

# Compton 散乱理論の実験的検証

2021 後期 A1

池邊凌

岡崎凜太郎

岩井沙彩

埴村圭吾

山田匠悟

伊津野勝英

2022 年 3 月 29 日

## 目次

1	実験概要	2
2	実験目的	2
3	理論的背景	2
3.1	エネルギーの角度依存性 . . . . .	2
3.2	散乱断面積 . . . . .	2
4	実験方法	6
4.1	概要 . . . . .	6
4.2	実験器具および配置 . . . . .	6
4.3	回路 . . . . .	7
4.4	手順 . . . . .	8
5	実験結果と解析	9
5.1	エネルギー較正 . . . . .	9
5.2	実験結果とコンプトン効果に寄与するデータの取り出し . . . . .	10
5.3	コンプトン効果によるエネルギーの算出 . . . . .	11
5.4	$\gamma$ 線と電子のエネルギーの角度分布 . . . . .	12
5.5	反応頻度の角度分布 . . . . .	14
6	考察	17
6.1	エネルギー角度分布の考察 . . . . .	17
6.2	反応頻度角度分布の考察 . . . . .	21
7	結論	27

## 1 実験概要

光子の散乱角ごとの反応頻度と光子・反跳電子のエネルギーを測定して、コンプトン散乱のエネルギー角度分布と、微分断面積を表す Klein-仁科の式を検証した。実験では入射光子に  $^{137}\text{Cs}$  が発する  $\gamma$  線を使い、散乱後の  $\gamma$  線と反跳電子のエネルギーはそれぞれ  $\text{LaBr}_3$ 、 $\text{NaI}$  シンチレーターを用いて電流に変換した後、 $^{22}\text{Na}$ 、 $^{137}\text{Cs}$ 、 $^{60}\text{Co}$  で較正した ADC 値を利用して計測した。結果としては、 $0^\circ$  以外では実験値がシンチレーターが幅をもつによる誤差を考慮すれば理論値と一致していた。 $0^\circ$  に関しては理論値からおおきく外れていたが、これは反跳電子のエネルギーが小さすぎたためにノイズとして除去されたためにうまく測定できなかったと予想される。

## 2 実験目的

今回の実験では、

- (1) コンプトン散乱における散乱角とエネルギーの関係式を実験結果と比べ、検証する
- (2) それぞれの角度でのコンプトン散乱の反応頻度を実験室系での Klein-仁科の式と比べ、検証する

の2つを目的とした。

## 3 理論的背景

コンプトン散乱による散乱角と散乱後のエネルギーの関係式及び散乱断面積として一次摂動までを取った Klein-仁科の式を導出する流れを説明する。以下ではプランク定数を  $2\pi$  で割った  $\hbar$  と光速  $c$  を 1 とする自然単位系を用いる。

### 3.1 エネルギーの角度依存性

静止している質量  $m$  の電子と振動数  $\omega$  の光子が散乱するときを考える。散乱後の光子の振動数を  $\omega'$  とし散乱角を  $\theta$  とすると散乱前後の四元運動量が保存することから

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)} \quad (3.1)$$

という関係が得られる。これは散乱する方向によって光子のエネルギーが変化することを表している。

### 3.2 散乱断面積

#### 3.2.1 散乱断面積と遷移振幅の関係

二種類の粒子のビーム A、B による散乱において全散乱断面積  $\sigma$  は  $n_A$ 、 $n_B$  を各ビームの面密度、 $s$  を両者に共通のビームの断面積、 $N$  を散乱粒子数として

$$\sigma = \frac{N}{n_A n_B s} \quad (3.2)$$

と定義される。これは単位時間あたりに一つの粒子が散乱する確率を表している。

散乱を考えるとときにはある運動量を持った粒子が他の特定の運動量の状態へと遷移する確率も求めることが重要となる。その確率を微分散乱断面積という。この量を量子論で考えたい。粒子 A,B が散乱し運動量が  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  の  $n$  粒子になったとする。このときの衝突係数を  $\mathbf{b}$  とし上記の散乱が起こる確率密度  $P(\mathbf{b})$  は

$$P(\mathbf{b}) = |\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | \phi_A \phi_B \rangle_{in}|^2 \quad (3.3)$$

となる。ここで  $|\phi_A \phi_B \rangle_{in}$  及び  $|\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n \rangle_{out}$  は散乱前後の粒子の状態である。特に散乱前の状態  $|\phi_A \phi_B \rangle_{in}$  を衝突係数を考慮して

$$|\phi_A \phi_B \rangle_{in} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_A d^3 \mathbf{p}_B}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{\phi_A(\mathbf{p}_A) \phi_B(\mathbf{p}_B)}{\sqrt{2E_A 2E_B}} e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_B} |\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_{in} \quad (3.4)$$

と運動量ケットで展開しておく。<sup>\*1</sup>運動量が  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  となって散乱される粒子数  $dN$  は

$$dN = \prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \int d^2 \mathbf{b} n_B P(\mathbf{b}) \quad (3.5)$$

となる。(3.3) 式は異なる時間の状態について内積を取っているため扱いづらい。そこで S 行列を

$$\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | \phi_A \phi_B \rangle_{out} = \langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | S | \phi_A \phi_B \rangle \quad (3.6)$$

と定めることで導入する。S 行列は  $|\phi_A \phi_B \rangle_{in}$  が散乱による時間発展を表す線形演算子であるため unitary となる。S 行列を散乱によって状態が変化するように作用する部分と変化しないように作用する部分をわけると

$$S = I + iT \quad (3.7)$$

と単位行列の部分とそれ以外の部分に分けることができる。ここで  $iT$  が相互作用による状態遷移の作用を表している。表記を簡潔にするため不変散乱振幅  $\mathcal{M}(\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rightarrow \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n)$  を

$$\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle = (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - \sum_f p_f) i \mathcal{M}(\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rightarrow \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n) \quad (3.8)$$

で定める。<sup>\*2</sup>粒子 A 一つ ( $n_{As} = 1$ ) が粒子 B の面密度  $n_B$  が一定とみなせる領域で散乱したとし、散乱前の粒子 A、B は運動量  $\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B$  に局在していたとして (3.3) 式及び (3.4) 式と (3.5) を (3.2) 式に代入し  $\sigma$  を  $d\sigma$  と改めると

$$d\sigma = \prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \frac{|\mathcal{M}(\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rightarrow \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n)|^2}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - \sum_f p_f) \quad (3.9)$$

となる。<sup>\*3</sup>ただし  $|v_A - v_B|$  は二つの粒子の相対速度である。

### 3.2.2 QED による S 行列の計算方法の概略

前節で状況に応じた不変散乱振幅 (または S 行列) を計算すれば散乱断面積を計算できることが分かった。一般に遷移振幅の定式化はいくつかの流儀があるが<sup>\*4</sup>ここでは経路積分による方法を用いる。これは  $t = t_i$  に

<sup>\*1</sup> 分母に  $\sqrt{2E_A 2E_B}$  という因子があるのは Lorentz 不変な規格化を要請するためである。  $dN$  の表式にある分母の  $2E$  についても同様。

<sup>\*2</sup> 右辺にデルタ関数が付いているのは四元運動量保存のため。

<sup>\*3</sup> S 行列の単位行列による成分は落としている。これは散乱している粒子数を正確に見積もるためである。

<sup>\*4</sup> 第二量子化などがある。これは粒子の状態を空間の各点で定義された生成消滅演算子を用いて表す。

位置  $\mathbf{x}_i$  にいた粒子 (状態  $|\mathbf{x}_i, t_i\rangle$ ) が  $t = t_f$  に位置  $\mathbf{x}_f$  (状態  $|\mathbf{x}_f, t_f\rangle$ ) へ遷移する振幅を、遷移する途中の経路として全ての可能な経路に対応する作用を位相とした coherent な総和として表す。つまり

$$\langle \mathbf{x}_f, t_f | \mathbf{x}_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}\mathbf{x}(t) e^{iS[\mathbf{x}(t)]} \quad (3.10)$$

と定義する。ここで上の積分は境界条件を満たす全ての関数  $\mathbf{x}(t)$  についての和であり\*5、 $S[\mathbf{x}(t)]$  は経路  $\mathbf{x}(t)$  に対する古典的な作用である。この表式を Fourier 変換すれば運動量空間における散乱振幅を得ることができる。

今回の実験で測定するコンプトン散乱は量子電磁力学 (QED) で記述されるので QED Lagrangian を用いて作用を書き下せばよい。QED Lagrangian は電子の質量を  $m$ 、電荷 (結合定数) を  $e$  とすると

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \quad (3.11)$$

となる。ここで  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  は共変微分、 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  は電磁場テンソル、 $A_\mu$  は gauge 場、 $\psi$  は Dirac 場である。また、 $\not{B}$  はベクトル  $B_\mu$  とガンマ行列  $\gamma^\mu$  の縮約を表し、計量は  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  とした。

一般に (3.10) 式を厳密に計算することは難しいので摂動展開することで計算する。QED の場合、自由場を

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \quad (3.12)$$

と取り結合定数  $e$  が十分小さいとして

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (3.13)$$

を摂動にとる。つまり (3.10) 式の指数部分を

$$\exp\left[i\int d^4x \mathcal{L}_{\text{QED}}\right] = \exp\left[i\int d^4x \mathcal{L}_0\right] \left[1 - ie\int d^4x \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \dots\right] \quad (3.14)$$

と展開し結合定数の次数ごとに計算する。

このような摂動の各項は電子や光子の伝搬やそれらの相互作用を表す図で表現することができる。この摂動展開に対応した図のことを Feynman diagram といい、Feynman diagram を実際の計算に対応させる規則のことを Feynman rule という。QED の時の運動量空間における Feynman rule は

#### 1. 電子、光子の propagator\*6

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \hline \end{array} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.15)$$

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} q \text{~~~~~} \\ \hline \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad (3.16)$$

#### 2. vertex

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \mu \text{~~~~~} \searrow \\ \hline \end{array} = -ie\gamma^\mu \quad (3.17)$$

となる。この他に電子は external line に spinor が、光子は偏光ベクトルが対応し散乱振幅がスカラー量になる。

\*5 実際に計算を行う際は空間に格子点を取って離散化した上で行う。

\*6 経路積分の計算において gauge 変換の自由度による発散を分離する必要があり、そこで gauge を固定するために光子の propagator は gauge の取り方に依存する。ここでは一般的に用いられる Feynman gauge を採用した。

