

2020 年度

課題演習 A1 後期 実験レポート

Compton 散乱での各散乱角ごとの散乱 γ 線・ 反跳電子のエネルギーと反応頻度

指導教員

田島 治

氏名

塚本 大智
神村 真志
長房 俊之介
木村 直博
中村 恭平
當銘 啓

2021 年 4 月 8 日

1 実験概要

ガンマ線を結晶に入射させると結晶中の電子との相互作用により、ガンマ線が散乱される。この現象をコンプトン散乱という。散乱されたガンマ線の波長は入射ガンマ線よりも波長が長いことは古くから知られていた。しかしこのことは光を波と考える古典論の範疇では説明がつかなかった。この問題をコンプトンは1923年に、当時は新理論であったアインシュタインの光量子仮説を用いて解決した。また1929年には、Kleinと仁科により場の量子論(量子電磁力学)を用いて微分散乱断面積の式である Klein-仁科の公式が導出された。本実験ではコンプトン散乱の実験を行い、これらの理論との整合性を検証する。

本実験では入射光の線源として ^{137}Cs を使い、検出器として NaI シンチレータと LaBr₃ シンチレータを用いた。ガンマ線を LaBr₃ 結晶に入射させ、散乱されたガンマ線を NaI 結晶に入射させ、光電子増倍管(PMT)でシンチレータからの入射光子を電子に変換し、信号を増幅して検出した。また、PMTで発生する電荷量(ADC値)をエネルギーに変換するために ^{137}Cs と ^{22}Na を用いてキャリブレーションを行った。線源を置く角度を 30° ごとに変えることで散乱ガンマ線と散乱電子のエネルギーやコンプトン散乱の反応頻度の角度依存性を測定した。

測定した結果、散乱ガンマ線と散乱電子のエネルギーは理論値と概ね一致した。また反応頻度については NaI の吸収効率も考慮した結果 Klein-仁科の式と近い値を取った。

2 実験目的

本実験の目的は以下の2つである。

- (1) 散乱角度を変えて散乱と光子反跳電子のエネルギーを測定し、コンプトン散乱の理論から導かれるエネルギーと散乱角の関係式の検証を行う。
 - (2) 各角度ごとのコンプトン散乱の反応頻度を測定し、Klein-仁科の公式の検証を行う。
- (1)、(2)を通じて、光の粒子性や量子電磁力学についての理解を深めることが目標である。

3 理論説明

以下では自然単位系を用いる。

3.1 量子力学におけるコンプトン効果

静止している電子(運動量 $\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$, エネルギー $E_{\mathbf{p}_i} = m$)に運動量 \mathbf{k}_i , エネルギー $\omega_{\mathbf{k}_i} = |\mathbf{k}_i|$ の光子を照射し、散乱が起きたのち光子は運動量が \mathbf{k}_f , エネルギーが $\omega_{\mathbf{k}_f} = |\mathbf{k}_f|$ となり、電子の運動量は \mathbf{p}_f , エネルギーは $E_{\mathbf{p}_f} = \sqrt{\mathbf{p}_f^2 + m^2}$ となったとする。運動量保存則とエネルギー保存則より

$$\mathbf{k}_i + \mathbf{0} = \mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f \quad (3.1)$$

$$\omega_{\mathbf{k}_i} + m = \omega_{\mathbf{k}_f} + E_{\mathbf{p}_f} = \omega_{\mathbf{k}_f} + \sqrt{\mathbf{p}_f^2 + m^2} \quad (3.2)$$

が成り立つ。(3.1)を(3.2)に代入して \mathbf{p}_f を消去すると

$$\omega_{\mathbf{k}_i} + m = \omega_{\mathbf{k}_f} + \sqrt{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)^2 + m^2} = \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_i}^2 + \omega_{\mathbf{k}_f}^2 - 2\omega_{\mathbf{k}_i}\omega_{\mathbf{k}_f} \cos \theta + m^2} \quad (3.3)$$

となる。ただし入射光子の運動量と散乱光子の運動量がなす角を θ とした。よって(3.3)は

$$\omega_{\mathbf{k}_i} - \omega_{\mathbf{k}_f} + m = \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_i}^2 + \omega_{\mathbf{k}_f}^2 - 2\omega_{\mathbf{k}_i}\omega_{\mathbf{k}_f} \cos \theta + m^2} \quad (3.4)$$

となる。(3.4)の両辺を2乗して $\omega_{\mathbf{k}_f}$ について解けば、光子のエネルギーを表す式

$$\omega_{\mathbf{k}_f} = \frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{1 + \frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{m}(1 - \cos \theta)} \quad (3.5)$$

が得られる。散乱後の電子のエネルギーは(3.2)と(3.5)より

$$E_{\mathbf{p}_f} = m + \omega_{\mathbf{k}_i} - \frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{1 + \frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{m}(1 - \cos \theta)} = \frac{m + (m + \omega_{\mathbf{k}_i})\frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{m}(1 - \cos \theta)}{1 + \frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{m}(1 - \cos \theta)} \quad (3.6)$$

と求まる。

3.2 場の量子論におけるコンプトン散乱

前節3.1において、コンプトン効果における散乱光子と散乱電子のエネルギーを求めた。しかし散乱現象を考える際は、入射した粒子がどの方向にどれくらいの頻度で散乱されるかということも重要になる。それを知るためには散乱断面積および微分散乱断面積という量が必要である。各種断面積は場の量子論を用いてコンプトン散乱を量子論的に扱うことで求まる。以下ではコンプトン散乱を解析するのに必要な場の量子論(量子電磁気学)を説明し、最終的にコンプトン散乱の微分散乱断面積を示した Klein-仁科の公式を導出する。

3.2.1 相互作用描像

散乱現象を扱うのに都合が良いため、まずは相互作用描像の説明をする。系のハミルトニアン \hat{H} が

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (3.7)$$

と書かれるとする。 \hat{H}_0 が自由粒子のハミルトニアン、 \hat{V} が相互作用ハミルトニアンである。相互作用描像における状態 $|\Phi(t)\rangle_I$ の時間依存性はハミルトニアンを用いて次のように定義される：

$$|\Phi(t)\rangle_I = e^{iH_0(t-t_0)} |\Phi(t)\rangle_S = e^{iH_0(t-t_0)} e^{iH(t-t_0)} |\Phi(t_0)\rangle_S \quad (3.8)$$

これに伴いにエルミート演算子の時間依存性は

$$\hat{A}_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} \hat{A}_S(t_0) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (3.9)$$

と定義される。ただし $|\Phi(t)\rangle_S$ と $\hat{A}_S(t_0)$ はそれぞれシュレディンガー描像での時刻 t における状態とエルミート演算子であるしたがって相互作用描像の状態と演算子の従う時間発展の方程式は

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle_I = \hat{V}_I(t) |\Phi(t)\rangle_I \quad (3.10)$$

$$i \frac{d}{dt} \hat{A}_I(t) = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0] \quad (3.11)$$

となる。初期条件として $|\Phi(-\infty)\rangle_I = |i\rangle$ を設け、(3.10) を $-\infty$ から t まで時間で積分すると、時刻 t における状態は

$$|\Phi(t)\rangle_I = |i\rangle - i \int_{-\infty}^t dt' \hat{V}_I(t') |\Phi(t')\rangle_I \quad (3.12)$$

という積分形で書かれる。この積分から $|\Phi(t)\rangle_I$ を得るには逐次代入すればよい。

3.2.2 S 行列

S 行列は始状態と終状態を結びつけるユニタリー演算子として定義される。相互作用描像では状態は相互作用によって変化し、散乱現象を考える際は相互作用は粒子間で一時的にのみ働くものと考え、始状態と終状態はそれぞれ $|\Phi(-\infty)\rangle_I, |\Phi(\infty)\rangle_I$ と定義すると見通しが良い。故に S 行列は

$$S |\Phi(-\infty)\rangle_I = |\Phi(\infty)\rangle_I \quad (3.13)$$

という式で定義することもできる。始状態と終状態として特定の状態 $|i\rangle, |f\rangle$ を選んだ場合、 $|i\rangle$ と $|f\rangle$ は S 行列の成分

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \quad (3.14)$$

で結ばれる。この S 行列の成分は始状態 $|i\rangle$ が終状態 $|f\rangle$ へ散乱される確率振幅を与え、S 行列のユニタリー性から

$$\sum_f S_{fi}^* S_{fi} = 1 \quad (3.15)$$

が導かれる。この式は粒子の生成・消滅の過程を含んだ確率保存の式である。

式 (3.12) において $|\Phi(t)\rangle_I$ を同式に逐次代入していくと

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle_I &= |i\rangle - i \int_{-\infty}^t dt' \hat{V}_I(t') |i\rangle - \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) |i\rangle + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) \dots \hat{V}_I(t_n) |i\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

と書ける。この式において $t \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) \dots \hat{V}_I(t_n) |i\rangle \\ &= S |i\rangle \end{aligned} \quad (3.17)$$

と書かれる。つまり相互作用描像では S 行列は

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) \dots \hat{V}_I(t_n) \quad (3.18)$$

という形で書くことができる。

3.2.3 Wick の定理とプロパゲーター

この節では以下で説明する散乱の理論において重要な Wick の定理の定理について解説する。

A を生成演算子と消滅演算子の一次の演算子とし、生成演算子に比例する項を A^- 、消滅演算子に比例する項を A^+ とする。このとき演算子 A, B の積は

$$\begin{aligned} AB &= (A^+ + A^-)(B^+ + B^-) \\ &= A^+B^+ + A^+B^- + A^-B^+ + A^-B^- \\ &= [A^+, B^-]_{\pm} + N(AB) \end{aligned} \quad (3.19)$$

となる。ただし $[\cdot, \cdot]_{+}$ は反交換関係で A, B が共にフェルミオンのときにのみ採用され、それ以外の場合は交換関係 $[\cdot, \cdot]_{-}$ が選ばれ、これらの交換子・反交換子は必ず c-数になるため真空期待値 $\langle 0| AB |0\rangle$ に置き換えることができる。 $N(AB)$ はすべての消滅演算子を生成演算子の右に置く正規積であり

$$\begin{aligned} N(AB) &= A^+B^+ + (-1)^P B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^- \\ (P \text{ は } A, B \text{ が共にフェルミオンの場合 } 1, \text{ それ以外は } 0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

である。ここで時間順序積 (T積) を

$$T\{A(x_1)B(x_2)\} \equiv \theta(t_1 - t_2)A(x_1)B(x_2) \pm \theta(t_2 - t_1)B(x_2)A(x_1) \quad (3.21)$$

と定義する。 $-$ の符号は A, B が共にフェルミオンの場合であり、 $+$ の符号はそれ以外の場合である。これより $A(x_1)$ と $B(x_2)$ の T積は

$$\begin{aligned} T\{A(x_1)B(x_2)\} &= N(A(x_1)B(x_2)) + \langle 0| T\{A(x_1)B(x_2)\} |0\rangle \\ &= N(A(x_1)B(x_2)) + \underline{A(x_1)B(x_2)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

