

2022年後期 A1 コンプトン散乱の検証

北出直也 堀祐輔 松田和樹 中村七海

2023年4月17日

Contents

1	序論	3
2	理論的背景	3
2.1	エネルギー	3
2.2	微分断面積	4
2.2.1	S 行列展開	4
2.2.2	ファインマンダイアグラムとファインマン振幅	5
2.2.3	微分断面積	7
2.2.4	ファインマン振幅の計算	9
3	実験方法	11
3.1	概要	11
3.2	器具について	11
3.3	セットアップ方法	11
3.3.1	器具の配置	11
3.3.2	回路図	12
3.4	本実験の手順	12
4	実験結果と解析	15
4.1	エネルギー較正	15
4.2	実験結果	15
4.3	エネルギーの角度分布	16
4.4	コンプトン散乱のデータの抽出	16
4.5	微分散乱断面積	16
5	考察	20
5.1	エネルギーの角度分布に関する考察	20
5.2	微分散乱断面積に関する考察	20
5.2.1	γ 線の LaBr_3 シンチレータ内での減衰に関する考察	20
5.2.2	γ 線の NaI シンチレータの透過に関する考察	23
6	結論と反省	25
6.1	ファインマン図の選択と実験結果	25
6.2	まとめと今後の展望	25

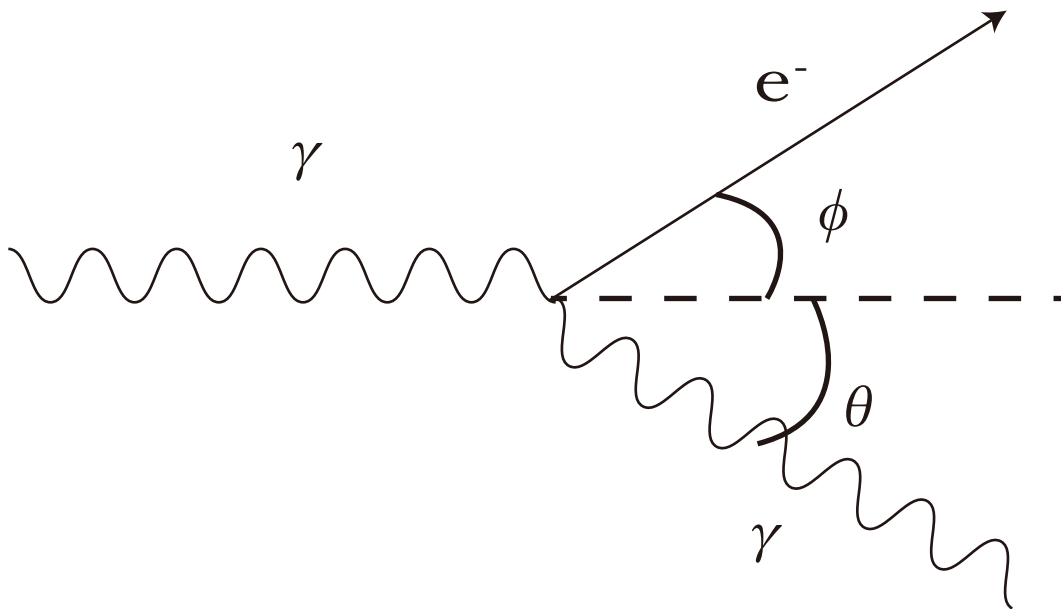


Figure 2.1: コンプトン散乱

1 序論

コンプトン散乱は物質中に γ 線が入ったときに、光の粒子性により、 γ 線が物質内の電子とぶつかって電子と γ 線を出す反応である。今回は、コンプトン散乱の散乱角ごとのエネルギー分布と断面積の分布が理論と整合するかを考えた。

2 理論的背景

2.1 エネルギー

コンプトン散乱の入射粒子と散乱された粒子の角度ごとのエネルギーの関係を求める。図 2.1 のように電子に γ 線が入射するときを考える。この時、弾性散乱が起きると考え、エネルギーと運動量が保存するとする。電子の質量を m として、エネルギー保存の式は、

