

Compton 散乱

2022 年度前期 課題演習 A1

奥本 成美 伊東 夏希 河津 智也 齋藤 一輝 西村 侑真 福本 優作

2022 年 10 月 6 日

目次

1	実験概要	2
2	実験目的	2
3	理論的背景	2
3.1	エネルギーと散乱角度の関係	2
3.2	相互作用表示と S 行列	3
3.3	Compton 散乱	4
4	実験方法	6
4.1	使用した実験装置	6
4.2	回路図	7
4.3	実験装置の配置	7
4.4	エネルギー較正用の測定	8
5	実験結果と解析	8
5.1	energy calibration	8
5.2	データの抽出	9
5.3	計測エネルギーの角度分布	10
5.4	反応頻度の角度分布	12
6	考察	14
6.1	計測エネルギーの角度分布	14
6.2	反応頻度の角度分布	18
7	結論	22
8	謝辞	22

1 実験概要

コンプトン散乱という結晶中の電子に入射した光が散乱されると散乱光の波長が入射光の波長よりも長くなる現象がある。この現象は古典電磁気学と光を波動と認めるだけでは説明できなかったが、アインシュタインの光量子仮説と量子電磁気学によって説明された。本実験では ^{137}Cs の線源と2つのシンチレーターを用いてコンプトン散乱を測定し、これらの理論に矛盾がないことを確認した。

2 実験目的

コンプトン散乱において、散乱後の電子と光子のエネルギーと散乱角度の関係式と微分散乱断面積を予想する Klein-仁科の式が理論として予言された。ある角度ごとにコンプトン散乱を測定することにより、これら2式に矛盾がないことを確認するのが本実験の目的である。

3 理論的背景

3.1 エネルギーと散乱角度の関係

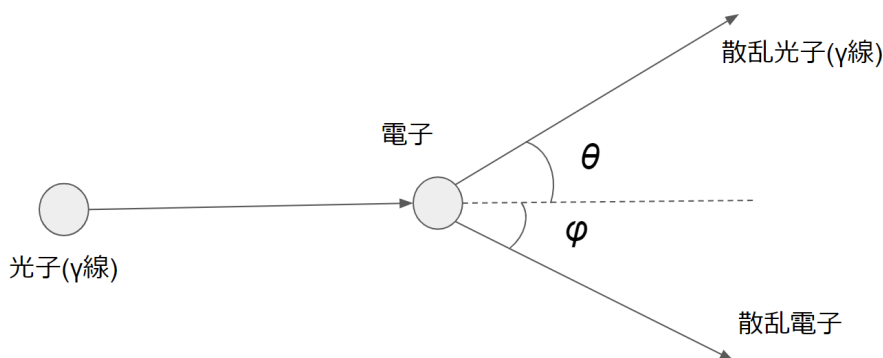


図1 散乱の図

コンプトン散乱を電子と光子の弾性衝突とみなす。散乱前後のエネルギー、運動量の関係を考える。入射前後の光子の振動数を ν, ν' 、電子の質量と運動量を m_e, p_e 、光速を c 、プランク定数を h とする。弾性衝突なのでエネルギーは保存し、

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4} \quad (1)$$

が成り立つ。運動量も保存するので

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi \quad (2)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - p_e \sin \phi \quad (3)$$

が成り立つ。 $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ なので、

$$h^2(\nu^2 - 2\nu\nu' \cos \theta + \nu'^2) = c^2 p_e^2 \quad (4)$$

これをエネルギー保存の式に代入することで

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (5)$$

これが今回検証するエネルギーと散乱角の関係式である。本実験では線源として ^{137}Cs を用いているため $h\nu \simeq 662\text{keV}$ 、電子の静止エネルギー: $m_e c^2 \simeq 511\text{keV}$ である。

3.2 相互作用表示と S 行列

3.2.1 相互作用表示

全系の Hamiltonian を自由場 Hamiltonian $H_0^{(S)}$ と相互作用 Hamiltonian 密度を空間積分して得られる摂動 Hamiltonian $H_1^{(S)}$ に分解する:

$$H^{(S)} = H_0^{(S)} + H_1^{(S)} \quad (6)$$

上付きの (S) は Schrödinger 表示を表す。状態ベクトル $\Phi^{(S)}$ および演算子 $O^{(S)}$ に対して次の変換を考える。

$$\Phi(t) = e^{iH_0^{(S)}t} \Phi^{(S)} \quad (7)$$

$$O(t) = e^{iH_0^{(S)}t} O^{(S)} e^{-iH_0^{(S)}t} \quad (8)$$

添え字のないものは相互作用表示を表す。 $\Phi(t)$ の時間発展は

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H_1 \Phi \quad (9)$$

となるが、時間発展演算子 $U(t, t_0)$ によって $\Phi(t)$ が

$$\Phi(t) = U(t, t_0) \Phi(t_0) \quad (10)$$

と時間発展することから Φ に関する偏微分方程式は

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1 U(t, t_0) \quad (11)$$

と等価である。この形式解は

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_1(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1) H_1(t_2) + \cdots \\ & + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_1) H_1(t_2) \cdots H_1(t_n) + \cdots \end{aligned} \quad (12)$$

で与えられる。

3.2.2 S 行列

S 行列を次のように定義する。

$$S = U(\infty, -\infty) \quad (13)$$

先の時間発展演算子の形式解から S 行列は具体的に次のように書ける。

$$S = S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_1(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1) H_1(t_2) + \dots \\ &+ (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_1) H_1(t_2) \dots H_1(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

3.3 Compton 散乱

3.3.1 Compton 散乱の \mathcal{M} 行列

Compton 散乱を記述する相互作用 Hamiltonian は

$$H_1 = -ie \int d^4x \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu^{(e)} \quad (16)$$

で与えられる。ここで $A_\mu^{(e)}$ は外部ポテンシャルを表す。

Compton 散乱を最低次で扱うためには $S^{(2)}$ を扱うことになるため 2 次の項を求める。

$$S_{fi} = (-e)^2 \int d^4x_1 \int_{t_2 < t_1} d^4x_2 H_1 \quad (17)$$

光子場の行列要素と電子場の行列要素を代入して計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (-e)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \epsilon_\mu^{(\alpha)} e^{-ik \cdot x_1} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega' V}} \epsilon_\nu^{(\alpha')} e^{-ik' \cdot x_1} \right] \\ &\times \left[\sqrt{\frac{m}{E'V}} \bar{u}'_\alpha e^{ip' \cdot x_1} \right] \langle 0 | T(\psi_\beta(x_1) \bar{\psi}_\gamma(x_2)) | 0 \rangle (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} \left[\sqrt{\frac{m}{EV}} u'_\delta e^{ip \cdot x_2} \right] \\ &+ \left\{ \begin{array}{l} k \leftrightarrow k' \\ \alpha \leftrightarrow \alpha' \end{array} \right. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\langle 0 | T(\psi_\beta(x_1) \bar{\psi}_\gamma(x_2)) | 0 \rangle$ は電子の伝播関数といい電子場の理論から具体的に計算すると

$$\langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) | 0 \rangle = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d^4p \frac{-i\gamma \cdot p + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip \cdot (x-x')} \quad (19)$$