### 3.2.3 Klein-仁科の式

コンプトン散乱を上記の摂動計算で一次まで取り計算する。対応する diagram は (図 1) で与えられる。

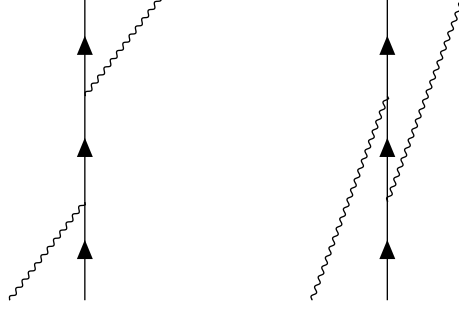


図 1: コンプトン散乱に対応する一次摂動の diagram

Feynman rule に則って (図 1) を計算した不変散乱振幅は電子の spinor を  $u(p)$ 、光子の偏光ベクトルを  $\epsilon_\mu$ 、及び散乱前の電子と光子の運動量を  $p, k$  とし散乱後の運動量を  $p', k'$  とすると

$$i\mathcal{M} = -ie\epsilon_\mu^*(k')\epsilon_\nu(k)u(\bar{p}') \left[ \frac{\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\gamma^\nu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\mu}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] u(p) \quad (3.18)$$

となる。これを (3.9) に代入する時に注意が必要となる。実際の実験では散乱前の電子の spin 及び光子の偏極は完全に無偏極になるのでそれらについて平均を取る必要がある。また、散乱後の電子 spin 及び光子の偏極については個別に測定しない状況を考えるとそれらについては和を取る必要がある。これらの平均、和を  $\mathcal{M}$  について取ると

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{initial} \\ \text{spin}}} \frac{1}{2} \sum_{\text{initial polarization}} \sum_{\text{final spin}} \sum_{\text{final polarization}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^2}{4} \left[ \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right] \quad (3.19)$$

となる。<sup>\*7</sup>このことと (3.1) 式を考慮して (3.9) 式を計算し、両辺を散乱角 (立体角) で微分するとコンプトン散乱の散乱断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right) \quad (3.20)$$

が得られる。ここで  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  は微細構造定数である。この式は Klein-仁科の式とよばれる。

### 3.2.4 実験との関連

本実験では先程導出した散乱断面積が再現されるかを実験によって検証する。 $d\sigma/d\Omega$  は単位立体角あたりに単位時間あたりに散乱される粒子の割合であるので散乱が定常的に行われるとき、 $N_{in}$  を散乱体に単位時間あたり、単位面積あたりに入射する粒子数、 $N$  を検出器で測定された粒子数、 $T$  を検出器で測定を行う時間と

<sup>\*7</sup> 平均について: 電子は  $\text{spin} \frac{1}{2}$  なので 2 で割っている。光子の偏光に関しては光子は横波成分しか持たないため偏光ベクトルの独立な成分は二つになるので 2 で割っている。これは gauge 対称性の帰結であり、実際 gauge 不変性から導ける Ward-高橋恒等式を用いることで偏光ベクトルに関する平均及び和を計算できる。

すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{N_{in}} \frac{N}{T} \quad (3.21)$$

と表せる。

## 4 実験方法

### 4.1 概要

$^{137}\text{Cs}$  から放射される  $\gamma$  線を  $\text{LaBr}_3$  シンチレータ内でコンプトン散乱させ、散乱電子を  $\text{LaBr}_3$  シンチレータで、散乱  $\gamma$  線を  $\text{NaI}$  シンチレータによってエネルギーを測定し、角度依存性を調べる。

### 4.2 実験器具および配置

本実験では以下の器具を用いた。またコンプトン散乱の測定実験における配置を図 2 に示す。

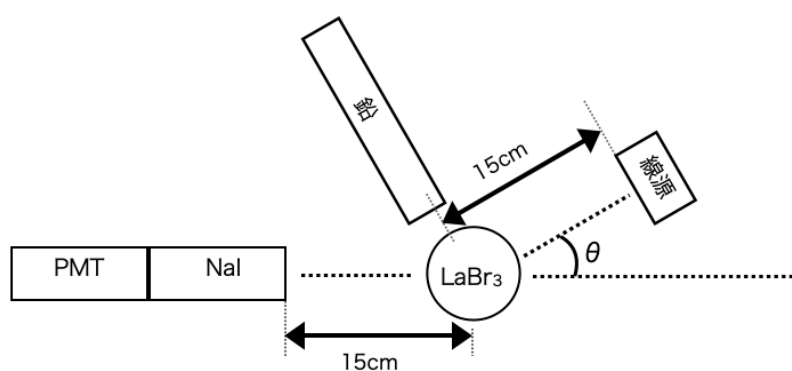


図 2: 実験配置図

線源：コンプトン散乱実験には  $^{137}\text{Cs}$ <sup>\*8</sup> を、エネルギー較正の予備実験には  $^{22}\text{Na}$ 、 $^{137}\text{Cs}$ 、 $^{60}\text{Co}$  を用いた。  
シンチレータ：放射線が入射するとそのエネルギーに応じたシンチレーション光を出す。シンチレータ物質に  $\text{LaBr}_3$ 、 $\text{NaI}(\text{Tl})$  を使用した。シンチレータを図 2 のような配置にしたのは、減衰時間がより短い  $\text{LaBr}_3$  で確実に散乱電子を捕らえるためである<sup>\*9</sup>。

PMT(光電子増倍管)：電圧をかけることでシンチレーション光から光電子を生成、その光電子を増幅し、電気信号として出力する。 $\text{NaI}$  シンチレータに 1450 V、 $\text{LaBr}_3$  シンチレータに  $-1600$  V の電圧を印加した。な

<sup>\*8</sup>  $^{22}\text{Na}$  は  $\beta^+$  崩壊により対消滅をして 511 keV の  $\gamma$  線が放出されること、 $^{60}\text{Co}$  は二種類の  $\gamma$  線を放出することから、これらはコンプトン散乱の測定には適さない。

<sup>\*9</sup>  $\text{NaI}(\text{Tl})$ 、 $\text{LaBr}_3$  の減衰時間はそれぞれ 0.23  $\mu\text{s}$ 、0.026  $\mu\text{s}$  である。Knoll p.245 参照。

お、LaBr<sub>3</sub> シンチレータとその PMT は、LaBr<sub>3</sub> シンチレータを下側にし鉛直方向に立てて適宜固定した。  
鉛：不要な  $\gamma$  線の入射を遮断するために使用。特に NaI でコンプトン散乱して散乱  $\gamma$  線が LaBr<sub>3</sub> に入射するという事象を封じている。

### 4.3 回路

測定によって得られる値はエネルギー値そのものではなく、エネルギー値に対応した値 (ADC Value) である。ADC とは Analog Digital Converter の略で、図 3 のように Gate に短波形が入力されている間、channel に入力された信号 (Analog) の積分値 (Digital) を出力する。コンプトン散乱の測定実験においては、NaI と LaBr<sub>3</sub> にほぼ同時に入射した時、すなわちコンプトン散乱によるものだと考えられる事象についてのみ Gate が生成され、かつその Gate が両イベントを覆うような長さで出力される必要がある。具体的な回路は以下の通りである。

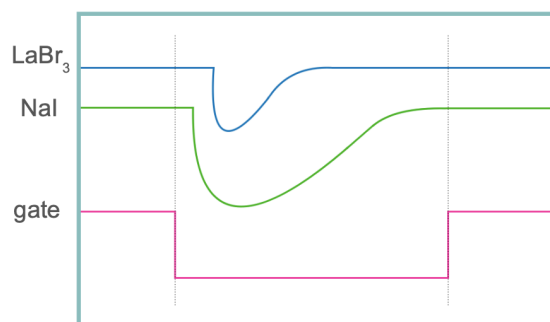


図 3: オシロスコープ模式図

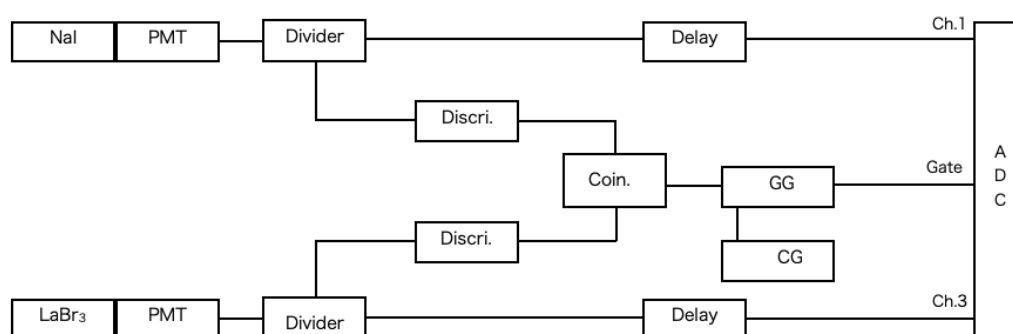


図 4: 実験回路図

Divider：入力された信号を複数出力する。

Discriminator (Discri.)：入力信号が閾値を超えた際に一定の短波形を出力する。本実験ではその閾値を ch.1 で  $-24.7$  mV、ch.2 で  $-25.2$  mV とした。



Coincidence (Coin.): 信号が同時に入力した時のみ短波形を出力する。尚、どの信号の積とするかは切り替え可能である (Calibration の際に有効)。

Gate Generator (GG): 入力された短波形の時間幅を変更する。本実験ではそれを  $2.0 \mu\text{s}$  とした。

Clock Generator (CG): 予備実験においてのみ使用。短波形を定期的に出力する。本実験はその周波数を  $1 \text{ kHz}$  とした。

Delay: 物理的に長いケーブルを用いて信号の出力のタイミングを遅らせる。

以上のモジュールを用い、図 4 のように回路を組んだ。Coincidence を用いることで両シンチレータにほぼ同時に放射線が入射した事象を取り出している。Gate に入力する短波形間にアナログ状態の 1 波形が収まるように Gate Generator の時間幅と Delay のケーブルの長さを調節した。波形についてはオシロスコープを用いて目視で確認した。

## 4.4 手順

### 4.4.1 予備実験

ADC 値をエネルギー値に変換するための測定である<sup>\*10</sup>。

エネルギー既知の線源  $^{22}\text{Na}$ 、 $^{137}\text{Cs}$ 、 $^{60}\text{Co}$ <sup>\*11</sup> をシンチレータに直に当て、シンチレータ毎に測定する。この時、Coincidence は測定するシンチレータからの入力のみで出力されるように設定する。それぞれの線源とシンチレータの計 6 通りで 5000 回ずつ測定した。

