

2021 年前期課題演習 A1 レポート

斉藤裕次郎・坂本遊野・清水慧人・田淵辰悟・前田潤

2021 年 10 月 13 日

目次

1	理論的背景	3
1.1	Compton 散乱とは	3
1.2	エネルギーの角度依存性	3
1.3	微分散乱断面積	3
2	実験器具・セットアップ	9
2.1	目的	9
2.2	器具	9
2.3	セットアップ	10
2.4	本実験	12
2.5	Calibration	12
3	解析	13
3.1	Calibration	13
3.2	実験データ	16
3.3	エネルギーの角度依存性	18
3.4	コンプトン散乱のデータの抽出	19
3.5	微分散乱断面積	21
4	考察	23
4.1	ヒストグラムのピークの選び方	23
4.2	エネルギーの角度依存性	24
4.3	微分散乱断面積	24
5	謝辞	31

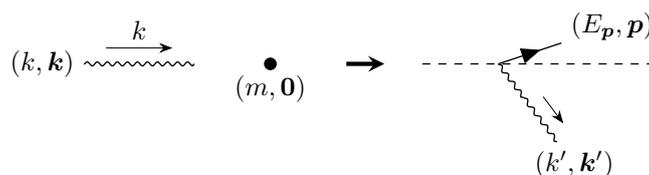
1 理論的背景

ここでは本課題演習において行い、解析した現象である Compton 散乱の理論的な扱いについて述べる。

1.1 Compton 散乱とは

Compton 散乱とは電子による光子の散乱現象を指す。古典電磁気学において光 (電磁波) は単一の荷電粒子に散乱されたとしてもその振動数は変化しない*1。しかし Compton 散乱では光子がエネルギーの一部を電子に与え、その分だけ光子のエネルギー (光の振動数) が減少する。古典電磁気学では説明できない、量子力学的効果の表れである。以降では本実験において観測した量である光子・電子エネルギーの角度依存性、及び微分散乱断面積 (計数率の角度依存性) を量子力学、場の量子論の知識を用いての理論的に導出する。2章以降でそれらの実験的検証を行う。

1.2 エネルギーの角度依存性



上図のような状況を考える。この時、運動量保存から

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{p}$$

エネルギー保存から

$$k = k' + E_p = k' + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

が成り立つ。θを \mathbf{k} と \mathbf{k}' の成す角として、これを k' について解くことにより

$$k' = \frac{k}{1 + \frac{k}{m}(1 - \cos \theta)} \tag{1}$$

を得る。すなわち散乱方向によって光子及び電子の持つエネルギーが異なる。

1.3 微分散乱断面積

以降 Compton 散乱に関わる 2 体 → n 体 散乱のみを考えることにする。

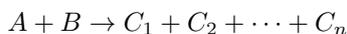
*1 単色平波が荷電粒子に入射したときの荷電粒子の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E}_0 \cos \omega t$$

のように書ける (荷電粒子は原点付近に存在し、荷電粒子の存在領域では電場は大きく空間的に変化しないとした)。これは ω で振動する解を与え、さらにそれにより角振動数 ω の光が放出される

1.3.1 散乱断面積の定義

次の反応



を考える。この時 N 回衝突が起きるとして、 A , B のビームの密度を ρ_A, ρ_B , A と B の相対速度を v_{AB} , 空間の体積を V , 時間の T の間に散乱が起きるとし、散乱断面積を σ とすると散乱断面積は次で定義される:

$$N = VT\rho_A\rho_Bv_{AB}\sigma \quad (2)$$

1.3.2 微分散乱断面積と S 行列と不変散乱振幅

衝突回数を別の観点から見てみる。状態が散乱過程を経て次のように変化したとする:

$$|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}} \rightarrow |\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n\rangle_{\text{out}}$$

ただし in, out はそれぞれ各粒子が相互作用しない程度に離れた $t \rightarrow \pm\infty$ における状態を指し、各状態を運動量でラベリングした。この時この散乱過程が起こる確率は

$$P_{k \rightarrow p} = \text{out}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}}$$

なので全散乱確率は

$$P_k = \left(\frac{2\pi}{V}\right)^2 \int d^3\mathbf{p}_1\cdots d^3\mathbf{p}_n |\text{out}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}}|^2$$

これを用いると、 A と B の粒子数はそれぞれ ρ_AV, ρ_BV だから

$$N = \rho_AV\rho_BVP_k$$

となる。従って (2) と比較して

$$\sigma = \frac{(2\pi)^6}{VTv_{AB}} \int d^3\mathbf{p}_1\cdots d^3\mathbf{p}_n |\text{out}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}}|^2 \quad (3)$$

ここで S 行列と T 行列を次で定義する:

$$\begin{aligned} S_{pk} &= \text{out}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}} \\ &= \langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n|S|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle \\ S &= 1 + iT \end{aligned}$$

また不変散乱振幅 $\mathcal{M}(\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B \rightarrow \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n)$ を T 行列を用いて次で定義する:

$$\begin{aligned} \prod_{f=1}^n \sqrt{(2\pi)^3 2E_f} \prod_{i=A,B} \sqrt{(2\pi)^3 2E_i} \langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n|iT|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle \\ = (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_A + k_B - \sum_{i=1}^n p_i \right) \cdot i\mathcal{M}(\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B \rightarrow \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n) \end{aligned}$$

この定義式を (3) に代入して計算すると

$$\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B v_{AB}} \prod_{f=1}^n \int \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} |\mathcal{M}(\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n)|^2 (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_A + k_B - \sum_{i=1}^n p_i \right) \quad (4)$$

となる。これを微分形で書けば

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B v_{AB}} \prod_{f=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} |\mathcal{M}(\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n)|^2 (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_A + k_B - \sum_{i=1}^n p_i \right) \quad (5)$$

となる。例えば散乱前後の粒子の質量がすべて等しい場合は $n = 2$ として重心系をとると (E_{cm} を重心系のエネルギーとして)

$$\int \frac{d^3 \mathbf{k}_A}{(2\pi)^3 2E_A} \frac{d^3 \mathbf{k}_B}{(2\pi)^3 2E_B} (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_A + k_B - \sum_{i=1}^n p_i \right) = \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{2|\mathbf{k}|}{E_{\text{cm}}}$$

及び

$$E_A = E_B = \frac{E_{\text{cm}}}{2}, \quad v_{AB} = \frac{|\mathbf{p}|}{E_A} + \frac{|\mathbf{p}|}{E_B}$$

から重心系における微分散乱断面積が

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}(\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rightarrow \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)|^2}{64\pi^2 E_{\text{cm}}^2} \quad (6)$$

と与えられることが分かる。さらに実験との比較を行う際には次の式が重要となる:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{\text{計数}}{\text{計測時間}}$$

1.3.3 S 行列と n 点相関関数

この節では n 点相関関数と S 行列, 散乱振幅 \mathcal{M} の関係を与える。 n 点相関関数とは考える場を実スカラー場 $\phi(x)$ とした^{*2}とき $|\Omega\rangle$ を相互作用場における真空として

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

で定義される。 T は時間順序積であり, 演算子を左に行くほど未来に作用するように順に並べる演算規則である。例えば

$$T \{ A(t_1) B(t_2) \} = \theta(t_1 - t_2) A(t_1) B(t_2) + \theta(t_2 - t_1) B(t_2) A(t_1)$$

のように作用する。ここに $\theta(t)$ は階段関数である。 S 行列とこの n 点相関関数は次の関係式で結ばれる:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_{j=A,B} \int d^4 y_j e^{-ip_j \cdot y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \phi(y_A) \phi(y_B) \} | \Omega \rangle \\ & \sim \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z} i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \prod_{j=A,B} \frac{\sqrt{Z} i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle \quad (p_i^0 \rightarrow +E_i, k_j^0 \rightarrow -E_j) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし Z は繰り込み定数^{*3}。この関係式を LSZ 簡約公式という。

^{*2} 簡単のため §1.3.5 まで実スカラー場で議論を進める

^{*3} 本レポートでは tree level までしか考えないので詳述はしない

1.3.4 相互作用描像

Heisenberg 描像において演算子の時間依存性は

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)}$$

と書ける．ここで系を記述する Hamiltonian を次のように分解する：

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

ただし H_0 は自由粒子を記述し， H_{int} は相互作用を記述する Hamiltonian であるものとする．ここで次の演算子

$$\begin{aligned} \phi_I(x) &= e^{iH_0(t-t_0)} \phi(x) e^{-iH_0(t-t_0)} \\ U_I(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \end{aligned}$$

を定義すると $\phi(x)$ の時間依存性は

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U_I(t, t_0)^\dagger \phi_I(x) U_I(t, t_0)$$

であり，さらに

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_I U_I(t, t_0) \end{aligned} \quad (8)$$

となる．ただし

$$H_I = e^{iH_0(t-t_0)} H_{\text{int}} e^{-iH_0(t-t_0)}$$

である．(8) の解は時間順序積 T を用いて

$$U_I(t, t_0) = T \left\{ e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \right\}$$

と書ける．この時 n 点相関関数は次のように書ける：

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} | 0 \rangle} \quad (9)$$

ただし $|0\rangle$ は自由場における真空である．

1.3.5 不変散乱振幅と Feynman diagram

不変散乱振幅 \mathcal{M} の定義と式 (7)(9) から

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) e^{-i \int_{-T}^T dt H_I(t)} \right\} | 0 \rangle \quad (10)$$

を調べればよいと分かる．ここでスカラー場 $\phi(x)$ は

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0 = E_{\mathbf{p}}}$$

と展開できることに注意すると、展開の多くの項は消滅演算子によって消えることが予想される。実際、具体的に 4 点関数

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}|0\rangle$$

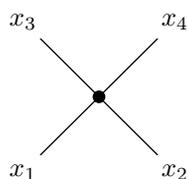
を考えてみると、最終的に残る項はスカラー場に対する Feynman Propagator, $D_F(x-y)$ ^{*4} を用いて

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}|0\rangle &= D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) \\ &\quad + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) \\ &\quad + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3) \end{aligned}$$