となる。この結果と x_1, x_2 に関する積分を行うと最終的に S 行列は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + p' - k - k') \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega' V}} \sqrt{\frac{m}{E'V}} \sqrt{\frac{m}{EV}} (-e)^2 \bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}') \\ &\left[\gamma \cdot \epsilon^{(\alpha)} \frac{-i\gamma \cdot (p - k') + m}{i[(p - k')^2 + m^2 - i\epsilon]} \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha')} + \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha')} \frac{-i\gamma \cdot (p + k) + m}{i[(p + k)^2 + m^2 - i\epsilon]} \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha)} \right] u^{(s)}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (20)$$

S 行列から状態遷移に関する部分を抜き出したものを \mathcal{M} 行列といい、次のように定義する。

$$S_{fi} = \delta_{fi} - (2i)^4 \delta^{(4)}(p + p' - k - k') \sqrt{\left(\frac{m}{EV}\right) \left(\frac{m}{E'V}\right) \left(\frac{1}{2\omega V}\right) \left(\frac{1}{2\omega' V}\right)} \mathcal{M}_{fi} \quad (21)$$

後に使うことになるため $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ を計算すると

$$\frac{1}{2} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{(2m)^4} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4(\epsilon^{(\alpha)} \cdot \epsilon^{\alpha'})^2 \right] \quad (22)$$

となる。

3.3.2 散乱断面積

一般に2つの粒子が衝突して N 個の粒子が生成した場合の断面積 $d\sigma$ は

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2/T}{v_{rel}/V} \times \prod_{n=1}^N \frac{V d^3 p_n}{(2\pi)^3} \quad (23)$$

で与えられる。これを Compton 散乱に適用すると

$$d\sigma = (2\pi)^4 \frac{1}{v_{rel}} \frac{1}{4EE'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2m)^2 \frac{|k|^2 d|k| d\Omega}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{|k'|^2 d|k'| d\Omega'}{(2\pi)^3 2\omega'} \delta^{(4)}(p + p' - k - k') \quad (24)$$

となる。実験室系での微分散乱断面積を求めるためには k' に関する積分を先に行い、次の関係式

$$d|k| \delta(E + E' - k - k') = \frac{1}{\partial(E + \omega)/\partial(|k|)} \quad (25)$$

と、力学的な関係

$$E' = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos \theta} + m^2 \quad (26)$$

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos \theta)} \quad (27)$$

を用いて計算すると、Klein-Nishina の公式

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{lab} = \left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right) \quad (28)$$

を得る。

4 実験方法

4.1 使用した実験装置

シンチレーター

電子や光子のエネルギーにより励起されることで発光し、アナログ信号を発信する装置。NaI と LaBr₃ を用いた。

光電子増倍管 (PMT)

シンチレーターからの信号を増幅する装置。

線源

¹³⁷Cs、⁶⁰Co、²⁰Na をエネルギー較正に、¹³⁷Cs を本実験に用いた。

鉛塊

放射線を遮蔽する物体。散乱 γ 線を検出するシンチレーターが線源の γ 線を検出しない様に置いた。

伝送線

PMT から送られたアナログ信号を伝える装置。情報は光速で伝わることを利用して、DIVIDER から ADC に直接送る信号を伝送線を長くすることで遅延させて GATEGENERATOR からの信号と合わせた。

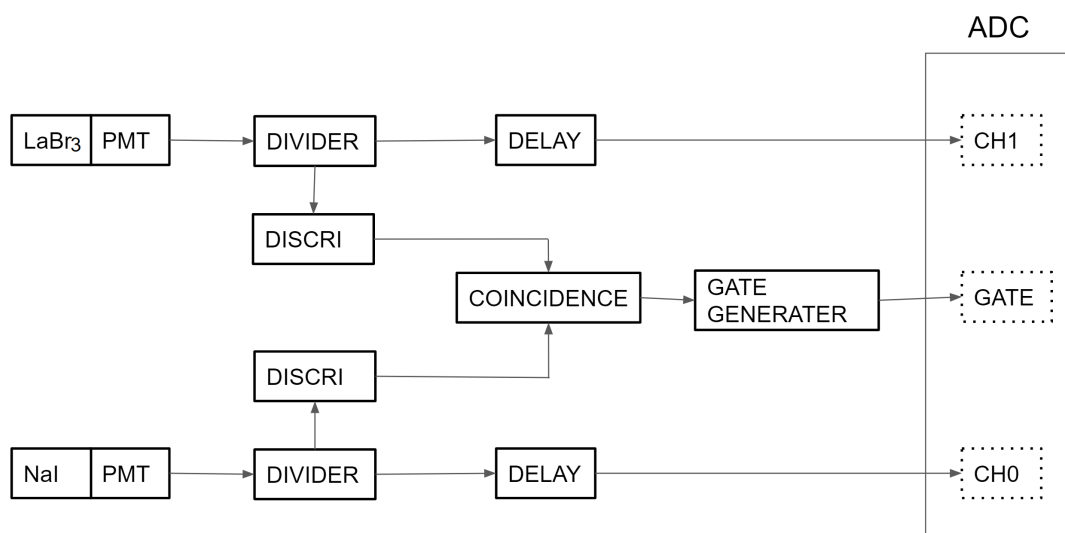
NIM 規格回路モジュール

デジタル信号を扱う回路モジュール。PMT からのアナログ信号をあるしきい値以上の時にデジタル信号に変換する DISCRIMINATOR や DIVIDER、COINCIDENCE、GATEGENERATOR などを使用した。

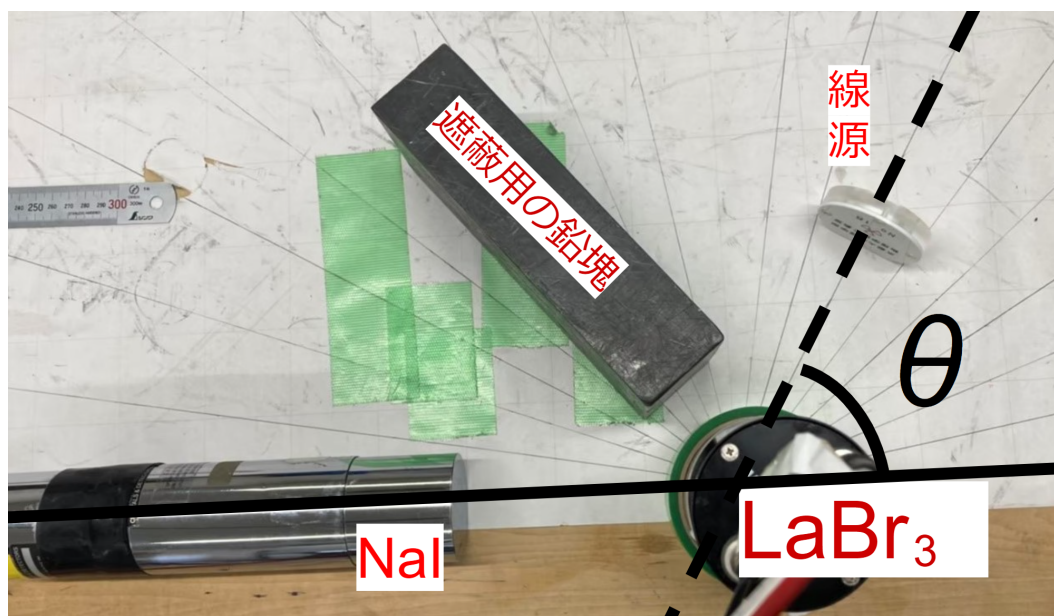
CAMAC 規格回路

コンピュータ制御を行なう回路モジュール群。COINCIDENCE で得られた時間幅で PMT からのアナログ信号を積分しデジタル信号に変える ADC などを使用した。