また、線源を置かない測定も行う。Clock Generator からの出力を Gate とし、5000 回測定した。

### 4.4.2 コンプトン散乱の測定実験

線源は  $^{137}\text{Cs}$  を使用した。角度依存性は線源の位置を変えて測定することで調べた。図 2 の  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$  においてそれぞれ 5000 回測定した。

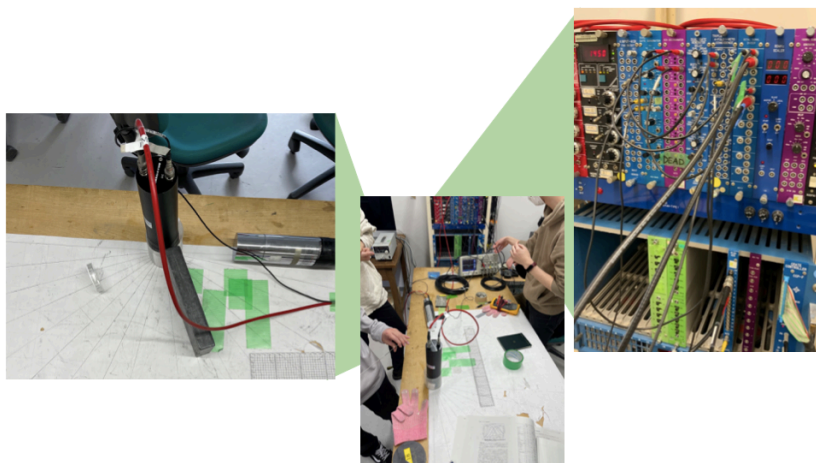


図 5: 実験風景

<sup>\*10</sup> 変換方法は 5.1 エネルギー較正で述べる。

<sup>\*11</sup> 順にそれぞれ  $546 \text{ keV}$ 、 $662 \text{ keV}$ 、 $1173 \text{ keV}$  と  $1332 \text{ keV}$  である。

## 5 実験結果と解析

### 5.1 エネルギー較正

計測機器から出力される信号の値 (ADC) とエネルギーとの関係式を導かなければならない。そこであらかじめピークのエネルギーの値が知られている線源を用いて ADC の較正を行う。

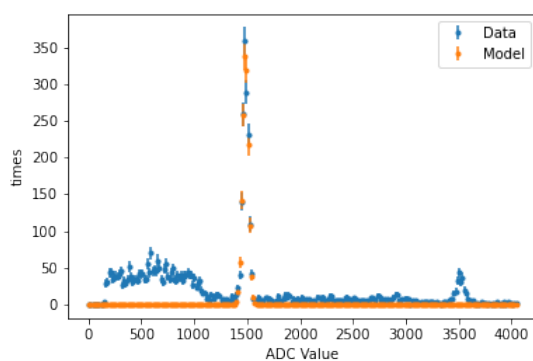


図 6: LaBr<sub>3</sub>(Na) の ADC 分布

上図のように、線源のエネルギーに応じてピークができるため、これをガウス分布で近似し、ADC とエネルギーとの関係式を導く。

今回は ADC の値と実際のエネルギーの間には線形的な関係があると仮定している。ADC 値を  $X$ 、エネルギーの真の値を  $E$  として式で表すと以下ようになる:

$$X = aE + b \quad (5.1)$$

このときの定数  $a, b$  を求めることで ADC の値を実際のエネルギーに関連付けることができる。

今回は、 $^{137}\text{Cs}$ 、 $^{22}\text{Na}$ 、 $^{60}\text{Co}$  を線源として用いた。また NaI の較正に関しては、 $^{137}\text{Cs}$  と  $^{60}\text{Co}$  の一つ目のピークをうまくガウス分布で取り出せなかったため、この二つの点は省いた。

こうして得られた値をグラフにプロットすると以下ようになった。

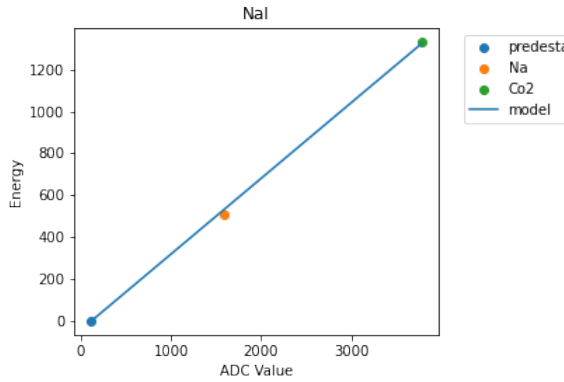


図 7: NaI の較正実験前

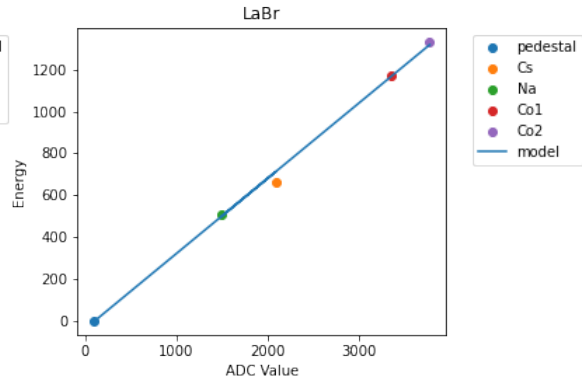


図 8: LaBr の較正実験前

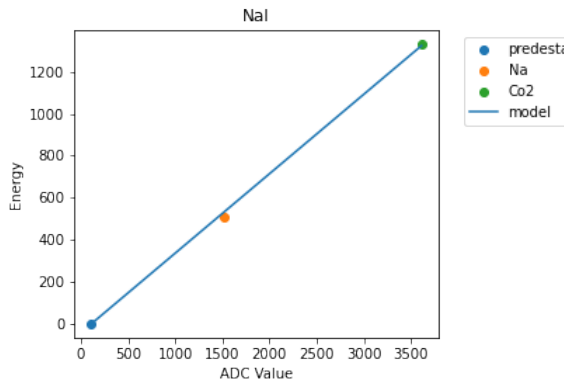


図 9: NaI の較正実験後

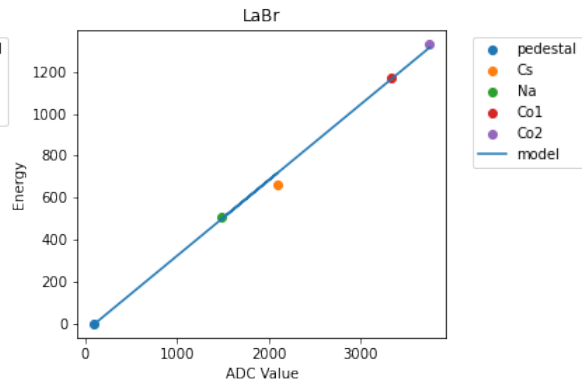


図 10: LaBr の較正実験後

表 1: NaI、LaBr<sub>3</sub> の較正結果

	NaI 実験前	LaBr <sub>3</sub> 実験前	NaI 実験後	LaBr <sub>3</sub> 実験後
傾き (KeV/ADC)	0.360	0.360	0.377	0.360
傾き誤差 (KeV/ADC)	0.00458	0.00506	0.00458	0.00569

pedestal は固定点として扱い、一次関数で近似した結果を表で示した。

以下では  $0^\circ \sim 90^\circ$  までは実験前の較正を、 $120^\circ \sim 150^\circ$  に関しては実験後の較正を用いる。

## 5.2 実験結果とコンプトン効果に寄与するデータの取り出し

較正をかけて ADC から keV に変え、NaI、LaBr<sub>3</sub> の ADC 値を用いて角度ごとに散布図を作成した。

この散布図を用いてデータ点の密度が高い場所を下図のように取り出し、この箇所でもコンプトン散乱が起きていると考え、このデータのみを用いて以下の解析を行った。<sup>\*12</sup>

<sup>\*12</sup> 散乱角  $150^\circ$  の散布図では 2 か所密度の高い領域が存在している。このうち最も高密度な領域が  $150^\circ$  のコンプトン散乱の点であ

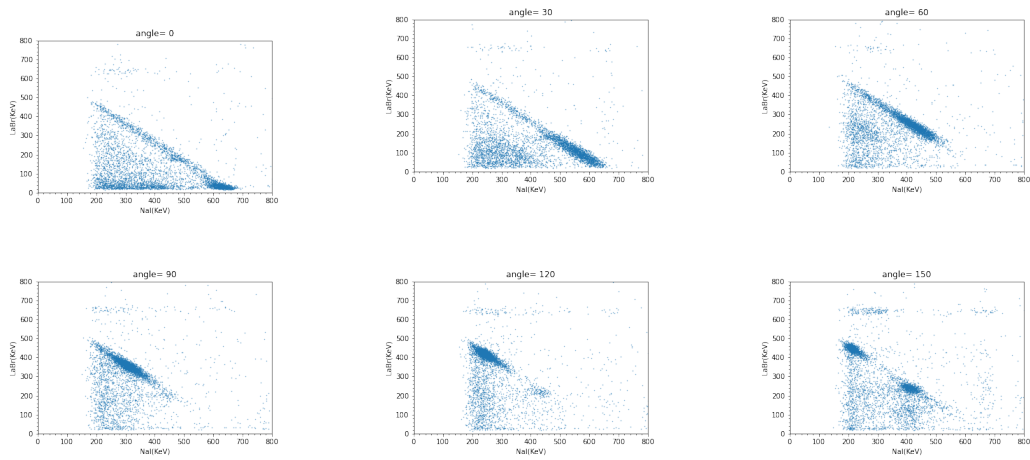


図 11: 散布図

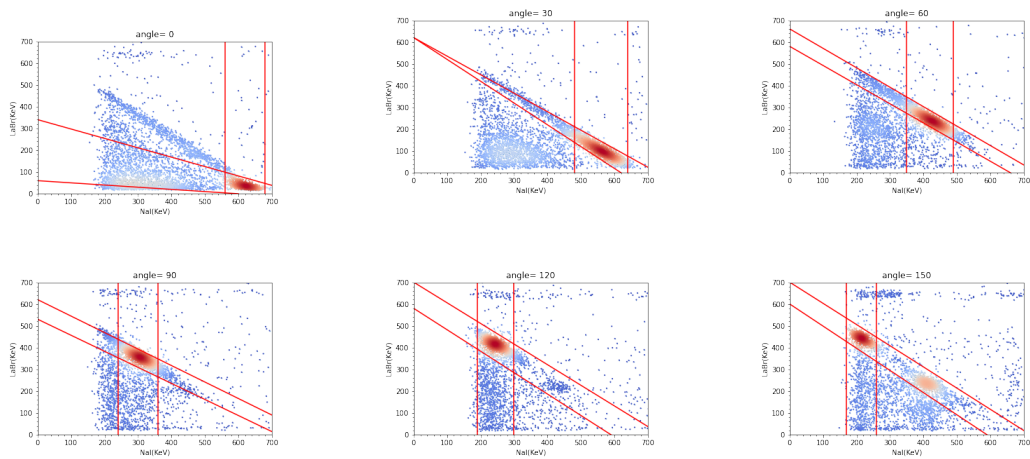


図 12: 密度散布図

### 5.3 コンプトン効果によるエネルギーの算出

前節で取り出したデータに対して NaI、LaBr<sub>3</sub>、NaI と LaBr<sub>3</sub> のエネルギーを足したもの、これら 3 つについてヒストグラムを描き、ガウス分布で近似した結果が下図である。

