf{k}) e^{ikx_2} \right] \left[\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}) e^{-ipx_2} \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

この式において x_1, x_2 に関する積分は

$$\begin{aligned} &\int d^4 x_1 e^{ix_1(p' + k' - q)} \int d^4 x_2 e^{ix_2(q - p - k)} \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) \end{aligned} \quad (3.50)$$

よって、エネルギーと運動量は 2 つの結節点において保存し、この過程全体でも保存する。(3.50) 式を (3.49) 式に代入し q に関する積分を実行すると、

$$\langle f | S_a | i \rangle = \left[(2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \mathcal{M}_a \quad (3.51)$$

ここで、 \mathcal{M}_a は Feynman 図 (a) に対応する Feynman 振幅であり、次式で与えられる。

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') i S_F(q = p + k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \quad (3.52)$$

同様に計算すると Feynman 図 (b) に対応する Feynman 振幅も求まり、

$$\mathcal{M}_b = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) i S_F(q = p - k') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') u(\mathbf{p}) \quad (3.53)$$

となる。

3.2.3 断面積

ここからは始状態において二つの粒子が衝突して、終状態には N 個の粒子になっている過程について考察する。(コンプトン散乱では $N=2$) 始状態における二つの粒子の 4 元運動量を $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ ($i = 1, 2$)、終状態における各粒子の 4 元運動量を $p'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f)$ ($f = 1, 2, \dots, N$) とかく。この時 Feynman 振幅 \mathcal{M} を定義する式は以下のように書かれる。

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \prod_i \left(\frac{1}{2VE_i} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_f \left(\frac{1}{2VE'_f} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_l (2m_l)^{\frac{1}{2}} \mathcal{M} \quad (3.54)$$

ここでの添字 l はファインマンダイアグラムにおけるすべての外線レプトンにつける番号である。この式は時間、体積について無限大の極限をとったものである。 $(T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty)$ これを有限の T, V で考えるときは以下のように置き換えて考える。

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) &= \lim_{T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty} \delta_{TV} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \\ &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_V d^3 \mathbf{x} e^{ix(\sum p'_f - \sum p_i)} \end{aligned} \quad (3.55)$$

ここで、単位時間当たりの遷移確率 w は以下のように書ける。

$$w = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \quad (3.56)$$

ここには $[\delta_{TV} (\sum p'_f - \sum p_i)]^2$ という因子が含まれ、 T, V が十分に大きい時以下の近似が成り立つ。

$$\delta_{TV} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \quad (3.57)$$

$$\left[\delta_{TV} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \right]^2 = TV (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \quad (3.58)$$

よって、(3.56) 式について $T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$ をとると

$$w = V (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \left(\prod_i \frac{1}{2VE_i} \right) \left(\prod_f \frac{1}{2VE'_f} \right) \left(\prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (3.59)$$

これはある状態 $|f\rangle$ に遷移する確率、つまり頻度を表す。この終状態の各粒子の運動量に範囲を設けて、その範囲内の終状態に遷移する頻度を求めるには、 w に対して次の状態数をかける必要がある。

$$\prod_f \frac{V d^3 \mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3} \quad (3.60)$$

微分断面積は、このような終状態のグループへの遷移が起こる頻度を、散乱中心の数と、入射粒子ビームの流束密度で割った数である。状態ベクトルの規格化条件より、体積 V の中に散乱中心が一つ含まれ、入射粒子ビームの流束密度は $\frac{v_{rel}}{V}$ と書ける。 $(v_{rel}$ は衝突する粒子の相対速度である。) これらより微分断面積の式が求まり、

$$\begin{aligned} d\sigma &= w \frac{V}{v_{rel}} \prod_f \frac{V d^3 \mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3} \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{rel}} \left(\prod_l (2m_l) \right) \left(\prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \right) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

となる。この式は、任意の Lorentz 座標系について成立する。このような座標系において v_{rel} は以下の式によって与えられる。

$$E_1 E_2 v_{rel} = [(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.62)$$

m_1, m_2 は衝突する粒子の静止質量である。以下では式を二種類の座標系、重心系 (CoM) と実験室系 (Lab) で考える。まず、重心系において相対速度 v_{rel} は、 $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ より

$$v_{rel} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2} = |\mathbf{p}_1| \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} (CoM) \quad (3.63)$$

である。また、実験室系においては $\mathbf{p}_2 = 0$ より

$$v_{rel} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} (Lab) \quad (3.64)$$

である。ここで、(3.61) 式において $N = 2$ であるとする (コンプトン散乱など)

$$d\sigma = f(p'_1, p'_2) \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) d^3 \mathbf{p}'_1 d^3 \mathbf{p}'_2 \quad (3.65)$$

$$f(p'_1, p'_2) \equiv \frac{1}{64\pi^2 v_{rel} E_1 E_2 E'_1 E'_2} \left(\prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (3.66)$$

と書け、 \mathbf{p}'_2 についての積分を実行すると

$$d\sigma = f(p'_1, p'_2) \delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2) |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| d\Omega'_1 \quad (3.67)$$

となる。ここでは、 $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1$ である。さらに $|\mathbf{p}'_1|$ についても積分すると

$$d\sigma = f(p'_1, p'_2) |\mathbf{p}'_1|^2 d\Omega'_1 \left(\frac{\partial(E'_1 + E'_2)}{\partial|\mathbf{p}'_1|} \right)^{-1} \quad (3.68)$$

が与えられる。

3.2.4 Klein-仁科の式

以下ではコンプトン散乱について扱う。コンプトン散乱における始状態は電子と光子が一つずつである。電子の運動量は $p = (E, \mathbf{p})$ 、スピン状態は $u = u_r(\mathbf{p})$ で、光子の運動量は $k = (w, \mathbf{k})$ 、偏極状態は $\epsilon \equiv \epsilon_s(\mathbf{k})$ と置く。終状態については、これらを $p' = (E', \mathbf{p}')$ 、 $u' = u_{r'}(\mathbf{p}')$ 、 $k' = (w', \mathbf{k}')$ 、 $\epsilon' \equiv \epsilon_{s'}(\mathbf{k}')$ と置く。この時、この過程の散乱断面積は前節より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 w'}{16\pi^2 E E' w v_{rel}} \left[\left(\frac{\partial(E' + w')}{\partial w'} \right)_{\theta\phi} \right]^{-1} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.69)$$

と書かれる。 (θ, ϕ) は \mathbf{k}' の向きを表す極座標の角度成分、 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ はこれに対応する立体角要素である。極座標の基準軸は \mathbf{k} の向きであり、 θ は光子の散乱角である。よって $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = w w' \cos\theta$ が成り立つ。また、4元運動量保存則より $p + k = p' + k'$ である。ここで Feynman 振幅 \mathcal{M} について (3.52), (3.53) 式より以下のように書ける。 $(f_1 \equiv p + k, f_2 \equiv p - k')$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b \quad (3.70)$$

$$\mathcal{M}_a = -ie^2 \frac{\bar{u}' \not{\epsilon}' (\not{f}_1 + m) \not{\epsilon} u}{2(pk)}, \mathcal{M}_b = ie^2 \frac{\bar{u}' \not{\epsilon} (\not{f}_2 + m) \not{\epsilon}' u}{2(pk')} \quad (3.71)$$

標的となる電子が静止している系（実験室系）においては以下の関係が成立する。

$$p = (m, 0, 0, 0) \quad (3.72)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}' \quad (3.73)$$

$$E' = [m^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2]^{\frac{1}{2}} = [m^2 + w^2 + w'^2 - 2ww' \cos \theta]^{\frac{1}{2}} \quad (3.74)$$

$$pk = p'k + k'k = pk' + k'k \quad (3.75)$$

よって、次式が成立する。

$$w' = \frac{mw}{m + w(1 - \cos \theta)} \quad (3.76)$$

この式は標的となる電子が反跳することによる、散乱光子のエネルギーのずれを表す。よって

$$\left(\frac{\partial E' + w'}{\partial w'} \right)_{\theta\phi} = \frac{mw}{E'w'} \quad (3.77)$$

よって、微分断面積の式は実験室系において以下のように書かれる。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Lab} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{w'}{w} \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (3.78)$$

この式は電子のスピン、光子の偏極を指定したものである。よって、始状態においてそれらを平均し、終状態については和をとったような式が欲しい。ここで、Feynman 振幅を以下のように書き換える。

$$\mathcal{M} \equiv \epsilon_\alpha \epsilon'_\beta \mathcal{M}^{\alpha\beta} \quad (3.79)$$

よって、

$$\frac{1}{4} \sum_{pol} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} \mathcal{M}^{\alpha\beta} \mathcal{M}_{\alpha\beta}^* \quad (3.80)$$

これに対して (3.70), (3.71) 式を適用すると、

$$\frac{1}{4} \sum_{pol} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{pol} \sum_{spin} \{ |\mathcal{M}_a|^2 + |\mathcal{M}_b|^2 + \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_b \mathcal{M}_a^* \} \quad (3.81)$$

$$= \frac{e^4}{64m^2} \left\{ \frac{X_{aa}}{(pk)^2} + \frac{X_{bb}}{(pk')^2} - \frac{X_{ab} + X_{ba}}{(pk)(pk')} \right\} \quad (3.82)$$

$$X_{aa} = Tr \{ \gamma^\beta (\not{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m) \} \quad (3.83)$$

$$X_{bb} = Tr \{ \gamma^\alpha (\not{f}_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma_\beta (\not{f}_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m) \} \quad (3.84)$$

$$X_{ab} = Tr \{ \gamma^\beta (\not{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\beta (\not{f}_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m) \} \quad (3.85)$$

$$X_{ba} = Tr \{ \gamma^\alpha (\not{f}_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m) \} \quad (3.86)$$

ここで、X をすべて計算する必要はない。なぜなら、

$$k \leftrightarrow -k', \epsilon \leftrightarrow \epsilon' \quad (3.87)$$

という置き換えに対し、

$$f_1 \leftrightarrow f_2, \mathcal{M}_a \leftrightarrow \mathcal{M}_b \quad (3.88)$$

という変換が生じ、

$$X_{aa} \leftrightarrow X_{bb}, X_{ab} \leftrightarrow X_{ba} \quad (3.89)$$

となるので、 X_{aa} と X_{ab} のみを計算すれば十分である。計算結果は以下のようになる。

$$X_{aa} = 32[m^4 + m^2(pk) + (pk)(pk')] \quad (3.90)$$

$$X_{bb} = 32[m^4 - m^2(pk') + (pk)(pk')] \quad (3.91)$$

$$X_{ab} = X_{ba} = 16m^2[2m^2 + (pk) - (pk')] \quad (3.92)$$

これより、

$$\frac{1}{4} \sum_{pol} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2m^2} \left\{ \left(\frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} \right) + 2m^2 \left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right)^2 \right\} \quad (3.93)$$

実験室系においては $pk = mw, pk' = mw'$ が成り立つため

$$\frac{1}{w} - \frac{1}{w'} = \frac{1}{m}(\cos\theta - 1) \quad (3.94)$$

より、(3.93) 式は

$$\left[\frac{1}{4} \sum_{pol} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 \right]_{Lab} = \frac{e^4}{2m^2} \left\{ \frac{w}{w'} + \frac{w'}{w} - \sin^2\theta \right\} \quad (3.95)$$

であり、(3.78) 式より

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Lab} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{w'}{w} \right)^2 \left(\frac{w}{w'} + \frac{w'}{w} - \sin^2\theta \right) \quad (3.96)$$

となる。これが Klein-仁科の式である。

4 実験方法

4.1 実験装置

実験で使用した装置は以下の通り。

シンチレータ:

放射線によって励起され、発光する物質。今回の実験では NaI と LaBr₃ を用いた。

光電子増倍管 (PMT) :

シンチレータからの光によって発生する光電子を増幅することで、微弱な電気信号を計測できるようにする。LaBr₃ には PMT1 を NaI には PMT2 を用い、PMT1 に -1600V、PMT2 に +1450V の電圧をかけた。

Divder:

入力された一つの電気信号を複数の信号に分ける。

Discriminator:

入力された電気信号が設定した閾値を超えたときに矩形波を出力する。今回の実験では 2 つの Discriminator を用いたが、ともに threshold を 10.8mV に設定した。

Gate Generator:

信号が入力されたときに、設定された時間幅を持った矩形波を出力する。今回の実験では時間幅を $2.1\mu\text{s}$ に設定した。

FUN IN/OUT:

入力された電気信号の和を出力する。

VETO:

連続して複数の信号が検出されると、Gate Generator からの信号が繋がって一つの大きな矩形波になってしまい、一つ一つの信号の区別がつかなくなってしまう。そこで、この VETO を通すことで複数の信号が短い間隔で来ても最初の信号のみを取り出すことができる。

Coincidence:

二つの信号が同時に来たときに矩形波を出力する。

DELAY:

Gate generator の矩形波の中に生波形が入るように信号を遅らせる。今回の実験ではケーブル線で 50ns 、DELAY 装置で 20ns 遅らせた。

ADC:

矩形波の幅の範囲で積分してその信号の電荷量を測定する。

SCALER:

来た矩形波の数を測定する

線源:

放射線源。今回の実験では ^{137}Cs を用いた。 662keV の γ 線を放出する。

鉛:

γ 線を遮断する。

4.2 MFP

本実験（Compton 散乱）を行う前に、 γ 線がシンチレータに吸収されるまで進む平均距離を調べた。下図 4.3 のように配置し、SCALER を用いて距離ごとに約 1 分間ずつイベント数を計測した。