4.2 回路図



4.3 実験装置の配置



この図は実験風景を撮ったものである。2章で述べた「ある角度ごとにコンプトン散乱を測定する」の「角度」とは図中の θ であり、2つのシンチレーターの位置は変えず線源を移動することでのみ「角度」を変えた。LaBr₃のシンチレーターを机に対して直立させているのは対称性の良い配置にすることで実験結果に配置や形状の影響が比較的現れにくいようにするためである。(6章でこの配置の影響について考察する。)

4.4 エネルギー較正用の測定

^{137}Cs 、 ^{60}Co 、 ^{20}Na の 3 つの線源をそれぞれ COINCIDENCE のスイッチを片方だけ入れることにより NaI と LaBr₃ を 1 つずつ合計 6 回測定した。

5 実験結果と解析

5.1 energy calibration

実験で得られた ADC の値をエネルギーの値に変更するため、ADC の値とエネルギーとの間の関係式を求める。まず、ADC 分布のピークをガウス分布で近似する。

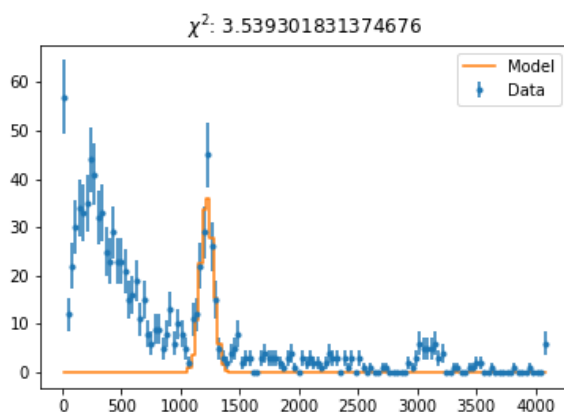


図2 NaI シンチレータに ^{22}Na を当てた際の ADC 分布

図2の場合、 ^{22}Na の特性から一つ目のピークが 511keV に、二つ目のピークが 1274.5keV にそれぞれ対応していると考えられる。このように既知のエネルギーのピークを用いて ADC 値とエネルギーの対応の組を複数個求める。

また、上記のガウス近似の際には最小二乗法を用いた。最小二乗法とは、データを y_i 、近似に使用するモデル (今回はガウス関数) を f 、モデルのパラメータを p 、誤差 (今回は $\sqrt{y_i}$) を σ_i として、

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{y_i - f(x_i; p)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (29)$$

が最小になるように各パラメータを決定する近似法である。今回はガウス関数の平均、標準偏差、全範囲での和の3つが変数となる。

今回はピークをフィッティングすることが目的であるため、 x_i を ADC 値で各ピークの周辺 500 程度の範囲に絞って χ^2 を求め最小化した。

NaI、LaBr₃ それぞれについて ^{137}Cs の 662keV、 ^{60}Co の 1170keV と 1330keV、 ^{22}Na の 511keV と 1274.5keV、合計 5 つのピークをフィッティングした。誤差はフィッティング結果のガウス関数の標準偏差 s とフィッティングに用いたデータ数 N から $\frac{s}{\sqrt{N}}$ とした。

表 1 calibration のフィッティングの結果

	662keV	1170keV	1330keV	511keV	1274.5keV
NaI	1599.88	2858.86	3242.47	1222.63	3090.24
NaI 誤差	3.9	4.56	5.29	4.37	12.56
LaBr ₃	1205.24	2171.64	2475.53	926.5	2380.23
LaBr ₃ 誤差	1.62	1.79	2.32	2.09	6.18

ここで、ADC の値と実際のエネルギーの間に線形的な関係があると仮定する。つまり ADC 値を X 、エネルギーを E として以下のような関係式が成り立つとする。

$$E = aX + b \quad (30)$$

NaI、LaBr₃ それぞれで a 、 b を求めることで、ADC 値をエネルギーに変換できるようにする。 a 、 b の 2 つをパラメータとし再び最小二乗法を用いた。結果のグラフ及び表を以下に示す。

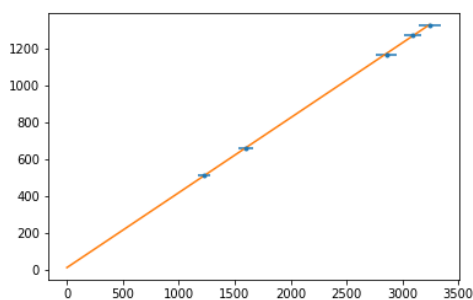


図 3 NaI の calibration 結果

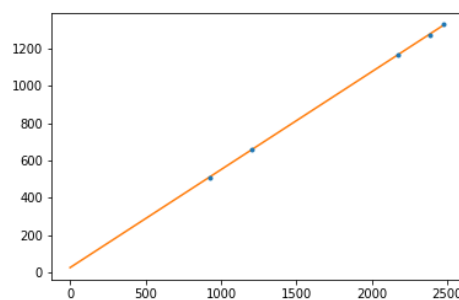


図 4 LaBr₃ の calibration 結果

表 2 calibration 結果

	a	b	a 誤差	b 誤差
NaI	0.4066	12.5254	0.001368	2.7431
LaBr ₃	0.5263	25.3252	0.001121	1.6786

5.2 データの抽出

最小二乗法によって求めた a 、 b を用いて式 (30) により ADC 値をエネルギーの変換し、角度ごとに散布図を作成し、図 5 に示した。コンプトン散乱が起きていると考えられるデータ点を抽出するため、二つのシンチレータの合計値が 630 keV 以上 750 keV 以下のものうち、散布図を用いて密度が高い部分を LaBr₃ シンチレータが示すエネルギー値に条件付けすることにより角度ごとに抽出し、図 5 においては赤色で示した。LaBr₃ シンチレータが示すエネルギー値の条件付けは表 3 のとおりである。以下の章では抽出したデータのみを用いて解析を行った。