となる。これを (10) についても考えればよい。スカラー場を記述する Hamiltonian 密度を

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

とすると、 λ で展開することで先に述べた規則の一般化である Wick の定理を用いることが出来る。展開の各項は次のような図と対応させることができる:



これを Feynman diagram といい、これと摂動展開の各項との対応規則を Feynman rule という。様々な Feynman diagram を描くことはできるが、 \mathcal{M} と結びつけるためには (7) から外線を切断する必要がある、Wick の定理から連結な Feynman diagram だけを考えなくてはならない。さらに外線のない真空泡 diagram は (9) の分母と相殺するため考える必要はない。以上の結果から散乱振幅と diagram の関係は

$$i\mathcal{M} = (\text{連結で外線が切断された Feynman diagram の和})$$

である。右辺の計算には Feynman rule を当てはめればよい。こうして、diagram を考えて Feynman rule に当てはめるだけで \mathcal{M} を計算出来ることが分かった。同じことを Dirac 場及び電磁場についても考えてやると (つまり Dirac 場と電磁場を平面波展開し、対応する Wick の定理を用いる)、QED における Feynman rule を得ることが出来る。特に diagram に関係のある規則だけを抜き出すと次のようになる:

1. Propagators

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \hline \end{array} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \mu \text{ } \text{~~~~~} \text{ } \nu \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}$$

2. vertex

^{*4} 定義は次の通り:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \text{---} \mu \end{array} = -ie\gamma^\mu$$

3. external lines

$$\bullet \text{---} \xrightarrow{p} = u(p)$$

$$\text{---} \xrightarrow{p} \bullet = \bar{u}(p)$$

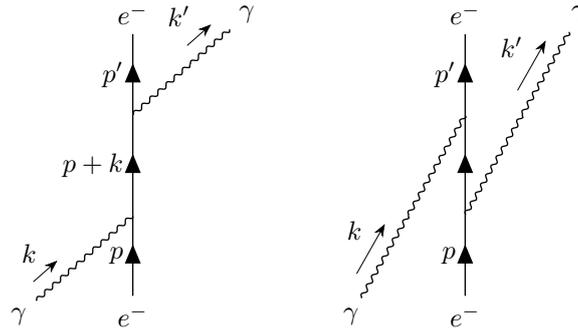
$$\bullet \text{---} \xrightarrow{q} \mu = \varepsilon_\mu^*$$

$$\mu \text{---} \xrightarrow{q} \bullet = \varepsilon_\mu$$

§1.3.6 ではこの Feynman rule を用いて散乱振幅を計算する.

1.3.6 Compton 散乱の微分散乱断面積の計算

Compton 散乱において主要となる tree diagram は以下の2つの diagram である:



それぞれの diagram に対応した \mathcal{M} は

$$i\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu^*(k')\frac{i(\not{p} + \not{k}) + m}{(p+k)^2 - m^2}(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu(k)u(p)$$

$$i\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu(k)\frac{i(\not{p} - \not{k}') + m}{(p-k')^2 - m^2}(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(k')u(p)$$

であり, 関わってくるのは

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= i\mathcal{M}_1 + i\mathcal{M}_2 \\ &= -ie^2\varepsilon_\mu^*(k')\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{p} - \not{k}' + m)\gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2}\right]u(p) \end{aligned}$$

である. 入射電子のスピンの偏極, 偏光していないものとし, 出てきた粒子も選択して観測することはないものとする, 求めるのは

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spin}}\left|\sum_{\mu,\nu}\mathcal{M}\right|^2$$

である。これを計算して本章冒頭の図のような状況において (5) に代入すると Compton 散乱における最低次での微分散乱断面積を得る:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \left[\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'} - \sin^2 \theta\right] \quad (11)$$

ただし θ は散乱が起こる軸と光子の飛んでいく方向がなす角である。これを Klein-仁科の公式といい、エネルギーの角度依存性と共に本レポートにおいて実験的な検証を行う。

2 実験器具・セットアップ

2.1 目的

本課題演習はコンプトン散乱のエネルギーと散乱頻度の角度依存性を測定することが目的である。そのために、シンチレータのからの信号とエネルギーの較正と、2つのシンチレータを用いたコンプトン散乱の測定の2つの実験を行った。

2.2 器具

本課題演習で使用した器具を以下に示す。

- 線源
 - Na²² シンチレータの較正に用いた。
 - Cs¹³⁷ シンチレータの較正、及びコンプトン散乱の測定に用いた。
- シンチレータ
 - ここではシンチレータと光電子増倍（倍増じゃないよ）管が密に接合したものを指す。
 - NaI(Tl) シンチレータ 軸が地面と平行になるように倒して使用。
 - LaBr₃ シンチレータ 地面に垂直に立てて使用。
- 鉛塊 3つ
 - 人間のスケールでは直方体に近似できる。重いので危ない。人体への害を防ぐため、取り扱う際には軍手を装着することもあった。
 - 1つ ガンマ線が明後日の方向に飛んでしまうのを防ぐ。
 - 2つ それぞれのシンチレータを固定する。
- オシロスコープ
 - シンチレータが観測する線源の波形を確認し、回路設定の調整に用いた。
- モジュール
 - 回路を組む際に用いた。
 - DIVIDER 入力と同じ信号を2つ出力する。
 - DISCRIMINATOR 閾値によって入力を矩形波に変換する。
 - COINCIDENCE 入力の論理積を出力する。
 - GATE GENERATOR 入力に反応して GATE 信号を出力する。
 - ADC Analog-to-digital Converter. 各シンチレータからの波形を積分したデータを PC 経由で出力するのに用いた。



図 1: ふいんき (ふんいきの誤り)

2.3 セットアップ

まず、観測のセットアップを述べる。

NaI シンチレータを倒して起き、その軸沿いに先端から 30cm の位置がその軸と直交するように LaBr₃ シンチレータを立てて設置する。今回は安定性向上のため LaBr₃ シンチレータをより断面積の大きいプラスチック製円筒容器内部に固定し、円筒容器を地面に垂直に立てた。線源は円盤形をしておりプラスチックの外延が半透明の面と不透明の面があるが、不透明の面が LaBr₃ シンチレータの軸から 15cm の位置に来るように設置する。面は LaBr₃ シンチレータを向くようにし、2つのシンチレータと線源がなす角度は実験内で変化させる。今回角度として用いる値は、線源から LaBr₃ シンチレータに入射したガンマ線が散乱されて NaI シンチレータに向かう際の散乱角である。従って、 $\theta=180^\circ$ のときに線源は両シンチレータの間に置かれる。線源と NaI シンチレータの間には不要な入射線を遮断するため鉛を設置するが、 $\theta=180^\circ$ の場合は不要な入射線のみを遮断できないためこの限りではない。以上に述べた装置の俯瞰図を図 2 に示す。

次に配線のセットアップを述べる。

シンチレータから出力される電気信号はまず DIVIDER によって二手に分けられる。片方はそのままデータとして用いるものでそれぞれ ADC に接続される。もう片方は DISCRIMINATOR によって入力をアリよりのアリカナシよりのアリかに分けたのち、COINCIDENCE に接続される。NaI 側は入力 A に、LaBr₃ 側は入力 C に、そして Calibration に用いる CLOCK GENERATOR からの 1kHz のパルス波を入力 B に接続し、出力を GATE GENERATOR に入力する。GATE GENERATOR の出力は、1つは DISCRIMINATOR の VETO に接続され、もう 1つは積分範囲として ADC の GATE に接続される。ADC で得られる数値はコンピュータに送られる。以上に述べた回路の概要を図 3 に示す。

図 3 で delay となっている部分は、コードの長さを延ばすことにより遅延を実現した。この遅延の目的は、シンチレータからの信号が入り始めてから DISCRIMINATOR の閾値を超えるまでに時間差があり、この間の信号を ADC でゲートの範囲内に取り入れる必要があるためである。遅延具合はオシロスコープで波形を

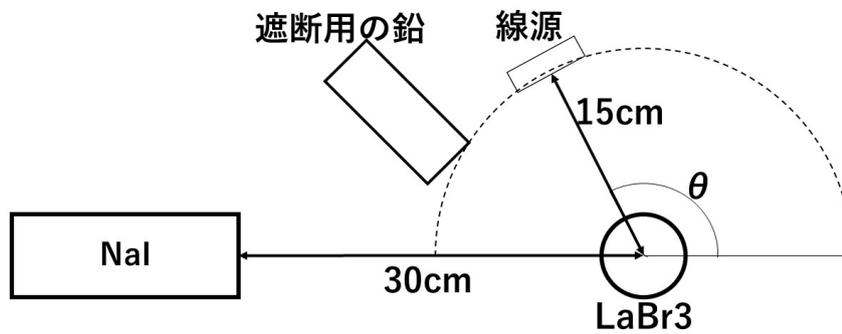


図 2: 実験器具の配置

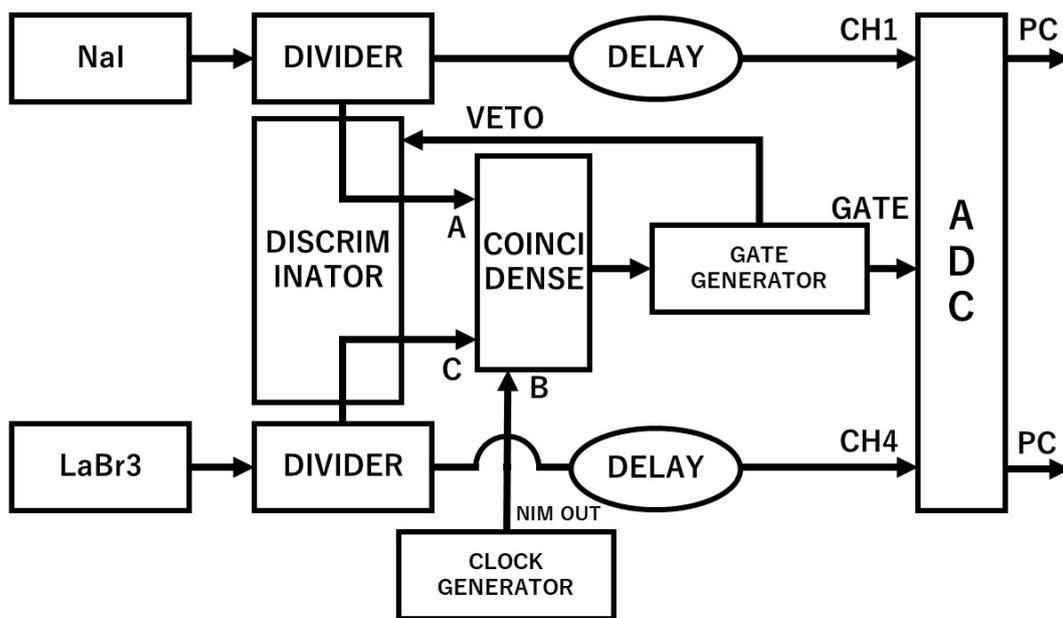


図 3: 回路図

見て、立ち上がりの部分がゲート信号に完全に含まれるように設定した。ここで、GATE GENERATOR のゲートの幅はオシロコップで波形を見て線源による波形が収まる範囲を設定し、DISCRIMINATOR の閾値はオシロスコープで波形を観察しつつ放射線を検出しているときのみ 1 となることを確認して 6mV に設定した。