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4} \quad (2.1)$$

となる。運動量保存の式は、進行方向は、

$$\frac{h\nu}{c} = p \cos \phi + \frac{h\nu'}{c} \cos \theta \quad (2.2)$$

であり、進行方向と垂直な方向では、

$$0 = p \sin \phi - \frac{h\nu'}{c} \sin \theta \quad (2.3)$$

である。(2.2),(2.3) は、

$$p \cos \phi = \frac{h}{c}(\nu - \nu' \cos \theta) \quad (2.4)$$

$$p \sin \phi = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta \quad (2.5)$$

なので、両辺を二乗してたしあげると、

$$p^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 [(\nu - \nu' \cos \theta)^2 + (\nu' \sin \theta)^2] \quad (2.6)$$

$$p^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 [\nu^2 - 2\nu\nu' \cos \theta + \nu'^2] \quad (2.7)$$

また、(2.1) は

$$h^2(\nu - \nu')^2 + 2mc^2 h(\nu - \nu') = (cp)^2 + (mc^2)^2 \quad (2.8)$$

$$h^2\nu\nu'(1 - \cos \theta) - mc^2 h(\nu - \nu') = 0 \quad (2.9)$$

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2}(1 - \cos \theta)} \quad (2.10)$$

2.2 微分断面積

コンプトン散乱において、どの角度に散乱するかの確率を与える式 (クライン-仁科の式) を導出する。

2.2.1 S 行列展開

電子陽電子場と電磁場が相互作用している系を考える。系のハミルトニアン H を自由粒子のハミルトニアン H_0 と相互作用ハミルトニアン H_1 に分けて考える。

$$H = H_0 + H_1 \quad (2.11)$$

相互作用表示を採用すると、系の状態ベクトル $|\Phi(t)\rangle$ 、相互作用ハミルトニアンは次の式を満たす。

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = H_1(t) |\Phi(t)\rangle \quad (2.12)$$

$$H_1(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_1 e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (2.13)$$

ここで、S 行列を始状態から終状態に変換する演算子と定義する。

$$|\Phi(\infty)\rangle = S |\Phi(-\infty)\rangle = S |i\rangle \quad (2.14)$$

S 行列を計算する。(2.12) を解くと、初期条件 $|\Phi(-\infty)\rangle = |i\rangle$ より、

$$|\Phi(t)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_1(t_1) |\Phi(t_1)\rangle \quad (2.15)$$

この方程式を逐次代入によってとくと、

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int \int \dots \int dt_1 dt_2 \dots dt_n T[H_1(x_1) H_1(x_2) \dots H_1(x_n)] \quad (2.16)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int \int \dots \int d^4 x_1 d^4 x_2 \dots d^4 x_n \mathcal{H}_1(x_1) \mathcal{H}_1(x_2) \dots \mathcal{H}_1(x_n) \quad (2.17)$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \quad (2.18)$$

ただし、 $T[\dots]$ は時間順序化積、 $\mathcal{H}_1(x)$ はハミルトニアン密度である。

2.2.2 ファインマンダイアグラムとファインマン振幅

個別の終状態 $|f\rangle$ に遷移する確率に対応する確率振幅は

$$\langle f|\Phi(\infty)\rangle = \langle f|S|i\rangle = S_{fi} \quad (2.19)$$

であり、終状態は

$$|\phi(\infty)\rangle = \sum |f\rangle S_{fi} \quad (2.20)$$

と展開できる。まず、個別の終状態での確率振幅を求める。ここで、電子-陽電子場と電磁場が相互作用する系の H_1 を代入する。

$$H_1 = -eN[\bar{\psi}(x)A(x)\psi(x)] \quad (2.21)$$

$$= -eN[(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}(x)^-(x))(A^+(x) + A^-(x))(\psi^+(x) + \psi^-(x))]_x \quad (2.22)$$

$\psi^+(\bar{\psi}^-)$, $\bar{\psi}^+(\psi^-)$, $A^+(/A^-)$ は電子、陽電子、光子の消滅 (生成) 演算子である。(2.18) を用いて各摂動を低次から計算する。この相互作用は一時の摂動項では、各項の選び方によって $2^3 = 8$ 通りの過程を表すが、どの過程もエネルギー保存則と運動量保存則を両立できないので、