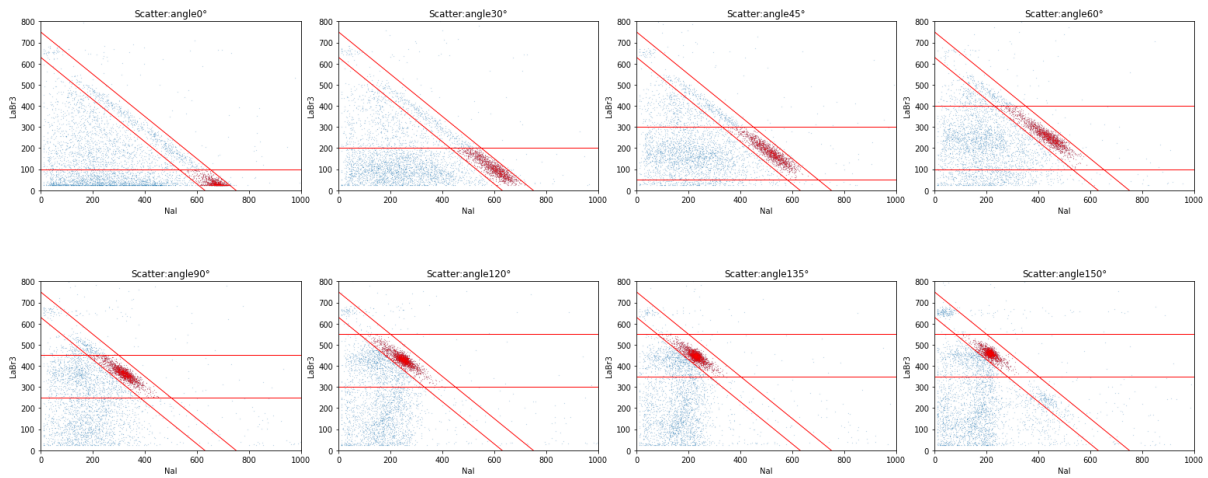


図 5 散布図

表 3 データの抽出範囲 (LaBr₃ シンチレータの条件)

angle[°]	下限 [keV]	上限 [keV]
0	0	100
30	0	200
45	50	300
60	100	400
90	250	450
120	300	550
135	350	550
150	350	550

5.3 計測エネルギーの角度分布

5.3.1 ガウス分布によるフィッティング

各々のシンチレータで観測されたエネルギー分布のピーク値を求めるため、抽出したデータ点を角度ごとにヒストグラムを作成し、ガウス分布でフィッティングした。また、二つのシンチレータで観測されたエネルギーの和についても同様の作業を行った。以降、二つのシンチレータで観測されたエネルギーの和を「エネルギー和」と呼称する。これらの結果を図 6、7 に示した。緑の誤差棒付きデータ点が LaBr₃ シンチレータ、オレンジが NaI シンチレータ、青がエネルギー和のデータをそれぞれ指し、各色に対応する曲線がガウス分布の近似曲線を表している。ただし、0°における LaBr₃ シンチレータのデータは ADC 値が 0 であるエネルギー値が含まれる範囲に観測回数の最大値があり、ガウス分布のピークのある値より小さい値の範囲に見られる右肩上がりの曲線に相当する部分が観測されなかったためガウス分布によるフィッティングを行わず、例外として扱った。

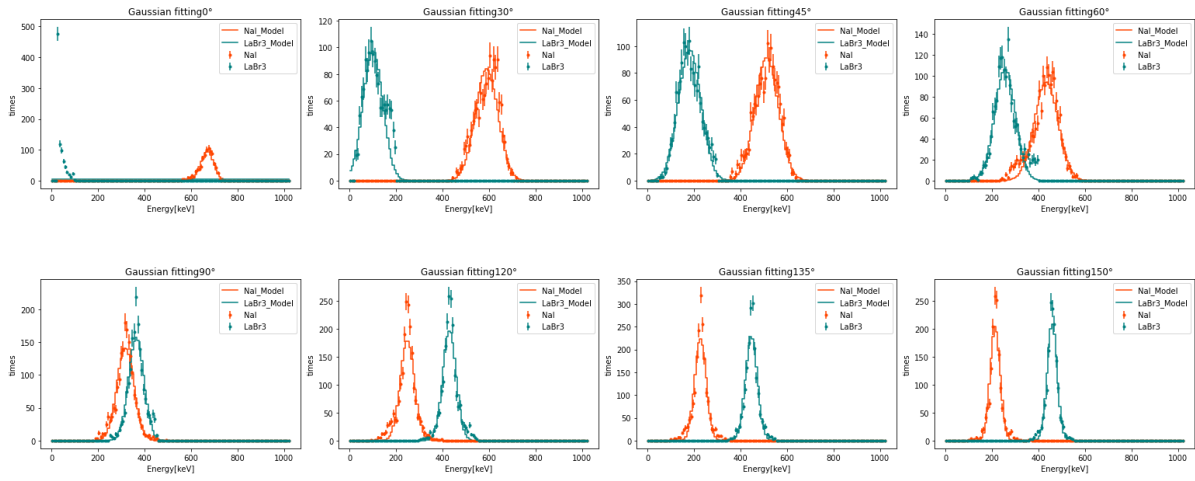


図6 NaI と LaBr₃ のエネルギー分布ヒストグラム

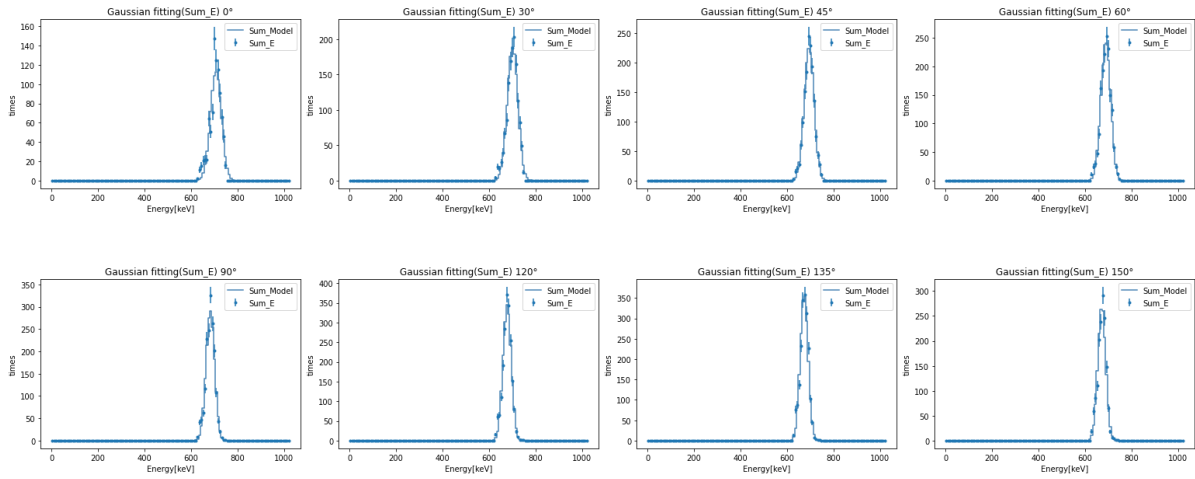


図7 エネルギー和の分布ヒストグラム

5.3.2 エネルギーの角度分布

前節で近似したガウス分布のピークが示すエネルギー値の角度分布を図8にプロットした。また、誤差*1はNaI と LaBr₃ については、

$$error = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Gauss}}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left(\frac{E-b}{a}\sigma_a\right)^2 + \sigma_b^2} \quad (31)$$

とし、エネルギー和については

$$error_{Sum} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Gauss}}{\sqrt{N}}\right)^2 + \sigma_{b_{NaI}}^2 + \sigma_{b_{LaBr_3}}^2} \quad (32)$$

とした。ただし σ_{Gauss} , E はそれぞれガウス分布で近似した際の標準偏差、最頻値となるエネルギー値、 N はガウス近似に用いたデータ点の数、 σ_a, σ_b はエネルギー較正によって算出した a, b の誤差の値である (表2 参