2.4 本実験

2.4.1 原理

本実験における反応の概略を以下に示す。

1. LaBr_3 シンチレータに入射したガンマ線がコンプトン散乱を起こし、一部が NaI シンチレータの方向へと散乱する。
2. NaI シンチレータに入射したガンマ線が光電吸収を起こす。
3. 1., 2. によって与えられた電子エネルギーとほぼ線形の関係にある電流が回路に流れる。

この電流のイベント毎の積分データを ADC を介して 5000 イベント分を数値として取り出し、Calibration の結果を用いてエネルギーの値に変換する。

2.4.2 手順

Cs_{137} 線源を用いて $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ の各値についてコンプトン散乱の測定を行った。個々の測定の手順は以下の通りである。

1. COINCIDENCE モジュールで、入力 A と C を ON、B を OFF にする。
2. PC の画面で instance を 5000 に設定し、enter キーを押す。
3. 機械が正気を失っていないことを信じてひたすら待つ。

2.5 Calibration

2.5.1 原理

既知のエネルギーの線源 (pedestal:0keV, Na_{22} :511keV, Cs_{137} :661.7keV) を用いて ADC の数値とエネルギーとの対応関係を求める。各測定の反応の概略を以下に示す。

- Pedestal

1. 環境放射線が入射する。
2. 放射線に全然関係ないタイミングで GATE を開く。

こうして 0keV のエネルギーに対応する ADC の数値を、両シンチレータ同時に得ることができる。

- Na_{22}

1. β^+ 崩壊によって生じた陽電子の消滅 γ 線 (511keV) が back-to-back に放射される。
2. 一方が NaI シンチレータに、もう一方が LaBr_3 シンチレータに同時に入射する。
3. 同時に入射したタイミングで GATE を開くことで、消滅 γ 線による信号のみを得る。

こうして 511keV のエネルギーに対応する ADC の数値を、両シンチレータ同時に得ることができる。

- Cs_{137}

1. Cs_{137} が β 崩壊により Ba_{137} の準安定同位体になり、 γ 線 (661.7keV) を放出して Ba_{137} になる。
2. γ 線が片方のシンチレータに入射する。
3. 片方のシンチレータに入射したタイミングでゲートを開く。

こうして片方のシンチレータについて 661.7keV のエネルギーに対応する ADC の数値を得ることがで

LaBr ₃ シンチレーター較正結果				
対応する実験の散乱角 (degrees)	傾き	傾きの誤差範囲	切片	切片の誤差範囲
30	3.78×10^{-1}	-3.37×10	1.32×10^{-4}	1.48×10^{-1}
45	3.70×10^{-1}	-3.08×10	1.22×10^{-4}	1.39×10^{-1}
60	3.68×10^{-1}	-3.55×10	1.25×10^{-4}	1.45×10^{-1}
90	3.67×10^{-1}	-3.50×10	1.10×10^{-4}	1.27×10^{-1}
120	3.66×10^{-1}	-3.52×10	1.09×10^{-4}	1.27×10^{-1}
150	3.66×10^{-1}	-3.51×10	1.12×10^{-4}	1.30×10^{-1}
180	3.67×10^{-1}	-3.53×10	1.14×10^{-4}	1.32×10^{-1}

表 1: LaBr₃ シンチレーター較正結果 (テーブル)

きる。これをシンチレータを入れ替えてもう 1 度行う。

これらの値を得たのち、ADC の数値とエネルギーの数値に線形の関係を保定し、前者から後者を得る数式を導出する。

2.5.2 手順

エネルギーと ADC 値の対応関係は、室温などの条件によって変化することが考えられる。従って、本実験を $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ の各値に対して行う毎に、その直前に Calibration 用の測定を行った。線源を用いる測定では (則ち pedestal 以外)、線源を $\theta=180^\circ$ の位置に置いた。個々の測定の手順は以下の通りである。

- 測定対象 (及びシンチレータ) に応じて COINCIDENCE モジュールの入力を設定する。
pedestal A と C を OFF に、B を ON に設定。
Na22 A と C を ON に、B を OFF に設定。
Cs22(NaI) C と B を OFF に、A を ON に設定。
Cs22(LaBr₃) A と B を OFF に、C を ON に設定。
- PC の画面上で instance を 10000 に設定し、enter キーを押す。
- 再び機械が正気を失っていないことを信じて待つ。

3 解析

3.1 Calibration

まず、実験で得られる ADC の値をエネルギーの値に変換するために ADC の値とエネルギーの値の関係を求める。そのために ADC の値を y 、エネルギーを x として $y = ax + b$ という線形関係を仮定して、pedestal (0) と、エネルギーが分かっている Na²² の 511 の光と Cs¹³⁷ の 662 の光の ADC の値から最小二乗法で求める。Calibration は室温などの影響によって変わるので角度ごとに行う。以下に Calibration の結果を示す。

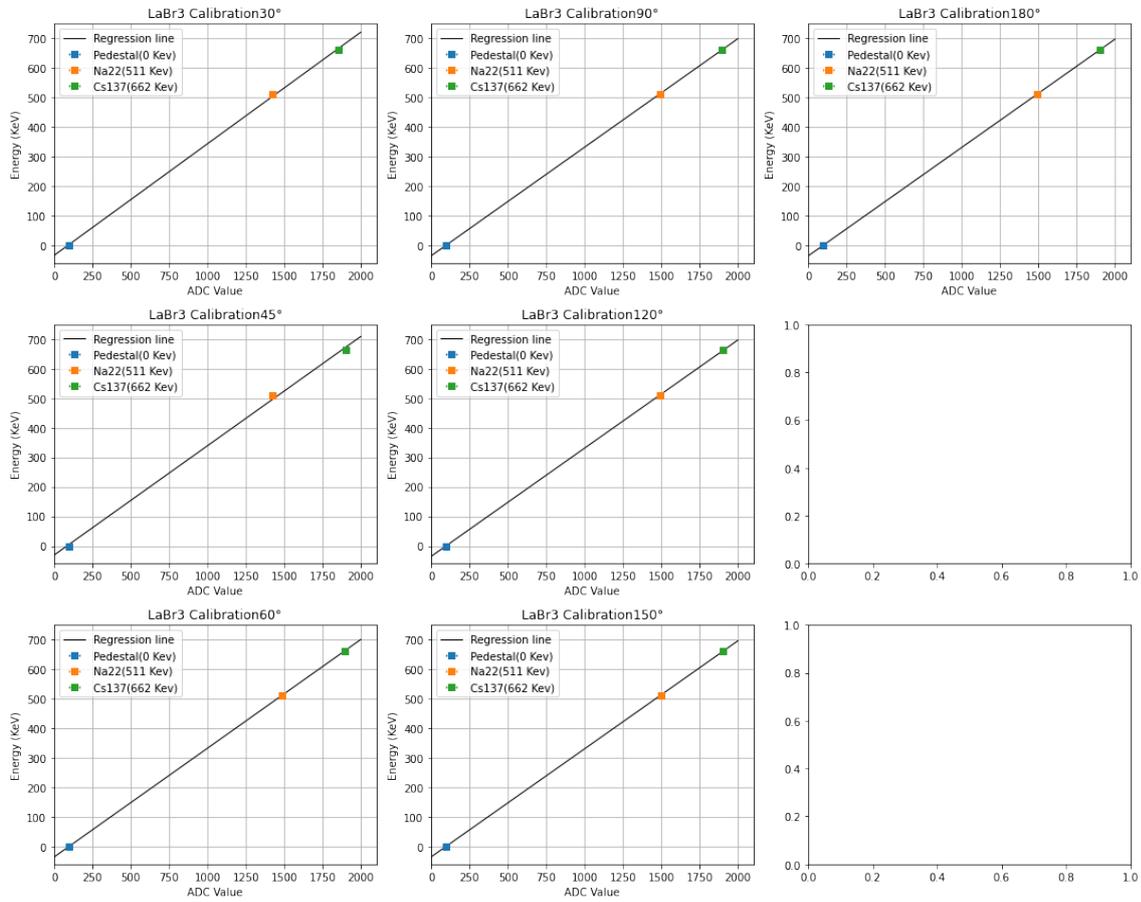


図 4: LaBr3 シンチレーター較正結果 (グラフ)

NaI シンチレーター較正結果				
対応する実験の散乱角 (degrees)	傾き	傾きの誤差範囲	切片	切片の誤差範囲
30	3.85×10^{-1}	-3.72×10	1.72×10^{-4}	1.92×10^{-1}
45	3.81×10^{-1}	-3.61×10	1.70×10^{-4}	1.91×10^{-1}
60	3.77×10^{-1}	-3.74×10	1.71×10^{-4}	1.94×10^{-1}
90	3.82×10^{-1}	-3.74×10	1.73×10^{-4}	1.94×10^{-1}
120	3.81×10^{-1}	-3.80×10	1.77×10^{-4}	2.00×10^{-1}
150	3.80×10^{-1}	-3.78×10	1.72×10^{-4}	1.94×10^{-1}
180	3.77×10^{-1}	-3.75×10	1.67×10^{-4}	1.90×10^{-1}