と書ける。 $\langle 0| T\{A(x_1)B(x_2)\} |0\rangle \equiv \underline{A(x_1)B(x_2)}$ を Wick 縮約という。この Wick 縮約を使うと、複数の演算子の T積は

$$\begin{aligned} T\{ABCD \cdots WXYZ\} &= N(ABCD \cdots WXYZ) + N(\underline{ABCD} \cdots WXYZ) \\ &\quad + N(\underline{ABCD} \cdots WXYZ) + N(\underline{ABCD} \cdots WXYZ) \\ &\quad + \cdots + N(ABCD \cdots \underline{WXYZ}) + N(\underline{ABCD} \cdots \underline{WXYZ}) \\ &\quad + N(ABCD \cdots \underline{WXYZ}) + \cdots \end{aligned} \quad (3.23)$$

と書くことができる。これを Wick の定理という。ただしここでの T積は定義を複数個の演算子用に拡張している。また同様な演算子からなり座標の自由度が異なる演算子の組を含む T積 (例えば $T\{N(AB \cdots)_{x_1} N(AB \cdots)_{x_2}\}$ のようなもの) を混合 T積という。混合 T積を扱う場合は、 A^+, B^+, \dots などの時刻を無限小量 ϵ だけ小さくし、 A^-, B^-, \dots の時刻は ϵ だけ大きくした上で T積を取り、その後 $\epsilon \rightarrow 0$ とする。このように時刻をずらして T積を取ると同じ座標の自由度に属す量は自然に正規積の形になり、同時刻での Wick 縮約は省かれる。この性質は以下で見る量子電磁気学の S 行列の計算に役立つ。

T積を用いて、各種粒子のプロパゲーターを以下のように定義する：

$$i\Delta_F(x_1 - x_2) \equiv \underline{\phi(x_1)\phi(x_2)} = \langle 0| T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} |0\rangle \quad (3.24)$$

$$i\Delta_F(x_1 - x_2) \equiv \underline{\phi^\dagger(x_1)\phi(x_2)} = \langle 0| T\{\phi^\dagger(x_1)\phi(x_2)\} |0\rangle \quad (3.25)$$

$$iS_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \equiv \underline{\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)} = \langle 0| T\{\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\} |0\rangle \quad (3.26)$$

$$iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \equiv \underline{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} = \langle 0| T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\} |0\rangle \quad (3.27)$$

それぞれ順に実スカラー粒子，複素スカラー粒子（荷電スカラー粒子），ディラック粒子，光子のプロパゲーターである．これらのプロパゲーターは高次の散乱を考える際に重要な仮想粒子の吸収・再放出を含む過程を考える際に重要になる．

また，(3.18)において T 積を用いると，S 行列は

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T \{ \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) \cdots \hat{V}_I(t_n) \} \quad (3.28)$$

と書くことができる．量子電磁気学における相互作用ハミルトニアン $\hat{V}_I(t)$ の形はゲージ不変性とローレンツ不変性から

$$\hat{V}_I(t) = \int d^3\mathbf{x} e N [\bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x)] = \int d^3\mathbf{x} e N [\bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x)] \quad (3.29)$$

と決定されるため，(3.28)に(3.29)を代入すると，量子電磁気学における S 行列は

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-ie)^n \int dx_1 \cdots \int dx_n T \{ N[\bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \psi(x_1)] \cdots N[\bar{\psi}(x_n) \hat{A}(x_n) \psi(x_n)] \} \quad (3.30)$$

という，時間と空間について同等な形に書くことができる．

3.2.4 コンプトン散乱の散乱振幅

量子電磁気学における散乱現象を S 行列を用いて考えると，相互作用の 1 次に関する過程はエネルギー・運動量保存を破るため，S 行列による QED の摂動展開は 2 次から始まる．最低次のコンプトン散乱は 2 次の摂動で記述できる．相互作用の 2 次の S 行列は (3.30) から得られるが，前節での混合 T 積の形であるため，そこを考慮して Wick の定理を用いると

$$\begin{aligned} S^{(2)} = \frac{-e^2}{2} \int dx_1 dx_2 \left\{ \right. & N[(\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_2}] \\ & + N[(\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_2}] \\ & + N[(\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_2}] \\ & + N[(\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_2}] \\ & + N[(\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_2}] \\ & \left. + N[(\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \hat{A} \psi)_{x_2}] \right\} \quad (3.31) \end{aligned}$$

となる．コンプトン散乱は 1 つの電子と 1 つの光子が相互作用をしてそれぞれのエネルギーと運動量を変化させ，反応の前後で各粒子数は保存するという過程である．よってコンプトン散乱は，光子と電子の生成演算子および消滅演算子がそれぞれ 1 つずつ存在する (3.31) の第 3 行の項によって表される．

体積 V の箱の中で量子化された $\psi(x), \bar{\psi}(x), \mathcal{A}(x)$ をモード展開すると

$$\psi(x) = \sum_{r, \mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} [c_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{ipx}] \quad (3.32)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r, \mathbf{p}} \left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{\frac{1}{2}} [c_r^\dagger(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p})e^{ipx} + d_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p})e^{-ipx}] \quad (3.33)$$

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{s, \mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} [a_s(\mathbf{k})\epsilon_s(\mathbf{k})e^{-ipx} + a_s^\dagger(\mathbf{k})\epsilon_s(\mathbf{k})e^{ipx}] \quad (3.34)$$

となる。ただし r, s はそれぞれの粒子のスピンの偏極を表す添え字であり、 u, v, \bar{u}, \bar{v} は四成分スピノル、 ϵ は光子の偏極ベクトルである。各粒子の生成・消滅演算子 $c_r(\mathbf{p}), c_r^\dagger(\mathbf{p}), d_r(\mathbf{p}), d_r^\dagger(\mathbf{p}), a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$ はそれぞれ以下の交換関係または反交換関係を満たす：

$$[c_r(\mathbf{p}), c_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta_{rr'}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \quad (3.35)$$

$$[d_r(\mathbf{p}), d_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta_{rr'}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \quad (3.36)$$

$$[a_s(\mathbf{k}), a_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \zeta_s\delta_{ss'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (3.37)$$

これら以外の交換・反交換関係は 0 になる。ここで r, r', s, s' は 0, 1, 2, 3 の値をとり、 $\zeta_0 = -1, \zeta_{1,2,3} = 1$ である。また四成分スピノルは以下の規格化・直交性を持つとする：

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'} \quad (3.38)$$

$$\bar{v}_r(\mathbf{p})v_{r'}(\mathbf{p}) = -\delta_{rr'} \quad (3.39)$$

光子の偏極ベクトルも以下のような直交性を持つとする：

$$\epsilon_s^\mu(\mathbf{k})\epsilon_{\mu r}(\mathbf{k}) = -\zeta_r\delta_{sr} \quad (3.40)$$

$$\sum_r \zeta_r \epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\epsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu} \quad (3.41)$$

多くの場合において (3.40) と (3.41) の 2 つの条件を課すだけで良いが、指定された座標に対して特定の偏極ベクトルの組を選ぶこともある。その一例として

$$\epsilon_0^\mu(\mathbf{k}) = n^\mu \equiv (1, 0, 0, 0) \quad (3.42)$$

$$\epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) = (0, \epsilon_r(\mathbf{k})) \quad (r = 1, 2, 3) \quad (3.43)$$

というものがある。ここで $\epsilon_r(\mathbf{k})$ は

$$\epsilon_3(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon_r(\mathbf{k}) = 0 \quad (r = 1, 2) \quad (3.45)$$

$$\epsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \epsilon_s(\mathbf{k}) = 0 \quad (r = 1, 2, 3) \quad (3.46)$$

と表される。(3.45) を満たす光子は横波光子と呼ばれ実際に観測される粒子である。 $r = 0, 3$ の光子はそれぞれスカラー光子、縦波光子と呼ばれ、観測はできない仮想粒子である。つまり光子の偏極の自由度は横波光子の 2 つのみである。これらの特殊な偏極ベクトルの表式は後ほど用いる。

電子と光子のコンプトン散乱において考えるべき始状態と終状態はそれぞれ光子と電子が一つずつ存在する状態なので

$$|i\rangle = c_{r_i}^\dagger(\mathbf{p}_i) a_{s_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) |\mathbf{0}\rangle \quad (3.47)$$

$$|f\rangle = c_{r_f}^\dagger(\mathbf{p}_f) a_{s_f}^\dagger(\mathbf{k}_f) |\mathbf{0}\rangle \quad (3.48)$$

と定義することができる。この始状態と終状態を結びつける S 行列の成分は (3.35), (3.36), (3.37) および (3.31) の第 3 行の項を用いて求めることができ、その結果は

$$S_{fi}^{(compton)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) \left(\frac{m}{V \sqrt{E_{\mathbf{p}_f} E_{\mathbf{p}_i}}} \right) \left(\frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_f} \omega_{\mathbf{k}_i}}} \right) [\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b] \quad (3.49)$$

となる。ここで $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b$ は Feynman 振幅と呼ばれる量で

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \not{\epsilon}_{s_f}(\mathbf{k}_f) i \tilde{S}_F(p_i + k_i) \not{\epsilon}_{s_i}(\mathbf{k}_i) u_{r_i}(\mathbf{p}_i) \quad (3.50)$$

$$\mathcal{M}_b = -e^2 \bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \not{\epsilon}_{s_i}(\mathbf{k}_i) i \tilde{S}_F(p_i - k_f) \not{\epsilon}_{s_f}(\mathbf{k}_f) u_{r_i}(\mathbf{p}_i) \quad (3.51)$$

で表される。ただし $\tilde{S}_F(q)$ はプロパゲーターのフーリエ変換であり

$$\tilde{S}_F(q) = \frac{\not{q} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.52)$$

分母の ϵ は境界条件を定めるために導入された微小量であり、計算後に $\epsilon \rightarrow 0$ とする。

3.2.5 散乱断面積

散乱実験は、あらかじめ固定した入射粒子のフラックスをターゲットにぶつけ、散乱した粒子の数を指定の座標でカウントするという方法を取るものが多い。その際に散乱断面積という概念を導入すると便利である。以下では散乱断面積および微分散乱断面積の理論を示す。

上で見た S 行列の理論は粒子が時刻 $-\infty$ で入射し、時刻 ∞ で観測されるという状況を考えている。このような無限大の時間のスケールは扱いが難しいが、散乱がきわめて短い時間で生じる場合においては有限かつ巨視的な時間 T を用いて、始状態を $|i\rangle = |\Phi(-T/2)\rangle$ 、終状態を $|f\rangle = |\Phi(T/2)\rangle$ としても精度よく理論を展開できる。この場合、散乱現象を観測するのにかかる時間は T であるため、粒子の状態が単位時間に $|i\rangle$ から $|f\rangle$ へ遷移する確率 w は

$$w = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \quad (3.53)$$

である。単位時間に特定の終状態であると観測される粒子の数を N とすると、 N は w と終状態の数 Q を用いて

$$N = wQ \quad (3.54)$$

と書ける。一方、入射粒子のフラックス F (単位時間に単位面積を通過してターゲットに入射する粒子の数) を用いると

$$N = \sigma F \quad (3.55)$$

と書くこともできる。この σ を散乱断面積という。

終状態をある微小な区間に制限すると、終状態の数は Q の微分 dQ で表される。これに伴い同様の制限を貸した場合の散乱断面積は σ の微分 $d\sigma$ で表されるとした場合、ある終状態へ単位時間に散乱される粒子の数 dN は

$$dN = wdQ = Fd\sigma \quad (3.56)$$

となる。この $d\sigma$ を微分断面積という。コンプトン散乱への応用のみを考えた場合、終状態は運動量が \mathbf{p}_f から $\mathbf{p}_f + d\mathbf{p}_f$ である状態と考えられる。したがってその制限を満たす終状態の数 dQ は

$$dQ = \frac{V d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 \mathbf{k}_f}{(2\pi)^3} \quad (3.57)$$