*1 縦軸が示すエネルギー値の目盛り幅に対して小さく、図8ではエラーバーが確認できないが表示はしている。

照)。ここで NaI シンチレータで観測されたエネルギー値は散乱後の γ 線のエネルギーに、LaBr₃ シンチレータで観測されたエネルギーは散乱後の電子のエネルギーに対応しているとして、理論値を実線にて重ね描きした。

図 8 で使用した値を表 4 に示す。

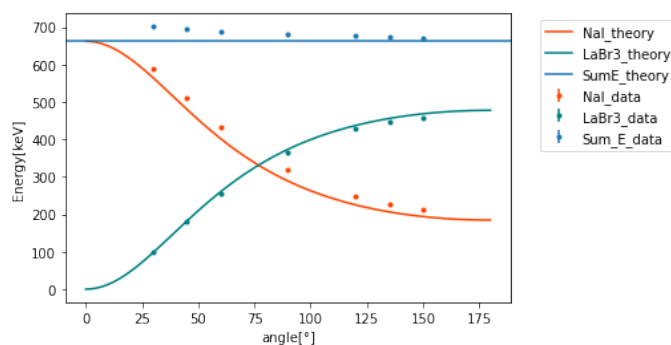


図 8 エネルギーの角度分布

表 4 観測したエネルギー値

角度 [°]	NaI[keV]	LaBr ₃ [keV]	エネルギー和 [keV]	σ_{NaI} [keV]	σ_{LaBr_3} [keV]	σ_{Sum} [keV]
0	669.089771		706.660565	3.639960		0.796256
30	589.306268	100.433373	700.617194	3.606164	2.037969	0.614274
45	512.175393	181.703691	694.339846	3.467878	2.119102	0.544609
60	433.137463	256.043212	688.663398	3.333334	2.068859	0.515570
90	318.062876	364.327438	682.348269	3.060224	1.993490	0.437008
120	248.414657	429.910672	677.154361	2.937797	1.995519	0.397020
135	227.296476	446.605521	673.336236	2.892495	1.989133	0.378697
150	213.312563	458.515420	671.574305	2.877670	1.992806	0.438804

5.4 反応頻度の角度分布

抽出したデータの数 N 、計測時間 t 、散乱した γ 線が NaI シンチレータに吸収される確率 ϵ を用いて、各角度の 1 秒毎の反応回数は以下のように求められる。

$$\frac{N}{t\epsilon}$$

吸収確率 ϵ は角度によって異なることに注意する。

5.4.1 吸収確率

散乱角度によってシンチレータに入射する γ 線のエネルギーが変化し、それによってシンチレータで吸収される確率は変化する。

今回の解析で N として抽出したのは二つのシンチレータで観測したエネルギーの和が 662keV 付近になる場

合のみであり、つまり入射した γ 線のエネルギーが NaI に全て吸収される場合のみであることから、NaI で光電吸収が起きる確率のみを考える。

角度 θ で散乱する γ 線のエネルギーは式 (5) で求められる。各エネルギーについて光電吸収が起こる確率を表す減衰係数 μ を以下に示す。 μ の値は NIST XCOM を参照した。[1]

表 5 減衰計数 μ

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
エネルギー [keV]	662	564.1	479.9	401.8	288.4	224.9	206.1	193.7
μ [cm/g]	0.008544	0.01252	0.01867	0.02952	0.07225	0.1448	0.1853	0.2211

使用した NaI シンチレータは厚みが 5.5cm、密度は 3.67g/cm^3 であることから、光電吸収されず透過する確率は $e^{-5.5 \times 3.67 \times \mu}$ である。

よって吸収される確率 ϵ は

$$\epsilon = 1 - e^{-5.5 \times 3.67 \times \mu} \quad (33)$$

で求められる

5.4.2 理論値との比較

各角度について N、t、p、それらから求められる $\frac{N}{tp}$ 、及びクライン仁科の式から導かれる理論値を以下に示す。

表 6 反応頻度の実験値

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
データ数 N[回]	885	1379	1522	1626	1719	1964	1950	1496
計測時間 t[s]	421.844	376.99	490.612	620.62	807.073	918.32	973.348	731.619
吸収確率 ϵ	0.1584	0.2233	0.3139	0.4489	0.7673	0.9462	0.9762	0.9884
反応頻度 (実験値)[回/s]	13.2438	16.3803	9.8803	5.8362	2.7756	2.2603	2.0521	2.0686
反応頻度 (理論値)[回/s $\times 10^{-28}$]	3.4201	2.2048	1.4411	0.9476	0.5618	0.5000	0.5012	0.5066

実験値と理論値に大きな差がある。理論値に角度によらず一様な定数 C をかけ実験値と値がもっとも近くなるようにする。

C を変数として最小二乗法を用い、実験値が理論値にもっとも近くなる定数 C を求めた。

$$\chi^2 = 499.808884$$

$$C = 4.8571 \times 10^{28}$$

反応頻度の実験値 $\frac{N}{te}$ と理論値に上記の C を掛けた値を重ねたグラフを以下に示す。

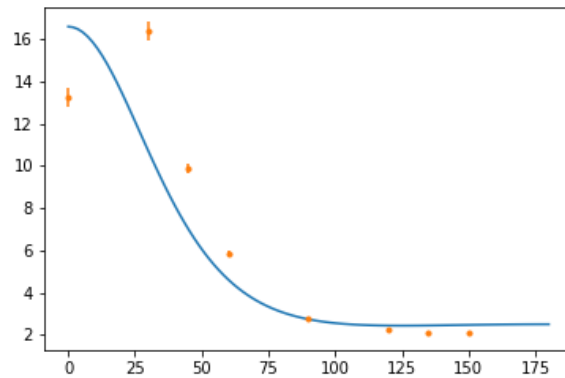


図9 反応頻度の理論値と実験値

6 考察

まず 0° の扱いについて考える。理論値における 0° は γ 線が電子と反応せず透過したものである。もちろんこの時の反跳電子のエネルギーは 0 である。そのため本実験ではこの事象を測定できない。^{*2} 限りなく 0° に近い散乱もコインシデンスの閾値を超えないためデータは得られない。具体的には、反跳電子を検出する閾値は 25.3252 keV であり、これに対応する散乱角を後で述べる方法で逆算すると 14.23° であった。つまり今回の実験のセットアップではこの角度より小さい散乱角のコンプトン散乱のデータを得られない。これらの理由により以下の考察では 0° は除いて考えることにした。

6.1 計測エネルギーの角度分布

改めて、エネルギー角度分布のグラフを提示する。(図 8)

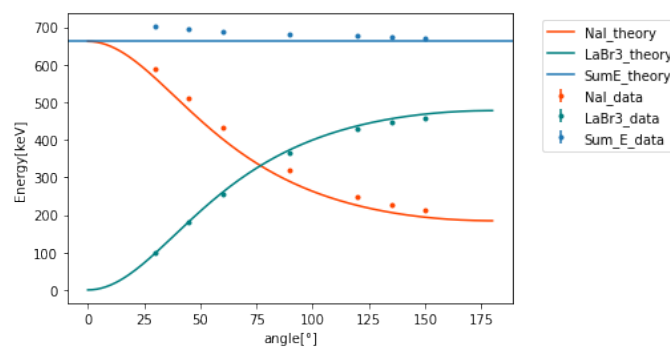


図8 エネルギーの角度分布

概形は理論値に近いように見えるが、それぞれの角度における理論値とのずれは無視できない。そこでそれぞれの角度 (θ) の実験値が理論式 (34)(35) において何度にあたるか逆算した散乱角 (θ') を求めた。具体的に