表 2: NaI シンチレーター較正結果 (テーブル)

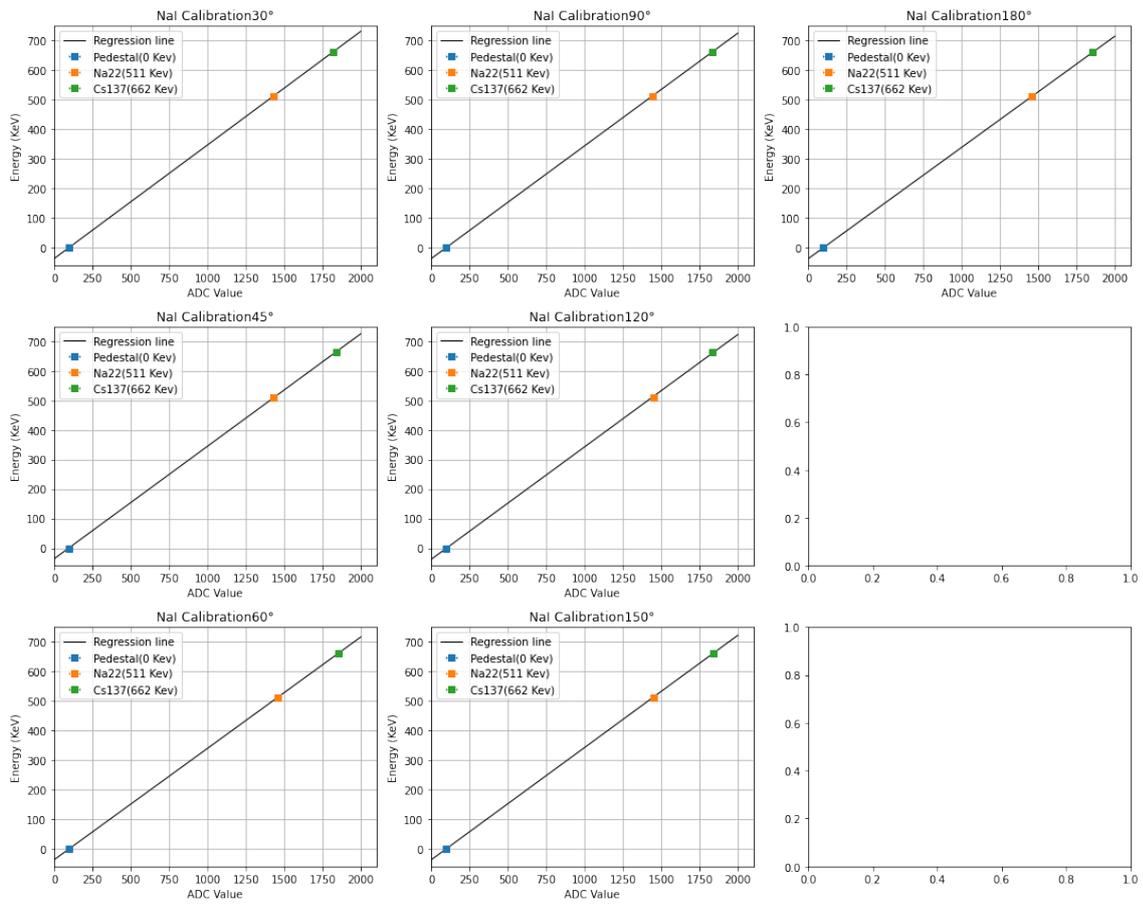


図 5: NaI シンチレーター較正結果 (グラフ)

3.2 実験データ

以下に、散乱角 $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ の NaI シンチレーターと LaBr_3 シンチレーターの計測したデータを、上の較正結果に従い、エネルギーに変換して、各シンチレーターで、それぞれ計測された反応のエネルギー分布 (図 6 の Cs137 θ :NaI, Cs137 θ :LaBr₃) と、各シンチレーターで同時に計測された、それぞれのエネルギーの合計の分布 (図 6 の Cs137 θ :Goukei) を、ヒストグラムにして示す。また、各シンチレーターで同時に計測されたエネルギーの散布図を示す (図 6 の Cs137 θ :Scatter plot)。

また、各ヒストグラムのピーク (NaI シンチレーターのデータなら光電ピーク, LaBr_3 シンチレーターのデータならコンプトンピーク) にフィッティングさせたガウス分布を重ねてプロットしている。フィッティングの仕方としては、目視でヒストグラムの求めたいピークが含まれると思われる範囲を決め、そこからデータを抽出して、そのデータを Python のライブラリにガウス分布を近似してもらうという具合である。

複数の顕著なピークが現れるヒストグラムにおける、光電ピークやコンプトンピークの選び方の妥当性については次章「考察」で検討する。

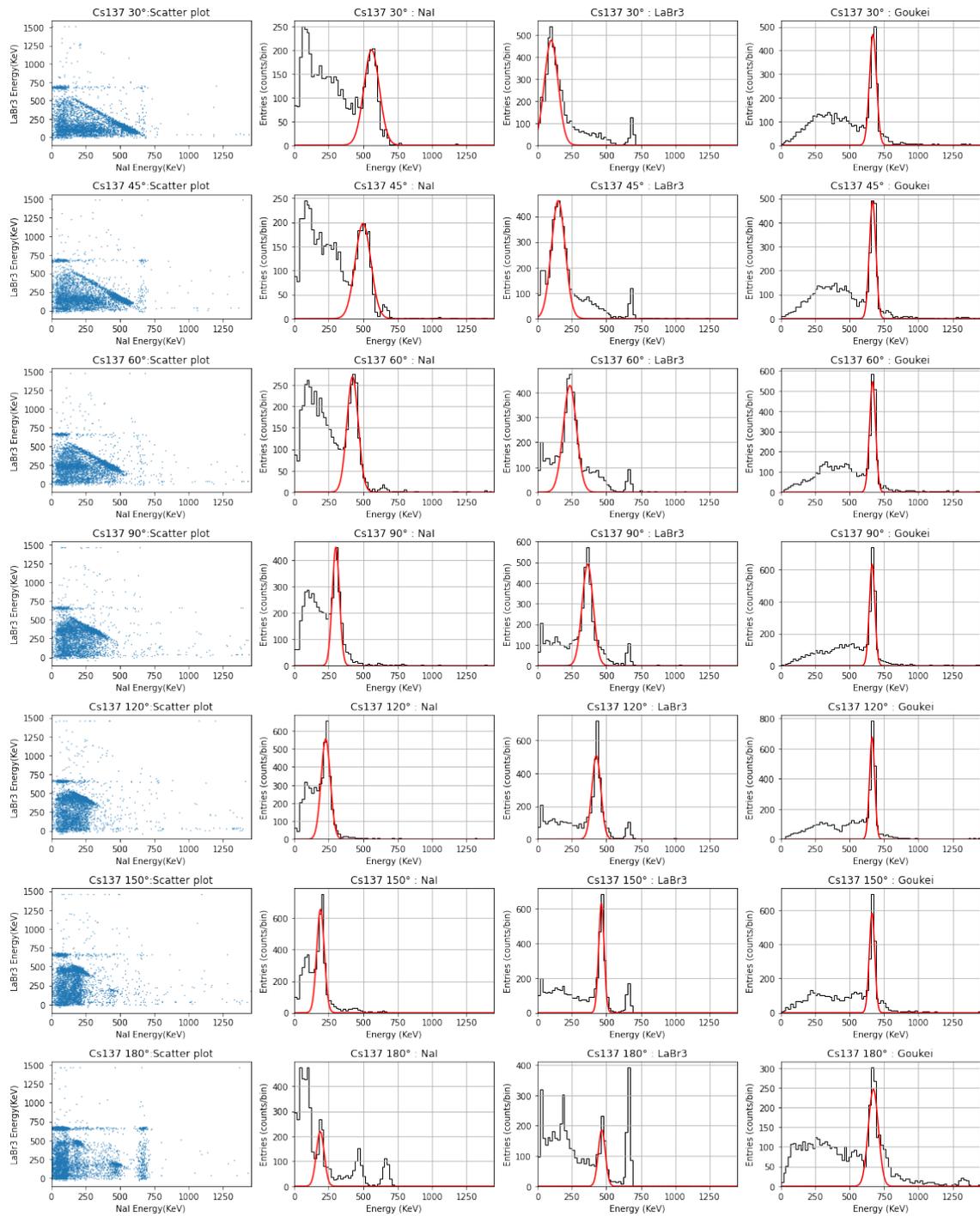


図 6: 実験データ (各種グラフ)

3.3 エネルギーの角度依存性

下の図 7 に各散乱角のistogramのピークのエネルギーの分布を示す。ただし、図 7 の”Measured value(Labr3)”と”Measured value(NaI)”はそれぞれ、前節の図 6 の”Cs137 θ :NaI”と”Cs137 θ :LaBr₃”のピークのエネルギーからとっているが、”Measured value(Total energy)”は”Measured value(Labr3)”と”Measured value(NaI)”の和であり、”Cs137 θ :Goukei”からとっているわけではない。

NaI シンチレータのデータのピークのエネルギーは散乱後の光のエネルギー、LaBr₃ シンチレータのデータのピークのエネルギーは電子のエネルギーを表しているので、理論的には、NaI シンチレータのエネルギーは第 1 章の (1) 式に従い、二つのエネルギーの和は入射光のエネルギーである 662 に等しくなる。理論値は実線で表している。

誤差はピークに近似させたガウス分布の平均値の統計誤差に加え、較正の誤差も考慮するように評価する。”Measured value(Labr3)”と”Measured value(NaI)”のデータ点において、誤差 σ は、較正から得た回帰直線の傾きとその誤差を a と σ_a 、切片とその誤差を b と σ_b とし、エネルギーとエネルギーに変換する前のデータを E と X 、フィッティングしたガウス分布の標準偏差と分布に含まれるデータ点の数を σ_{gaussian} と N とし、以下のように評価した。