オレンジが LaBr<sub>3</sub>、青が NaI のデータを指しており、赤と緑の曲線はそれぞれのガウス分布の近似曲線を表している。

---

る。もう一方はおおよそ散乱角 75° の領域であり、これは散乱経路として線源 → NaI → LaBr<sub>3</sub> をとるコンプトン散乱である。もう少し大きい鉛板を使用すべきであったが、目的の散乱角と混同することはないので結果的に問題はない。

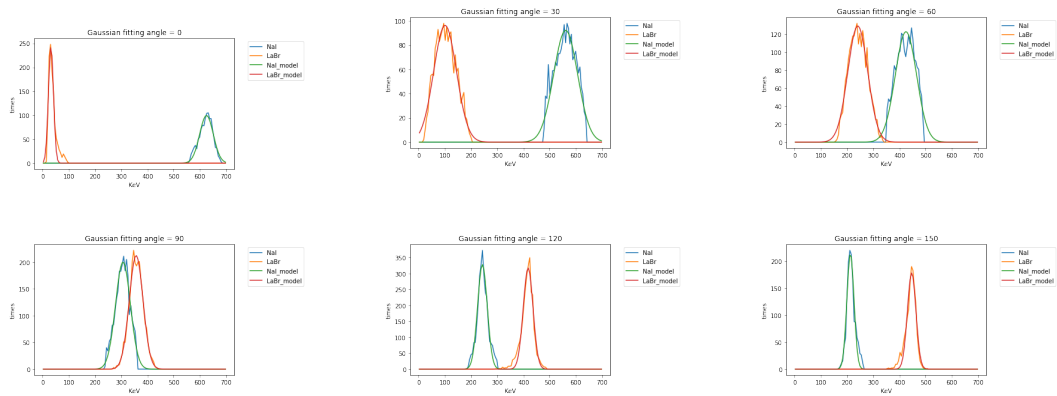


図 13: NaI と LaBr<sub>3</sub> のエネルギー分布

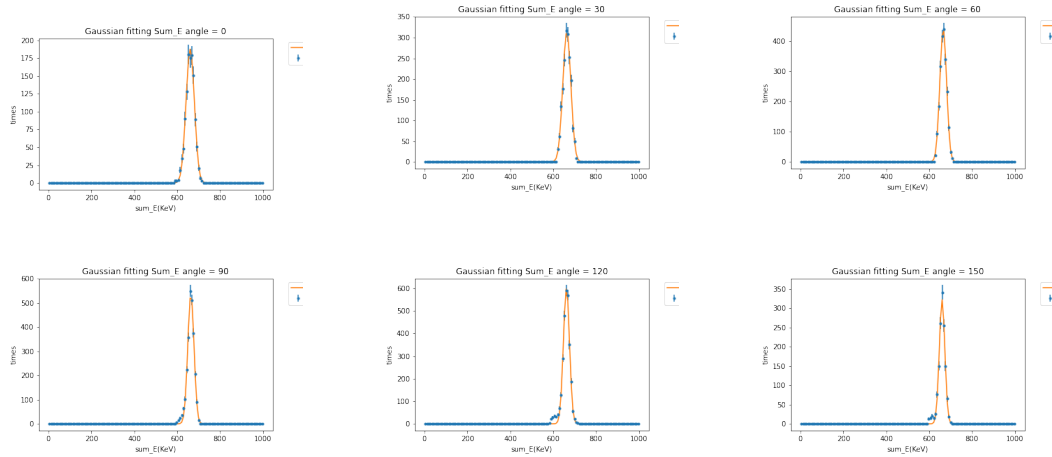


図 14: NaI、LaBr<sub>3</sub> の和のエネルギー

#### 5.4 $\gamma$ 線と電子のエネルギーの角度分布

先の章で解析した結果についてをグラフにすると下図のようになる。非常に小さいがデータ点に関してはエラーバーもついている。この誤差は、NaI、LaBr<sub>3</sub> のエネルギーに関しては次の式で導出した。

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{Gauss}}}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left\{\left(\frac{E}{a} - b\right) \sigma_a\right\}^2} \quad (5.2)$$

ただし  $\sigma_{\text{Gauss}}$  はガウス分布で近似した際の標準偏差、 $N$  はガウス近似に用いたデータ点の数、 $\sigma_a$  は較正によって算出した傾きの誤差、 $a$  は傾き、 $b$  は pedestal の値である。

また NaI、LaBr<sub>3</sub> のエネルギーの和の誤差については

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{Gauss}}}{\sqrt{N}} \quad (5.3)$$

で求めた。

ここで実験のセットアップから、 $\gamma$ 線のエネルギーが  $\text{LaBr}_3$ 、電子のエネルギーが  $\text{NaI}$  に相当するので理論式を実線で描くと下図のようになった。

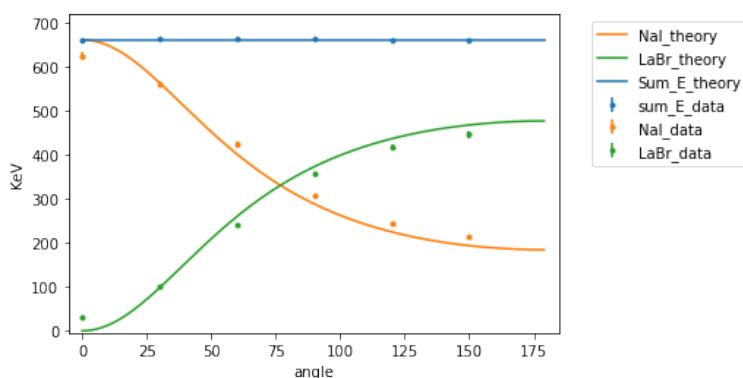


図 15:  $\gamma$ 線と電子のエネルギーの角度分布

このように、 $\gamma$ 線、電子の間で運動量がやり取りされていることが分かった。用いたデータのまとめを下に記す。

表 A 使用したデータ群

種類	角度	エネルギー (KeV)	エネルギー誤差 (KeV)	較正時の傾き	Pedestal	較正時の傾きの誤差
NaI	0	624.9958208	8.460761734	0.360464744	111.9152	0.004581654
LaBr	0	31.5979398	0.863133807	0.359367972	100.2684	0.004581654
Sum	0	660.55887	1.428409078			
NaI	30	560.7797559	7.656586911	0.360464744	111.9152	0.004581654
LaBr	30	100.7444287	1.801218772	0.359367972	100.2684	0.004581654
Sum	30	663.4844927	1.051178899			
NaI	60	424.5582772	5.918363622	0.360464744	111.9152	0.004581654
LaBr	60	240.6694653	3.540005903	0.359367972	100.2684	0.004581654
Sum	60	665.2203811	0.748793483			
NaI	90	306.3921087	4.409414089	0.360464744	111.9152	0.004581654
LaBr	90	356.6422237	5.007841428	0.359367972	100.2684	0.004581654
Sum	90	663.7339097	0.623844508			
NaI	120	243.2434751	3.801721989	0.377470172	106.3522	0.005063299
LaBr	120	417.6400455	7.156884737	0.360147716	97.3662	0.005693423
Sum	120	661.6286525	0.582913257			
NaI	150	212.7481043	3.392841364	0.377470172	106.3522	0.005063299
LaBr	150	446.4356124	7.612410354	0.360147716	97.3662	0.005693423
Sum	150	659.9172931	0.722036503			

## 5.5 反応頻度の角度分布

続いて反応頻度の角分布（微分散乱断面積）について論じる。具体的には 3.2 章で導出された Klein-仁科の式（をさらに変形した式）

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{th}} = Zr_0^2 \left[\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}\right]^2 \left[\frac{1 + \cos^2\theta}{2}\right] \left[1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \alpha(1 - \cos\theta)]}\right] \quad (5.4)$$

と実験結果とを比較する。<sup>\*13</sup>ただし

$$\alpha = \frac{h\nu}{mc^2} \quad (5.5)$$

であり、微細構造定数ではないことに注意する。<sup>\*14</sup>

### 5.5.1 観測値について

コンプトン散乱のイベント数  $N$  をカウントし、計測時間  $T$  で割ることで反応頻度  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ex}}$  を求めた。イベント数は 5.2 章の図 12 の赤枠で囲まれた領域に存在する点の個数である。以下の表にデータを提示する。なお誤差範囲は「一回の測定における精度の評価」<sup>\*15</sup>に基づき、統計モデルとして正規分布を仮定した上で  $\sqrt{N}$  とした。

表 2: 各角度における反応頻度

$\theta$ [°]	イベント数 $N$	計測時間 $T$ [s]	反応頻度 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ex}}$ [Hz]
0	1184	564.877	2.096 ± 0.060
30	1862	400.325	4.651 ± 0.108
60	2196	718.501	3.056 ± 0.065
90	2577	952.827	2.705 ± 0.053
120	2908	1078.351	2.697 ± 0.050
150	1410	683.547	2.063 ± 0.055

### 5.5.2 理論値との比較方法

理論上  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ex}} \propto \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{th}}$  となる<sup>\*16</sup>から、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ex}} = C \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{th}} \quad (5.6)$$

<sup>\*13</sup> ex は experimental、th は theoretical の略である。

<sup>\*14</sup> Knoll 著 放射線測定ハンドブック p.53 (2.18) の表記に従ったため  $\alpha$  が重複した。私は Knoll の従順なる犬である。だが犬もたまには嘔みつく。