^{*2} 実験やる前に気づけ。

は反跳電子のエネルギーを E_e 、散乱後の γ 線のエネルギーを E_γ として

$$E_e = h\nu \left[1 - \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta'_L)} \right] \quad (34)$$

$$E_\gamma = \frac{h\nu}{1 + \alpha(1 - \cos \theta'_N)} \quad (35)$$

を用いた。^{*3} $h\nu$ には 662 keV を代入した。

その結果を次の表に示す。

表 7 実験値から逆算した散乱角

θ [°]	30	45	60	90	120	135	150
θ'_L [°]	29.54	44.77	58.87	88.68	114.94	127.30	139.38
θ'_N [°]	25.21	39.27	53.69	80.49	106.57	118.44	128.58

LaBr₃ の小さい角度を除くすべての角度で大きくズレが生じていた。またすべてのズレは本来の角度より小さい方にズレており、散乱角が大きいほどズレの程度が大きいことが見て取れた。

ズレが生じる理由としてシンチレーターの大きさを加味していないことに由来すると考えた。

6.1.1 シンチレーターのサイズの影響についての考察

シンチレーターのサイズ^{*4}は次の通り。

表 8 シンチレーターのサイズ

シンチレーター	NaI	LaBr ₃
直径 [cm]	5.7	4.8
高さ [cm]	5.5	4.7

簡単な図を用いて説明する。図 10、図 11^{*5}は上から見た実験配置図で、LaBr₃ の中心 (点 O) を中心として、二種のシンチレーターの中心を通る直線 (OB) を一つの軸とした二次元直交座標を導入したものである。線源はシンチレーターと比べて小さいため点 (A) として考えている。線分 AB の中点を点 H、直線 OH と円の交点を点 H に近い方から点 P、点 Q とおいた。

以下で具体的に、点 P で散乱する、つまり散乱角が最小になる場合の詳しい計算を説明する。NaI シンチレーターの大きさは後で考慮する。まず、三角形 OAH を用いて線分 AH、線分 OH を求めた。

$$AH = l \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = l \cos \frac{\theta}{2}$$

$$OH = l \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = l \sin \frac{\theta}{2}$$

^{*3} 添え字の L は LaBr₃、N は NaI の略である。

^{*4} シンチレーターを円柱としている。

^{*5} もちろん簡略図であり、大きさの比率は全く正確ではない。

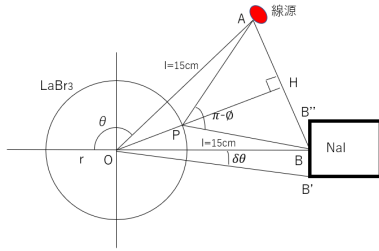


図 10 配置図 (最小散乱角)

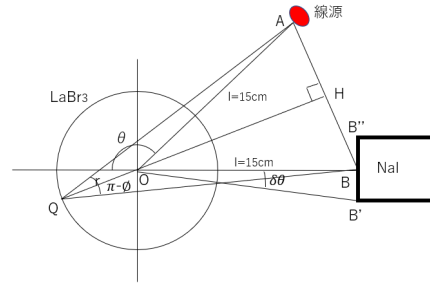


図 11 配置図 (最大散乱角)

次に、三角形 APH に着目すると

$$PH = OH - OP = l \sin \frac{\theta}{2} - r$$

であるので、

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi_{\min}}{2} \right) = \left[\tan \frac{\phi_{\min}}{2} \right]^{-1} = \frac{AH}{PH}$$

よって、

$$\phi_{\min} = 2 \arctan \left(\frac{l \sin \frac{\theta}{2} - r}{l \cos \frac{\theta}{2}} \right) \quad (36)$$

全く同様に最大散乱角も求められる。

$$\phi_{\max} = 2 \arctan \left(\frac{l \sin \frac{\theta}{2} + r}{l \cos \frac{\theta}{2}} \right) \quad (37)$$

最後に、NaI シンチレーターの大きさを考慮する。点 B'、点 B''、角度 $\delta\theta$ を図は図の通りとする。散乱角を最小にするには点 B' で、最大にするには点 B'' で吸収される必要がある。計算を簡単にするため、点 B を点 B' (点 B'') で置き換えるのに対応して θ を $\theta - \delta\theta$ ($\theta + \delta\theta$) と置き換えて計算した。最終的だった計算式は次のようになった。

$$\phi_{\min} = 2 \arctan \left(\frac{l \sin \frac{\theta - \delta\theta}{2} - r}{l \cos \frac{\theta - \delta\theta}{2}} \right) \quad (38)$$

$$\phi_{\max} = 2 \arctan \left(\frac{l \sin \frac{\theta + \delta\theta}{2} + r}{l \cos \frac{\theta + \delta\theta}{2}} \right) \quad (39)$$

ここで主な線分の長さは $r = OP = OQ = 2.4$ cm、 $l = OA = OB = 15.0$ cm、 $BB' = BB'' = 2.85$ cm である。また $\delta\theta = \arctan (BB'/OB) = 10.76^\circ$ である。

以上を用いて各々の角度における散乱可能な角度を算出したものを表 9、図 12 示す。^{*6}

150° を除くすべての角度で逆算した散乱角は範囲内に収まっていた。

しかし、電子と γ 線のエネルギーから逆算した散乱角に無視できないほど大きな違いがあった。もし理論通りのコンプトン散乱が起きているなら、どちらから散乱角を逆算しても同じような値が出るはずだ。

^{*6} ϕ_{mid} は ϕ_{max} と ϕ_{min} の平均である。

表9 散乱可能範囲、逆算した散乱角

θ [°]	30	45	60	90	120	135	150
ϕ_{\max} [°]	56.93	70.75	84.34	111.14	137.42	150.44	163.41
ϕ_{\min} [°]	0.83	16.01	31.52	63.61	97.08	114.28	131.74
ϕ_{mid} [°]	28.88	43.38	57.95	87.38	117.25	132.36	147.57
θ'_L [°]	29.54	44.77	58.87	88.68	114.94	127.30	139.38
θ'_N [°]	25.21	39.27	53.69	80.49	106.57	118.44	128.58

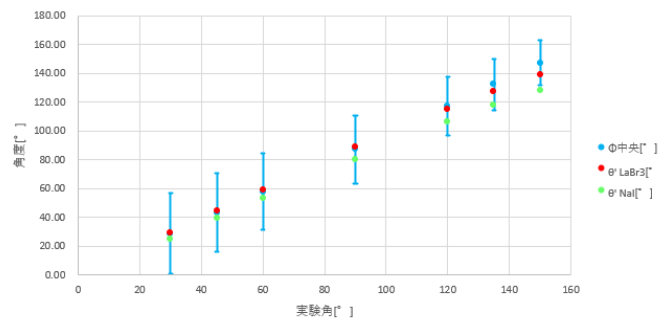


図12 散乱可能範囲と逆算した散乱角

6.1.2 キャリブレーションに関する補正

ここで再度、図8を確認してほしい。エネルギー和が理論値から主に小さい散乱角で外れていた。我々は本実験の前にキャリブレーションを一度行い、本実験が終了した後にキャリブレーションは行わなかった。^{*7}このことから、実験が進むにつれて室内環境（温度など）が変化し、最初に行ったキャリブレーションからのズレが大きくなっていったことが原因だと思われる。