と書ける。これは 3 次元位相空間内の体積 $(2\pi)^3$ につき一つの状態が対応することから得られる。(3.56) と (3.57) より、コンプトン散乱の微分散乱断面積は

$$d\sigma = \frac{w}{F} dQ = \frac{|S_{fi}|^2}{TF} \frac{V d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 \mathbf{k}_f}{(2\pi)^3} \quad (3.58)$$

と求まる。

コンプトン散乱に適した公式 (3.58) を用いて具体的に断面積を評価するには式中の諸量を具体的に求める必要がある。まず手始めに $|S_{fi}|^2$ を計算する。(3.49) より

$$|S_{fi}^{(compton)}|^2 = \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) \right]^2 \left(\frac{m^2}{V^2 E_{\mathbf{p}_f} E_{\mathbf{p}_i}} \right) \left(\frac{1}{4V^2 \omega_{\mathbf{k}_f} \omega_{\mathbf{k}_i}} \right) |\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 \quad (3.59)$$

ここでデルタ関数は

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3 \mathbf{x} \exp[ix(p_f + k_f - p_i - k_i)] \quad (3.60)$$

と定義されるため、 T, V が充分大きいときには以下の近似が成り立つ：

$$[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i)]^2 = TV (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) \quad (3.61)$$

これを (3.58) に代入すると

$$d\sigma = \frac{1}{FV} \left(\frac{m^2}{E_{\mathbf{p}_f} E_{\mathbf{p}_i}} \right) \left(\frac{1}{4\omega_{\mathbf{k}_f} \omega_{\mathbf{k}_i}} \right) |\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}_f}{(2\pi)^3} \quad (3.62)$$

が得られる。

フラックスの表式は (3.38), (3.39) の規格化をする場合、入射粒子とターゲット粒子の相対速度 v , 系の体積を V を用いて

$$F = \frac{v}{V} \quad (3.63)$$

と書ける。これを考慮すると (3.62) は

$$d\sigma = \frac{1}{v} \left(\frac{m^2}{E_{\mathbf{p}_f} E_{\mathbf{p}_i}} \right) \left(\frac{1}{4\omega_{\mathbf{k}_f} \omega_{\mathbf{k}_i}} \right) |\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}_f}{(2\pi)^3} \quad (3.64)$$

となる。散乱現象を考える際は、重心系 (全系の運動量が 0 となる系) と実験室系 (ターゲット粒子の運動量が 0 となる系) の二つが良く用いられる。重心系と実験室系における相対速度は特殊相対論より、それぞれ

$$v_{CoM} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_2} = |\mathbf{p}_1| \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \quad (\text{重心系}) \quad (3.65)$$

$$v_{Lab} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} \quad (\text{実験室系}) \quad (3.66)$$

と書くことができる．ただし \mathbf{p}_1 は入射粒子の運動量， \mathbf{p}_2 はターゲット粒子の運動量であり，重心系では $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ であること，実験室系では $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ であることを用いた．(3.65)，(3.66) を (3.64) に代入すると，重心系の微分断面積 $d\sigma_{CoM}$ と実験室系の微分断面積 $d\sigma_{Lab}$ はそれぞれ

$$d\sigma_{CoM} = \frac{E_{\mathbf{p}_i}\omega_{\mathbf{k}_i}}{|\mathbf{k}_i|(E_{\mathbf{p}_i} + \omega_{\mathbf{k}_i})} \left(\frac{m^2}{16\pi^2 E_{\mathbf{p}_f} E_{\mathbf{p}_i} \omega_{\mathbf{k}_f} \omega_{\mathbf{k}_i}} \right) |\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) d^3\mathbf{p}_f d^3\mathbf{k}_f \quad (3.67)$$

$$d\sigma_{Lab} = \frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{|\mathbf{k}_i|} \left(\frac{m^2}{16\pi^2 E_{\mathbf{p}_f} E_{\mathbf{p}_i} \omega_{\mathbf{k}_f} \omega_{\mathbf{k}_i}} \right) |\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 \delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i) d^3\mathbf{p}_f d^3\mathbf{k}_f \quad (3.68)$$

という形になる．ただしここでは入射粒子を光子，ターゲット粒子を電子とした．これら2式を \mathbf{p}_f で積分すれば

$$d\sigma_{CoM} = \frac{m^2}{16\pi^2 |\mathbf{k}_i|(E_{\mathbf{p}_i} + \omega_{\mathbf{k}_i}) E_{\mathbf{p}_f} \omega_{\mathbf{k}_f}} |\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 \delta(E_{\mathbf{p}_f} + \omega_{\mathbf{k}_f} - E_{p_i} - \omega_{k_i}) |\mathbf{k}_f|^2 d|\mathbf{k}_f| d\Omega_{\mathbf{k}_f} \quad (3.69)$$

$$d\sigma_{Lab} = \frac{m^2}{16\pi^2 |\mathbf{k}_i| E_{\mathbf{p}_f} E_{\mathbf{p}_i} \omega_{\mathbf{k}_f}} |\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 \delta(E_{\mathbf{p}_f} + \omega_{\mathbf{k}_f} - E_{p_i} - \omega_{k_i}) |\mathbf{k}_f|^2 d|\mathbf{k}_f| d\Omega_{\mathbf{k}_f} \quad (3.70)$$

という式が求まる．この2式にはデルタ関数 $\delta^{(4)}(p_f + k_f - p_i - k_i)$ の積分によって $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ という制限が課される．最後に $|\mathbf{k}_f|$ についての積分を実行すると (3.69) と (3.70) は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{k}_f}} \right)_{CoM} = \frac{m^2}{16\pi^2 |\mathbf{k}_i|(E_{\mathbf{p}_i} + \omega_{\mathbf{k}_i}) E_{\mathbf{p}_f} \omega_{\mathbf{k}_f}} |\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 |\mathbf{k}_f|^2 \left[\frac{\partial(E_{\mathbf{p}_f} + \omega_{\mathbf{k}_f})}{\partial|\mathbf{k}_f|} \right]^{-1} \quad (3.71)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{k}_f}} \right)_{Lab} = \frac{m^2}{16\pi^2 |\mathbf{k}_i| E_{\mathbf{p}_f} E_{\mathbf{p}_i} \omega_{\mathbf{k}_f}} |\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 |\mathbf{k}_f|^2 \left[\frac{\partial(E_{\mathbf{p}_f} + \omega_{\mathbf{k}_f})}{\partial|\mathbf{k}_f|} \right]^{-1} \quad (3.72)$$

となる．ただし公式

$$\int dx f(x, y) \delta[g(x, y)] = \int dg \left(\frac{\partial x}{\partial g} \right) f(x, y) \delta[g(x, y)] = f(x, y) \left[\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right]_{g=0}^{-1} \quad (3.73)$$

を用いた．また式 (3.71), (3.72) における $|\mathbf{k}_f|$ についての偏微分は \mathbf{k}_f の方向 θ, ϕ を固定して行う．このようにして求めた $d\sigma/d\Omega$ も微分断面積という．

3.2.6 Klein-仁科の式

前節 3.2.5 において微分断面積の式 (3.71), (3.72) を導いた．この式には Feynman 振幅の絶対値の二乗が現れる．これを具体的に評価すればコンプトン散乱の微分断面積を求めることができる．式 (3.50), (3.51) に式 (3.52) を代入すると

$$\mathcal{M}_a = -ie^2 \frac{\bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \not{\epsilon}_{s_f}(\mathbf{k}_f) (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \not{\epsilon}_{s_i}(\mathbf{k}_i) u_{r_i}(\mathbf{p}_i)}{2p_i k_i} \quad (3.74)$$

$$\mathcal{M}_b = ie^2 \frac{\bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \not{\epsilon}_{s_i}(\mathbf{k}_i) (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \not{\epsilon}_{s_f}(\mathbf{k}_f) u_{r_i}(\mathbf{p}_i)}{2p_i k_f} \quad (3.75)$$

となる．最終的に求めたい量は $|\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b|^2 = |\mathcal{M}_a|^2 + |\mathcal{M}_b|^2 + \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b$ だから各項を順次計算する．まず $|\mathcal{M}_a|^2$ を求めるために (3.74) の分子の全体値の二乗を計算すると

$$\begin{aligned} (\text{分子の二乗}) &= \left[\bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \not{\epsilon}_{s_f}(\mathbf{k}_f) (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \not{\epsilon}_{s_i}(\mathbf{k}_i) u_{r_i}(\mathbf{p}_i) \right]^\dagger \left[\bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \not{\epsilon}_{s_f}(\mathbf{k}_f) (\not{p}_i + \not{k}_f + m) \not{\epsilon}_{s_i}(\mathbf{k}_i) u_{r_i}(\mathbf{p}_i) \right] \\ &= \epsilon_{\alpha s_i} \epsilon_{\beta s_f} \epsilon_{\mu s_f} \epsilon_{\nu s_i} \text{Tr} \left[\gamma^\beta (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma^\alpha u_{r_f}(\mathbf{p}_f) \bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma^\nu u_{r_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{r_i}(\mathbf{p}_i) \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

となる。よって

$$|\mathcal{M}_a|^2 = \frac{e^4 \epsilon_\alpha s_i \epsilon_\beta s_f \epsilon_\mu s_i \epsilon_\nu s_i}{4(p_i k_i)^2} \text{Tr} \left[\gamma^\beta (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma^\alpha u_{r_f}(\mathbf{p}_f) \bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma^\nu u_{r_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{r_i}(\mathbf{p}_i) \right] \quad (3.77)$$

である。同様にして $|\mathcal{M}_b|^2, \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^*, \mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b$ はそれぞれ

$$|\mathcal{M}_b|^2 = \frac{e^4 \epsilon_\alpha s_i \epsilon_\beta s_f \epsilon_\mu s_i \epsilon_\nu s_f}{4(p_i k_f)^2} \text{Tr} \left[\gamma^\beta (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma^\alpha u_{r_f}(\mathbf{p}_f) \bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma^\nu u_{r_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{r_i}(\mathbf{p}_i) \right] \quad (3.78)$$

$$\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* = -\frac{e^4 \epsilon_\alpha s_i \epsilon_\beta s_f \epsilon_\mu s_f \epsilon_\nu s_i}{4(p_i k_f)(p_i k_i)} \text{Tr} \left[\gamma^\beta (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma^\alpha u_{r_f}(\mathbf{p}_f) \bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma^\nu u_{r_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{r_i}(\mathbf{p}_i) \right] \quad (3.79)$$

$$\mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b = -\frac{e^4 \epsilon_\alpha s_f \epsilon_\beta s_i \epsilon_\mu s_i \epsilon_\nu s_f}{4(p_i k_f)(p_i k_i)} \text{Tr} \left[\gamma^\beta (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma^\alpha u_{r_f}(\mathbf{p}_f) \bar{u}_{r_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^\mu (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma^\nu u_{r_i}(\mathbf{p}_i) \bar{u}_{r_i}(\mathbf{p}_i) \right] \quad (3.80)$$