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{gaussian}}}{\sqrt{N}}\right)^2 + (X\sigma_a)^2 + \sigma_b^2} \quad (12)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{gaussian}}}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left\{\left(\frac{E-b}{a}\right)\sigma_a\right\}^2 + \sigma_b^2} \quad (13)$$

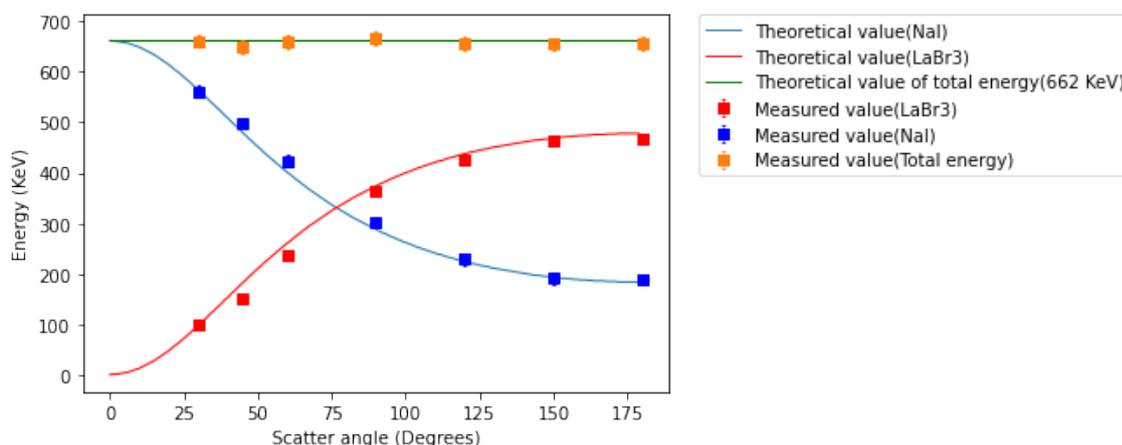


図 7: エネルギーの角度依存性

LaBr ₃ コプトンピークのエネルギー			
散乱角 (degrees)	理論値 (KeV)	測定値 (KeV)	理論値と測定値のずれ (KeV)
30	97.9	99.5 ± 0.9	1.6
45	182.1	150.8 ± 0.9	31.3
60	260.2	235.3 ± 0.9	24.9
90	373.6	364.5 ± 0.8	9.1
120	437.1	427.7 ± 0.7	9.4
150	468.3	464.3 ± 0.5	4.0
180	477.7	467.3 ± 1.0	10.4

表 3: LaBr₃ コプトンピークのエネルギー

NaI 光電ピークのエネルギー			
散乱角 (degrees)	理論値 (KeV)	測定値 (KeV)	理論値と測定値のずれ (KeV)
30	564.1	561.7 ± 1.4	2.4
45	480.0	499.5 ± 1.5	19.5
60	401.8	423.6 ± 1.1	21.8
90	288.4	302.3 ± 0.7	13.9
120	224.9	228.6 ± 0.7	3.7
150	193.7	190.8 ± 0.6	2.9
180	184.3	188.8 ± 1.0	4.5

表 4: NaI 光電ピークのエネルギー

3.4 コプトン散乱のデータの抽出

微分散断面積はコプトン散乱が起こった回数を計測時間で割ることで求められる。しかし、上のヒストグラムのピークには環境放射線などにより生じるノイズも含まれているため、コプトン散乱によるデータだけを取り出すことが重要になる。コプトン散乱では衝突後の電子のエネルギーと光のエネルギーの和が一定（入射光のエネルギー）となるので、図 6 の散布図においてコプトン散乱のデータは、散布図を縦軸 y 横軸 x の二次元平面とすると、 $x + y = \text{一定}$ の直線上にあると考えられる。そこで、 $x + y = \text{一定}$ の直線上のエネルギーピーク付近の点が集中する領域に範囲を絞ることによってコプトン散乱のデータだけを取り出すことができる。

各角度において、コプトン散乱のデータの合計エネルギー（図 6 の Cs137 θ :Goukei のピークから求めたもの）、NaI シンチレータで計測されたエネルギー、LaBr₃ シンチレータで計測されたエネルギーをそれぞれ $E, E_{\text{NaI}}, E_{\text{LaBr}_3}$ とおいて、それらの分布に近似した、ガウス分布の標準偏差をそれぞれ、 $\sigma, \sigma_{\text{NaI}}, \sigma_{\text{LaBr}_3}$ とおく。散布図において、次の範囲

$$\begin{cases} |x + y - E| \leq 3\sigma \\ |x - E_{\text{NaI}}| \leq 3\sigma_{\text{NaI}} \\ |y - E_{\text{LaBr}_3}| \leq 3\sigma_{\text{LaBr}_3} \end{cases} \quad (14)$$

を満たすような点をコンプトン散乱によるデータとみなし、微分散乱断面積を求めるに利用する。

このように絞った範囲に含まれるデータの LaBr₃ シンチレータで計測されたエネルギーと, NaI シンチレータで計測されたエネルギーは, それぞれ, コンプトン散乱によって散乱された電子のエネルギーと, 散乱されて光電吸収された光子のエネルギーである可能性が高いため, コンプトン散乱がおこったことを示すデータである可能性は高い. しかし, すべてのコンプトン散乱において, 散乱された電子が LaBr₃ シンチレータに吸収され, 散乱された光子が NaI シンチレータに吸収されるとは限らない. そのため範囲の取り方や, データの扱い方には議論の余地がある. これについては次章「考察」で検討する.

例えば, 散乱角 60 度のデータにおいては, 下の図のようにして, 赤線に囲まれた領域をコンプトン散乱によるデータとみなした。

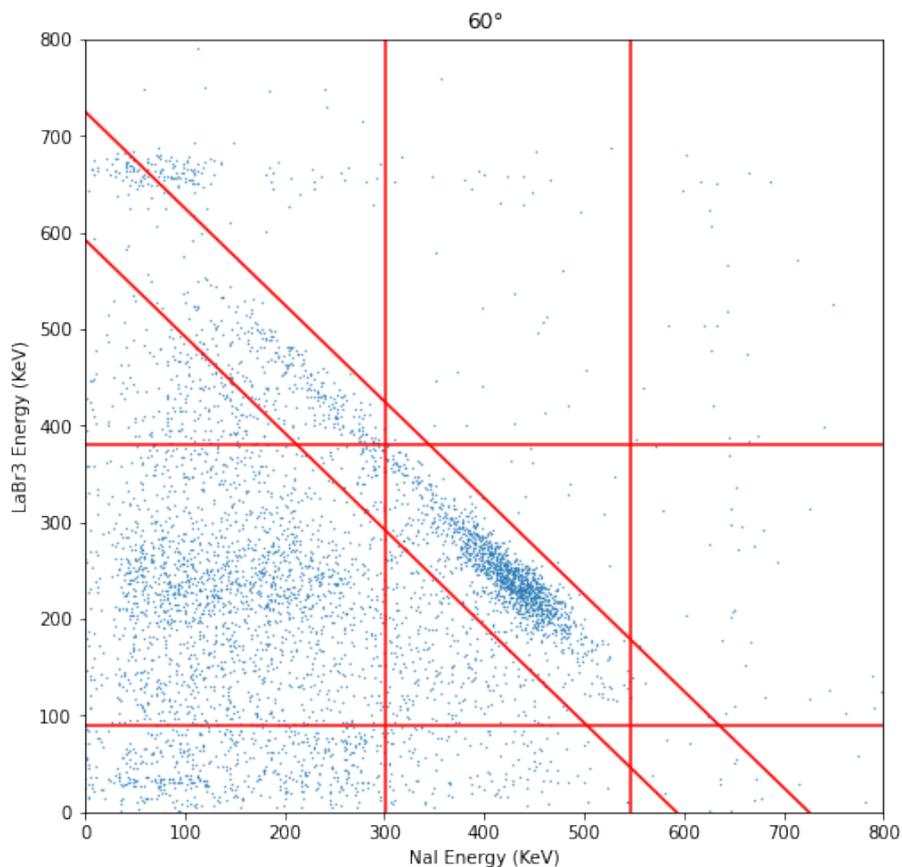


図 8: コンプトン散乱のデータの抽出の例 (60°)