<sup>\*15</sup> Knoll p.85 を参照。

<sup>\*16</sup> 測定値が理論値そのものと一致することはあり得ない。計測時間  $T$  は計算機の処理時間を考慮するべきであるからである。しかし現実問題それを除去するのは甚だ困難である。正確な時間が知りたければ己が目で見えて数え上げるしかないが、目前を浮遊するうざったい蚊さえろくに目で追えない人類にはそんな芸当は 5 億年早い。5 億年も経てば何かしら人類も肉体的に進化しているちがいない。大いに期待。

にたいして  $C$  は定数になるべきである。

そこで、比例定数  $C$  と理論式  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{th}$  を次のように再定義する。すなわち理論式の比例定数をすべて  $C$  に取り込み、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ex} = C \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{th;rd} \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{th;rd} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]} \right] \quad (5.8)$$

とする。<sup>\*17</sup> 上式からそれぞれの角度における比例定数  $C$  を計算し、一定程度合いを調べる。表 3 に結果を記す。

表 3: 各角度での比例定数  $C$

$\theta$ [°]	0	30	60	90	120	150
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ex}$	2.096	4.651	3.056	2.705	2.697	2.063
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{th;rd}$	2.000	1.289	0.5542	0.3285	0.2924	0.2963
$C$	1.048	3.608	5.515	8.232	9.222	6.962

それぞれの角度間で  $C$  は明らかに一致しない。そこで最もらしい  $C$  の値を得るため最小 2 乗法による fitting を考える。<sup>\*18</sup> すなわち

$$d = \sum_{\theta} \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ex} - C \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{th;rd} \right]^2 \quad (5.9)$$

に対して  $d$  が最小になるような  $C$  の値を比例定数として用いる。ただし  $\sigma = \frac{\sqrt{N}}{T}$  は重み関数である。すると

$$C = 3.576 \quad (5.10)$$

$$d = 6581 \quad (5.11)$$

が得られ、ひとまずこの  $C$  を比例定数として用いて  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ex}$  と  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{th;rd}$  をプロットすると、以下の図 16 のようになる。

<sup>\*17</sup> rd とは redefinition の略である。

<sup>\*18</sup> 最小 2 乗法を用いるとき、前提として「真の  $C$  の値は各角度で求めた  $C$  の最大値、最小値の間に存在すべし」がある。しかしこれはあくまで希望的観測でしかない。当然その間にあるのが望ましいが、何らかの理由により最小値より小さく、若しくは最大値より大きくなる可能性は誰も否定できない。このことを意識しつつ議論したい。



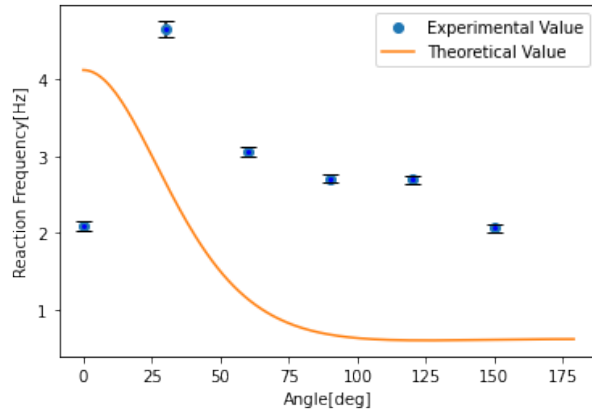


図 16: 全ての角度で最小 2 乗法を用いた時の反応頻度比較

理論値と実験値の差異が極めて大きくなった。そこで然るべき補正を行うが、それは「考察」の章で取り扱う。

### 5.5.3 補足

本レポートでは計測時間  $T$  の曖昧さのために理論値と実験値の比例関係を解析した。計測時間  $T$  が完全に正確な値である場合には、(3.21) を用いて  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{ex}} = (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{th}}$  を調査すれば良い。

実際に理論値を算出する。LaBr<sub>3</sub> の原子番号 (に相当する量)  $Z = 43.071272$ <sup>[7]</sup>、古典原子半径  $r_0 = 2.8179403262 \times 10^{-15} \text{ m}$ <sup>[8]</sup> を用いれば、表 4、図 17 のようになる。

表 4: 理論値の正確な値

$\theta$ [°]	0	30	60	90	120	150
$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{th}}$ [ $\text{m}^2 \times 10^{-14}$ ]	12.14	7.824	3.363	1.994	1.775	1.798

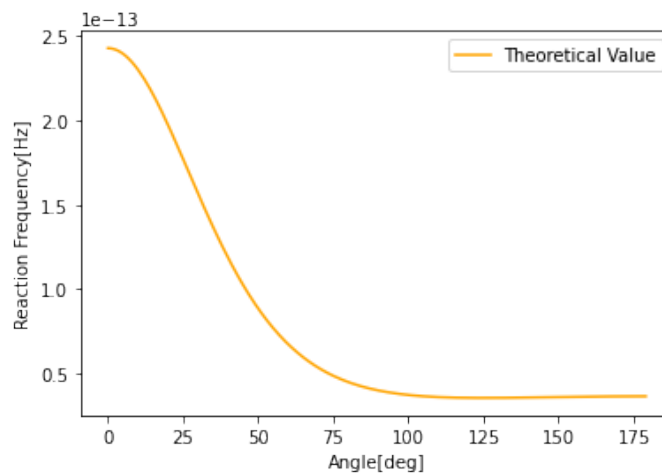


図 17: Klein-仁科の式のグラフ

## 6 考察

### 6.1 エネルギー角度分布の考察

改めて  $\gamma$  線と電子のエネルギーの角度分布のグラフを提示する。

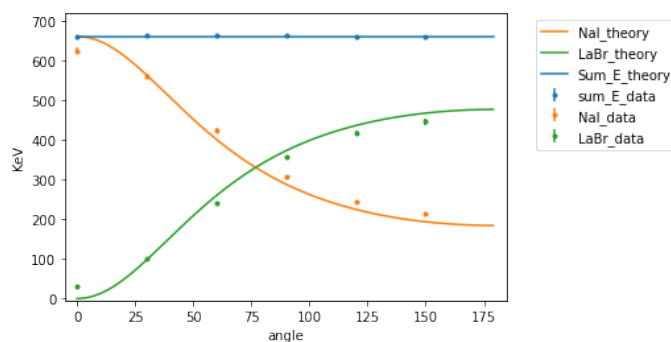


図 18:  $\gamma$  線と電子のエネルギーの角度分布

エネルギーの保存を満たし、かつ観測値のプロットは理論の曲線に沿っていることからエネルギー角度分布は理論式 (3.1) に従うと考えても良いように見える。しかしエラーバー込みで一致していないのは事実であり、考察する必要がある。わずかにズレが生じた原因は、シンチレータの大きさを加味していないことによるものが考えられる。それを議論する。

#### 6.1.1 シンチレータのサイズを考慮したエネルギー角度分布

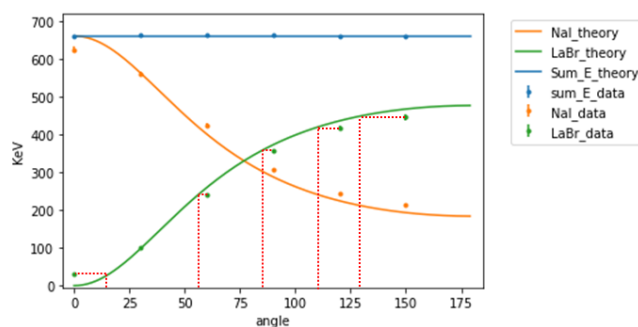


図 19: 配置図

図 19 の赤点線のように、実験で計測された値を理論式から逆算して、それが本来何度の散乱に相当するデータなのか調べた。具体的には、電子の反跳エネルギーの実験値を  $E_{\text{ex}}$  として、

$$E_{\text{ex}} = \left[ 1 - \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta_{\text{inv}})} \right] h\nu \quad (6.1)$$

から  $\theta_{\text{inv}}$  を求めた。<sup>\*19</sup>

その結果を次の表 5 に提示する。

表 5: 実験値から逆算した散乱角

$\theta$ [°]	0	30	60	90	120	150
$E_{\text{ex}}$ [keV]	31.60	100.74	240.67	356.64	417.64	446.44
$\theta_{\text{inv}}$ [°]	17.49	30.68	55.42	84.09	109.29	129.17

これより、例えば 150° にて得られた反跳エネルギーの実験値は理論的には 129° のコンプトン散乱に相当すると分かった。これは、我々が 150° の散乱だと認識している配置では 129° 近傍の散乱が顕著に現れた、ということの意味する。(30° を除く全ての角度でズレが生じている。) シンチレータの大きさを考慮することがこの問題解決の手掛かりになる。

シンチレータの寸法を与える。円柱と見なして直径と奥行きは以下の表 6 のようになる。

表 6: シンチレータの寸法

シンチレータ	NaI(Tl)	LaBr <sub>3</sub>
直径 [cm]	5.75	4.80
奥行き [cm]	5.50	4.70

また簡便な説明のため、図 20 に散乱角が  $\theta$  の実験配置を示す。<sup>\*20</sup>配置は図 2 と変わらない。そこに直角座標を導入して原点 O に LaBr<sub>3</sub> を、点 S に線源を、 $x$  軸上に NaI を設置する。以降  $\gamma$  線の軌道はこの平面内のみ存在するとして考える。

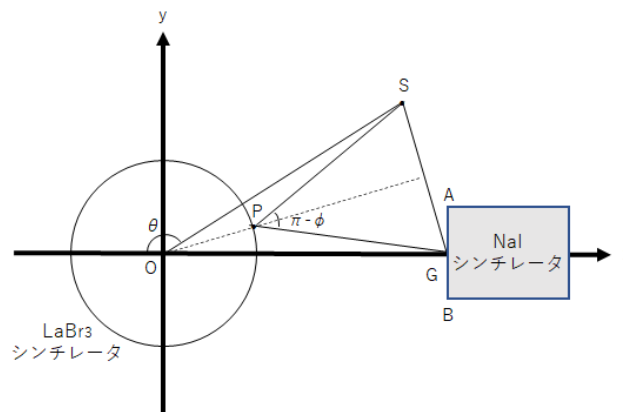


図 20: 配置図

<sup>\*19</sup> inv とは inverse(逆算) の略である。

<sup>\*20</sup> 図は全く正確では無い。図を信じれば馬鹿を見る (経験者談)。

まず  $\theta \geq 30^\circ$  から考える。 $0^\circ$  はこれから扱う点 P が存在しないので別個で扱う。<sup>\*21</sup>