となる。これらを (3.71) または (3.72) に代入すればコンプトン散乱の微分断面積が求まる。しかしながら (3.77)~(3.80) は電子のスピンと光子の偏極の情報を含んでおり、多くの散乱実験において電子のスピンと光子の偏極の統計平均は 0 になる。したがって通常の散乱実験と理論の比較を目的とする場合、(3.77)~(3.80) をそれぞれ電子スピンおよび光子偏極について平均したものに置き換える必要がある。電子のスピン自由度は 2、光子の偏極の自由度も 2 であるから全部で 4 つのスピン-偏極状態について平均をとる。スピノル $u_r(\mathbf{p}), \bar{u}_s(\mathbf{p})$ は (3.38) という関係を満足するので

$$\sum_{r=1,2} u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad (3.81)$$

という関係も満たす。また光子の偏極ベクトルは (3.41) を満足するため、(3.42)~(3.44) より

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_s^\mu \epsilon_s^\nu = -g^{\mu\nu} - \frac{1}{(kn)^2} [k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)] \quad (3.82)$$

という式を満足する。この 2 式 (3.81), (3.82) を用いると (3.77)~(3.80) をスピンと偏光について平均化することができ、結果は次のようになる：

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_a|^2} &= \frac{e^4}{64m^2(p_i k_i)^2} \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma^\nu (\not{p}_i + m) \gamma_\nu (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma_\mu (\not{p}_f + m) \right] \\ &= \frac{e^4}{2m^2(p_i k_i)^2} [m^4 + m^2(p_i k_i) + (p_i k_i)(p_i k_f)] \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_b|^2} &= \frac{e^4}{64m^2(p_i k_f)^2} \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma^\nu (\not{p}_i + m) \gamma_\nu (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma_\mu (\not{p}_f + m) \right] \\ &= \frac{e^4}{2m^2(p_i k_f)^2} [m^4 - m^2(p_i k_i) + (p_i k_i)(p_i k_f)] \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^*} &= -\frac{e^4}{64m^2(p_i k_i)(p_i k_f)} \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma^\nu (\not{p}_i + m) \gamma_\mu (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma_\nu (\not{p}_f + m) \right] \\ &= -\frac{e^4}{4(p_i k_i)(p_i k_f)} [2m^2 + (p_i k_i) - (p_i k_f)] \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}_b \mathcal{M}_a^*} &= -\frac{e^4}{64m^2(p_i k_i)(p_i k_f)} \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma^\nu (\not{p}_i + m) \gamma_\mu (\not{p}_i + \not{k}_i + m) \gamma_\nu (\not{p}_f + m) \right] \\ &= -\frac{e^4}{4(p_i k_i)(p_i k_f)} [2m^2 + (p_i k_i) - (p_i k_f)] \end{aligned} \quad (3.86)$$

ただし、 $|\mathcal{M}_a|^2, |\mathcal{M}_b|^2, \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^*, \mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b$ の4つを足し合わせた時に、Feynman 振幅のゲージ不変性によって消える項を省略した。よってスピンと偏極について平均化されたコンプトン散乱の Feynman 振幅は

$$\overline{|\mathcal{M}_{Compton}|} = \frac{e^4}{2m^2} \left[\left(\frac{p_i k_i}{p_i k_f} + \frac{p_i k_f}{p_i k_i} \right) + 2m^2 \left(\frac{1}{p_i k_i} - \frac{1}{p_i k_f} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p_i k_i} - \frac{1}{p_i k_f} \right)^2 \right] \quad (3.87)$$

となる。コンプトン散乱の実験では、入射粒子を光子、ターゲット粒子を静止した電子として実験を行う場合が多いため、以下実験室系で考える。実験室系における各種粒子の運動量は $p_i = (m, \mathbf{0}), k_i = (\omega_{\mathbf{k}_i}, \mathbf{k}_i), p_f = (E_{\mathbf{p}_f}, \mathbf{p}_f), k_f = (\omega_{\mathbf{k}_f}, \mathbf{k}_f)$ であるから、 $p_i k_i = m\omega_{\mathbf{k}_i}, p_i k_f = m\omega_{\mathbf{k}_f}$ となる。また入射光子と散乱光子の進行方向のなす角を θ とすると (3.5) より (3.87) は

$$\overline{|\mathcal{M}_{Compton}|} = \frac{e^4}{2m^2} \left[\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{\omega_{\mathbf{k}_f}} + \frac{\omega_{\mathbf{k}_f}}{\omega_{\mathbf{k}_i}} \right) - \sin^2 \theta \right] \quad (3.88)$$

となる。またエネルギー保存則から $E_{\mathbf{p}_f} = \sqrt{m^2 + \omega_{\mathbf{k}_i}^2 + \omega_{\mathbf{k}_f}^2 - 2\omega_{\mathbf{k}_i}\omega_{\mathbf{k}_f} \cos \theta}$ が成り立つ。これらを実験室系における微分断面積の公式 (3.72) に代入すれば

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{k}_f}} \right)_{Lab} &= \frac{m^2}{16\pi^2 |\mathbf{k}_i| E_{\mathbf{p}_f} E_{\mathbf{p}_i} \omega_{\mathbf{k}_f}} \frac{e^4}{2m^2} \left[\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{\omega_{\mathbf{k}_f}} + \frac{\omega_{\mathbf{k}_f}}{\omega_{\mathbf{k}_i}} \right) - \sin^2 \theta \right] |\mathbf{k}_f|^2 \left[\frac{\partial(E_{\mathbf{p}_f} + \omega_{\mathbf{k}_f})}{\partial |\mathbf{k}_f|} \right]^{-1} \\ &= \frac{e^4 \omega_{\mathbf{k}_f}}{32\pi^2 E_{\mathbf{p}_f} m} \left[\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{\omega_{\mathbf{k}_f}} + \frac{\omega_{\mathbf{k}_f}}{\omega_{\mathbf{k}_i}} \right) - \sin^2 \theta \right] \left[\frac{\partial(\sqrt{m^2 + \omega_{\mathbf{k}_i}^2 + \omega_{\mathbf{k}_f}^2 - 2\omega_{\mathbf{k}_i}\omega_{\mathbf{k}_f} \cos \theta} + \omega_{\mathbf{k}_f})}{\partial \omega_{\mathbf{k}_f}} \right]^{-1} \\ &= \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}_f}}{\omega_{\mathbf{k}_i}} \right)^2 \left[\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}_i}}{\omega_{\mathbf{k}_f}} + \frac{\omega_{\mathbf{k}_f}}{\omega_{\mathbf{k}_i}} \right) - \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

が得られる。これが実験室系のコンプトン散乱の微分断面積を表す式であり、実験室系での Klein-仁科の公式である。

4 実験方法

4.1 実験装置

測定に使用した回路図を図 4.1 に示す。使用した線源及び回路図中の各装置は以下の通りである。

1. 放射線源

$^{22}\text{Na}, ^{137}\text{Cs}$ を用いた。但し、 ^{22}Na はエネルギー較正のみ、 ^{137}Cs はエネルギー較正及び Compton 散乱の測定に用いた。

2. シンチレータ

NaI(Tl), LaBr₃

入射した放射線で励起された結晶中の電子が低エネルギー状態に遷移する際に可視光を放出する。

3. PMT:光電子増倍管

シンチレータから入射した可視光により陰極から光電子が叩き出され、光電子が増倍される。これにより微弱な光を電気信号に変換する。NaI(Tl) に PMT1, LaBr₃ に PMT2 を使用し、PMT1 に 1450V, PMT2 に -1600V の電圧を印加した。

4. DIVIDER

入力された電気信号を複数の信号に分割する。

5. DISCRI:Discriminator

入力された電気信号の電圧が閾値を超えた場合に矩形波を出力する。実験で用いた2つの DISCRIMINATOR の閾値をともに -5.6 mV に設定した。

6. CG:Clock Generator

設定された周波数の信号を出力する。なお、周波数はおよそ 1000 Hz に設定した。

7. COINCIDENCE

2つの入力信号が同時に来た場合のみ矩形波を出力する。A に PMT1, B に PMT2, C に Clock Generator を接続した。

8. GG:Gate Generator

信号が入力された場合に設定された時間幅を持つ矩形波を出力する。今回の実験では矩形波の長さを $1.1\text{ }\mu\text{s}$ に設定した。

9. DELAY

入力された信号を遅らせる装置。ADC の CH0, 1 に入力される信号を GG で出力された矩形波内に納めるために、DELAY 及び DIVIDER と DELAY を繋ぐ遅延ケーブルによって 111 ns 遅延させた。

10. ADC:ADC Counter

CH0 または CH1 に入力された信号を GATE に入力された矩形波の時間幅で積分した整数値を出力する。放射線がシンチレータに与えたエネルギーに対応した、PMT で発生する電荷量 = ADC 値を出力する。

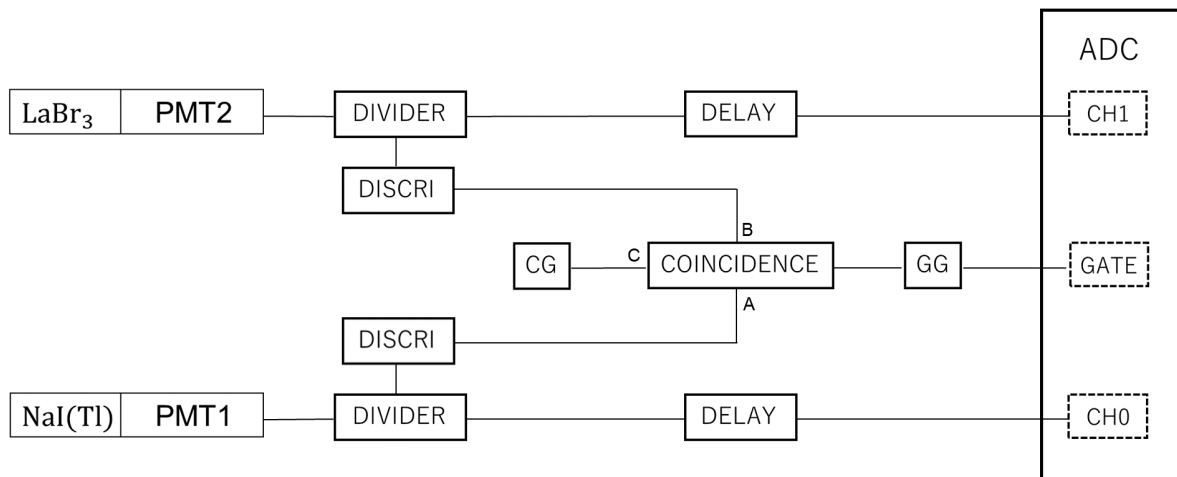


図 4.1: 回路図

尚、Coincidence の ADC 値を得る際には、NaI(Tl), LaBr₃ でほぼ同時に発光した事による電気信号が図 4.2 のように、GG で生成した矩形波の中に同時に収まるように GATE の長さを調節し、遅延ケーブルおよび DELAY を用いて電気信号を遅らせる必要がある。



図 4.2: Coincidence の ADC 値を測定する場合の各シンチレータによる電気信号及び GG が生成する矩形波の時間的關係

4.2 測定手順

シンチレータ, PMT, 線源を図 4.3 に示すように配置し, 散乱角度 $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ で測定した. γ 線により散乱された PMT2 内の電子を PMT2 で検出し, 散乱された γ 線を PMT1 で検出した. 実験で使用したシンチレータと PMT は円柱状である. そのため, PMT2 については線源から見たシンチレータの立体角が散乱角に依らず一定になるように, 図 4.4 に示すようにシンチレータを下側にして垂直に配置した. 尚, LaBr_3 シンチレータは黒色のビニールテープで覆われていたため正確な直径を知ることは出来なかった. そのため LaBr_3 シンチレータの直径は, 測った 2 カ所の直径のうち短い方とした.