そこで散乱角を逆算する時に使った理論式 (34)(35) において $h\nu$ に代入する値を 662 keV の代わりにそれぞれの角度のエネルギー和の実験値を用いて計算を行った。

その結果を次の表10、図13に示す

表10 実験値から逆算した散乱角修正版

θ [°]	30	45	60	90	120	135	150
θ''_L [°]	30.57	45.01	59.20	87.02	115.23	127.09	137.90
θ''_N [°]	31.33	43.49	57.00	83.34	109.40	120.98	131.17

やはり NaI の 150° を除いてすべての角度で範囲内に収まっていた。またそれぞれのシンチレーターにおける逆算した散乱角の値の差が縮まったことが見て取れた。(表11)

このことから、今回の補正が妥当だと分かる。しかし大きな散乱角でのばらつきは大きいままである。大きな散乱角では理論曲線の傾きが小さいため少しの誤差で逆散乱角が大きく変わるため、このずれは深刻ではな

^{*7} いや、やっつけよ。

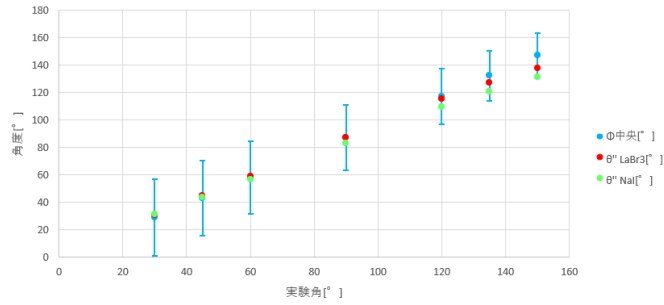


図 13 散乱可能範囲と逆算した散乱角修正版

表 11 逆算した散乱角のばらつきの変化

$\theta [^\circ]$	30	45	60	90	120	135	150
$\theta'_L - \theta'_N [^\circ]$	4.33	5.50	5.18	8.20	8.37	8.86	10.80
$\theta''_L - \theta''_N [^\circ]$	-0.76	1.52	2.20	3.68	5.83	6.11	7.73

いと考えた。以上を踏まえて、今回のデータはエネルギーについての理論式に従うとみてよいと結論付けた。

これまでの補正により、本来の散乱角 (θ) の実験において、実際に起こった散乱のうち最も代表的な散乱角 (θ_{inv}) として、 θ'_L と θ'_N の中央値を与えておく。^{*8}

表 12 代表的な散乱角

$\theta [^\circ]$	30	45	60	90	120	135	150
$\theta_{inv} [^\circ]$	30.95	44.25	58.10	85.18	112.32	124.04	134.54
$\theta - \theta_{inv} [^\circ]$	-0.95	0.75	1.90	4.82	7.68	8.96	15.46

ここで表 12 の最下段を見ると散乱角 (θ) が大きいほど逆算した散乱角 (θ_{inv}) が本来の角度と比べて小さいことがわかった。この理由は次のように考察した。

まず線源に近いところでコンプトン散乱はよく起こる。なぜなら透過粒子数は吸収物質に進入すればするほど減少するからである。一方で散乱角は実際にコンプトン散乱した場所が線分 AB に近いほど小さくなる。シンチレータ内でコンプトン散乱した場所が、線源に近いということと、線分 AB に近いということの二つの相関性は散乱角 (θ) が大きいほど高い。よって上のように散乱角 (θ) が大きいほど $\theta - \theta_{inv}$ が大きい。

6.2 反応頻度の角度分布

ここからは反応頻度の角度分布について考察する。まず 0° を除いて再度、最小二乗法を行った反応頻度角度分布のグラフを提示する。(図 14)

理論曲線に従うとは言えなかった。この時の χ^2 の値は以下ようになった。

$$\chi^2 = 325.28172$$

^{*8} もちろんこれらは散乱可能範囲内にあることは確認している。

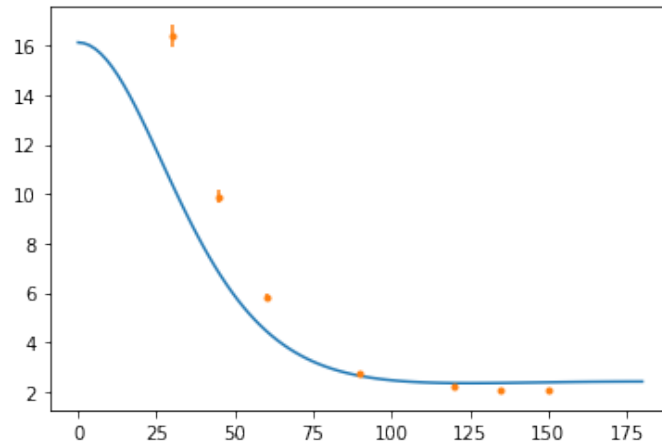


図 14 反応頻度角度分布

6.2.1 シンチレーターのサイズの影響についての考察

先ほど考察で示したように、シンチレーターのサイズの影響で、本来の散乱角と実際に検出されている散乱角に違いがあった。これを踏まえて、図 14 で実験値の横軸の値を表 12 の θ_{inv} に置き換えた。その結果を次に示す。

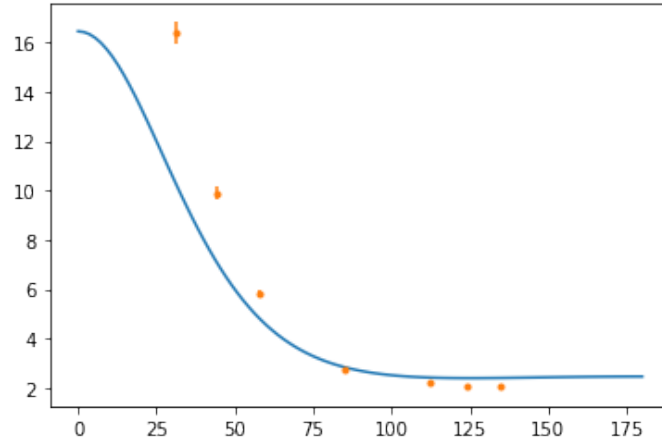


図 15 反応頻度角度分布 (逆散乱角)

この時の χ^2 の値は以下ようになった。

$$\chi^2 = 272.84643$$

χ^2 の値はやや小さくなったがほとんど変わらなかった。グラフを見ると散乱角が小さいところで理論値よりも多く検出されていた。相対的に散乱角が大きいところでの検出数が少ないことがわかった。このためカウント数 N の補正を行うことにした。