コンプトン散乱によるデータとみなしたデータのみのプロットされた散布図を以下に示す。

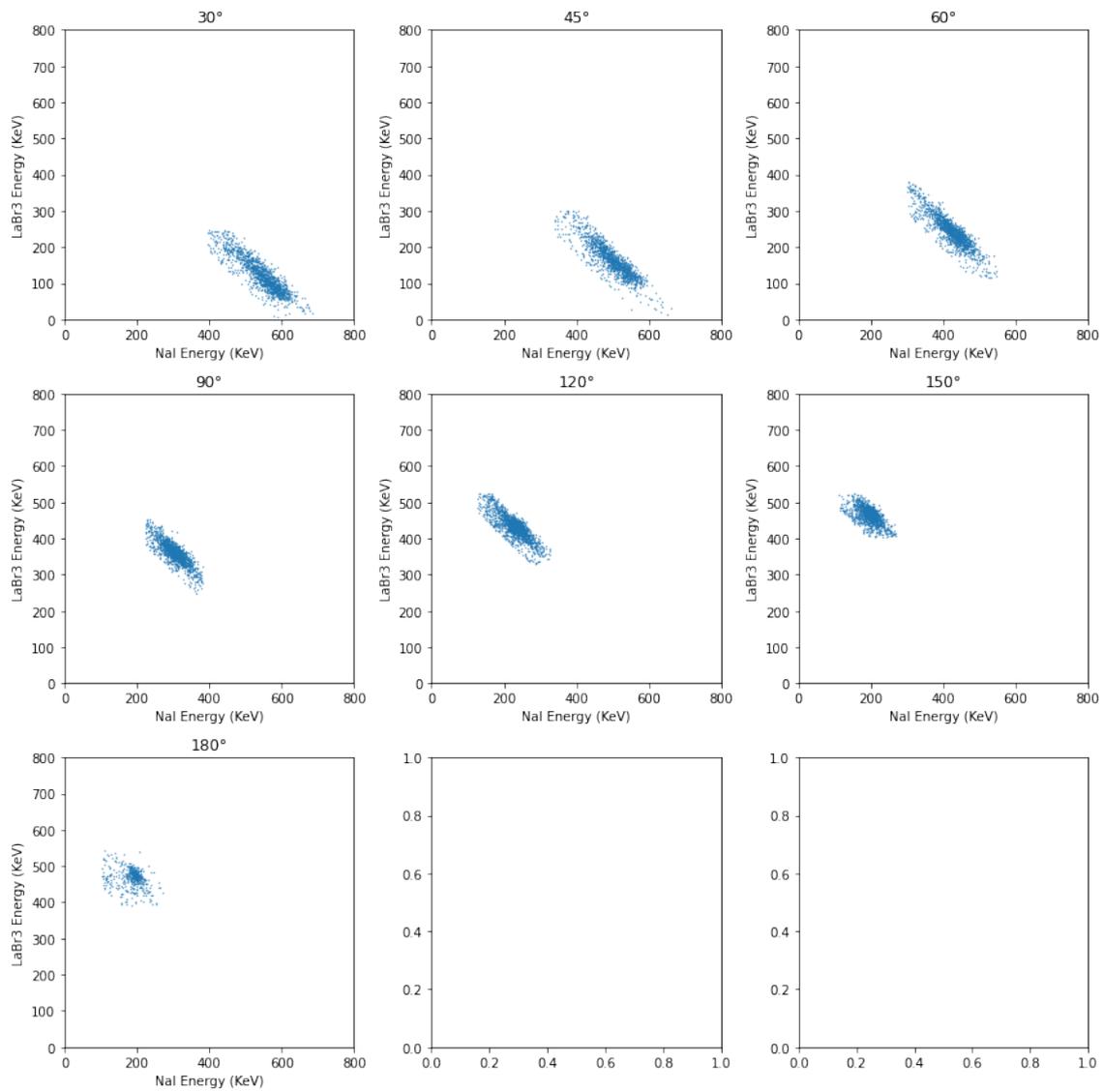


図 9: 各散乱角のコプトン散乱によるデータの散布図

3.5 微分散乱断面積

前節で決めた範囲に含まれたデータの個数がコプトン散乱がその散乱角で起こった回数とみなし、その回数を計測時間で割ることによって微分散乱断面積を求める。

散乱角 (degrees)	データの個数 (回数)	計測時間 (秒)	微分散乱断面積 (回数/秒)
30	1366	851.649	1.604
45	1326	870.108	1.524
60	1387	1265.484	1.096
90	1484	1801.818	0.824
120	1832	1937.828	0.945
150	1535	1665.899	0.921
180	489	452.832	1.080

表 5: 微分散乱断面積の計測データ

理論的には、コンプトン散乱の微分散乱断面積はクライン仁科の式 (理論的背景の (11) 式) に従う。

LaBr₃ シンチレーターで散乱されて、NaI シンチレーターに入ったガンマ線はすべて光電吸収されるという仮説のもとで計数を求めているが、実際は、散乱光が光電吸収される確率は散乱角に依存する。散乱角 180° のとき、散乱光はエネルギーが最も低くなり、光電吸収される確率が最も高くなる。そのため、測定値と理論が最もよく整合するのは散乱角 180° のときであることが想定される。

そのため、測定値と理論の比較の際は、散乱角 180° の測定値に一致するように、理論値に係数をかける。

以下は計測により求めた反応頻度に、クライン仁科の式を 180 度のデータに合わせたグラフである。

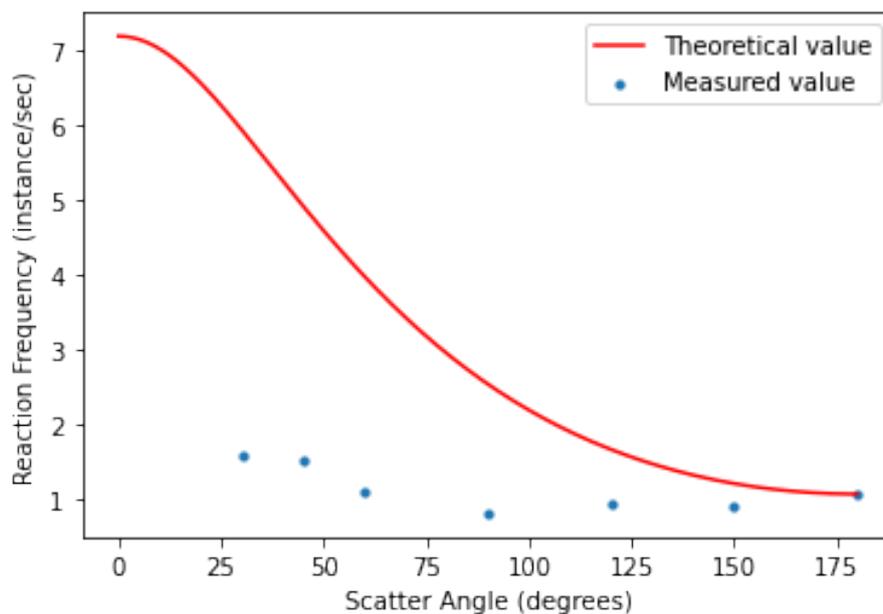


図 10: クライン仁科の式を 180 度のデータに合わせたグラフ

理論上、コンプトン散乱の散乱角ごとの反応頻度 (微分断面積) はクライン仁科の式に比例するはずである。しかし、上の図を見ての通り、測定値は理論値の定数倍にはなっていない。より深い考察は「考察」で行う。

4 考察

4.1 ヒストグラムのピークの選び方

図 6 のヒストグラムから目視で決めたピークのエネルギーが、コンプトン散乱された電子のエネルギーであるなり、光子のエネルギーであるなりとした。ここでそのピークの決め方の妥当性を検討する。

回路を図 3 のようにしていたので、 LaBr_3 シンチレーターに 662KeV のガンマ線が入射し、それが散乱され NaI シンチレーターに吸収されるといった、ほぼ同時に両シンチレーターで検知される反応が測定データに顕著に表れることが想定される。また、測定では、器具の位置を図 2 のようにして、固定していたので、 LaBr_3 シンチレーターが検出したコンプトン散乱された電子のエネルギー、 NaI シンチレーターが検出した散乱された光のエネルギーは、各測定においておおよそ一定であるはずである。よって、 LaBr_3 シンチレーターから得たデータにはコンプトンピークが顕著にあらわれ、 NaI シンチレーターでは光電ピークが顕著にあらわれるはずである。

よって、図 6 の LaBr_3 , NaI シンチレーターのヒストグラムにおいて、下のヒストグラムのように顕著なピークが一つしかない場合、それをコンプトンピーク、光電ピークと断定するには一定の妥当性があるといえる。

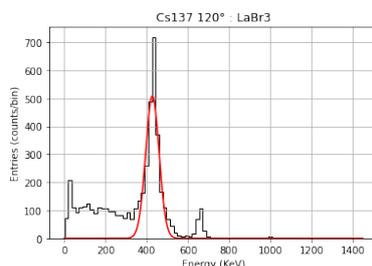


図 11: LaBr_3 , 散乱角 120°

高エネルギー域に鋭いピークと、低エネルギー域に広がりを持ったピークを示す次のような場合もあった。

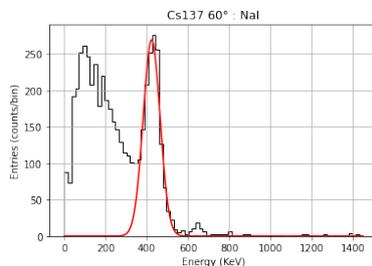


図 12: NaI , 散乱角 60°

このパターンは主に NaI のデータに見られる。 LaBr_3 で散乱された光子が NaI に飛び込んだ際に起こりうる相互作用は主に、光電吸収かコンプトン散乱の二択である。光電吸収の場合、文字通りすべての光子のエネルギー

ギーが吸収され、検出される。コンプトン散乱の場合は散乱される二つの粒子で、散乱前の光子のエネルギーをわけることになるので、検出されるエネルギーは少なくなる。以上の理由からこのパターンのヒストグラムにおいて、高エネルギーのピークが光電吸収によるもので、低エネルギーの盛り上がりはコンプトン散乱によるものということができる。よって、このパターンの NaI シンチレーターのヒストグラムにおける光電ピークを選び方としては、高エネルギーのピークを選べばよいと言える。

散乱角 180° のヒストグラムは次のような具合でいくつものピークがあるように見える。

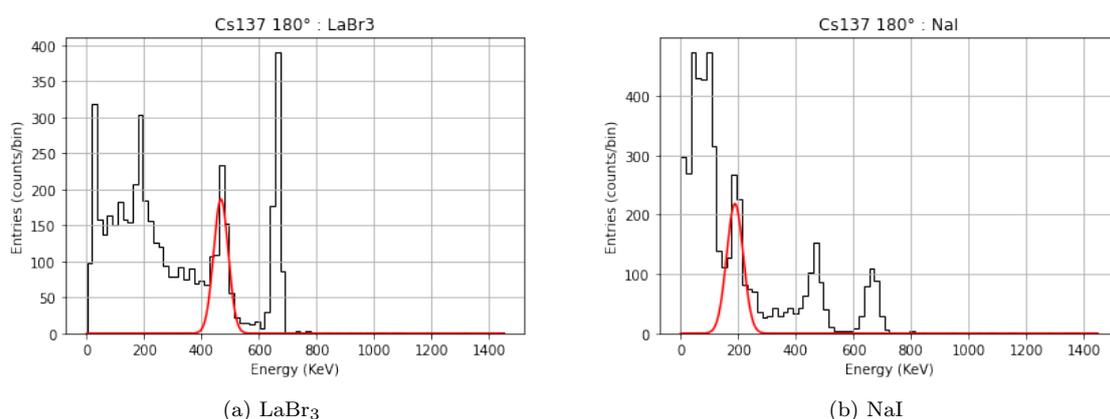


図 13: 散乱角 180°

図 2 から確認できるように散乱角 180° の計測は、両シンチレーターの間に線源が置かれるという配置で行われる。そのため、各シンチレーターに入射するガンマ線のパターンは、線源から放射されたガンマ線が直接入射するパターンと、片方のシンチレーターでコンプトン散乱が起こり、散乱光が入射するパターンの二つが存在する。他の散乱角の測定では図 2 のように遮蔽用の鉛を配置するので、各シンチレーターに入射するガンマ線のパターンは、主に前述のパターンのうちのどれか一つだけとなる。それが原因で散乱角 180° のヒストグラムは他のヒストグラムと比べ、多くのピークが現れる。