それぞれの θ において, COINCIDENCE のスイッチ A, B を OFF, C を ON にし, CG からの信号のみにより Pedestal の ADC 値を測定する. また, COINCIDENCE のスイッチ A, B を ON, C を OFF にし, 2 つのシンチレータでほぼ同時にシンチレーション光が発生した Coincidence の ADC 値を測定する. 測定したカウント数を表 4.1, 4.2 に示す. 但し, ^{22}Na は $\theta = 180^\circ$ の時のみ測定した. $\text{NaI}(\text{Tl})$ シンチレータのシンチレーション特性は時間変化しうるので, $\theta = 180^\circ$ で ^{22}Na の測定を最初と最後の 2 回行った.

表 4.1: 線源が ^{137}Cs の場合の ADC カウント数

θ°	Pedestal	Coincidence	測定日: 年/月/日
30	2000	2000	2021/01/25
60	2000	2000	2021/01/25
90	2000	2000	2021/01/18
120	2000	2000	2021/01/18
150	10000	2000	2021/01/18
180	10000	2198	2021/01/18

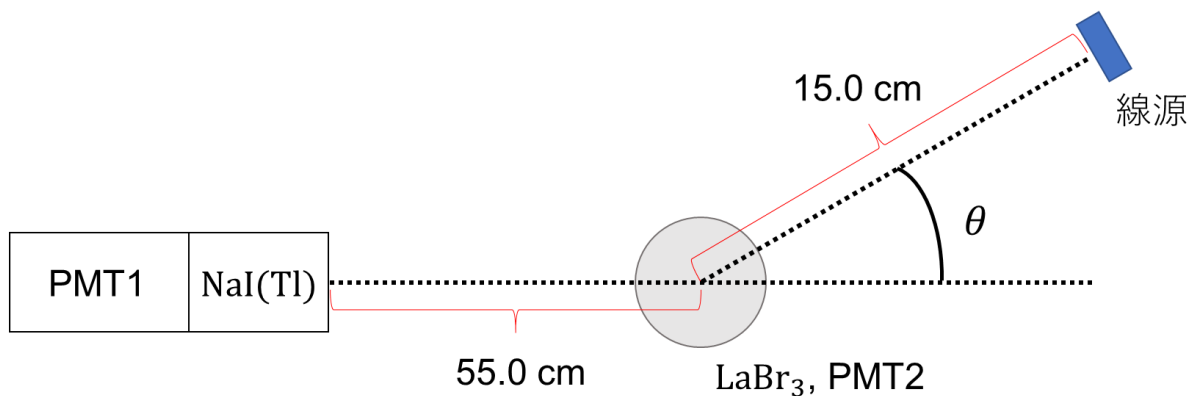


図 4.3: 実験装置の幾何学的配置

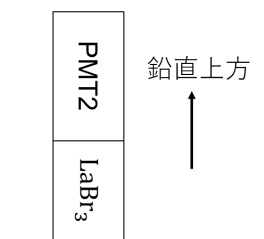


図 4.4: LaBr₃ シンチレータの設置

表 4.2: 線源が ²²Na の場合の Coincidence の ADC カウント数

θ°	1 回目	2 回目	測定日: 年/月/日
180	2000	2000	2021/01/25
180	10000	2000	2021/01/18

5 解析方法

5.1 エネルギー較正

5.1.1 較正方法

ADC 値をエネルギーに変換するために、それぞれの散乱角において以下の手順で較正を行った。

1. Pedestal のカウントのピークをガウス分布でフィッティングし、ピークとなる ADC 値 X_{pedestal} を線源以外の放射線によるエネルギーとし、これを線源による γ 線の 0keV のエネルギーに対応させた。
2. Coincidence の光電ピークの ADC 値 X_{peak} を線源による γ 線のエネルギーに対応させた。線源 ²²Na,

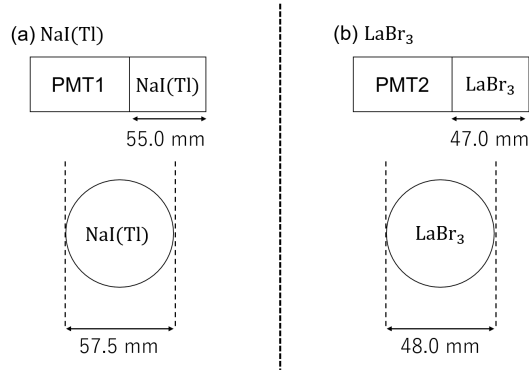


図 4.5: (a)NaI, (b)LaBr₃ シンチレータの寸法

¹³⁷Cs では, それぞれ 511keV, 662keV に対応する.

3. 入射放射線がシンチレータに付与したエネルギー E と ADC 値 X の関係は線型

$$X = AE + B \Rightarrow E = \frac{X - B}{A} \quad (5.1)$$

であると仮定し, 散乱角 θ における ¹³⁷Cs の X_{pedestal} , X_{peak} , および $\theta = 180^\circ$ における ²²Na の X_{peak} の 3 点によって最小二乗法で A, B [keV] を決定した. このときの誤差は各パラメータに相関はないものと仮定して誤差伝播の式より計算した.

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{A^2} \sigma_X^2 + \frac{(X - B)^2}{A^4} \sigma_A^2 + \frac{1}{A^2} \sigma_B^2 \quad (5.2)$$

これをそれぞれシンチレータで行った.

4. 関係式 (5.1) を用いて ADC 値をエネルギーに換算した.

5.1.2 較正結果

各散乱角 θ において 0keV, 511keV, 662keV に対応する ADC 値を表 5.1, 表 5.2 に示す.

測定は $30^\circ, 60^\circ$ とそれ以外とで別日に行っており, 511 keV に対応する ²²Na による ADC 値はそれぞれの日で ¹³⁷Cs の測定前後に 1 回ずつ測定した値を平均したものをを用いている.

表 5.1: NaI(Tl) の各散乱角 θ における 0keV, 511keV, 662keV に対応する ADC 値.

θ [°]	$E = 0$ keV	$E = 511$ keV	$E = 662$ keV
30	65.6 ± 0.6	1380.2 ± 2.1	1766.5 ± 4.0
60	65.2 ± 0.6	1380.2 ± 2.1	1748.7 ± 6.7
90	70.6 ± 0.6	1413.3 ± 2.4	1788.0 ± 6.7
120	70.1 ± 0.6	1413.3 ± 2.4	1780.5 ± 5.6
150	69.3 ± 0.4	1413.3 ± 2.4	1801.0 ± 9.7
180	67.9 ± 0.4	1413.3 ± 2.4	1800.5 ± 13.8

また, エネルギー較正の関係式 (5.1) における A, B の値を表 5.3 及び表 5.4 に示す.

表 5.2: LaBr₃ の各散乱角 θ における 0keV, 511keV, 662keV に対応する ADC 値

$\theta[^\circ]$	$E = 0 \text{ keV}$	$E = 511 \text{ keV}$	$E = 662 \text{ keV}$
30	83.8 \pm 0.3	1467.6 \pm 1.4	1858.6 \pm 2.1
60	83.4 \pm 0.3	1467.6 \pm 1.4	1850.1 \pm 2.0
90	89.2 \pm 0.3	1087.7 \pm 0.8	1363.7 \pm 0.9
120	89.0 \pm 0.3	1087.7 \pm 0.8	1370.2 \pm 1.1
150	88.3 \pm 0.2	1087.7 \pm 0.8	1370.9 \pm 1.9
180	87.8 \pm 0.2	1087.7 \pm 0.8	1376.6 \pm 1.6

表 5.3: NaI(Tl) のエネルギー較正におけるパラメータ

$\theta[^\circ]$	A	B
30	2.57 \pm 0.00	65.8 \pm 1.28
60	2.55 \pm 0.02	67.3 \pm 11.9
90	2.60 \pm 0.03	73.0 \pm 13.1
120	2.60 \pm 0.04	73.3 \pm 17.6
150	2.62 \pm 0.01	70.3 \pm 5.59
180	2.62 \pm 0.01	69.0 \pm 6.13

表 5.4: LaBr₃ のエネルギー較正におけるパラメータ

$\theta[^\circ]$	A	B
30	2.69 \pm 0.02	85.7 \pm 10.6
60	2.68 \pm 0.03	86.2 \pm 15.7
90	1.93 \pm 0.02	91.2 \pm 11.3
120	1.94 \pm 0.02	90.3 \pm 7.46
150	1.94 \pm 0.01	89.6 \pm 7.17
180	1.95 \pm 0.01	88.5 \pm 3.89

5.2 コンプトン散乱の寄与するデータの取り出し

計測は Coincidence で行ったため、データとしては同時刻にそれぞれのシンチレータで計測されたエネルギーの組が得られている。そのデータを散布図としてあらわすと、例えば 180° では図 5.1 のようになる。

コンプトン散乱に関する理論から、入射ガンマ線が ¹³⁷Cs による 662keV のエネルギーを持つものであることを考慮すると、 γ 線が LaBr₃ でコンプトン散乱され、NaI(Tl) で全吸収されたと見られるデータは図の $100 \leq x \leq 300$, $400 \leq y \leq 540$ の部分にあつまるデータである。拡大してプロットの濃度により色をつけると図 5.2 のようになる。

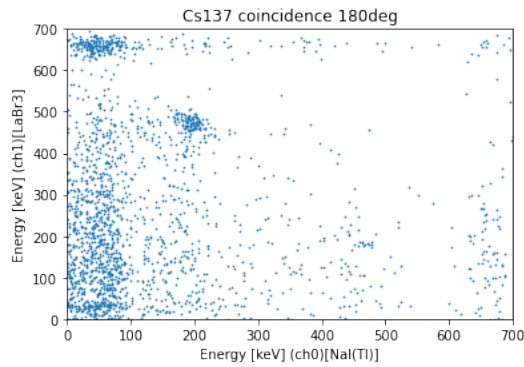


図 5.1: 180°での Coincidence で測ったエネルギーの散布図

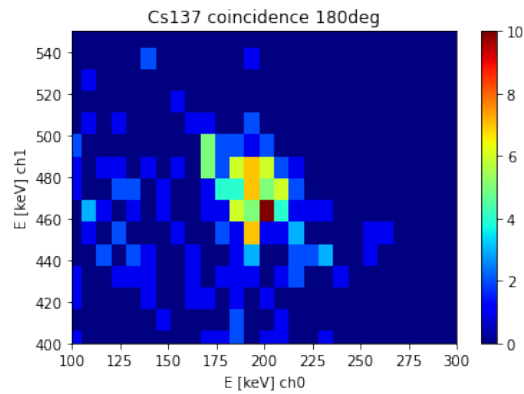


図 5.2: 図 5.1 を拡大し、プロットの濃度により色分けしたもの

ここでコンプトン散乱したとみなせるイベントのエネルギーの範囲は図 5.2 から $150 \leq x \leq 250$ 、 $420 \leq y \leq 520$ 、 $620 \leq x + y \leq 750$ 程度と見積もって、この部分のデータを取り出す事でコンプトン散乱についてのデータの解析を行うことができる。