6.2.2 カウント数 N についての補正

下の図を用いて説明する。

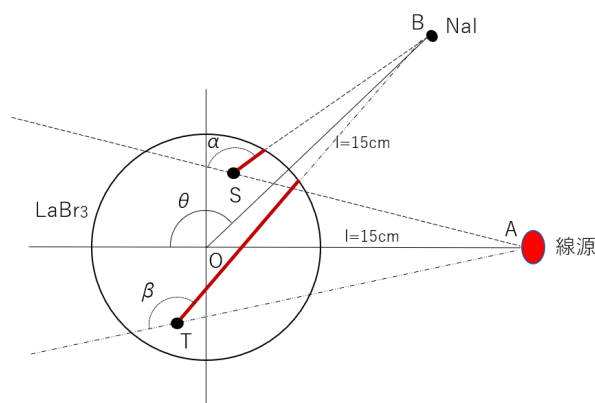


図 16 N の補正についての説明

散乱角が大きくなればなるほど散乱 γ 線のエネルギーが小さくなる。このエネルギーが小さいと散乱した後、 LaBr_3 内で吸収され NaI に届かずカウントされないものが出る。このため散乱角 (θ) が大きいカウント数が少なくなりやすい。 NaI に近いところで反応した場合 (点 S) と、 NaI から遠いところで反応した場合 (点 T) を比べると LaBr_3 から脱出するまでの距離が長い方がカウントされにくい。これにより実際の散乱角が小さいものがより多くカウントされるため表 12 の最下段の結果も納得できる。 $(\alpha < \theta < \beta)$

これを補正するために以下の方法を用いた。

まず上の図を直交座標に見立てて、反応する場所の期待値を概算する。対称性より横軸上にあると仮定して、計算を簡単にするためこの直線上 (線分 MN 上) の期待値を全体の期待値とする。

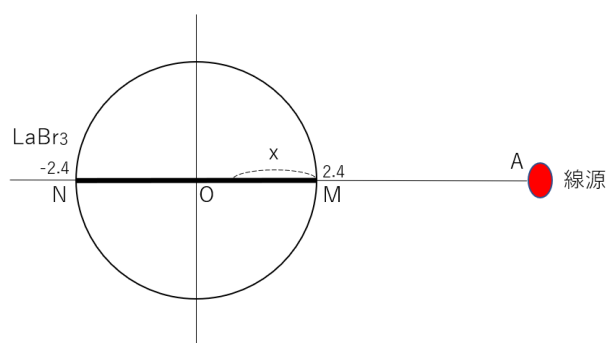


図 17 反応場所の期待値

LaBr_3 の密度は 5.29 g/cm^3 、 662 keV に対応する減衰係数は $0.0718 \text{ cm}^2/\text{g}^{*9}$ である。上の図で x まで進入

*9 NIST XCOM より

する確率は

$$\exp(-x \times 5.29 \times 0.0718) = e^{-ax}$$

よって進入距離 x で反応する確率は

$$ae^{-ax}$$

よって x の期待値は

$$\int_0^{4.8} xae^{-ax} dx \simeq 1.4$$

したがって反応する場所の期待値*10は上の座標系で点 E(1, 0) とした。

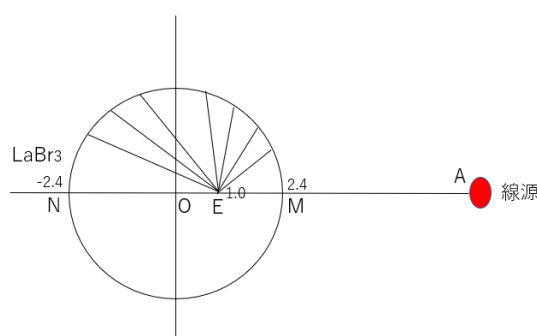


図 18 $l(\theta)$

それぞれの散乱角 θ における NaI シンチレーターの位置を $B(\theta) = (-15 \cos \theta, 15 \sin \theta)$ として*11、線分 EB(θ) で LaBr₃ 内の部分の長さを $l(\theta)$ とする (図 18)。各々の角度での値は以下ようになった。(表 13)

表 13 透過距離

θ [°]	30	45	60	90	120	135	150
$l(\theta)$ [cm]	3.235	3.041	2.796	2.249	1.780	1.611	1.493

これを用いて 5.4 節で行った計算の N を補正した。具体的には表 6 のカウント数 N に $e^{\nu \times 5.29 \times l(\theta)}$ をかければよい。ここで ν は LaBr₃ の減衰係数である。これらの値と結果を表 14 に示す。

表 14 反応頻度の補正

θ [°]	30	45	60	90	120	135	150
ν	0.07932	0.08884	0.1018	0.1431	0.2037	0.2360	0.2642
修正した反応頻度 [回/s]	63.6562	41.2559	26.3059	15.2311	15.3875	15.3346	16.6687

再度、最小二乗法を用いて fitting を行うと図のようになった。

*10 概算なので大体の値である

*11 $\theta = 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150$

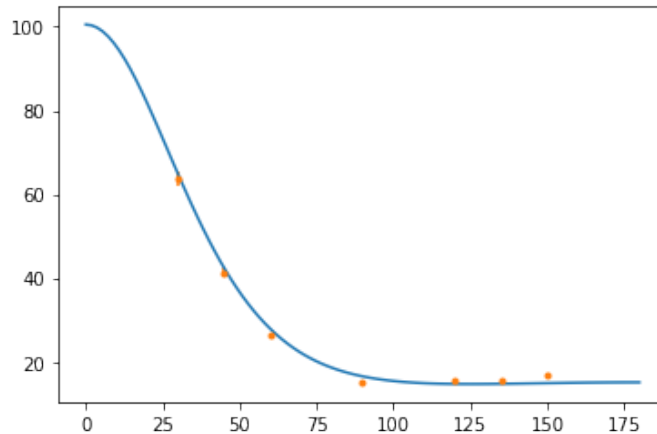


図 19 カウント数を補正した反応頻度

$$\chi^2 = 42.91885$$

グラフと χ^2 の値から見て取れるように、理論値にかなりの精度で一致していることが分かった。したがって今回得られたデータが Klein-仁科の式と矛盾しないと確かめられた。

以上を持って考察を終了した。

7 結論

今回の実験ではコンプトン散乱を様々な角度で計測した。得られたデータがエネルギーについての理論式と、反応頻度分布についての Klein-仁科の式に従うかどうかを確かめた。どちらも理論値から外れていたが、シンチレーターの大きさや吸収物質の透過確率を考慮すると得られた結果は妥当なものであるという結論に至った。

今回の実験で 0° のデータがうまく得られなかった。セットアップの工夫として、コインシデンスを取らずに、 LaBr_3 を透過して NaI に届くものを数え上げれば、反応頻度角度分布については欲しいデータが得られたかもしれない。さらに線源の指向性を強めることができれば、シンチレーターの大きさの影響を小さくすることができ、すべての角度においてより好ましいデータが得られたと考える。

また、シンチレーターの吸収確率がエネルギーに依存しているために、検出されたエネルギー分布をそのまま Gaussian Fitting するのが妥当であったとは言えない。他の関数で Fitting をする、あるいは吸収確率を考慮した補正を組み込んでからガウス関数でフィッティングを行うと精度が上がったと考えられる。これらを今後の展望とする。

8 謝辞

本課題演習を遂行するにあたり、指導教官として終始多大なご指導を賜った、鈴木惇也助教に深謝いたします。また TA の竹内広樹氏、佐藤高嶺氏には実験の遂行、並びに本論文の作成にあたり、適切なお助言、ご協力を賜りました。誠にありがとうございました。

参考文献

- [1] NIST XCOM: Element/Compound/Mixture https://physics.nist.gov/cgi-bin/Xcom/xcom3_2