我々の理想では、 $\gamma$  線は点 S を起点とし、LaBr<sub>3</sub> シンチレータの中心 O を経由して、NaI シンチレータの中心 G に到達する。しかしシンチレータに大きさがある以上、 $\theta$  の散乱の他にその近辺の角度の散乱も存在する。表 5 によると、 $\theta \geq 30^\circ$  では想定角より小さい値をとる。すなわち、図 21 の薄藤色に塗られた領域 D にて生じた散乱が顕著であることになる。<sup>\*22</sup>

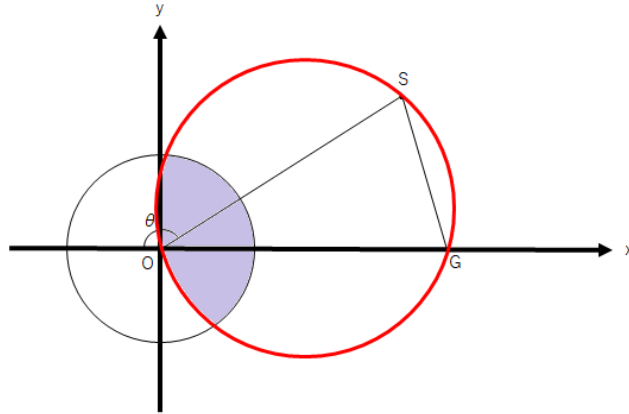


図 21: 顕著な散乱の領域 D

これは現象的に妥当であると言える。透過粒子数は結晶中を進行すればするほど減少するからである。<sup>\*23</sup>

次はこれを定量的に調べた。<sup>\*24</sup> まずは  $\gamma$  線の終点を G に固定する。図 20 の点 P とは LaBr<sub>3</sub> シンチレータ上でありかつ点 S と点 G に最も近い点である。この点 P を経由する経路  $S \rightarrow P \rightarrow G$  を通るコンプトン散乱の散乱角は、散乱角  $\theta$  の計測実験で起きうる最小のものになる。この臨界面  $\phi$  を計算する。

以下、 $l = OA = OB = 15.0$  cm、 $r = 2.40$  cm: LaBr<sub>3</sub> シンチレータの半径、 $R = 2.875$  cm: NaI シンチレータの半径とする。 $\angle SOG = \pi - \theta$ 、 $\angle SPG = \pi - \phi$  であることに注意して余弦定理を用いると、

$$\cos \phi = 1 - \frac{2l^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{r^2 + l^2 - 2rl \cos \frac{\theta}{2}} \quad (6.2)$$

となる。これのインバースをとればよい。

続いて  $\gamma$  線の経路の終点を G から解除し、線分 AB 上の任意の点を終点にする。単調な変化なので端点 AB のみに注目する。

<sup>\*21</sup> 線分 SG が LaBr<sub>3</sub> シンチレータの円と交わらない場合のみ、以降の考察での議論が適用可能である。実際計算すれば線分 SG が円に接するのが  $\theta = 18.41^\circ$  のときであり、 $\theta \geq 30^\circ$  のデータに対して扱うことができる。

<sup>\*22</sup> 赤い円は 3 点 OSG を通る円である。円周角の定理より、赤線上でかつ LaBr<sub>3</sub> シンチレータ内に存在する点で発生した散乱は全て角  $\theta$  の散乱である。

<sup>\*23</sup> 後の章 6.2.2 で言及する式 (6.9) を参考にしてほしい。

<sup>\*24</sup> 以降で説明する臨界面の方法とは別の解析方法として、モンテカルロ法の応用を提案する。図 20 上で LaBr<sub>3</sub> の円内と NaI の長方形内にランダムな点  $P_n$ 、 $G_n$  を多数とる。それらの点一つ一つに対してコンプトン散乱の経路  $S \rightarrow P_n \rightarrow G_n$  を考え、それに相当する散乱角の分布を求める、という手法である。しかしこれには問題点がある。シンチレータ内で打つ点は完全なランダムではあってはならないことである。図 21 からわかるように、シンチレータ内の散乱点は一様に分布しない。侵入長に対し式 (6.9) に従って減少するはずである。このような偏った乱数を構築するのは骨が折れる作業となる。

$$\delta\theta \equiv \angle AOG = \angle GOB = \arctan \frac{R}{l} = 10.85^\circ \quad (6.3)$$

を定義すると、従来の  $\theta$  は  $\theta \pm \delta\theta$  と変化する。これを上の過程にそのまま置き換えると、その時の  $\phi$  が計算できる。<sup>\*25</sup>

以上に従い臨界角  $\phi$  を算出すると、表 7、図 22 に示すとおりになる。<sup>\*26</sup>

表 7: 臨界角  $\phi$ 、逆算した散乱角  $\theta_{\text{inv}}$

$\theta$ [°]	30	60	90	120	150
$\phi$ [°] (上限値)	22.80	54.49	87.59	121.94	157.23
$\phi$ [°]	11.68	42.86	75.46	109.38	144.39
$\phi$ [°] (下限値)	0.736	31.43	63.51	96.08	131.63
$\theta_{\text{inv}}$ [°]	30.68	55.42	84.09	109.29	129.17

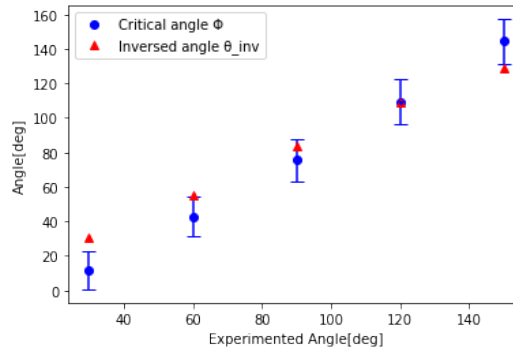


図 22:  $\phi$ 、 $\theta_{\text{inv}}$

これより  $60^\circ$  から  $150^\circ$  の散乱でおおよそ  $\theta_{\text{inv}}$  は大体  $\phi$  の範囲内に収まる。一部わずかに外れているが、シンチレータの形状や奥行き、内部構造あるいはその他の配置の問題を考慮していないためと考えれば妥当な結果と言える。これより  $60^\circ$  から  $150^\circ$  ではかなり点 SG 寄りの領域で散乱していることが結論できる。やはりあまり内部まで透過しにくいということである。 $30^\circ$  については  $0^\circ$  の議論の後にまとめて扱う。

ではここから後回しにした  $0^\circ$  について考えたい。

<sup>\*25</sup> 実はこの計算には近似がなされている。本来  $\triangle SPA$  及び  $\triangle SPB$  は二等辺三角形ではないが、今回は  $\delta\theta$  が小さいとして二等辺三角形として近似した。実際計算すると  $\delta\theta = 0.189[\text{rad}]$ 、 $\tan \delta\theta = 0.192$  であり、 $\delta\theta \simeq \tan \delta\theta$  としてもよいと考えた。良い感じに楽をして生きていくことが結局一番楽しい人生になる気がすると思ふ。

<sup>\*26</sup> 上限値は A を、下限値は B を経路の終点とする場合である。

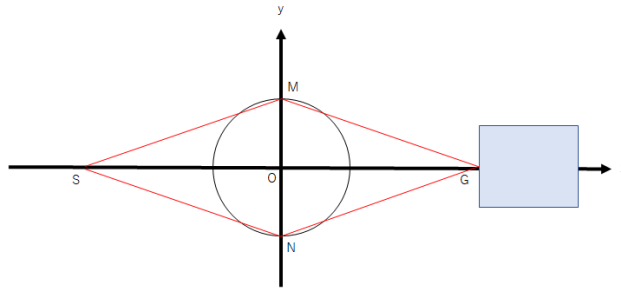


図 23: 0° の散乱

0° の散乱実験でも同様に、0° 近傍の散乱をも計測してしまう。計算してみると、経路の始点終点を点 S、G に固定した場合 12.21° の散乱までを含むことがわかる。<sup>\*27</sup> 終点を点 G から解放すればおおよそ 10° (=  $\delta\theta$ ) ほど取り得る角度の範囲は増大すると見積もれる。 $\theta_{inv} = 17.49^\circ$  であることも頷ける。よって 0° の散乱では直進よりも図 23 の赤線のように少し上下にずれた経路のほうが主であるとのデータからは結論できそう。しかし後で議論する反応頻度の分布にて、理論上 0° は他のどの角度よりも大きくなることが分かる。それならばエネルギー角度分布でも散乱角 0° の経路の主張はもっと激しくても良いと思われる。この問題は 6.2.4 にて詳しく扱うが、都合上先に考え得る理由を説明すると、これは LaBr<sub>3</sub> シンチレータの計測可能な閾値の問題である。30° でだけ理論値と実験値が一致していたことについてだが、これは大きい散乱角側での問題 (シンチレータの大きさを無視していたこと) と散乱角 0° 側での問題 (LaBr<sub>3</sub> シンチレータの閾値) が上手い塩梅で相殺されたためとも考えられる<sup>\*28</sup> し、単に鉛の配置がよく 30° 近傍の経路のみをよく抽出できたこと、それからそもそも 30° だと散乱角が臨界角  $\phi$  となるような散乱の経路をとる粒子の絶対数が少ない可能性があることなども理由として挙げられる。

## 6.2 反応頻度角度分布の考察

Klein-仁科の式と観測値が一致しない理由を考察するが、その前に比例定数  $C$  の妥当性について考える。

### 6.2.1 比例定数 $C$ の補正

図 16 を見れば一目瞭然であるが、0° の外れ方が極めて大きく、 $C$  を計算する際に 0° は外れ値として扱う必要性を示唆している。それが妥当である根拠は後の章 6.2.4 に提示する。今はとにかく 0° をあくまで外れ値として扱い、残り 30° から 150° について最小 2 乗法を再適用する。実際に実行し 5.5.2 章と同じ操作をして得たグラフ類を以下にまとめる。<sup>\*29</sup>

<sup>\*27</sup> 図 23 の赤線の経路である。白黒印刷された方には大変申し訳ない。

<sup>\*28</sup> 30° について、シンチレータに大きさがあるが故に臨界角  $\phi$  は小さめだったが、逆にその散乱角が小さいが故には観測で大半が引っかけられないことで奇跡的に相殺されたと思われる。

<sup>\*29</sup> ここで  $d$  の定義を

$$d = \sum_{\theta \neq 0^\circ} \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{ex}} - C \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{th,rd}} \right]^2 \quad (6.4)$$