この範囲でのデータのみプロットしなおしたグラフは図 5.3 のようになる。

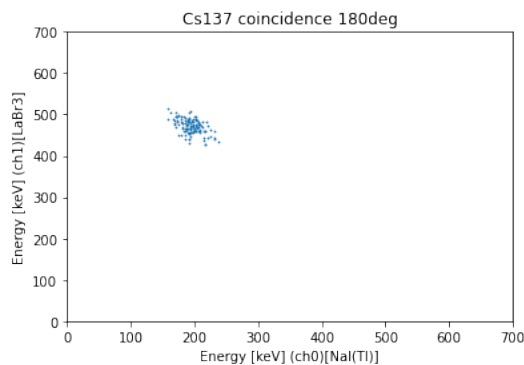


図 5.3: 図 5.1 のうちコンプトン散乱によるデータを取り出しプロットしなおしたもの

他の角度でも同様に見積もった。

5.3 エネルギー角度分布

コンプトン散乱のエネルギー角度分布の式 (3.89) が計算で得られるため、それぞれの角度でエネルギーの値を見ることで式 (3.89) の正当性を確かめることができる。 ^{137}Cs による 662 keV のエネルギーを持つものであるため、各シンチレータでの各角度での測定値の和は 662 keV となると予想される。

5.4 Klein-仁科の公式との比較

それぞれの角度における計測で、5.2 節の方法で取り出したコンプトン散乱の起こったイベント数を数え、計測時間で割ることでその角度へ単位時間当たり散乱する数 $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ [1/sec] を求めることができる。同じ線源を用いて実験しているため線源から LaBr_3 に到達する γ 線の数がある一定であるものとする、この値は Klein-仁科の公式により与えられる微分断面積に比例する量である。

よってこの値の間の比と Klein-仁科の公式により与えられる微分断面積を定数倍したものとが一致することが予想される。

6 実験結果

6.1 エネルギースペクトル、2次元プロット

図 6.1 から図 6.12 は各角度 $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ におけるエネルギースペクトルとエネルギーの 2次元プロットである。

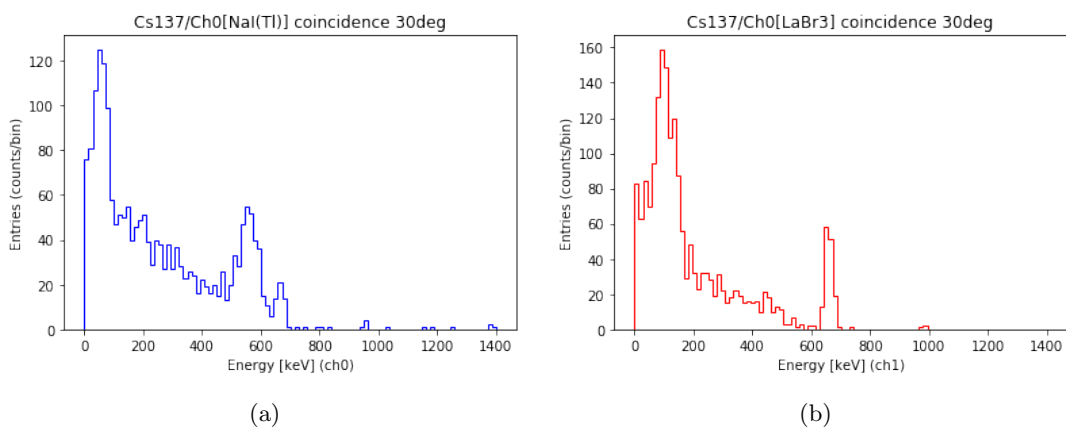
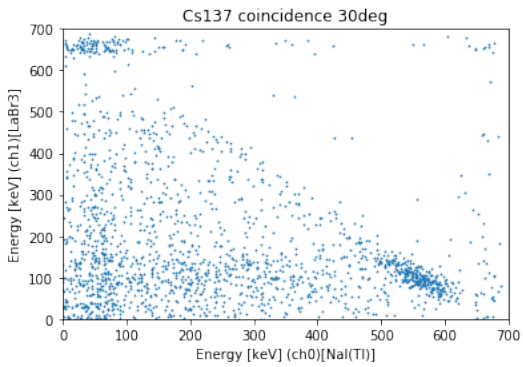
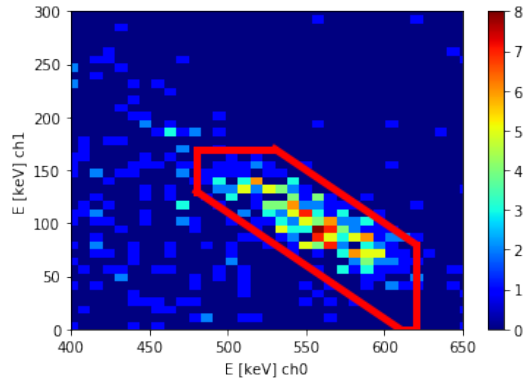


図 6.1: 角度 30 度でのエネルギー・イベント数のグラフ

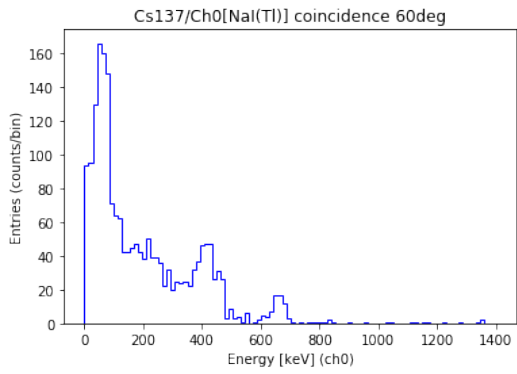


(a)

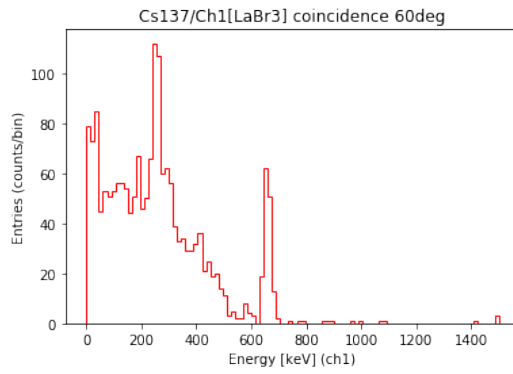


(b)

図 6.2: 角度 30 度でのエネルギーの 2 次元プロット

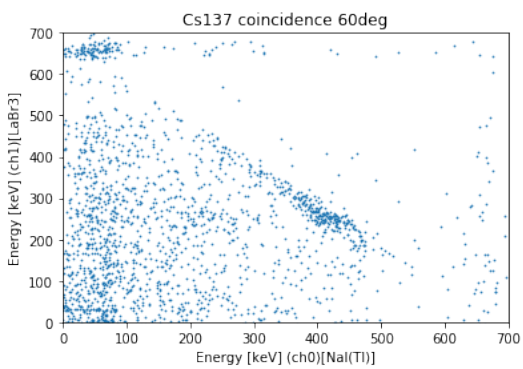


(a)

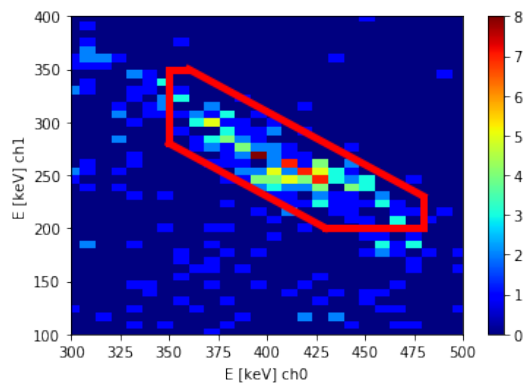


(b)

図 6.3: 角度 60 度でのエネルギー・イベント数のグラフ

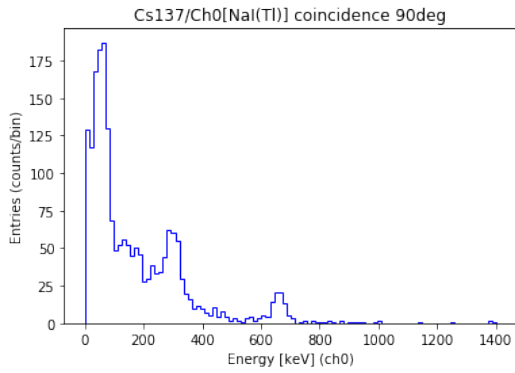


(a)

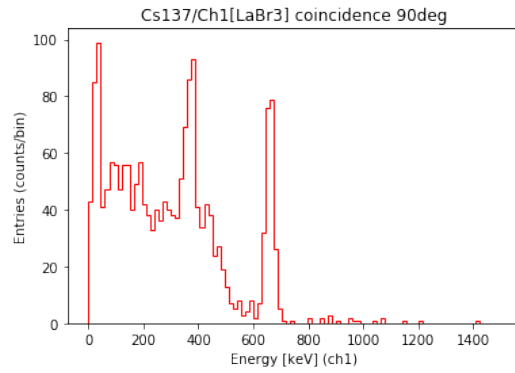


(b)

図 6.4: 角度 60 度でのエネルギーの 2 次元プロット

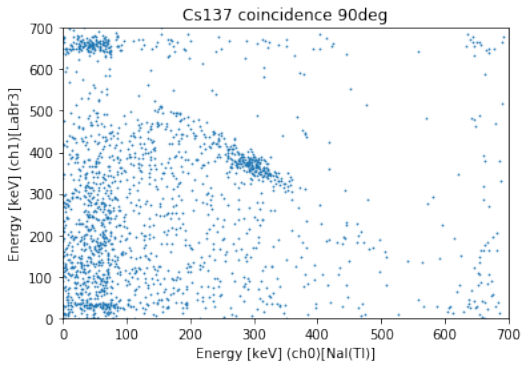


(a)

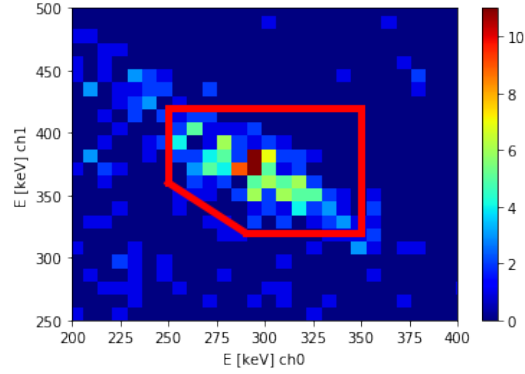


(b)

図 6.5: 角度 90 度でのエネルギー・イベント数のグラフ

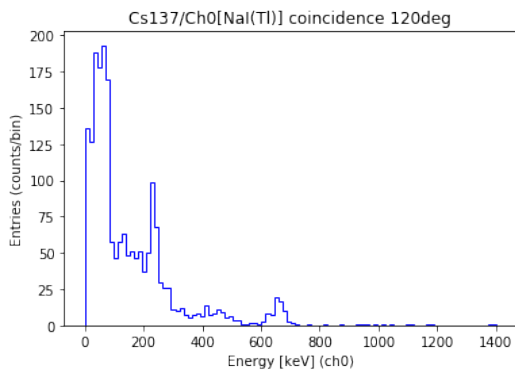


(a)