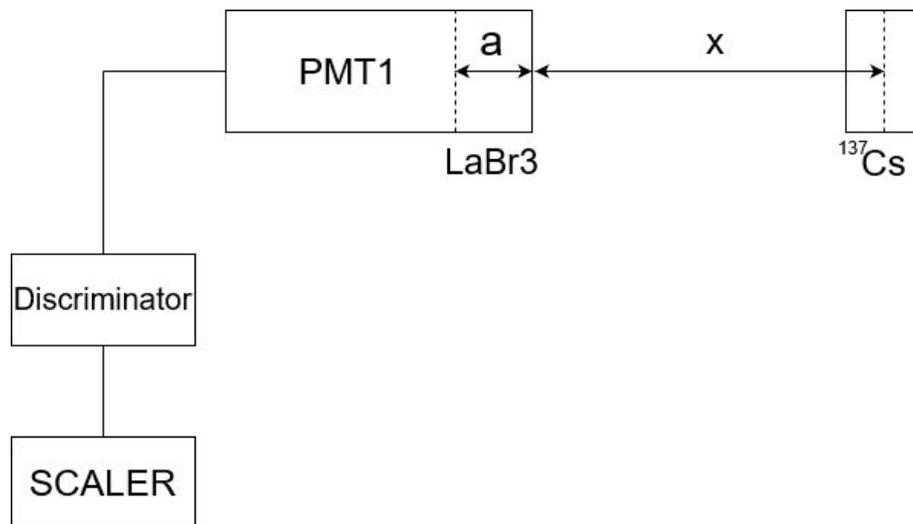


図 4.3 平均自由工程 配置図

実験結果として表 4.1、図 4.4 の結果が得られた。

表 4.1 平均自由行程 実験結果 1

x(cm)	t(s)	N(回)
5	59.96	214147
10	59.96	75192
15	59.91	38322
20	59.96	23741
25	59.99	16121
30	59.96	11982
35	60.09	9283
40	60.01	7513
45	60.02	6386
50	59.91	5376
55	60.08	4762
^{137}Cs なし	59.99	1429

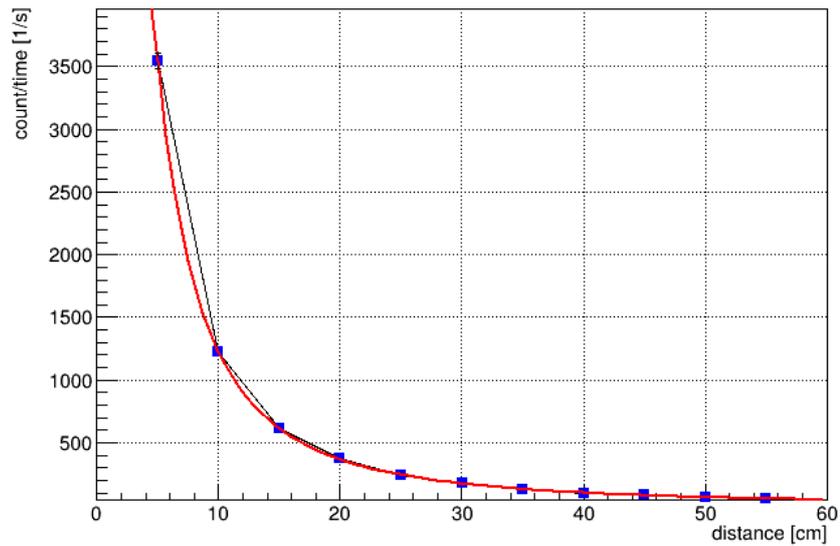


図 4.4 平均自由行程 実験結果 2

フィット関数として $N = \frac{b}{(x+a)^2}$ を用いると、 $a = 2.156 \pm 0.01596$, $b = 1.088 \times 10^5 \pm 294.8$ となった。よって、本実験では平均自由行程を 2.2cm として実験を行った。

4.3 本実験

4.3.1 回路

本実験では図 4.5 の回路を用いた。

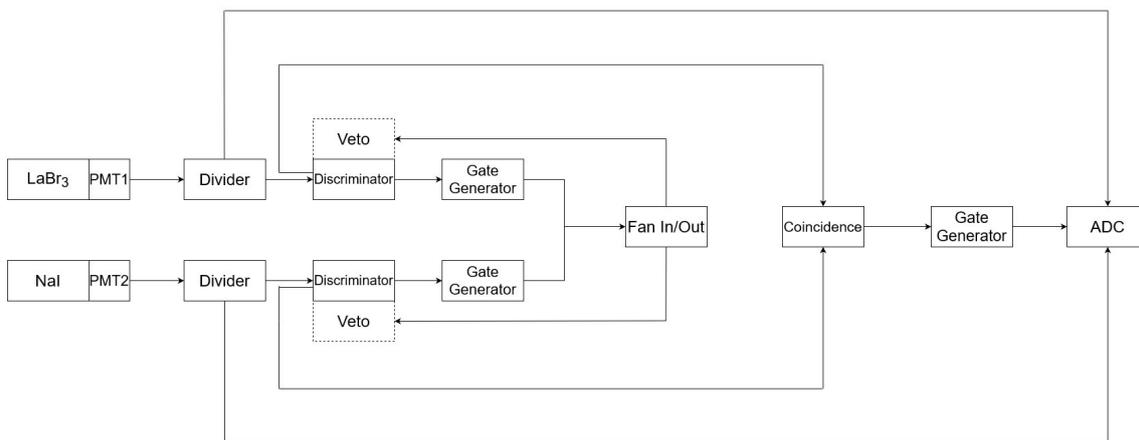


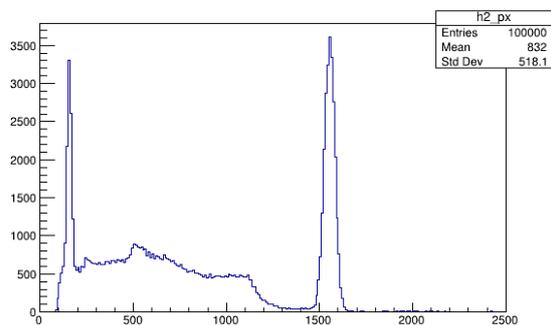
図 4.5 本実験 回路図

4.3.2 Calibration

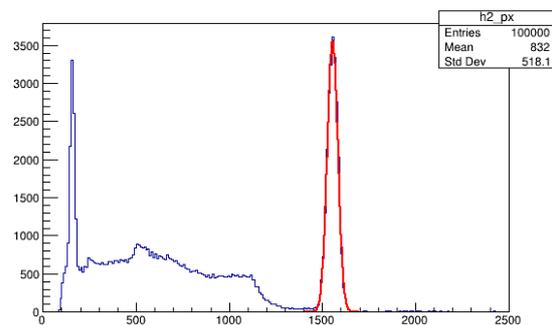
実験で得られるのは ADC 値であり、エネルギー値ではない。そこで、calibration を行うことで ADC 値とエネルギー値の対応を調べる。図 (4.5) の回路において、Coincidence のスイッチを片方だけにして NaI と LaBr₃ のそれぞれに対して角度を変えるごとに ADC 値を測定する。この際、測定イベント数は 100000 回に設定し、スイッチが入っていないほうの検出器は鉛で覆った。各検出器が線源からの γ 線を吸収したときの ADC 値は 662 keV に対応しており、この値と 0 keV に対応している ADC 値 (Pedestal) から ADC 値とエネルギー値の対応関係を得る。(対応関係は線形であるとした。)

□ 解析方法:

測定で得られる ADC 値の分布がガウス分布に従うとし、PC を用いて 662 keV と 0 keV に対応する ADC 値の山にガウスフィッティングを行った。実験解析・考察ではフィッティングによって得られる分布の平均を用いた。

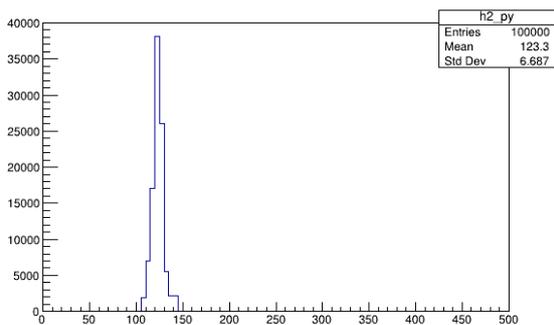


(a)

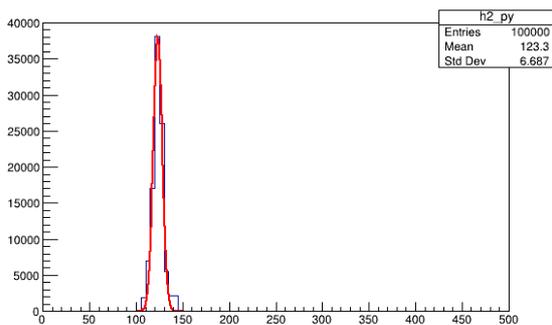


(b)

図 4.6 60° の時の LaBr₃ の ADC 値・イベント数グラフ (NaI を鉛で遮蔽し、LaBr₃ の Coincidence のスイッチのみ ON にした。)



(a)



(b)

図 4.7 60° の時の NaI の ADC 値・イベント数グラフ (NaI を鉛で遮蔽し、LaBr₃ の Coincidence のスイッチのみ ON にした。)

Calibration 結果は以下のようになった。

表 4.2 Calibration データ。基本的に測定の前後に calibration を行うことにしたが、 180° の時は後だけ、 0° と 170° の時は前だけ行った。そして 50° と 40° の間に NaI の 662 keV の calibration データは取ることもできなかった。前後に calibration を行った場合にはその平均値を使うことにした。

		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
LaBr3	662 keV	1479	1477	1502.5	1568.5	1544.5	1481	1478	1481	1491	1525
	Pedestal	82.33	82.67	83.08	83.14	83.25	83.34	83.18	83.04	83.85	86.26
NaI	662 keV	2258	2204	2213.5	2195.5	2114	2154	2129	2121	2135.5	2223.5
	Pedestal	119.9	120.3	120.4	118.2	119	121.45	120.55	121	121.35	121.95
		100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	
LaBr3	662 keV	1465	1469.5	1470	1468.5	1474.5	1480.5	1533.5	1496	1496	
	Pedestal	85.22	84.28	84.14	171.24	86.35	85.96	85.61	86.8	86.8	
NaI	662 keV	2151.5	2131.5	2113.5	2087	2081.5	2096	2194.5	1724	1724	
	Pedestal	123.15	122.9	122.2	121.6	122.5	122.3	124.9	122.1	122.1	

4.3.3 Compton 散乱

実際の実験では図 4.9 のように配置した。図 4.2 で計ったように LaBr_3 は中央から 2.2cm 離れるようにした。また、線源は中央は 15cm 離れるようにし、 NaI は中央から 30cm 離れるようにして 10° ずつ動かした。基本的に測定の前後に calibration を行うことにしたが、 180° の時は後だけ、 0° と 170° の時は前だけ行った。そして 50° と 40° の間に NaI の 662 keV の calibration データは取ることができなかった。前後に calibration を行った場合にはその平均値を使うことにした。Calibration の結果は表 4.2 である。測定は 0° から 180° まで 10° ごとに NaI を移動させて、それぞれイベント数 10000 回に設定して行った。実験の結果は図 4.10~4.28 である。

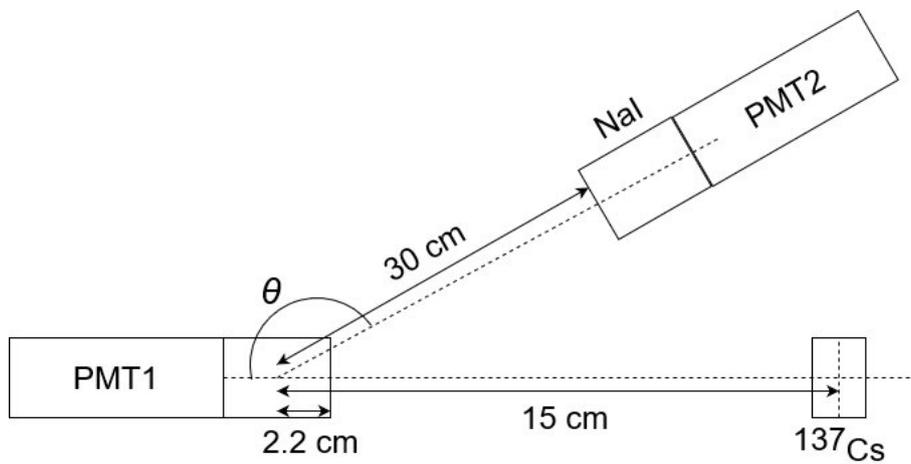


図 4.8 Compton 散乱 配置図



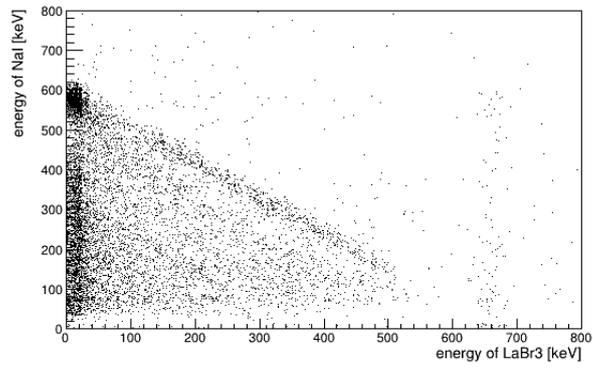
(a)



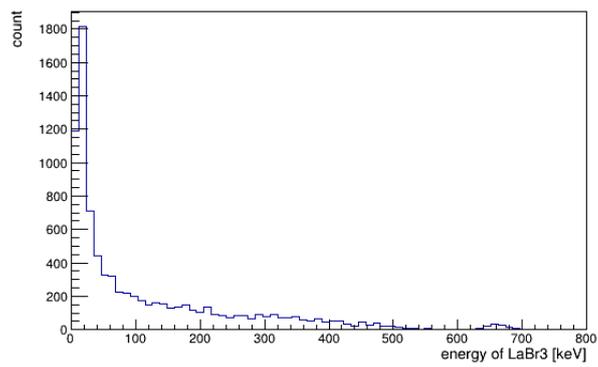
(b)