に変更していることに注意されたい。

$$C = 5.513 \quad (6.5)$$

$$d = 1332 \quad (6.6)$$

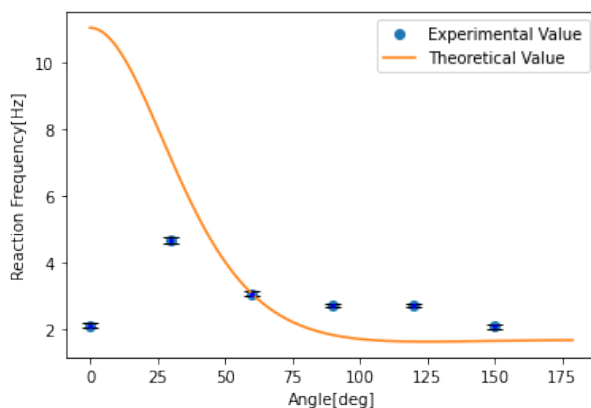


図 24: 0° 以外の角度で最小 2 乗法を用いた時の反応頻度比較

図 24 が  $C$  補正後の反応頻度の比較であるが、誤差範囲を鑑みても一致しているとは言いがたい。そこで新たに別の補正を加える。

### 6.2.2 カウント数 $N$ の補正

本実験で得たイベント数  $N$  について考察する。 $N$  としてカウントした事例は、

- LaBr<sub>3</sub> に反跳電子が、NaI に散乱  $\gamma$  線がほとんど同時に入射した散乱
- 両シンチレータで観測したエネルギーの和が約 662 keV になる散乱 (エネルギー保存の成立)<sup>\*30</sup>

である。言い換えれば、NaI で散乱  $\gamma$  線が余すところなく吸収されるコンプトン散乱のみ抽出したということだ。注意すべきは、そのケースは光電吸収に限らないということである。

NaI シンチレータ中での散乱  $\gamma$  線の反応は次の通りである。図 25 が参考になる。(なお本実験にて電子対生成は発生しない。<sup>\*31</sup>)

- 入射した散乱  $\gamma$  線がそのまま光電吸収される
- 一回以上コンプトン散乱し、反跳電子・ $\gamma$  線ともに吸収される
- 一回以上コンプトン散乱し、反跳電子のみ吸収され  $\gamma$  線は NaI 外に逃げる
- 全く反応せず NaI を透過する

<sup>\*30</sup> エネルギー角度分布の図 18 から分かるように、 $N$  として採用した点はエネルギー保存を満足している。

<sup>\*31</sup> 対生成には  $\gamma$  線は少なくとも 3MeV のエネルギーを保有している必要がある。Knoll p.54 図 2.20 を参照。

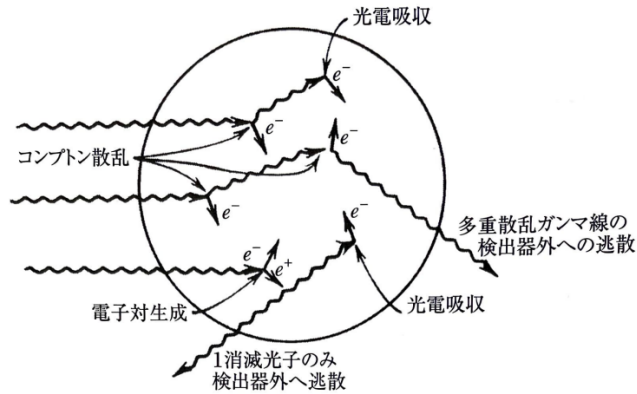


図 25: ガンマ線スペクトル測定時の中形の検出器の応答 (Knoll p.340 図 10.4 より引用) \*32

以上まとめれば、イベント数  $N$  に含まれるのは (a)(b) のパターンであり、本来考慮されるべき (c)(d) のパターンは無視されている。\*33これを補正することが本節での課題である。

NaI に侵入する光子を  $N_0$ 、透過する光子数を  $N_{tr}$  とおく。透過数には (c) によるもの  $N_{\sigma_a}$  を含む。また全エネルギーが吸収された光子数を  $N_{ab}(= N)$ 、その内訳として (a) によるものを  $N_\tau$ 、(b) によるものを  $N_{\sigma_s}$  とおく。このとき

$$N_0 = N_{ab} + N_{tr} \quad (6.7)$$

$$N_{ab} = N_\tau + N_{\sigma_s} \quad (6.8)$$

である。加えてシンチレータの厚さを  $l$ 、線減衰係数を  $\mu$ 、密度を  $\rho$  とすると、吸収物質の単位透過長さあたり  $\gamma$  線と相互作用する確率が一定であることに基づけば

$$N_{tr} - N_{\sigma_a} = N_0 e^{-\mu l} = N_0 e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \rho l} \quad (6.9)$$

が成立する。\*34ここで第 3 式で  $\frac{\mu}{\rho}$ 、 $\rho l$  という組み合わせを作ったがこれらはそれぞれ質量減衰係数、質量厚さと呼ばれる。線減衰係数の内訳は、光电吸収確率を  $\tau$ 、コンプトン散乱確率を  $\sigma = \sigma_s + \sigma_a$  \*35 とおけば

$$\mu = \tau + \sigma = \tau + \sigma_s + \sigma_a \quad (6.10)$$

となっていて、これを用いれば

$$N_{ab} : N_{\sigma_a} = \tau + \sigma_s : \sigma_a = \mu - \sigma_a : \sigma_a \quad (6.11)$$

が得られる。以上を総括すれば

\*32 Knoll p.336 に依れば、検出器の寸法が 1-2 cm を超えないことが小型の条件である。故に本実験で用いた検出器は中型と見なし、パターン (b) が生じると考えた。

\*33 (b) では、NaI 中での反跳電子・ $\gamma$  線の吸収はほぼ同時に行われると仮定している。

\*34 Knoll p.55, 56 参照。気をつけたいのは、(6.9) での「透過粒子数」は Knoll に記述されている透過数の式  $I = I_0 \exp[-\mu l]$  (p.55 2.20 式) での  $I$  とは意味が異なることである。Knoll ではコンプトン効果による散乱  $\gamma$  線は透過しない、あるいは明後日の方向を向くため計測されないという前提がある。しかし本節では後者も含めた「透過粒子数」を考えるので、式の形が変化する。

\*35 Knoll p.51-53 参照。  $\sigma_s$  は「コンプトン散乱」、 $\sigma_a$  は「コンプトン吸収」、 $\sigma$  は「全コンプトン」と記されている。今回では (b) が「コンプトン散乱」、(c) が「コンプトン吸収」に相当する。[4]



$$N_0 = \frac{N_{ab}}{(1 - e^{-\mu l}) \left(1 - \frac{\sigma_a}{\mu}\right)} = \frac{N_{ab}}{\left[1 - e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho l}\right] \left(1 - \frac{\sigma_a}{\mu}\right)} \quad (6.12)$$

が導けた。これが (a)~(d) の事例を全て加味したイベント数となる。

次に実際に数値計算する。NaI シンチレータの密度は  $\rho = 3.67 \text{ g/cm}^3$ 、厚さは  $l = 5.50 \text{ cm}$  である。線減衰係数は以下の図 26 の全減衰係数  $\frac{\mu_0}{\rho}$  のデータを用いる。コンプトン吸収  $\frac{\sigma_a}{\rho}$  もその図から読み取る。<sup>\*36</sup>実際に読み取った数値並びにそれから得られた透過分込みのカウント数  $N_0$  を表 8 に示す。

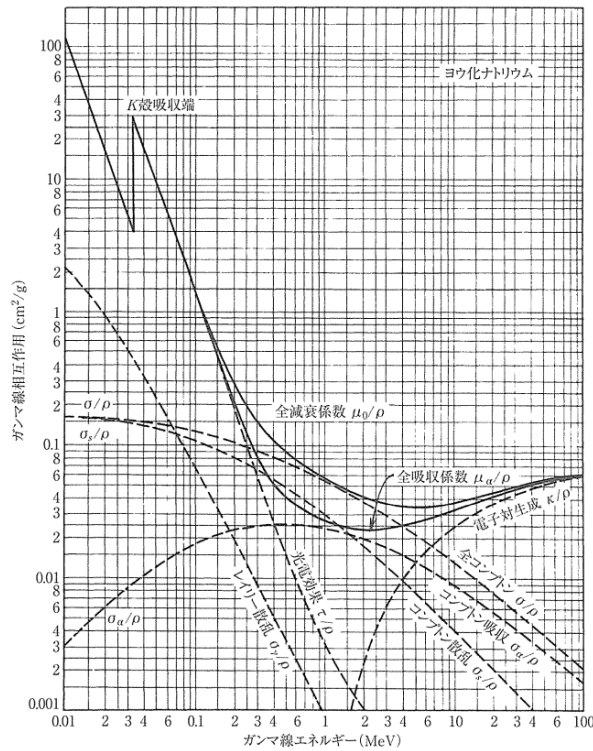


図 26: ヨウ化ナトリウム (NaI) 中の種々のガンマ線相互作用のエネルギー依存性 (Knoll, 放射線計測ハンドブック 図 2.18 より引用)

表 8: 各角度での質量減衰係数とコンプトン吸収

$\theta$ [°]	0	30	60	90	120	150
$\frac{\mu}{\rho}$ [cm <sup>2</sup> /g]	0.079	0.085	0.11	0.15	0.19	0.28
$\frac{\sigma_a}{\rho}$ [cm <sup>2</sup> /g]	0.025	0.026	0.026	0.025	0.024	0.023
$N_0$	2173	3271	3226	3250	3402	1542

以上の補正データを用いて、5.5 と同様の手順を行う。そうして得られた反応頻度角分布は図 27 である。

<sup>\*36</sup> 両対数グラフを目分量で読むのは結構無理があるように思う。故に値はそこそこ大雑把である。

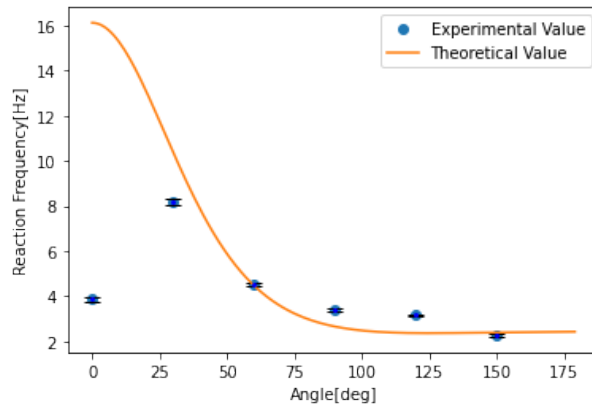


図 27: カウント数補正後の反応頻度比較

このとき係数  $C$  と重み付き 2 乗和  $d$  は次の通り。

$$C = 8.058 \quad (6.13)$$

$$d = 627.3 \quad (6.14)$$

理論値と実験値が寄り添い合ってきていることが  $d$  の減少からもわかり、以上の補正は妥当であった。ここからさらに 6.1 と同様にシンチレータの大きさを加味する補正を試みる。