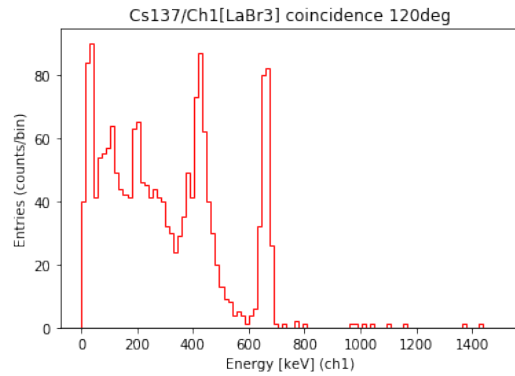


(b)

図 6.6: 角度 90 度でのエネルギーの 2 次元プロット

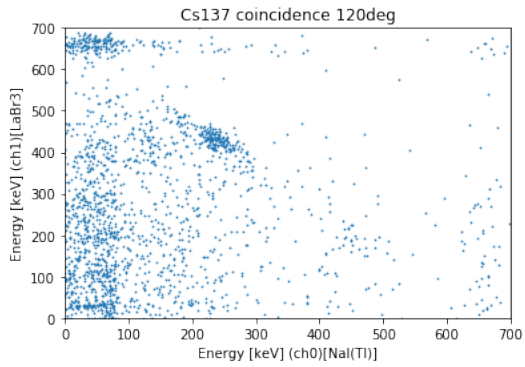


(a)

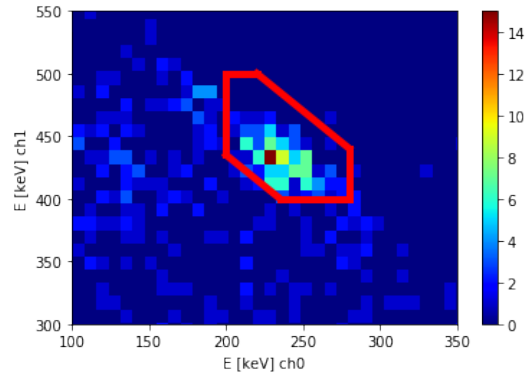


(b)

図 6.7: 角度 120 度でのエネルギー・イベント数のグラフ

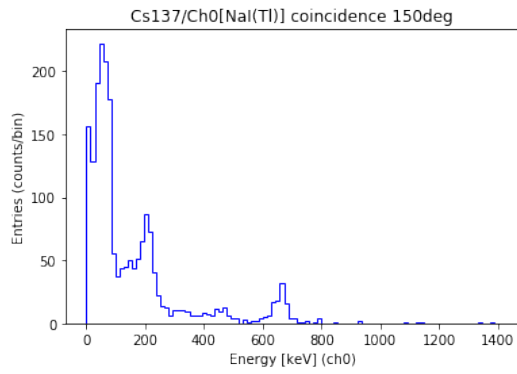


(a)

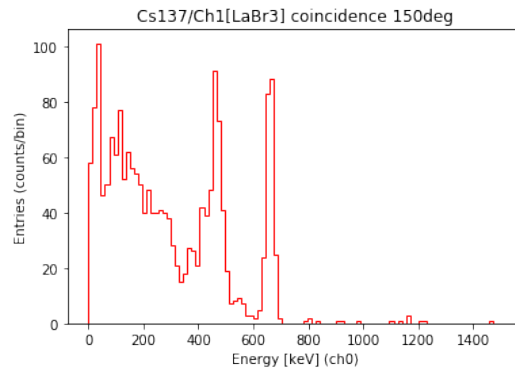


(b)

図 6.8: 角度 120 度でのエネルギーの 2 次元プロット

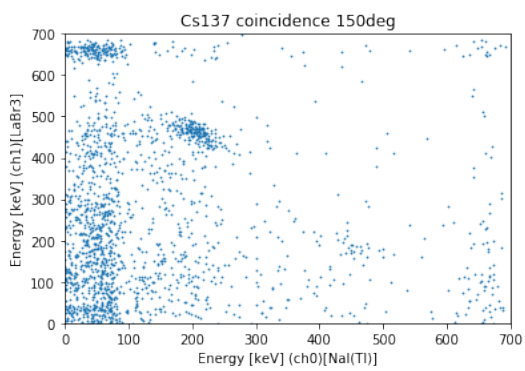


(a)

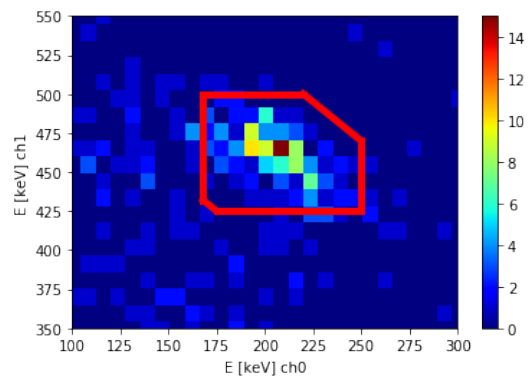


(b)

図 6.9: 角度 150 度でのエネルギー・イベント数のグラフ

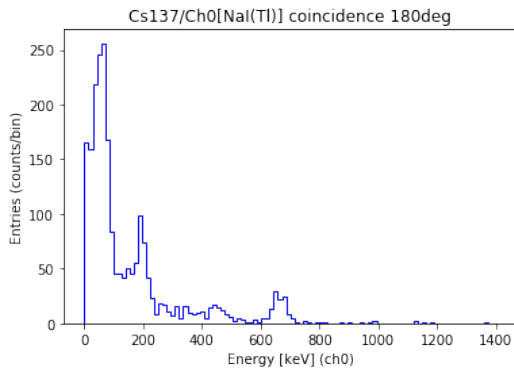


(a)

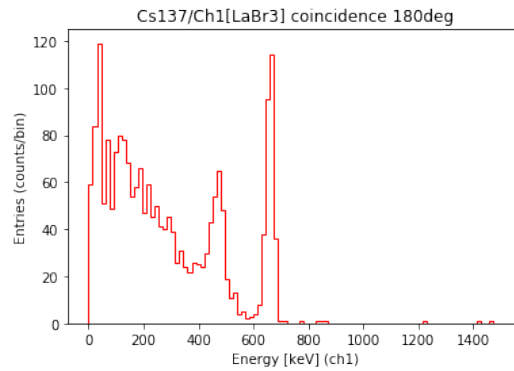


(b)

図 6.10: 角度 150 度でのエネルギーの 2 次元プロット

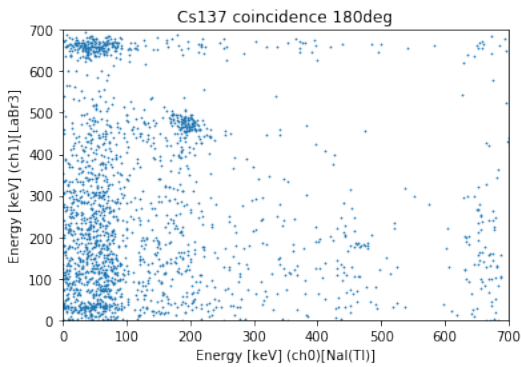


(a)

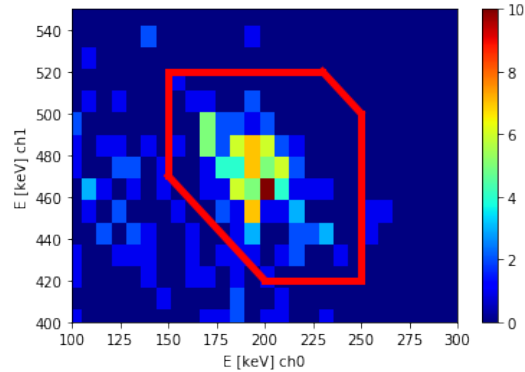


(b)

図 6.11: 角度 180 度でのエネルギー・イベント数のグラフ



(a)



(b)

図 6.12: 角度 180 度でのエネルギーの 2 次元プロット

6.2 γ 線と電子のエネルギーの角度分布

図 6.2b、図 6.4b、図 6.6b、図 6.8b、図 6.10b、図 6.12b の赤線で囲まれた領域のみをコンプトン散乱が起きたイベントとみなした。それらのデータを取り出し、ガウス分布でフィッティングし、ガンマ線のエネルギー・電子のエネルギー・全エネルギーを計算した。それらのデータを表 6.1 にまとめた。

表 6.1 をグラフにし、理論値と比較したものが図 6.13 である。データ点は、実験値を示しており、青色はガンマ線のエネルギー、橙色は電子のエネルギー、緑色は全エネルギーである。また、直線、曲線は理論値を示し、青色はガンマ線のエネルギー、橙色は電子のエネルギー、緑色は全エネルギーである。測定点と理論値がよく一致していることが分かる。

表 6.1: 各角度でのエネルギー

θ [°]	ガンマ線のエネルギー [keV]	電子のエネルギー [keV]	全エネルギー [keV]
30	559.7 ± 5.7	100.3 ± 2.6	660.0 ± 6.3
60	406.2 ± 1.9	261.4 ± 4.6	667.6 ± 5.0
90	295.0 ± 2.1	367.0 ± 2.6	662.0 ± 3.3
120	237.2 ± 1.2	426.8 ± 5.0	664.0 ± 5.1
150	205.5 ± 1.6	460.6 ± 2.4	666.1 ± 2.9
180	194.7 ± 1.4	464.7 ± 2.7	659.4 ± 3.0

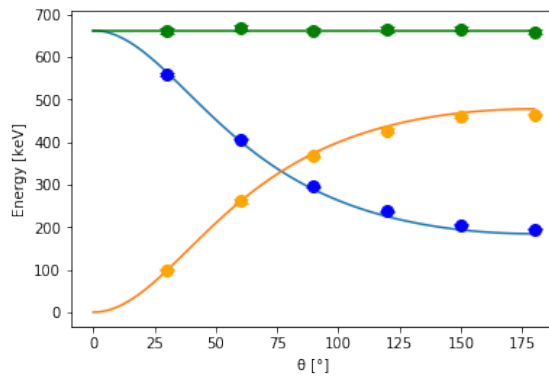


図 6.13: ガンマ線と電子のエネルギーの角度分布

6.3 反応頻度の角度分布

図 6.2b、図 6.4b、図 6.6b、図 6.8b、図 6.10b、図 6.12b の赤線で囲まれた領域のイベント数 N を数え上げ、測定時間 t で割って、反応頻度 $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ を計算した。ただし、反応頻度を計算する際にイベント数 N の誤差範囲は \sqrt{N} とした。それらの結果を表 6.2 にまとめた。図 6.14 は表 6.2 の各角度の反応頻度をエラーバーつ

表 6.2: 各角度のコンプトン散乱のイベント数、測定時間、反応頻度

θ [°]	N	t [s]	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ [1/s]
30	295	789	0.352 ± 0.021
60	203	1026	0.197 ± 0.013
90	199	1187	0.168 ± 0.012
120	162	1078	0.150 ± 0.012
150	168	868	0.194 ± 0.015
180	130	802	0.162 ± 0.014