図 4.9 60° の時の実験写真。鉛で線源から直接 NaI に入る放射線を遮蔽した。

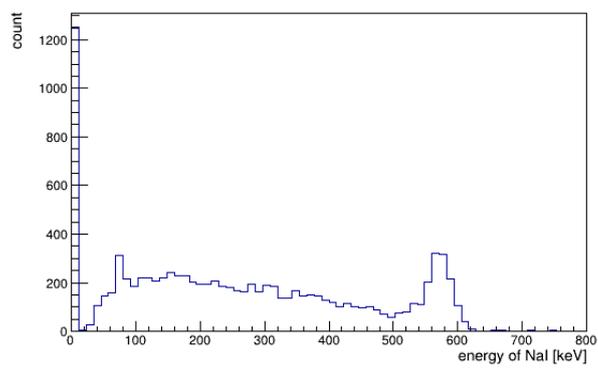
4.4 本実験の結果



(a)

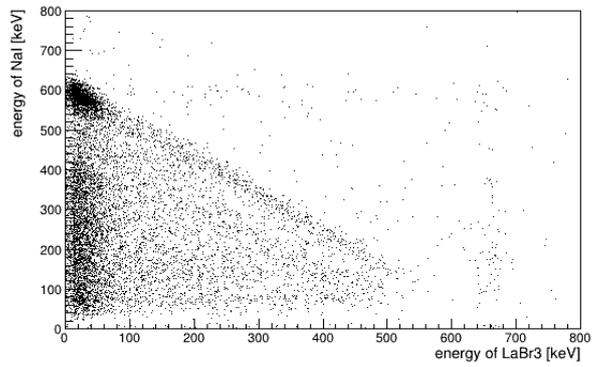


(b)

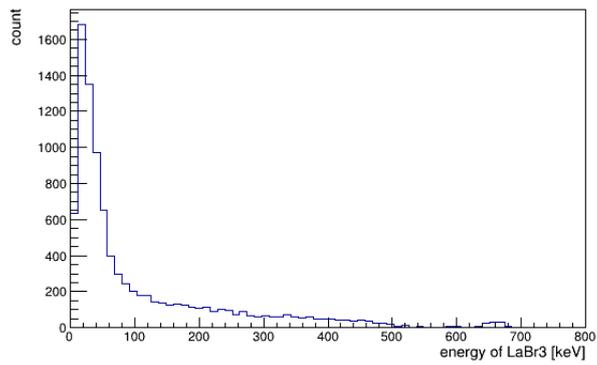


(c)

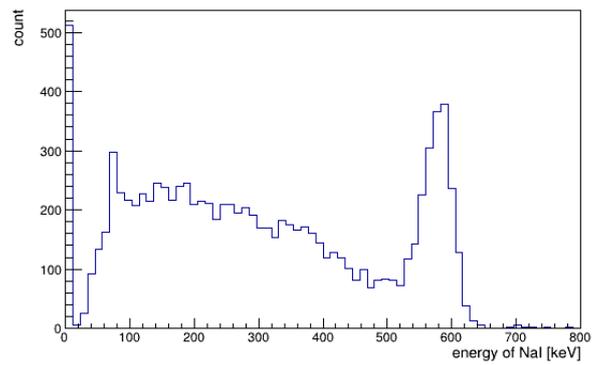
図 4.10 角度 0° の時の実験結果。



(a)

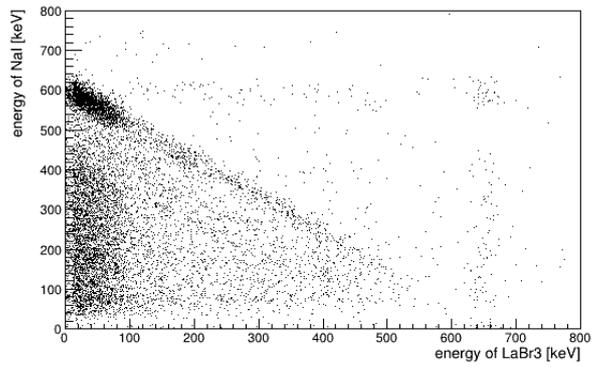


(b)

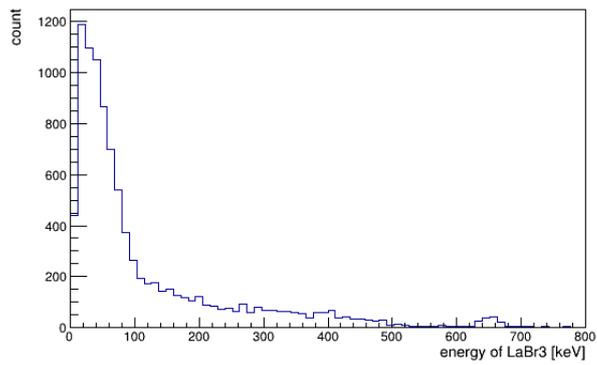


(c)

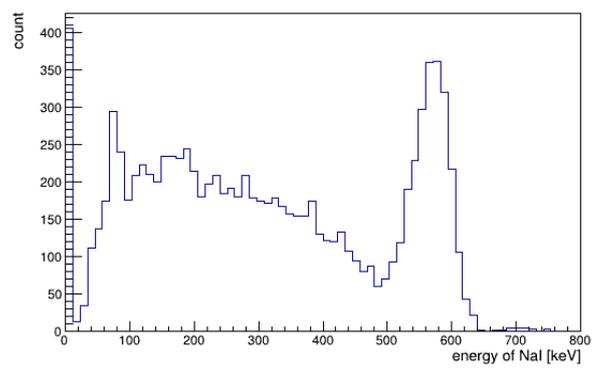
図 4.11 角度 10° の時の実験結果。



(a)

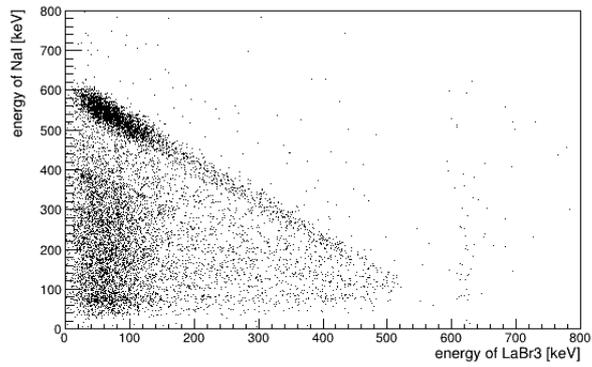


(b)

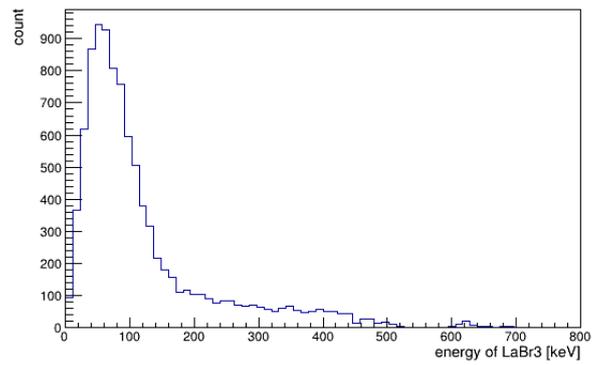


(c)

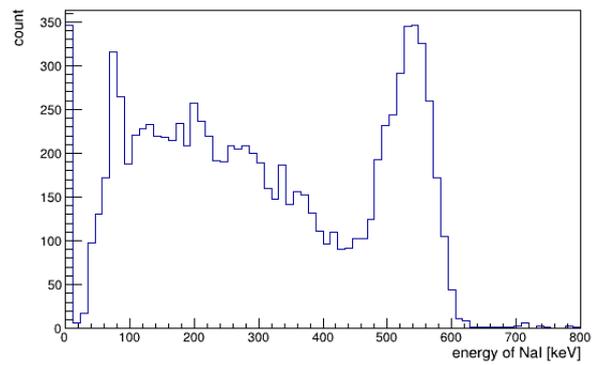
図 4.12 角度 20° の時の実験結果。



(a)

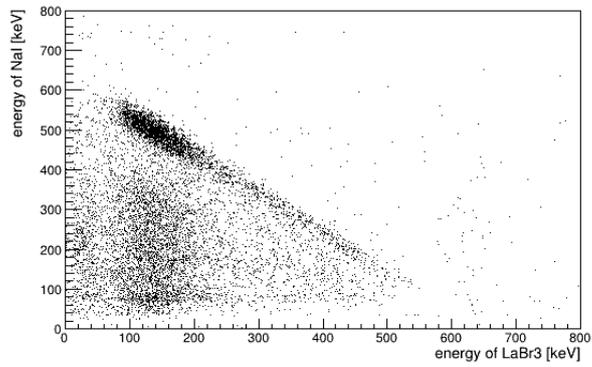


(b)

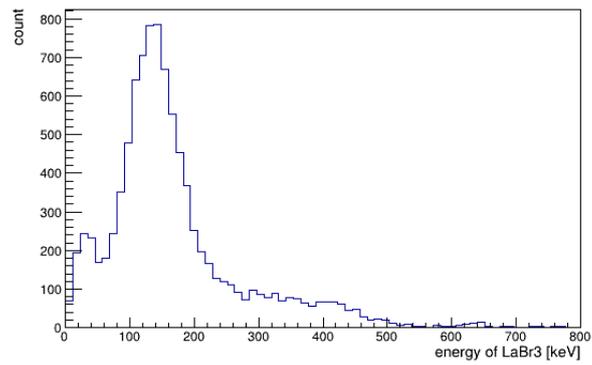


(c)

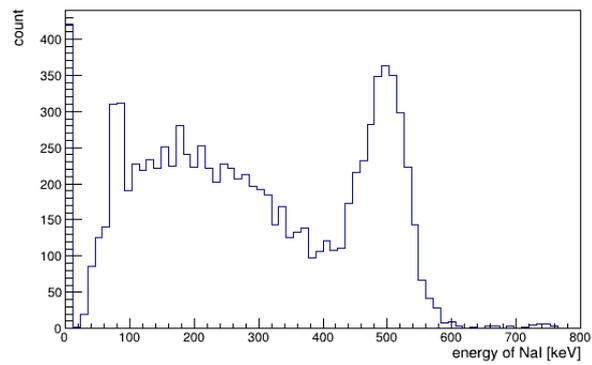
図 4.13 角度 30° の時の実験結果。



(a)

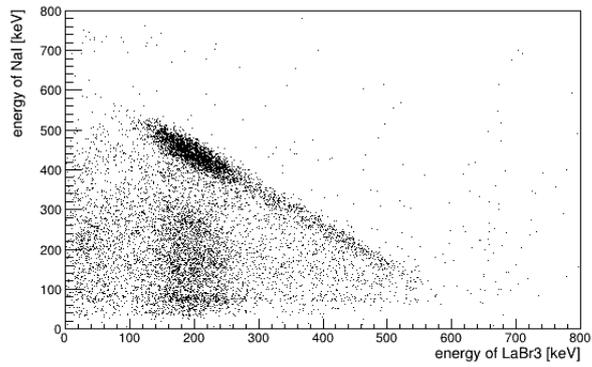


(b)

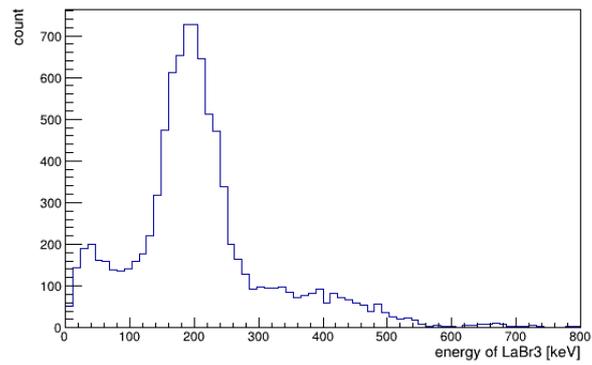


(c)

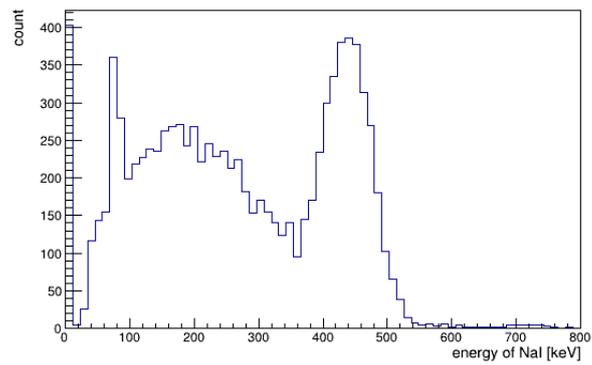
図 4.14 角度 40° の時の実験結果。



(a)

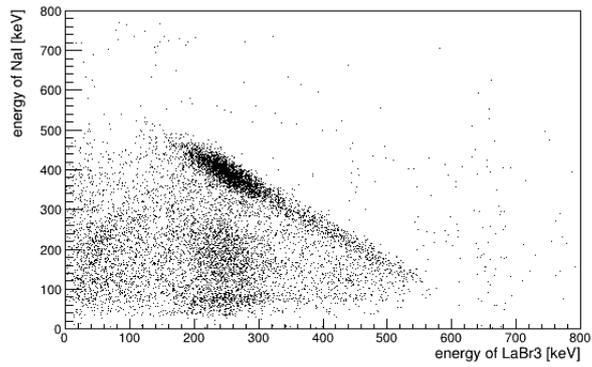


(b)