エネルギーの角度依存性から、ピークに対応する相互作用は、大きいピークから順に、線源から放射されたガンマ線の光電吸収、線源から放射されたガンマ線のコンプトン散乱、散乱されたガンマ線の光電吸収、X 線等の相互作用、だと思われる。

4.2 エネルギーの角度依存性

解析において、フィッティングしたガウス分布の標準偏差 σ_{gaussian} を用いて $1\sigma_{\text{gaussian}}$ の精度でエネルギーを求めている。図 7 では、実験値の 68% 程度が誤差も含めて理論値と一致しているので、コンプトン散乱におけるエネルギーの角度依存性は式 (1) に従うということが実験的に確認できた。

4.3 微分散乱断面積

図 2 が示すように、線源と LaBr₃ シンチレーターの距離は概ね一定にして計測を行っていたので、「データの個数/計算時間」で得た反応頻度は、クライン仁科の式の定数倍になるはずである。図 10 からわかるように、計測値はクライン仁科の式の定数倍になっていない。計測時間に問題はないとすると、計測値と理論の不整合は、

コンプトン散乱の計数が正確に評価できていないことが原因だということになる。

「解析」では、 $\text{NaI Energy} + \text{LaBr}_3 \text{ Energy} = \text{Constant}$ となるような範囲から、コンプトン散乱によるデータとみなす範囲を決め、そこからデータを取り出した。

これは、 LaBr_3 シンチレーターで散乱されて、 NaI シンチレーターに入ったガンマ線はすべて光電吸収されるという仮説を前提としている。この仮説が現実と乖離していることが、コンプトン散乱の計数が正確に評価できていない原因だと思われる。

このことを検証するために、次の三つのアプローチを検討する。

1. 散布図からのデータの取り出し方（「解析」(14)式）の変更。
2. 計数の補正。
3. 理論式の補正。

1. 散布図からのデータの取り出し方の変更。

「解析」の(14)式を次のような範囲と取り換える。

$$\begin{cases} x + y - E \leq 3\sigma \\ |y - E_{\text{LaBr}_3}| \leq 3\sigma_{\text{LaBr}_3} \end{cases} \quad (15)$$

例として、散乱角 60° 、次の図の3つ赤線に囲まれた領域に含まれるデータの個数をコンプトン散乱の計数とする。

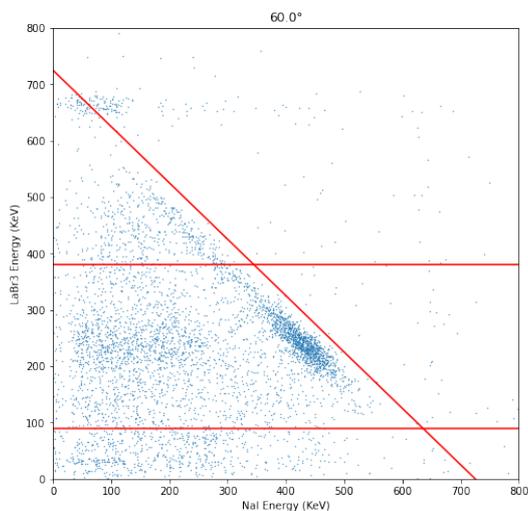
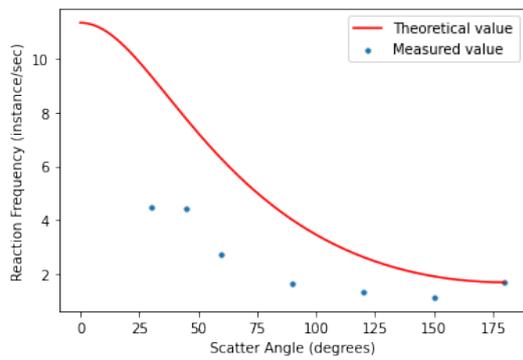
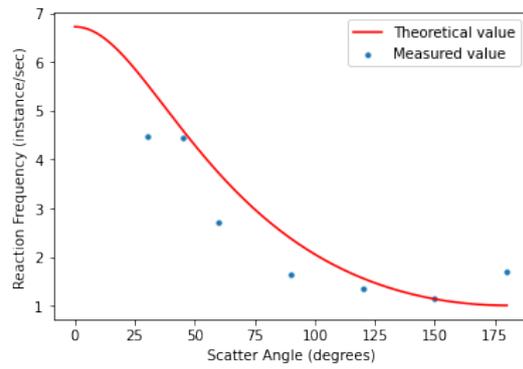


図 14: コンプトン散乱のデータの抽出の例 (60°)

この範囲の取り方は、 LaBr_3 シンチレーターのヒストグラムのコンプトンピーク周辺のすべてのデータの個数を、その散乱角におけるコンプトン散乱の計数とみなすこととおおよそ同義である。このように計数を取った場合、測定値の微分断面積と理論の比較は次のグラフのようになる。



(a) 理論値を 180° のデータに合わせたもの



(b) 理論値を 150° のデータに合わせたもの

図 15: 微分散乱断面積考察アプローチ (1)

いずれも、「解析」での結果よりかは、測定値が理論値に近づいていることがわかる。ただ、「理論値を 180° のデータに合わせたもの」より「理論値を 150° のデータに合わせたもの」のほうが、目で見える限りよい結果となっている。なんらかの理由で散乱角 180° の計数に余計なデータが含まれている可能性を示している。

2. 計数の補正.

NaI 中で起こるガンマ線の相互作用のエネルギー依存性, つまり, あるエネルギーを持ったガンマ線が NaI に入射したとき, コンプトン散乱, 光電吸収などが, それぞれおおよそどれくらいの確率で起こるかがわかる. このアプローチでは, 支配的な相互作用の種類は, コンプトン散乱と光電吸収の 2 種類であること, 「解析」で得た計数は散乱光が NaI で光電吸収された回数であること, 以上の二つの仮説のもとで, NaI 中で起こるガンマ線の相互作用のエネルギー依存性を用いて, 正確にコンプトン散乱の計数を評価することを目指す.

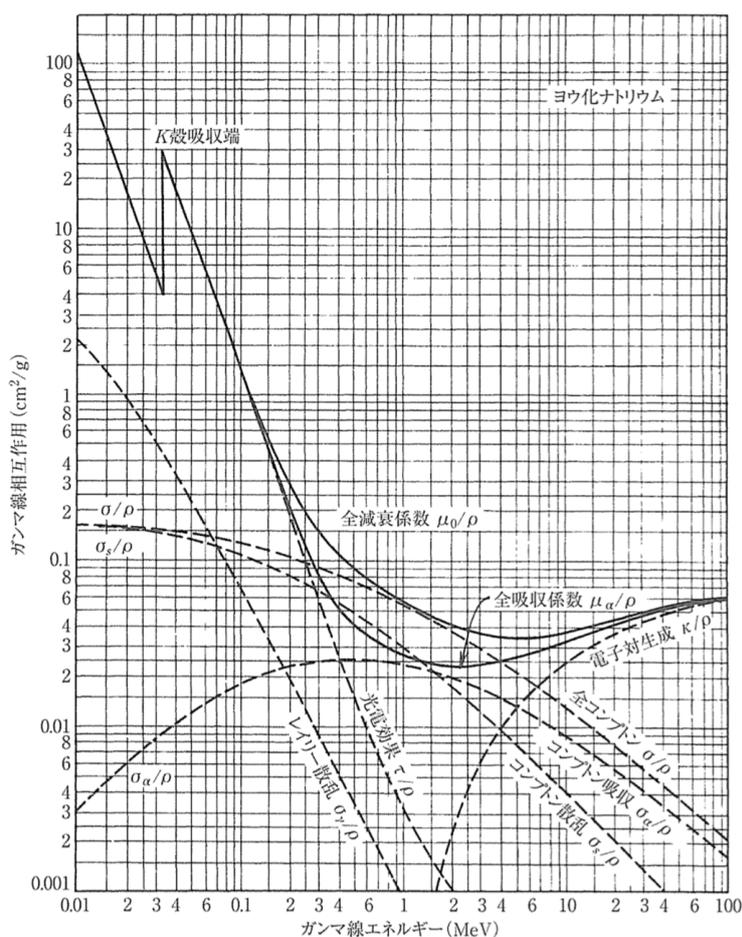


図 2.18 ヨウ化ナトリウム (NaI) 中の種々のガンマ線相互作用のエネルギー依存性. (R. D. Evans, *The Atomic Nucleus* (1955) より引用)

図 16: NaI 中で起こるガンマ線の相互作用のエネルギー依存性 (G. F. Knoll 『放射線計測ハンドブック』より引用)