きでプロットし、全データ点に対し Klein-仁科の式でフィッティング曲線をくわえたものである。

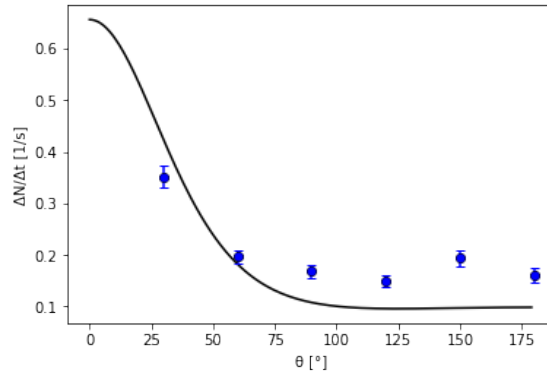


図 6.14: 反応頻度の角度分布

7 考察

7.1 エネルギーの角度分布に関する考察

表 7.1 は理論的に求めた散乱 γ 線のエネルギーと反跳電子の運動エネルギーである。この表の値を用いてカ

表 7.1: 各角度でのエネルギーの理論値

θ [°]	ガンマ線のエネルギー [keV]	電子のエネルギー [keV]
30	564.0	97.9
60	401.7	260.2
90	288.3	373.6
120	224.9	437.0
150	193.7	468.2
180	184.3	477.6

イ二乗検定を行った結果 p 値はガンマ線のエネルギーでは 0.820、電子のエネルギーは 0.970 となった。したがってガンマ線と電子のエネルギーの値は理論値と概ね一致していると言える。

7.2 散乱断面積に関する考察

図 6.14 を見るとほとんどの測定点で Klein-仁科の式に一致していない。そこで測定データが理論曲線からずれる原因として次の二つを考えた。

- 線源から出たガンマ線は LaBr_3 シンチレータの中心で散乱し、 NaI シンチレータに対し垂直に入射するとは限らず、測定されるガンマ線の散乱角に幅が生じる。この角度分解能が誤差の原因と考えられる。
- LaBr_3 シンチレータ内で散乱したガンマ線が NaI シンチレータに入射した際、一部のガンマ線は吸収されず透過してしまう。したがって反応頻度を求める際に透過したガンマ線も $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ で考慮する必要がある。

あると考えられる。

7.2.1 散乱角の幅による効果

装置の形状から各角度 θ に対し実際に取りうる散乱角の最大値と最小値を計算したところ表 7.2 のようになった。 θ_{\min} から θ_{\max} まで全て同じ重みで寄与していると仮定して Klein-仁科の式でのフィッティング曲線に対して

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}}{\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\Omega} \quad (7.1)$$

と角度 θ 周りの平均を取りビンニングした結果が図 7.1 である。

表 7.2: 各角度 θ に対し取りうる散乱角の最大値と最小値

θ°	30	60	90	120	150	180
$\theta_{\max} [^\circ]$	40.5	69.7	98.6	127.4	156.5	180
$\theta_{\min} [^\circ]$	19.1	49.7	80.7	111.9	143.1	173.8

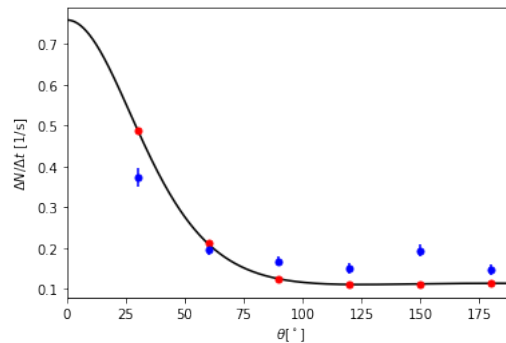


図 7.1: 角度幅の補正を加えた散乱断面積とプロット曲線: 青い点が測定値、黒い曲線がフィッティング曲線、赤の点がフィッティング曲線を角度幅で補正した点である。

角度幅による補正を加えた理論値は補正前の曲線からほとんどずれなかった。したがって角度幅による誤差はほとんど無いと考えられる。

7.2.2 NaI シンチレータの吸収効率による補正

ガンマ線が密度 ρ 、厚さ l の吸収物質に光子数 N_0 で入射したとき透過する光子数 N_{trans} は次で与えられる [1]。

$$N_{\text{trans}} = N_0 e^{-\mu l} = N_0 e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho l} \quad (7.2)$$

ここで $\frac{\mu}{\rho}$ は質量減衰係数で入射ガンマ線のエネルギーと吸収物質に依存する。したがって物質に吸収、もしくは散乱された光子数を I とすると

$$N = N_0 - N_{\text{trans}} = I_0 (1 - e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho l}) \Rightarrow N_0 = \frac{N}{1 - e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho l}} \quad (7.3)$$

となり、吸収された光子数から入射した光子数を求めることができる。

減衰係数 $\frac{\mu}{\rho}$ について、まず NaI 内での吸収過程で最も多いのは光電吸収だと考えられる。図 7.2 から光電効果の減衰係数を各角度のエネルギーごとに有効数字 2 桁で読み取り、結果を表 7.3 の二行目に示した。

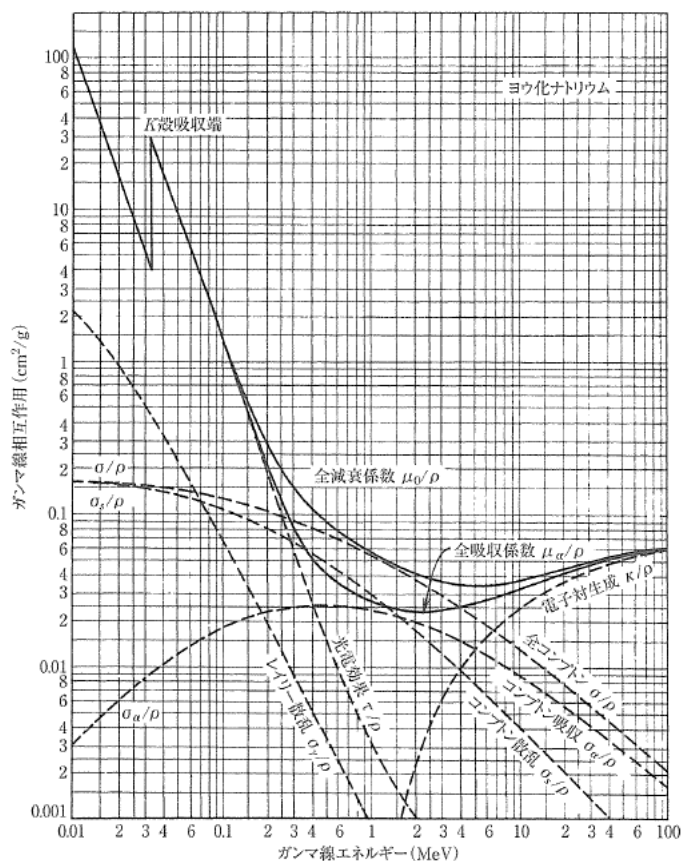


図 2.18 ヨウ化ナトリウム (NaI) の中の種々のガンマ線相互作用のエネルギー依存性。(R. D. Evans, *The Atomic Nucleus* (1955) より引用)

図 7.2: NaI の γ 線相互作用のエネルギー依存 (出典:Knoll, 放射線計測ハンドブック [1])

表 7.3: 各角度 θ での各過程の質量減衰係数: τ/ρ が光電吸収、 σ_α/ρ がコンプトン吸収の質量減衰係数である。

θ [°]	30	60	90	120	150	180
τ/ρ [cm ² /g]	0.011	0.033	0.055	0.16	0.18	0.20
σ_α/ρ [cm ² /g]	0.025	0.025	0.025	0.024	0.023	0.022

また NaI の密度は $\rho = 3.67\text{g/cm}^3$ であり、実験に用いた NaI の厚さは $l = 55.0\text{mm}$ であった。表 6.2 の N を吸収された γ 線の数と仮定して求めた N_0 で反応頻度求めた結果を図 7.3 に示した。

図 6.14 と図 7.3 を比較すると光電効果による補正によって角度が大きい領域では理論式に近づくことがわかった。一方で $\theta = 30^\circ$ の点は依然として理論式から外れ、理論式より値が大きくなった。

$\theta = 30^\circ$ で値が理論値より大きい値を取る理由として、散乱角が小さい場合にはガンマ線の持つエネルギーが大きく、NaI 内でコンプトン散乱を起こしたのちに吸収されるという過程も多く起こるためだと考えられ

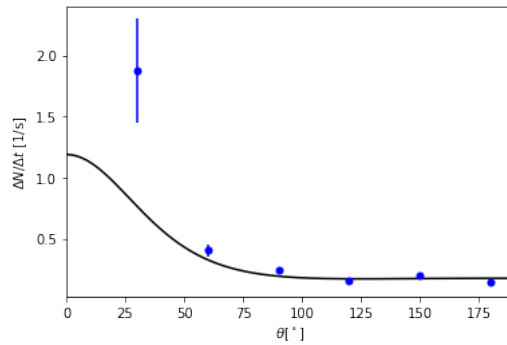


図 7.3: 光電効果による吸収を考慮した散乱断面積と理論曲線

る。図 7.2 からコンプトン吸収の質量減衰係数を読み取ると表 7.3 の三行目のようになった。
 τ/ρ と σ_{α}/ρ の和を質量減衰係数として反応頻度を計算した結果を図 7.4 に示した。

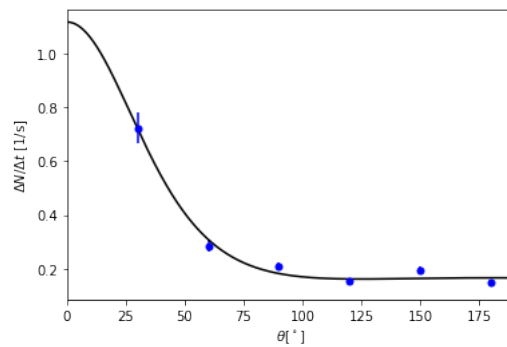


図 7.4: 光電効果とコンプトン効果を考慮した散乱断面積とプロット曲線

図 7.3 と図 7.4 を比較するとコンプトン吸収も加えた補正によって $\theta = 30^\circ$ でも理論式と近い値を取った。これらのことから今回の微分断面積測定における誤差はシンチレータの吸収効率の寄与が主であると考えられる。

8 結論

コンプトン散乱による散乱 γ 線と反跳電子のエネルギーは式 (3.5) と式 (3.6) から求めた理論値と概ね一致した。また反応頻度については、NaI シンチレータを透過した γ 線を NaI の減衰係数を用いて考慮することで Klein-仁科の式 (3.89) と近い値を取った。

謝辞

今回の実験では、教員の田島さんから実験装置のセットアップから解析の手法までさまざまな面でご指導いただきました。TA の吉田さんと佐野さんには実験や解析で手詰まった際に協力していただきました。最後にはなりますが、この場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

- [1] Glenn F. Knoll. 放射線計測ハンドブック. オーム社, 第 4 版, 2013. 神野郁夫・木村逸郎・阪井英次 訳.
- [2] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド. 素粒子標準模型入門. 丸善出版, 2013. 樺沢宇紀 訳.