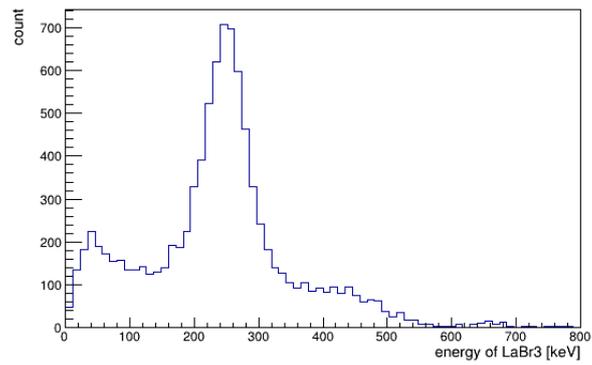


(c)

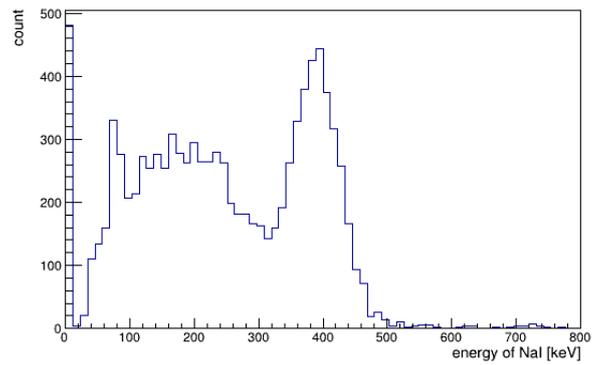
図 4.15 角度 50° の時の実験結果。



(a)

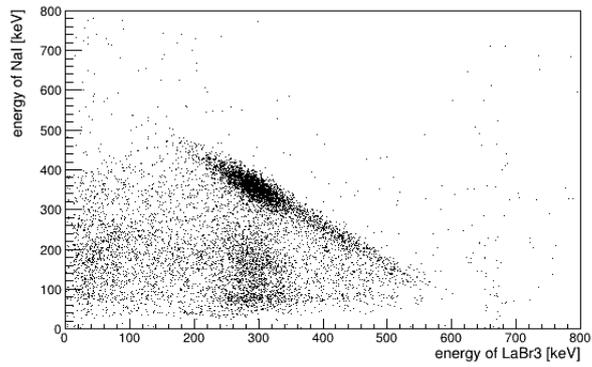


(b)

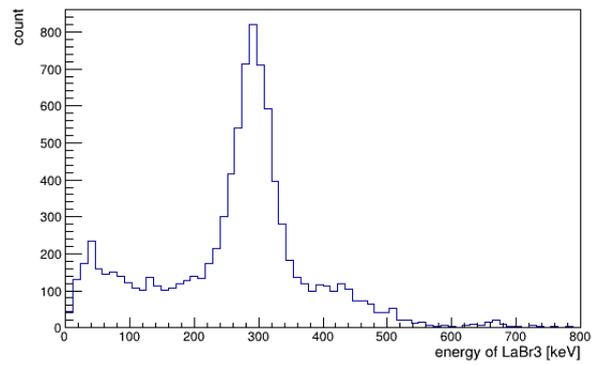


(c)

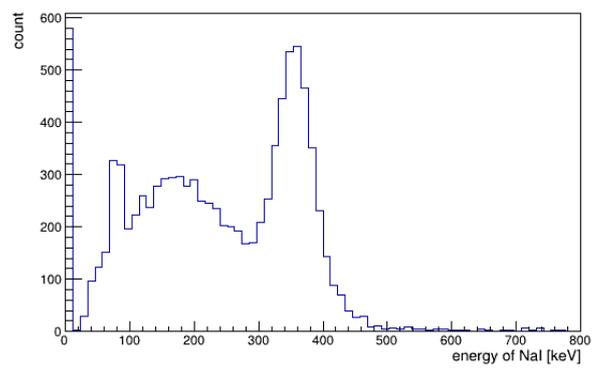
図 4.16 角度 60° の時の実験結果。



(a)

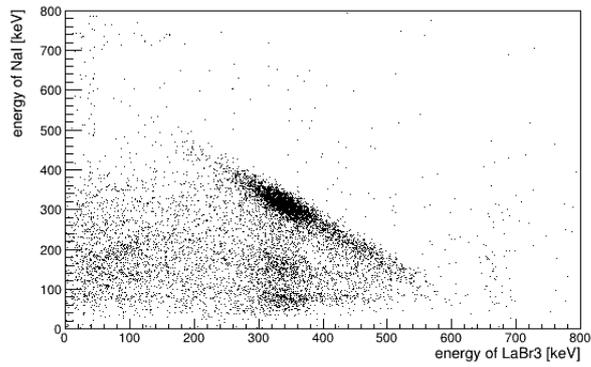


(b)

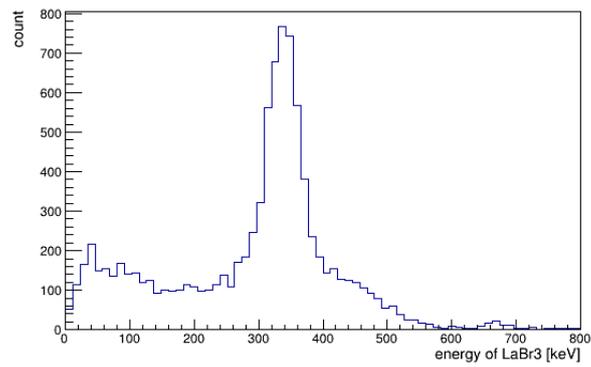


(c)

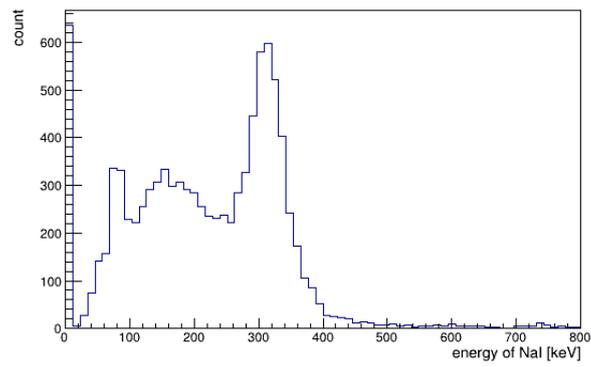
図 4.17 角度 70° の時の実験結果。



(a)

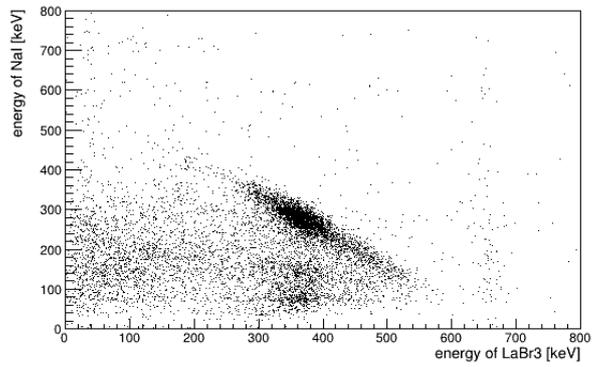


(b)

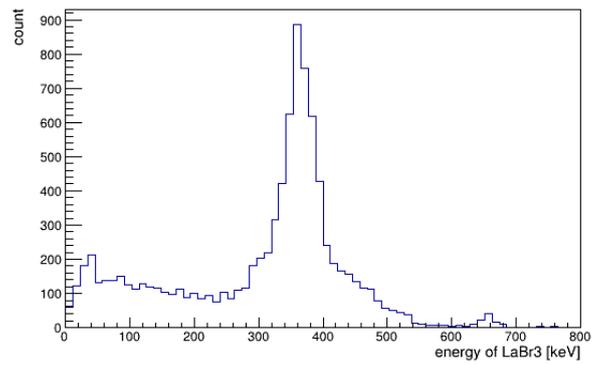


(c)

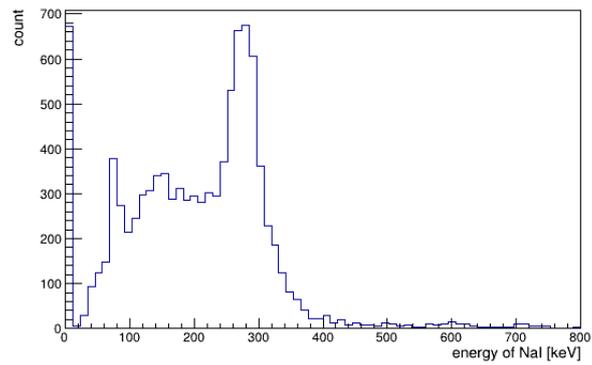
図 4.18 角度 80° の時の実験結果。



(a)

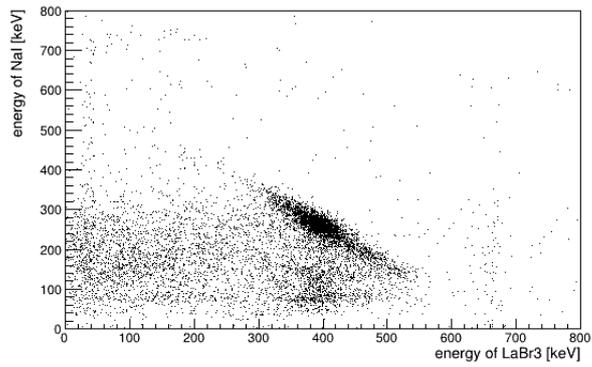


(b)

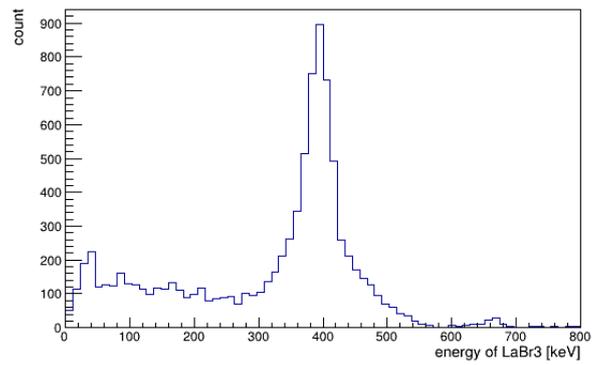


(c)

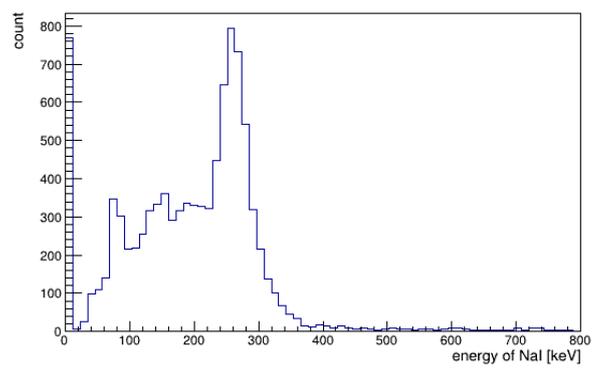
図 4.19 角度 90° の時の実験結果。



(a)

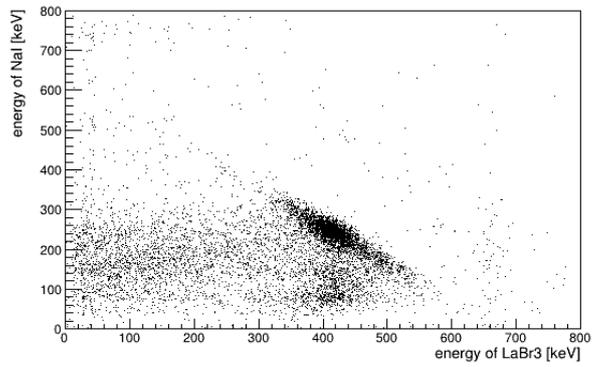


(b)

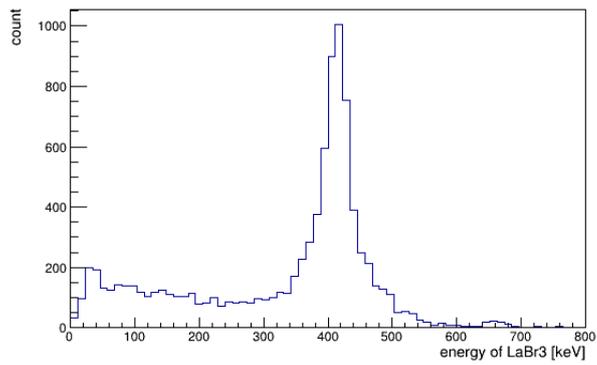


(c)

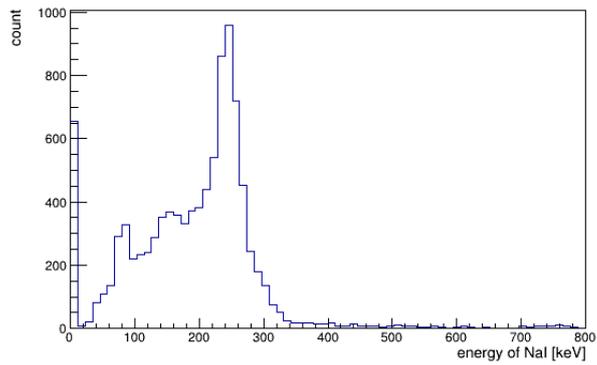
図 4.20 角度 100° の時の実験結果。



(a)

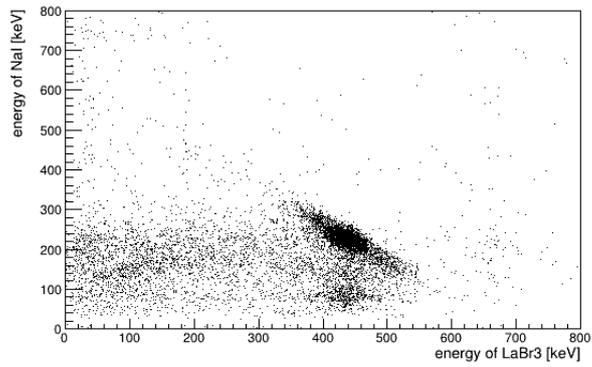


(b)