上の図の「光電効果」と「全コンプトン」の「ガンマ線相互作用」をそれぞれ, ρ と σ とする. 前述の仮説のもとでは, コンプトン散乱の計数は,

$$\text{「解析」で得た計数} \times \frac{\sigma + \rho}{\rho} \tag{16}$$

になるはずである。

図 16 からできる限り値を正確に読み取って、(16) 式のように係数を求めて、他の手法と同様に 180° のデータに理論値を合わせて比較すると次のようになる。

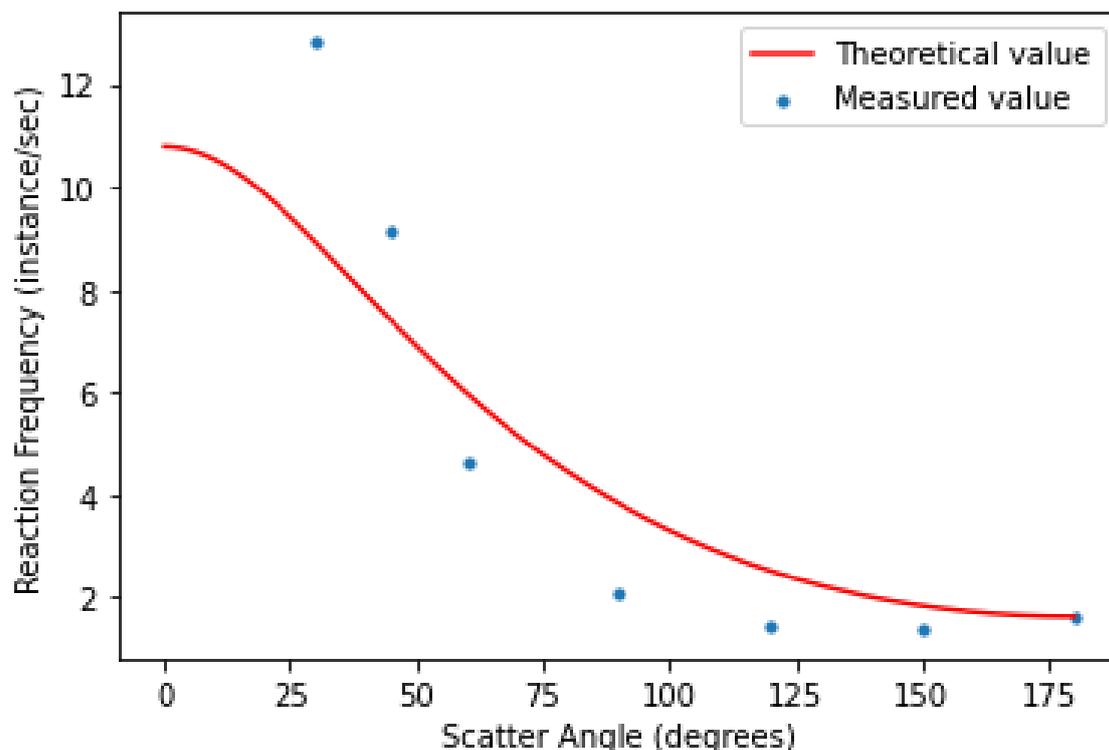


図 17: 微分散乱断面積考察アプローチ (2)

3. 理論式の補正.

LaBr₃ シンチレーターでコンプトン散乱をしたガンマ線が LaBr₃ シンチレーター内で、ふたたび反応を起こす確率や NaI シンチレーターで反応を起こさない確率を考慮して、理論式の補正を行う。ここで、コンプトン散乱前のエネルギーを $E_0=661.7\text{keV}$ 、コンプトン散乱後のエネルギーを E_1 、単位長さあたりでの、NaI でのコンプトン散乱の確率を p 、光電吸収の確率を q 、LaBr₃ でのコンプトン散乱の確率を P 、光電吸収の確率を Q とする。また、LaBr₃ シンチレータの半径を $r=2.6\text{cm}$ 、NaI シンチレータの厚さを $d=4.3\text{cm}$ とする。このとき、図 18 のように、 $x\sim x+dx$ に入射した光子が、 $y\sim y+dy$ で θ 方向へコンプトン散乱し、NaI で反応を起こす確率は以下の積の定数倍であると考えられる。

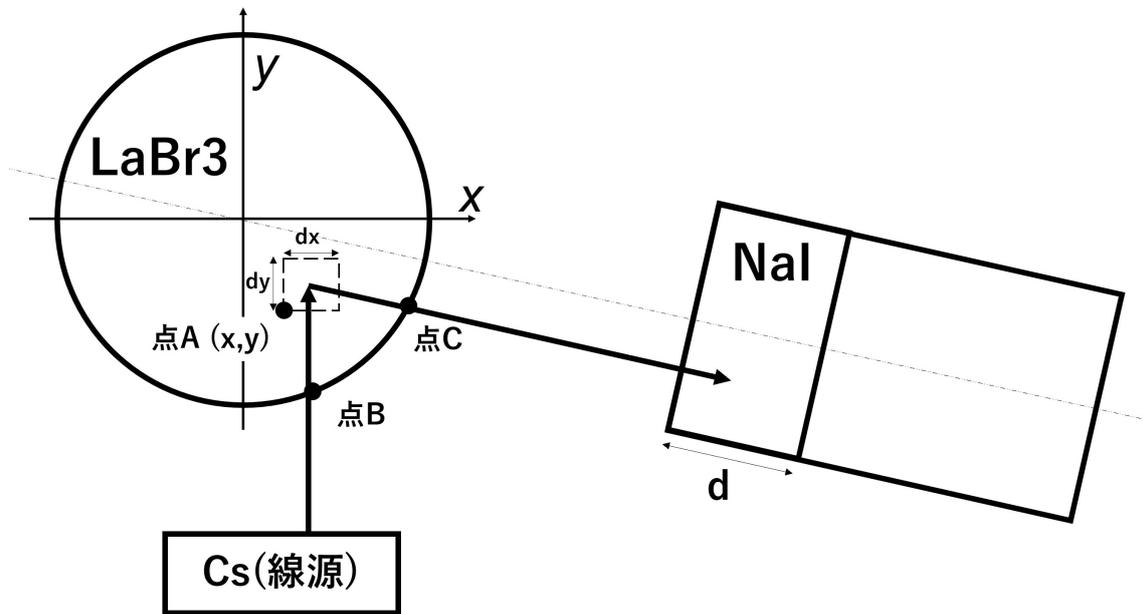


図 18: 概略図

①点 A 付近まで光子が反応を起こさない

$$\exp(-(P(E_0) + Q(E_0)) \times |AB|) \quad (17)$$

②点 A 付近で光子がコンプトン散乱する

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E_0, \theta) \times dy \quad (18)$$

③点 C で LaBr₃ を抜け出るまで反応を起こさない

$$\exp(-(P(E_1) + Q(E_1)) \times |AC|) \quad (19)$$

④NaI で反応を起こす

$$1 - \exp((p(E_1) + q(E_1)) \times d) \quad (20)$$

① × ② × ③ × ④ × dx を LaBr₃ 内、つまりで $x^2 + y^2 \leq r^2$ で積分したものが求める理論式である。これをアプローチ 1 の測定値と比較すると、次の図 19 のようになる。

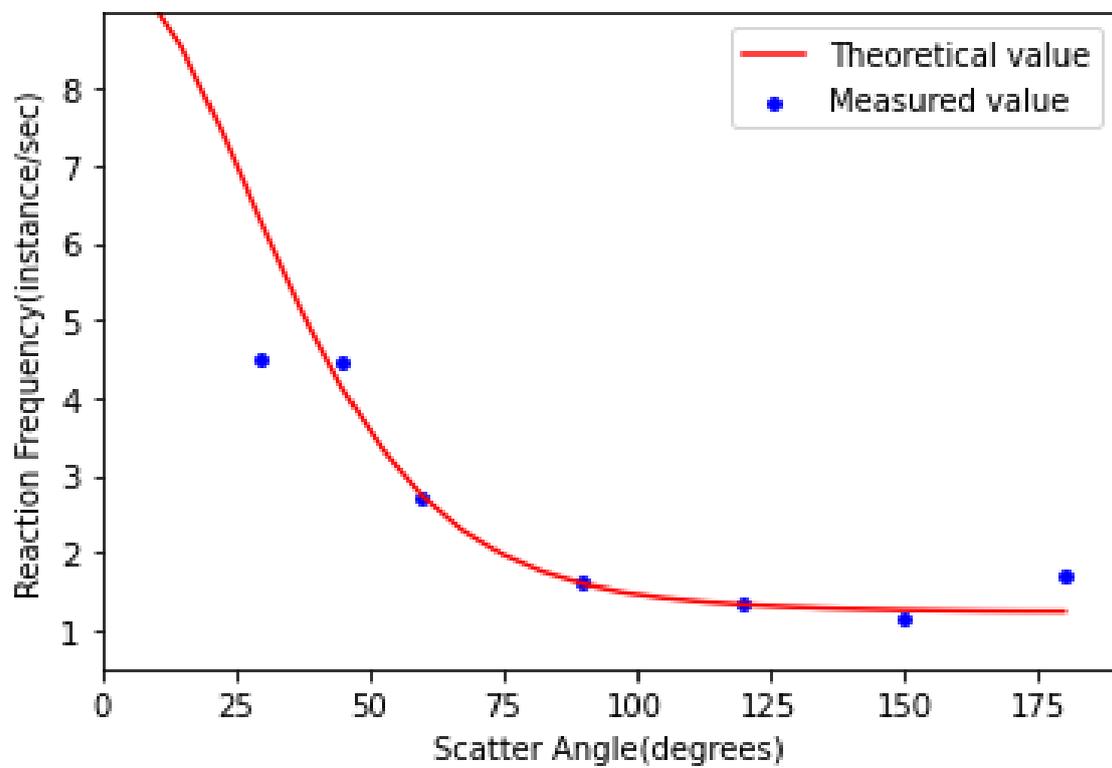


図 19: 微分散乱断面積考察アプローチ (3)

5 謝辞

ご指導を頂いた田島治さん，辻川吉明さん，藤中峻さんに感謝の意を表します。大変お世話になりました。ありがとうございます。

参考文献

- [1] W. N コッティンガム, D. A グリーンウッド 『素粒子標準模型入門』 (樺沢宇紀 訳)
- [2] G. F. Knoll 『放射線計測ハンドブック』 (神野郁夫・木村逸郎・阪井英次 訳)
- [3] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder 『An introduction to Quantum Field Theory』