### 6.2.3 シンチレータのサイズを考慮した反応頻度角度分布

6.1.1 章に依るとシンチレータのサイズを考慮した場合、主な散乱角は表 5 に相当し、実験で想定していた散乱角  $\theta$  とは異なっている。これを反応頻度分布にも応用する。つまり、 $\theta$  を  $\theta_{\text{inv}}$  に置き換えて 5.5 で定義した  $C$  を再考する。表 9 に結果を記す。ただしイベント数  $N$  には前節で補正したものをを用いた。

表 9: 各角度での比例定数  $C$

$\theta_{\text{inv}} [^\circ]$	17.49	30.68	55.42	84.09	109.29	129.17
$C$	1.924	6.337	8.102	10.38	10.79	7.612

6.2.1 章と同様  $0^\circ$  を外すと、比例定数  $C$  と重み付き 2 乗和  $d$  は

$$C = 7.819 \quad (6.15)$$

$$d = 539.7 \quad (6.16)$$

となる。<sup>\*37</sup> これを用いて反応頻度分布のグラフを示すと次の図 28 となる。

<sup>\*37</sup> 今回の  $d$  では  $\theta_{\text{inv}} = 17.49^\circ$  を除去している。

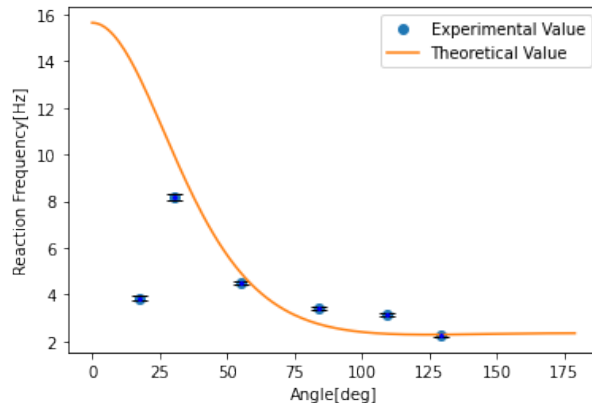


図 28: カウント数補正、シンチレータのサイズを加味した反応頻度比較

結果直感的にはさほど変化が無いように見える。もともと大きさを補正してもさほど影響はない可能性は高い。実際散乱角が増加するにつれて反応頻度の変化は理論上小さくなり、角度のズレによる変化は小さいと見込める。しかし着実に  $d$  は減少しているので、この補正も妥当であった。<sup>\*38</sup>

以上 3 節にわたり補正を行ってきたわけであるが、現状  $\theta_{inv} = 129.17^\circ$  を除いて実験値の点が微妙に曲線に乗っていないことを考えると、確実に Klein-仁科の式に従うとは断言できない。現時点で可能な補正は以上となる。<sup>\*39</sup>

では考察の最後に、 $0^\circ$  散乱の問題を改めて提示する。

#### 6.2.4 小さい散乱角における散乱断面積について

図 28 から明らかなように、散乱角が  $0^\circ$  に近づくにつれて実験値は理論値から大きく外れるようになる。前小節ではこれを外れ値として議論を進めたが、これがなぜ発生するのかについての考察を本小節にて行う。

今回の実験では  $\gamma$  線をシンチレータ ( $\text{LaBr}_3$ ) に入射し、そこで発生したコンプトン散乱によって生じた反跳電子を  $\text{LaBr}_3$ 、散乱  $\gamma$  線を  $\text{NaI}$  で検出した。その際にノイズを軽減する目的でそれぞれのシンチレータから

<sup>\*38</sup> 実は当初、執筆者は  $C$  の扱いとして平均をとる、という手法を用いていた。(以降係数平均法と呼ぶ。) 結論からいうと係数平均法より最小 2 乗法の方がよい fitting であるようだった。しかし一概にどちらの手法が最適であるかは決定できないのではないかと、という疑問が執筆者の脳内に居座り続けた。最小 2 乗法も広い意味では「平均」であるが、こちらはあくまでデータ点そのもの(反応頻度そのもの)を扱っており、係数  $C$  の平均とは意味が異なるからである。

このことをメンバーにぶつけたり調べるなりして得た回答は、「平均のほうが外れ値の影響を受けやすく、反対に最小 2 乗法は最もらしい値を優遇するので最小 2 乗法の方が適切」である。確かに、平均はただ無差別に平らにするが、最小 2 乗法は誤差範囲を重みとして加えている。そらそうやんか。言い訳をすれば執筆者は当初最小 2 乗法に重みを付けることを知らなかったのである。知らぬは罪である。しかしもう知ったので無罪放免である。

加えて言えば、最小 2 乗法は係数平均法とは(恐らく)異なり統計学理論に基づく手法であることも重要である。実際最小 2 乗法は、測定誤差が正規分布に従い、かつ各測定値が互いに独立なときの最尤法そのものである。本レポートで扱うデータは正規分布を仮定しているため、fitting に最小 2 乗法を用いるのは至極妥当な判断なのである。こうして執筆者の脳でたむろする厄介者は消え去り最小 2 乗法への信仰心が厚くなった訳だが、念のため、最小 2 乗法が適格ではない場合も当然あるんだぞ、と自分に釘を刺しておく。加藤 [6] p.151-152 参照。

<sup>\*39</sup> このほかに誤差として起こりうる原因として、燐光の問題を提起したい。Knoll p.247 によると、 $\text{NaI}$  では燐光が全体の発光の約 9% を占めていて、結果に悪影響をもたらしている可能性がある。しかしレポート作成者の眼精疲労を考慮して考察はここで一旦終了する。あとは未来の若者達に委ねたい。頑張るのだぞ。

の信号に閾値を設けた。コンプトン散乱によって反跳電子に与えられるエネルギーは入射光子を  $h\nu$  とすると

$$E_{\text{electron}} = h\nu \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{mc^2}(1 - \cos \theta)} \right] \quad (6.17)$$

と表わされる。散乱角  $\theta$  が小さいとき、(6.17) より反跳電子のエネルギーは 0 に近づく。

以上より、この小さくなったエネルギーがノイズ除去の際の閾値を超えられないことが原因なのではないかと考えた。しかし、それでは  $0^\circ$  における検出数は限りなく 0 に近くなってしまうため、実験結果との齟齬が生じる。

実際の実験では線源やシンチレータは有限の大きさを持つため、今回は  $\text{LaBr}_3$  のシンチレータを有限の大きさを持つとして (図 23)、散乱角  $0^\circ$  としての測定で実際に計測された最大散乱角を考えてみる。6.1.1 でも述べた通り、 $0^\circ$  の散乱を測定したときの最大散乱角は  $\theta = 10.85^\circ \pm 10^\circ$  である。その際の反跳電子のエネルギーは (6.17) より、入射光のエネルギーを 662 keV とすると約 51.8 keV となる。これが  $\text{LaBr}_3$  の閾値を超える場合は  $0^\circ$  においても検出数は 0 に近い値を取ることはいえない。

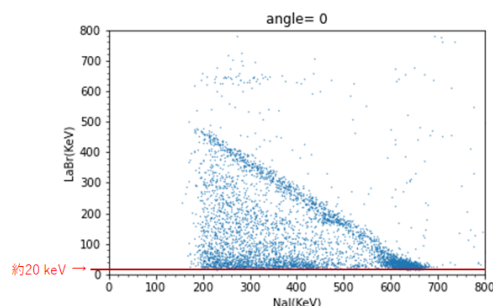


図 29:  $0^\circ$  散乱の散布図

今回の実験では図 29 より、閾値がエネルギーとしては約 20 keV (対応する散乱角は  $12.21^\circ$ ) に対応することがわかっている。<sup>\*40</sup>反跳電子のエネルギーがそのままこの閾値と比較することができると仮定すると、 $0^\circ$  測定時の最大散乱角では、閾値を超えて信号として認識されることがわかる。よって、 $0^\circ$  測定時のコンプトン散乱は散乱角の大きい一部のみが検出されていることが予想される。

これを確認するためにはさらなる実験を行う必要がある。線源を今回の実験よりも離して設置するなどして最大散乱角を下げることでコンプトン散乱で発生する信号は閾値を超えることができず、測定頻度が著しく低くなるはずだ。しかし、線源を離れたことによって  $\text{LaBr}_3$  シンチレータへの  $\gamma$  線の侵入頻度自体が低くなってしまうことも考慮に入れたいといけないうらう。<sup>\*41</sup>

## 7 結論

今回の実験ではコンプトン散乱を散乱角ごとに計測し、散乱角とエネルギーの関係、そして散乱頻度の角度依存性を理論により導き出された値と比較した。結果として、どちらの比較においても低散乱角では理論とず

<sup>\*40</sup> 図 29 の赤線を受信可能な反跳電子のエネルギーの閾値と考えた。

<sup>\*41</sup> メンバーの都合が合わなかったため、この追加実験を実行に移すことができなかった。もしこのことについて追及したい後続がいるのなら彼らに任せたい。

れるものとなった。その原因として考えられるのは理論では考慮されていないシンチレータの大きさや、シンチレータ内での光電吸収以外の電子発生などが大きく関わってくるのではないかと考えられる。

## 謝辞

本課題演習を遂行するにあたり、鈴木惇也助教授、TA の辻川吉明さん、藤中峻さんには終始多大なご指導ご鞭撻を賜りました。ここに深謝の意を表します。誠にありがとうございました。

## 参考文献

- [1] Glenn F. Knoll. 放射線測定ハンドブック. オーム社, 第 4 版, 2013. 神野郁夫・木村逸郎・阪井英次 訳.
- [2] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド. 素粒子標準模型入門. 丸善出版, 2013. 樺沢宇紀 訳.
- [3] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, An introduction to Quantum Field Theory
- [4] Nicholas Tsoufanidis. 放射線計測の理論と演習 (上) 基礎編. 現代工学社, 2003. 阪井英次 訳.
- [5] Nicholas Tsoufanidis. 放射線計測の理論と演習 (下) 応用編. 現代工学社, 2004. 阪井英次 訳.
- [6] 加藤貞幸. 真物理学シリーズ 26 放射線計測. 培風館, 第 3 版, 1998.
- [7] NIST. XCOM. Retrieved from <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>
- [8] NIST. The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty. Retrieved from <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?re>
- [9] 課題演習 A1 レポート. 2017 後期 - 2021 前期.