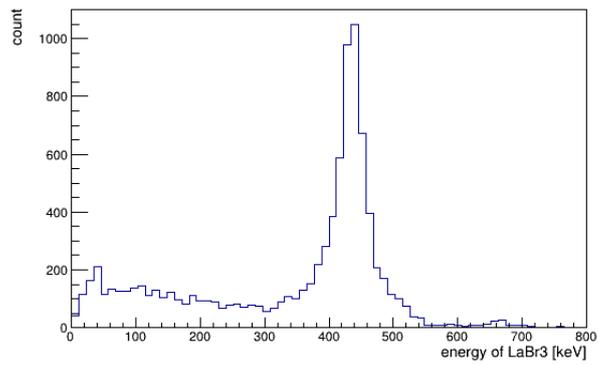


(c)

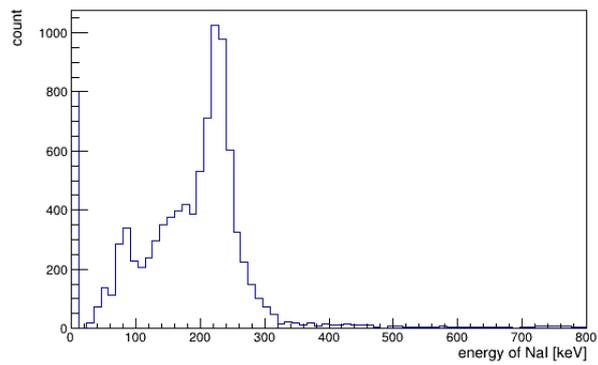
図 4.21 角度 110° の時の実験結果。



(a)

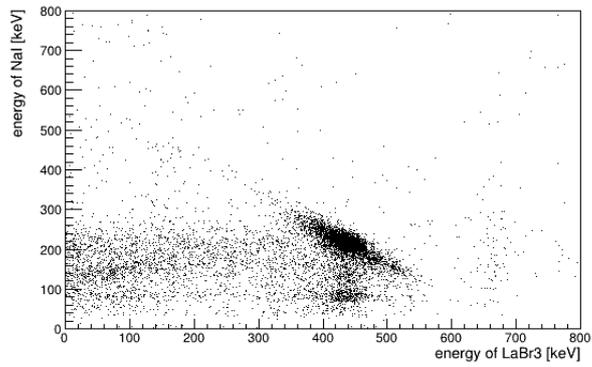


(b)

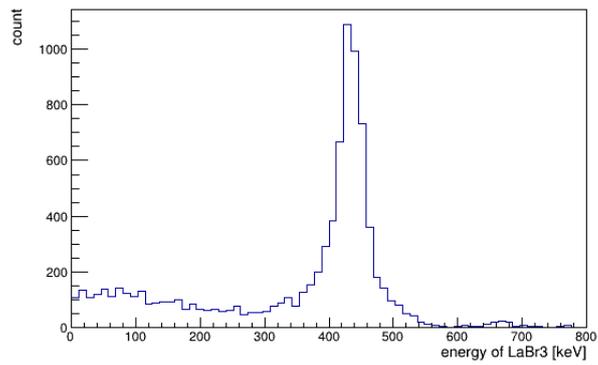


(c)

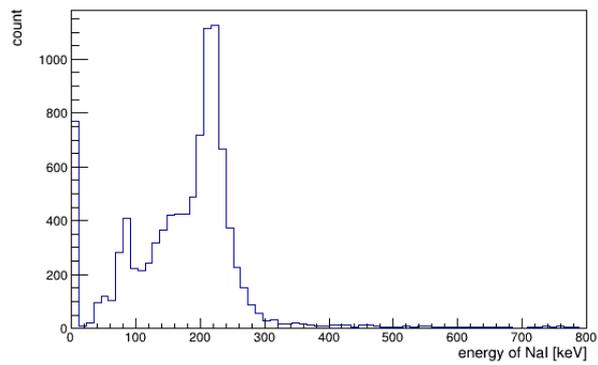
図 4.22 角度 120° の時の実験結果。



(a)

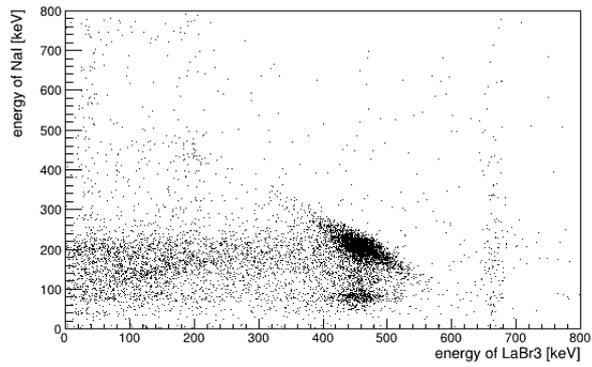


(b)

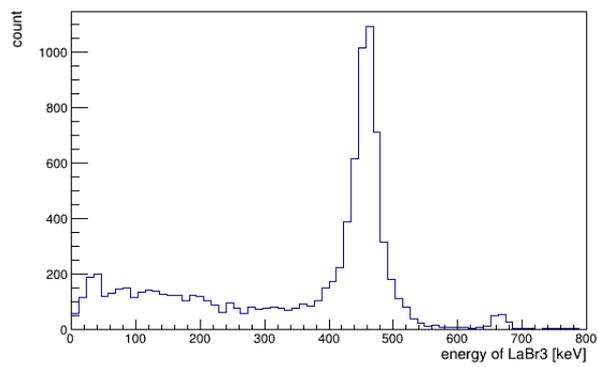


(c)

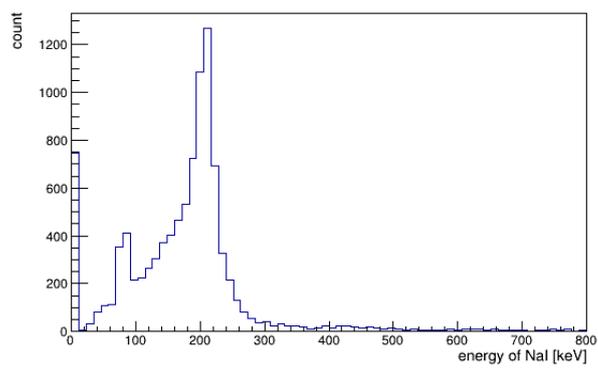
図 4.23 角度 130° の時の実験結果。



(a)

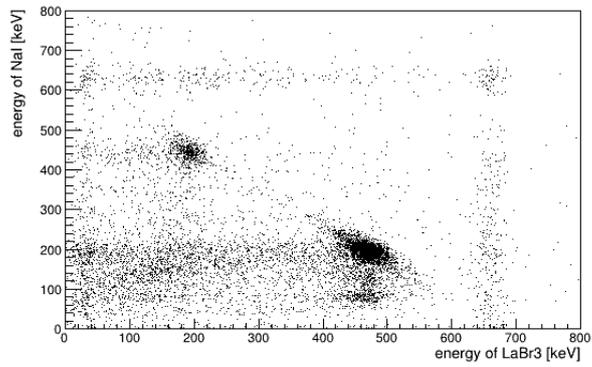


(b)

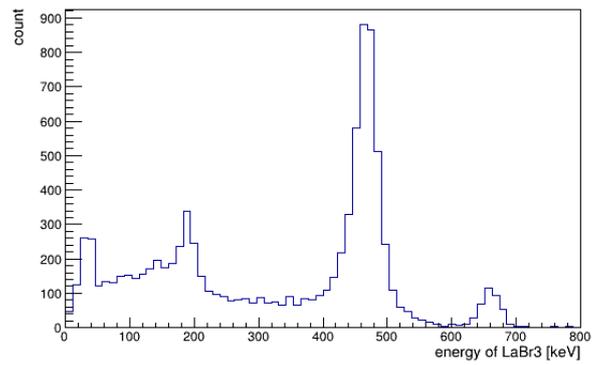


(c)

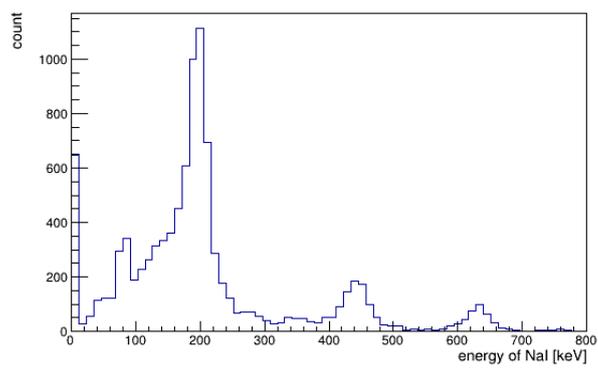
図 4.24 角度 140° の時の実験結果。



(a)

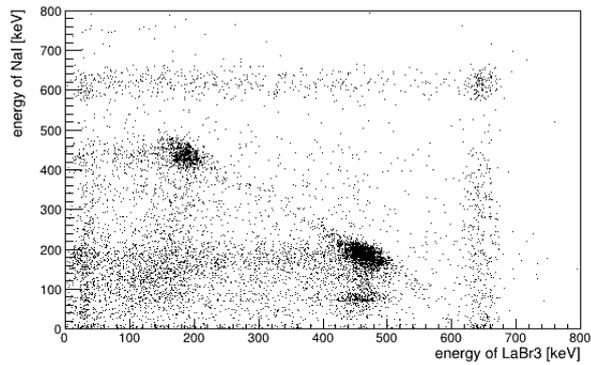


(b)

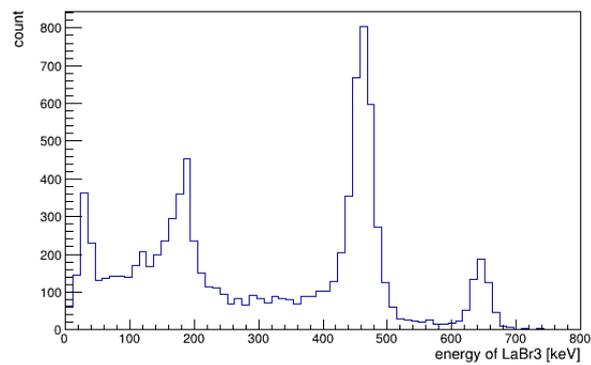


(c)

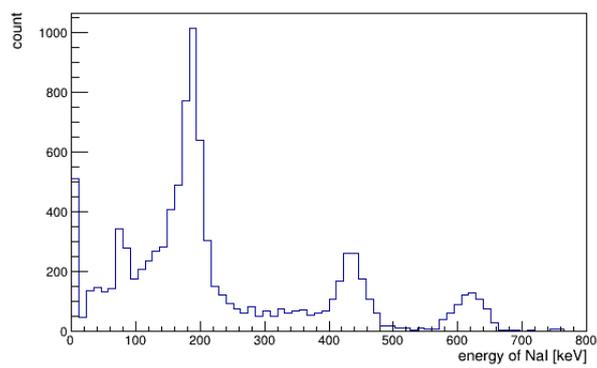
図 4.25 角度 150° の時の実験結果。



(a)

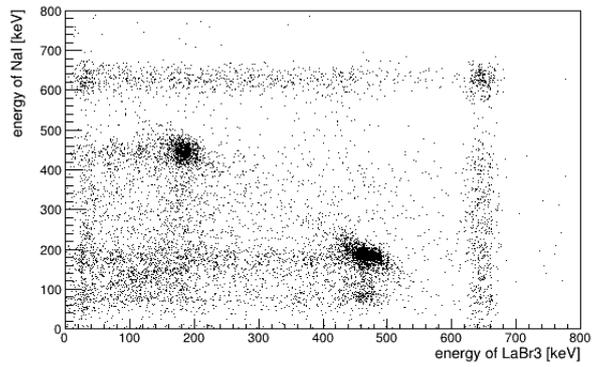


(b)

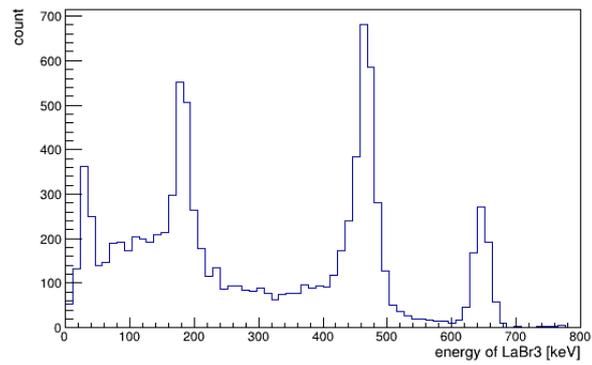


(c)

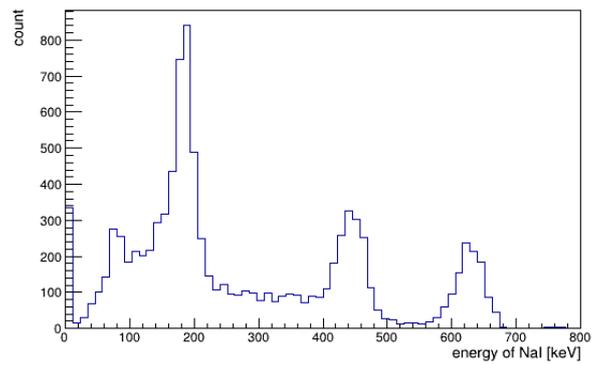
図 4.26 角度 160° の時の実験結果。



(a)

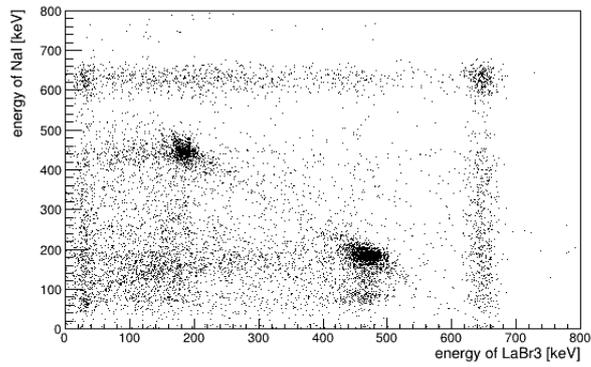


(b)

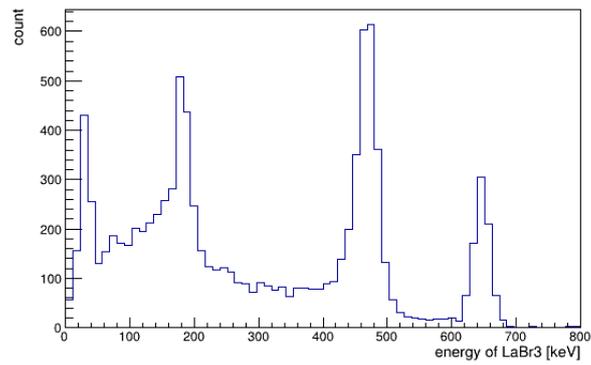


(c)

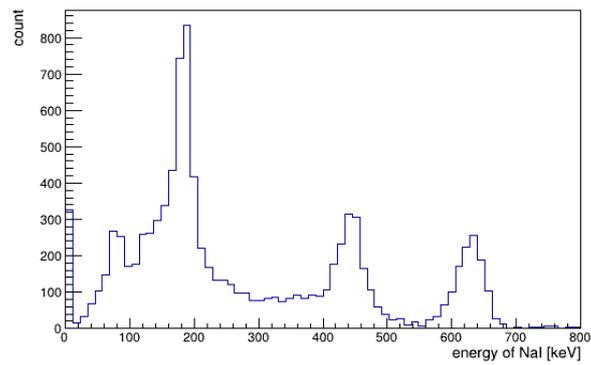
図 4.27 角度 170° の時の実験結果。



(a)



(b)



(c)

図 4.28 角度 180° の時の実験結果。

5 解析と考察

5.1 NaI,LaBr₃ で記録したヒストグラムの解析手法

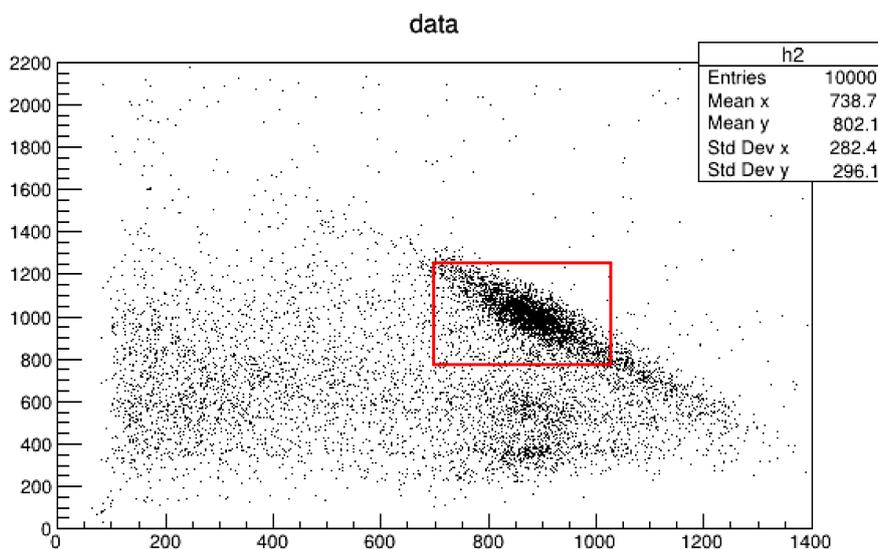


図 5.29 実験で得られた散布図の例（これは、 $\theta = 90$ 度の図）

以下に、本実験で用いた解析手法を示す。

記録した全ての角度に対して図 5.29 に赤枠で囲ったような LaBr₃ 散乱-NaI 全吸収が含まれていると思われる大まかな範囲を目測で決め、以下の式で近似した。

$$f(x, y) = Ae^{((Cx+Dy-1)^2/B)} e^{((Fx+Gy-1)^2/E)} \quad (5.1)$$

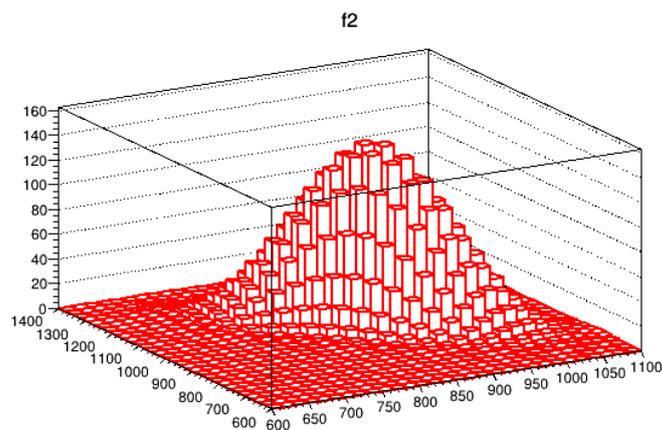


図 5.30 近似したヒストグラム

γ 線が LaBr_3 でコンプトン散乱し、 NaI で全吸収されたときにそれぞれのシンチレータに落とすエネルギーをフィッティング関数 (5.1) 式のピーク値とした (この結果と考察は、5.2 節で扱う。)

γ 線が LaBr_3 シンチレータ内で θ 方向にコンプトン散乱し、 NaI シンチレータに入射する反応頻度の計数は以下に示す方法で計数した。

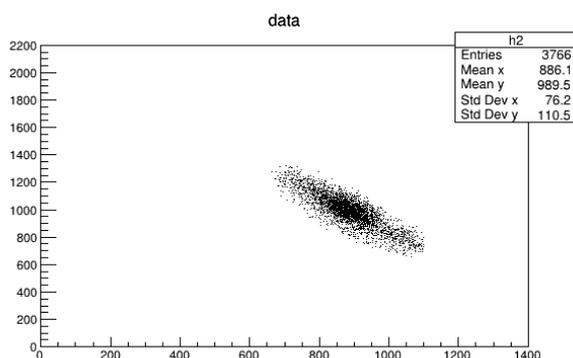


図 5.31 領域 \mathcal{D}_1

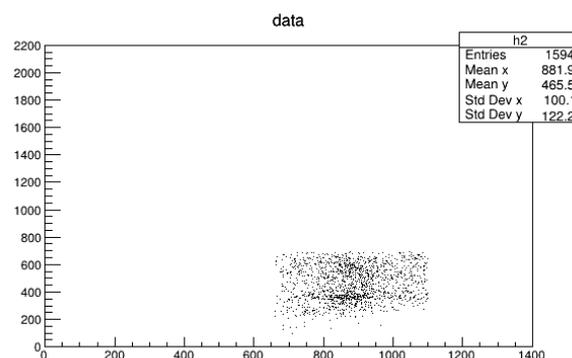


図 5.32 領域 \mathcal{D}_2

(5.1) 式の近似において、

- (i). $f \geq \frac{A}{10}$ の領域 \mathcal{D}_1 (図 5.31) を LaBr_3 で角度 θ にコンプトン散乱し、 NaI で全吸収した事象が多く含まれる領域
- (ii). 領域 \mathcal{D}_1 の下部の領域 \mathcal{D}_2 (図 5.1) を LaBr_3 で角度 θ にコンプトン散乱し、 NaI でさらにコンプトン散乱した事象が多く含まれる領域

とみなし、これらのイベント数の総和を計測時間で割ったものを反応頻度として角度ごとに算出した。(この結果と考察は、5.3 節で扱う。)

5.2 散乱 γ 線のエネルギー角度分布

考察.1 で計算した θ ごとのエネルギー分布を下の図 5.33 に示した。ただし、青点、赤点、緑点がそれぞれ 1. LaBr_3 で γ 線が落とすエネルギー、2. 角度 θ に散乱した γ 線のエネルギー、1. と 2. のエネルギーの和のプロットに対応する。また、実線がコンプトン散乱の式 (3.5) によるそれぞれの理論値である。図に実線で示した理論値と比較すると、角度が小さいところでは角度 θ に散乱した γ 線のエネルギーが理論値より小さくなっている。

5.3 反応頻度の角度分布

赤線は $\theta \geq 40^\circ$ の点をクライナー仁科の式 (3.96) でフィッティングしたものであり、これを予想値とした。これを小さい角度 $\theta \leq 30^\circ$ の範囲で実験結果と比較すると、赤線の予想値においては反応頻度が角度に対して単調減少だが、実験結果は増加傾向にある。

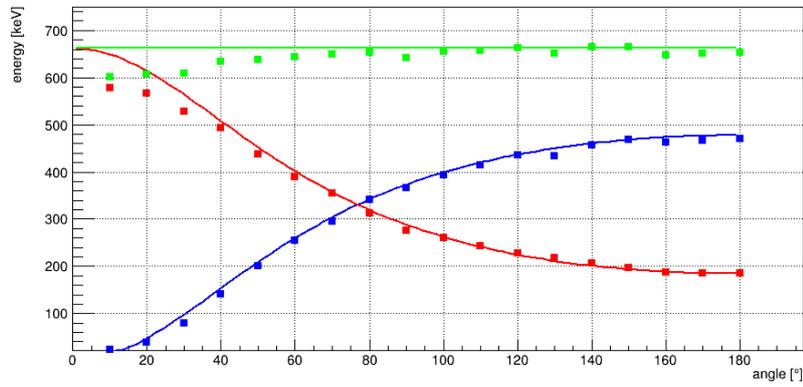


図 5.33 散乱 γ 線のエネルギー角度分布（青点、赤点、緑点がそれぞれ $1.LaBr_3$ で γ 線が落とすエネルギー、2. 角度 θ に散乱した γ 線のエネルギー、1. と 2. のエネルギーの和のプロットに対応する。）

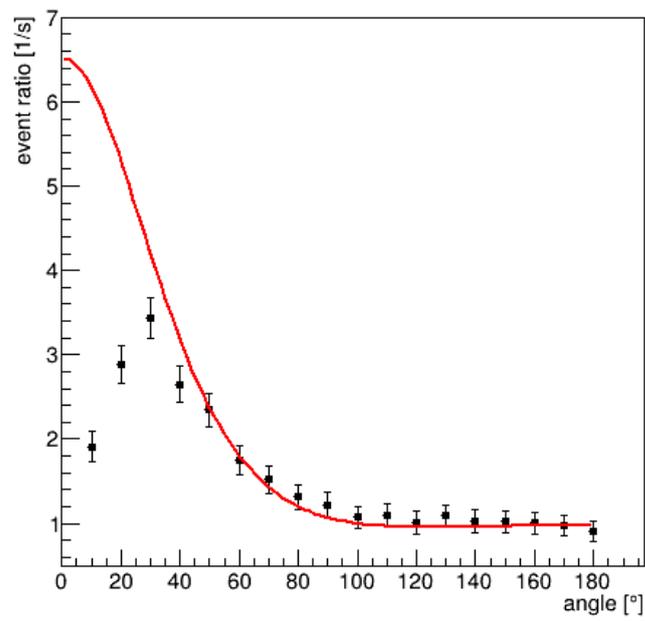


図 5.34 反応頻度の角度分布

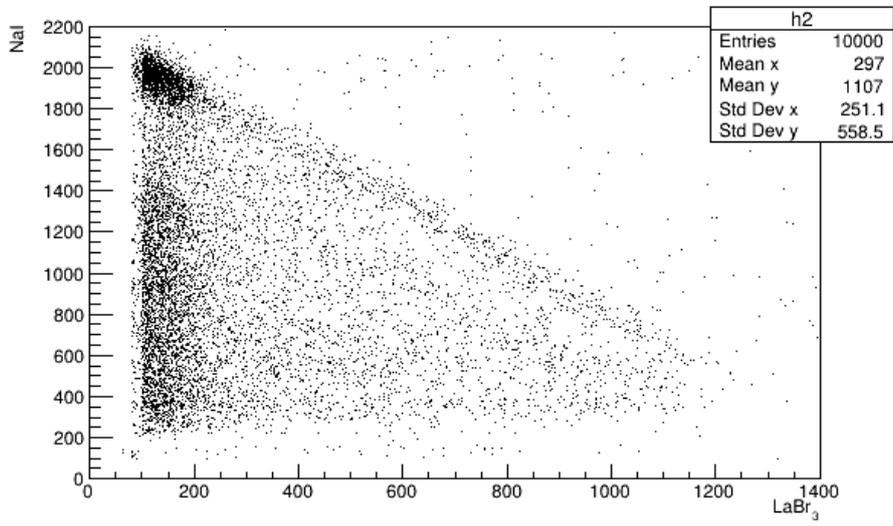


図 5.35 実験で得られた散布図の例（これは、 $\theta = 10^\circ$ の図）

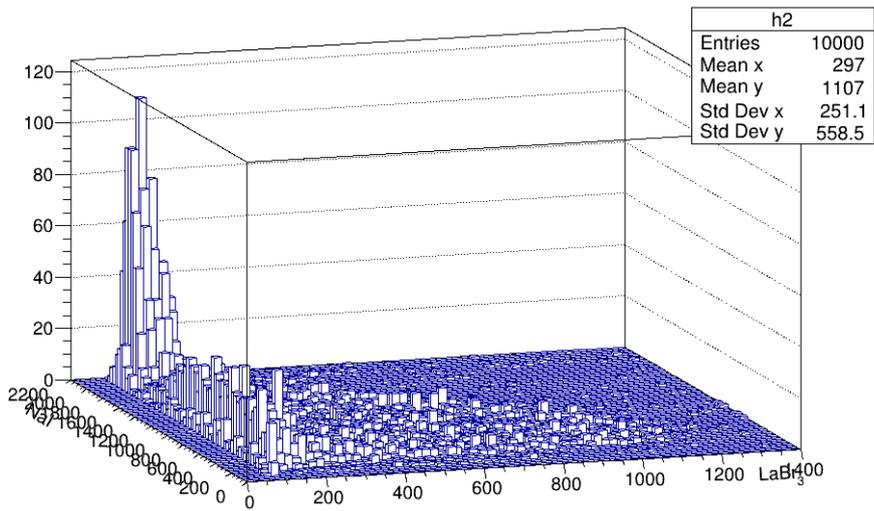


図 5.36 $\theta = 10^\circ$ のヒストグラム

図 5.35、図 5.36 は $\theta = 10^\circ$ における反応頻度の散布図とヒストグラムである。この図から LaBr_3 の低エネルギー側のイベントが discriminator の threshold により一部切られているように見える。threshold によって切られたイベントを復元するため、 $10^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ における反応頻度は領域 \mathcal{D}_1 内の計数を、この領域内で LaBr_3 の記録するエネルギーがガウシアンピークにおける値以上となる部分のイベント数を 2 倍したものに置き換えた。また、 γ 線の NaI 中の平均自由行程を $a(\text{cm})$ とすると、入射粒子数 I_0 と透過粒子数 I の間に次の式が成り立つ。

$$I = I_0 \exp(-5.4/a)$$

この式をもとに NaI シンチレータを素通りしてしまう γ 線の割合 $I/I_0 = \exp(-5.4/a)$ を求めた。(ここで平均自由行程 a は入射 γ 線のエネルギーの関数である。) γ 線の NaI 内での平均自由行程 a は講義の配布資料を参考にエネルギーごとに大まかに見積もった。

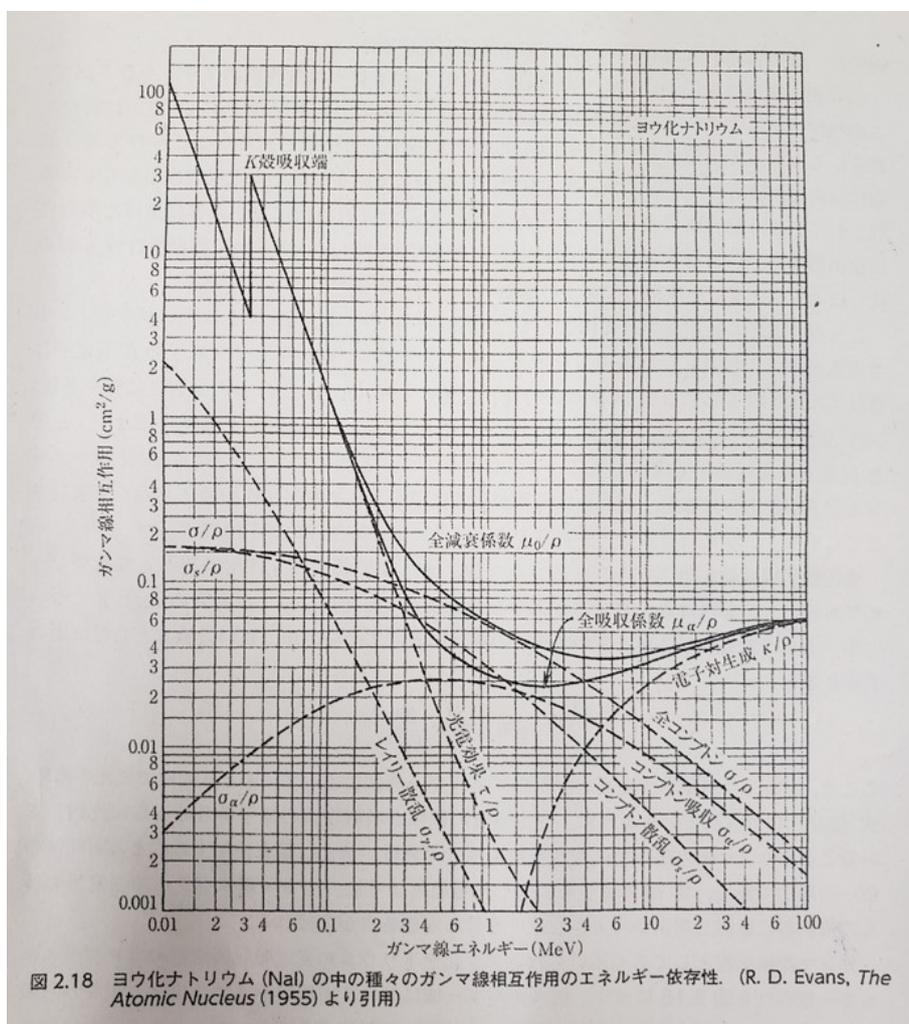


図 5.37 講義資料 : NaI 中の γ 線相互作用のエネルギー依存性

これらの補正を加えた結果を、以下の図 5.38 に示した。

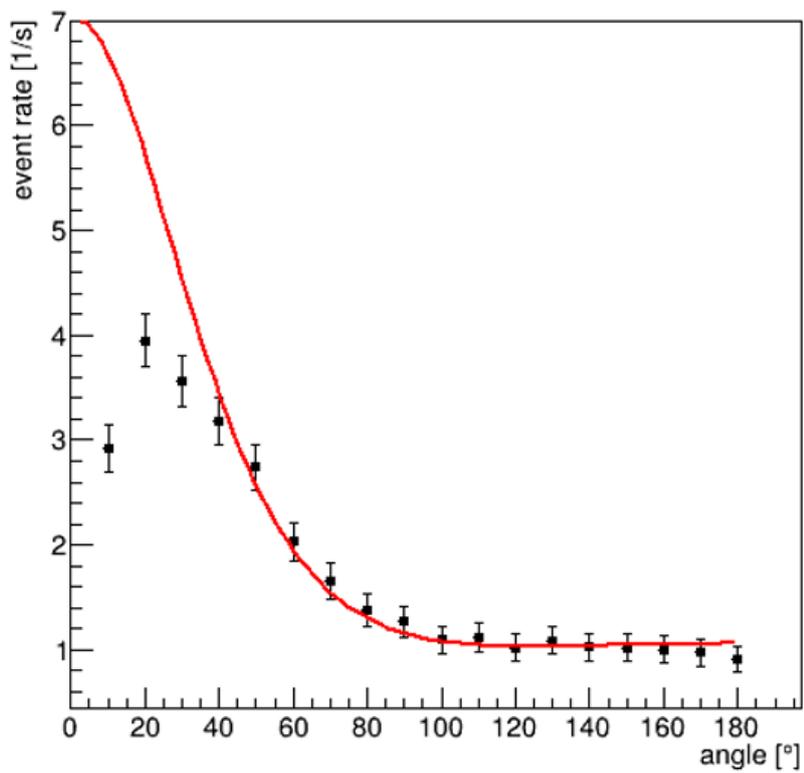


図 5.38 補正を加えた反応頻度の角度分布

また、 $\theta = 10^\circ, 20^\circ$ の計数を増やし再測定し、同様の補正を加え次のようになった。

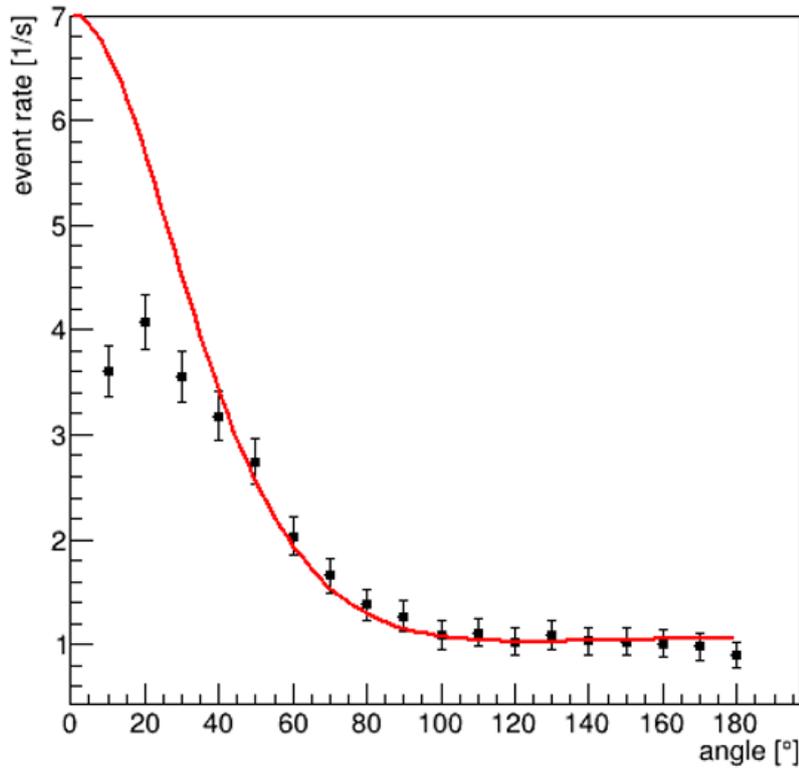


図 5.39 一部再測定した結果に置き換え補正した反応頻度の角度分布

以上の補正を加えても、やはり $\theta \leq 30^\circ$ での値は予想される値よりも低い値となっている。この原因として、実験機器の構造的要因が考えられる。コンプトン散乱の角度が小さいとき、 LaBr_3 でコンプトン散乱した γ 線は PMT1 を通り抜け NaI シンチレータに入射する。このとき通過する PMT1 の構造物（または LaBr_3 との接合部のガラス）により γ 線が減衰されることによって低角度側で NaI が受け取る γ 線のエネルギーとイベント数が減少していると考えられる。

5.4 角度分解能による影響

シンチレータは大きさを持っているので、この影響が測定値の幅で現れると思われる。この値を分かるため、シミュレーションを作った。NaI と LaBr_3 の吸収係数は図 5.41 のものを使った [3]。図のグラフを一次と二次の式で近似的に表して吸収係数を求めることにした。

吸収係数が $a \text{ cm}^{-1}$ のとき、光子が $dx \text{ cm}$ 進むと反応が起こる確率を

$$P_{rec} = a \cdot dx \quad (5.2)$$

に置いた。コンプトン散乱の場合には式 (3.96) を使って、各方向に散乱される確率も計算できる。ここで、線源の各地点で光子を当局的に投げてシミュレーションを作った。図 5.40 はこのシミュレーション図である。

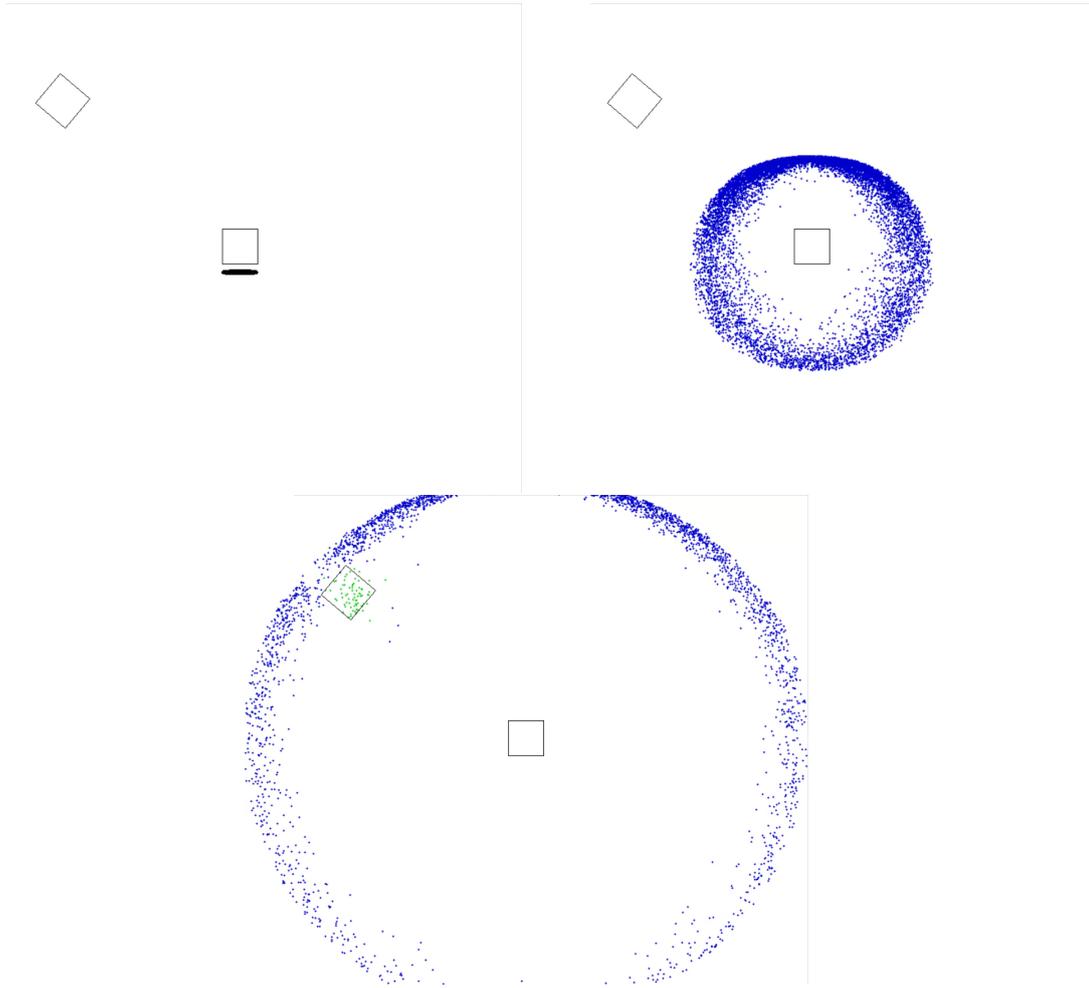


図 5.40 シミュレーションの図。吸収係数は図 5.41 のものを使った。図のグラフを一次と二次の式で近似的に表して吸収係数を求めることにした。

図 5.43 は角度が 50° のときの実験結果とシミュレーションのヒストグラムである。確かにエネルギーの総合が 662 keV ながら、幅を持つことがわかる。シミュレーションのすべての結果を表 5.3 で示す。NaI の平均はガウス分布でフィッティングした時の中心である。NaI の分散はこのガウス分布の分散である。イベント数は 5.1 で行ったように、フィッティングした後ガウス分布の高さの $1/10$ 以上のイベントの数である。角度が 50° 以下の時は分布がガウス分布から離れるようになってフィッティングは行わなかった (図 5.42)。

表 5.3 からわかるように、角度によって分解能の影響が変わる。角度が大きいほど、影響が下がる。この傾向は図 4.10~4.28 にも確認できる。分散は 100 keV を超えないのがわかる。大まかに、分解能による分散を 100 keV だとして。そして、私たちの実験で、 LaBr_3 で散乱されて NaI に吸収されたイベント数は最小 1707 イベントであった。つまり、もし私たちの実験で分散がすべて角度分解能により生じたとすると、その値は $100/\sqrt{1707} = 2.42 \text{ keV}$ は超えないことがわかる。

NaI で散乱されて LaBr_3 で全吸収されるイベントと、NaI で散乱されて LaBr_3 で散乱されるイベントの総合をグラフで表したのが図 5.44 である。赤い線は $\theta \geq 40^\circ$ の点をクライナー-仁科の式 (3.96) でフィッティングしたものである。図でわかるように、角度が低いほうでイベント数が減る。しかし、図 5.34 のように非常

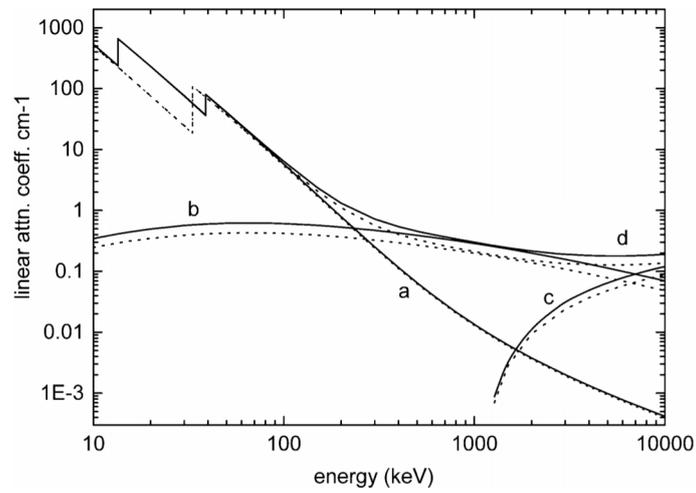


図 5.41 NaI と LaBr₃ の吸収係数。実線は LaBr₃、破線は NaI を示す。a は光電吸収、b はコンプトン散乱、c は対生成、d はすべての効果の総合である。

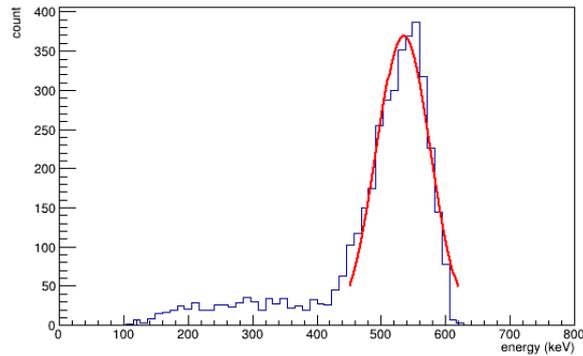
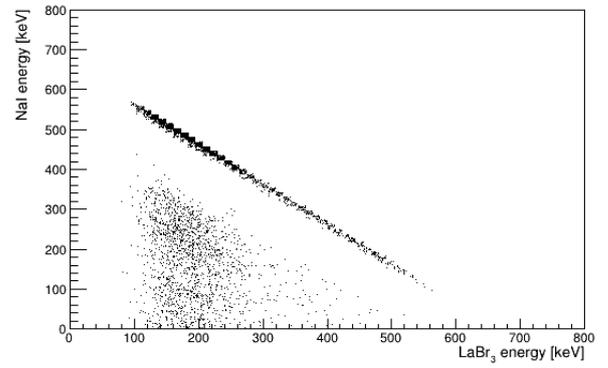
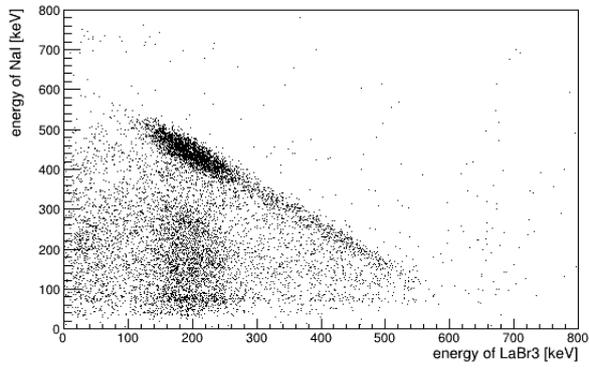


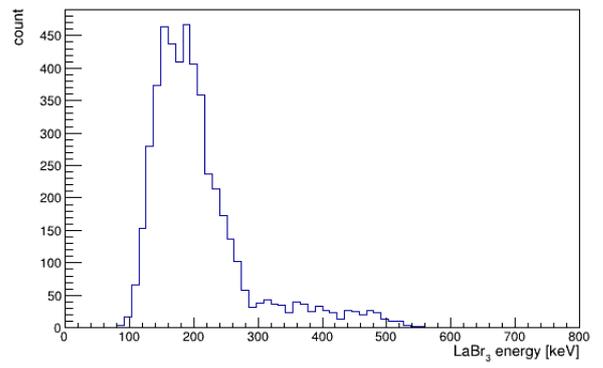
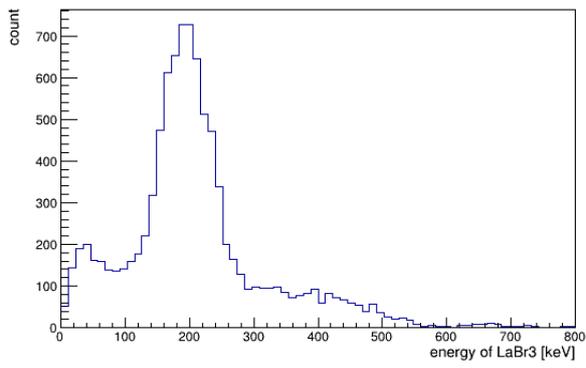
図 5.42 角度が 40° のとき NaI のエネルギー分布。ガウス分布から離れていることがわかる。

表 5.3 シミュレーションの結果。各角度に対して 25000000 個の光子を投げた。

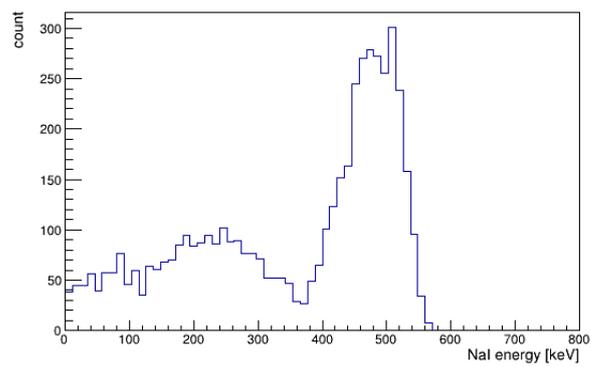
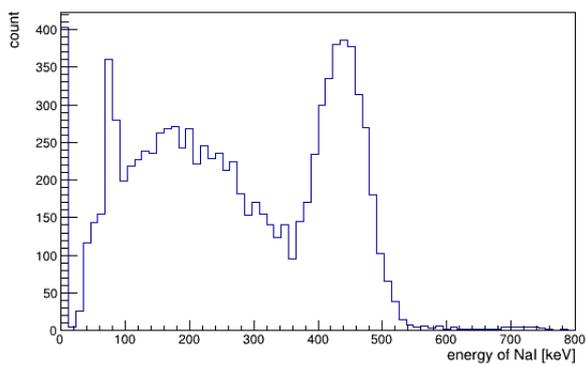
角度	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°
NaI の平均 (keV)	482.5	429	380	341	303	276	249
NaI の分散 (keV)	48.6	35	32.5	24.3	21.7	17.1	12.7
イベント数	2804	2690	1995	2060	1595	1732	1539
角度	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
NaI の平均 (keV)	231.4	215.4	203.6	196	188.5	187.1	186.5
NaI の分散 (keV)	9.93	7.74	6.89	7.3	5.12	4.85	4.52
イベント数	1813	1578	1798	1774	1875	1784	2033



(a)



(b)



(c)

図 5.43 角度 50° の時の実験結果とシミュレーションのヒストグラム。左が実験結果で、右がシミュレーションである。シミュレーションの値は理論値や実験値と離れている。これは正確な吸収係数を使わなかったせいと思われる。

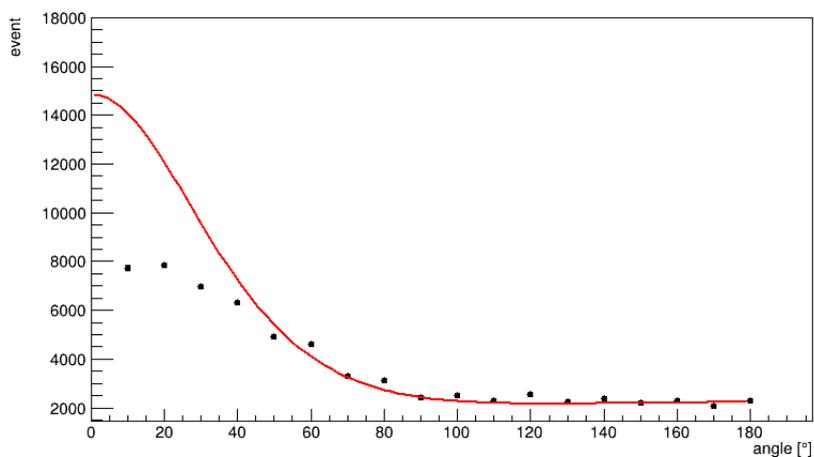


図 5.44 NaI で散乱されて LaBr₃ で全吸収されるイベントと、NaI で散乱されて LaBr₃ で散乱されるイベントの総合。赤い線は $\theta \geq 40^\circ$ の点をクライン-仁科の式 (3.96) でフィッティングしたものである。角度が低いほうでイベント数が減ることがわかる。

に減ってない。

表 5.3 でわかるようにシミュレーションの値は理論値や実験値と離れている。これは正確な吸収係数を使わなかったせいだと思われる。もし、完全な吸収係数のデータが得られるとこの現象は起こらないと思われる。

6 結論

角度 θ に散乱した γ 線のエネルギー、コンプトン散乱の反応頻度が低角度で理論値、予想値よりも低い値となっており、測定で得られたコンプトン散乱後の光子のエネルギーは、コンプトン散乱の式から導かれる理論値よりも $\theta \leq 30^\circ$ の低角度で小さかった。また $\theta \leq 30^\circ$ でのコンプトン散乱の反応頻度は、 $\theta \geq 40^\circ$ の測定結果をクライン仁科の式でフィッティングすることにより得られる予想値よりも小さかった。原因として PMT の構造物が γ 線を減衰していることが考えられる。

7 今後の課題

今回の実験結果で PMT の構造物が γ 線を減衰する影響を与えていることが示唆された。これを確認するために以下のような対照実験を行うことが有用であると考えられる。

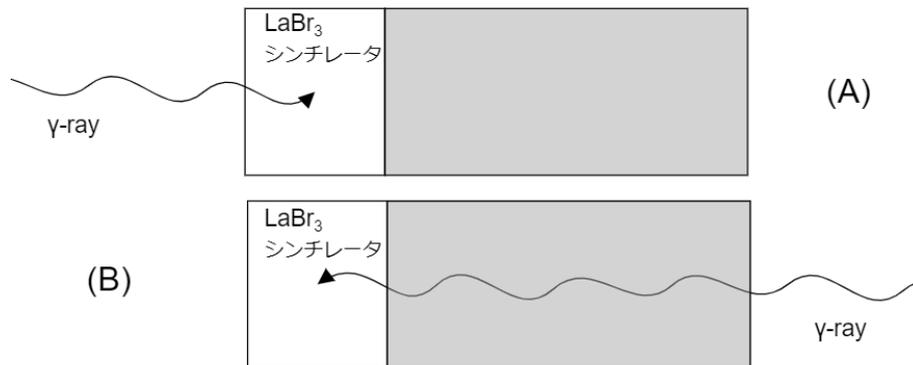


図 7.45 検証実験のセッティング

上に示した図 7.45 に示したような PMT の構造物を通過せず γ 線をシンチレータに入射させる (A)、PMT の構造物を通過して入射する (B) の二つの状況で同様に LaBr₃ が記録するエネルギーとイベント数を計測し比較することで、PMT 構造物が γ 線を減衰する性質があるかを調べることが可能である。

8 謝辞

最後になりましたが、お世話になった方々にこの場をお借りして御礼申し上げます。田島先生には実験機器の基本的な使い方からご指導いただきました。解析が行き詰まった際にはご助言をいただき、お世話になりました。ありがとうございます。TA の中村さん、菅島さんには実験機器や ROOT の取り扱いで困った際に度々ご助言いただきました、ありがとうございます。

参考文献

- [1] 放射線計測ハンドブック knoll 著
- [2] 場の量子論 F. マンドル/G. ショー 著 樺沢字紀 訳
- [3] Dorenbos, P., J. T. M. De Haas, and C. W. E. Van Eijk. "Gamma ray spectroscopy with a 019×19 mm³ LaBr₃: 0: 5% ce³⁺ scintillator." *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 51.3 (2004).