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = 0 \quad (2.23)$$

よって二次の摂動項を考える必要がある。二次の摂動項は、wick の定理を用いて、

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 [N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}]] \quad (2.24)$$

$$+ N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}] \quad (2.25)$$

$$+ N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta\psi)_{x_2}] \quad (2.26)$$

$$+ N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta\psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta\psi)_{x_2}] \quad (2.27)$$

$$+ N[(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}] \quad (2.28)$$

$$+ N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta\psi)_{x_2}] \quad (2.29)$$

と書ける。コンプトン散乱の過程は

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- \quad (2.30)$$

と書けるので、 ψ_2 において始状態に電子を消滅させる演算子 $\psi^+(x_2)$ を選び、終状態に電子を生成する $\bar{\psi}^-(x_1)$ を選ぶような過程を考えればよい。ここで、 $A^+(x_1)$ と $A^+(x_2)$ はどちらも始状態の光子を消滅させ、 $A^-(x_1)$ と $A^-(x_2)$ はどちらも終状態の光子を生成することができるので、ファインマンダイアグラムは図 2.2 の二つであり、二次の摂動項は (2.25) に対応し、以下のようになる。

$$S^{(2)} = S_a + S_b \quad (2.31)$$

$$S^a \equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha iS_F A_\alpha^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2) \quad (2.32)$$

$$S^b \equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\beta iS_F A_\beta^-(x_2) A_\alpha^+(x_1) \psi^+(x_2) \quad (2.33)$$

ただし、伝播関数は

$$\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) = -\bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\alpha(x_1) = iS_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \quad (2.34)$$

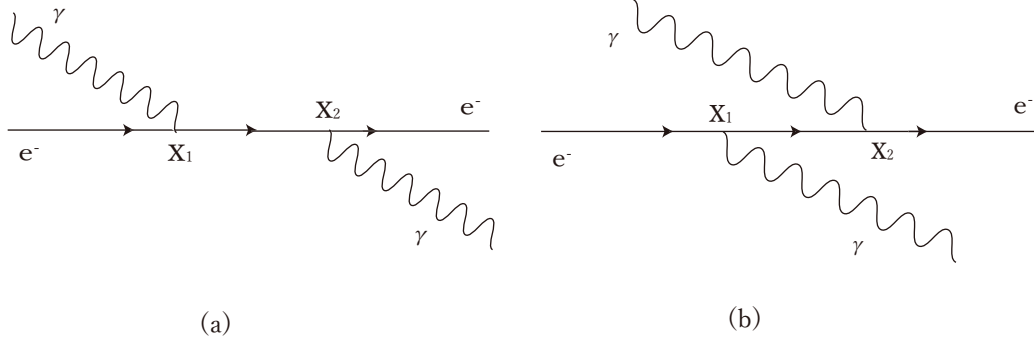


Figure 2.2: ファインマンダイアグラム

である。これらの行列要素を計算する。運動量空間で $\langle f | S_a | i \rangle, \langle f | S_b | i \rangle$ を求める。伝播関数を運動量空間に移行すると、

$$\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) = iS_F(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p i S_F(p) e^{ip(x_1 - x_2)} \quad (2.35)$$

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (2.36)$$

ただし、 ϵ は微小量である。それ以外の演算子も、四成分スピノル u, v, \bar{u}, \bar{v} と、光子の偏極ベクトル ϵ を用いて、以下のように書ける。ただし、一電子状態、一光子状態を $|e^- \mathbf{k}\rangle, |\gamma \mathbf{k}\rangle$ とする。

$$\psi^+(x) |e^- \mathbf{p}\rangle = |0\rangle \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} u(\mathbf{p}) e^{-ipx} \quad (2.37)$$

$$\bar{\psi}^+(x) |e^+ \mathbf{p}\rangle = |0\rangle \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \bar{v}(\mathbf{p}) e^{-ipx} \quad (2.38)$$

$$A_{\alpha}^+(x) |\gamma \mathbf{k}\rangle = |0\rangle \sqrt{\frac{1}{2VE_{\omega_{\mathbf{k}}}}} \epsilon_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \quad (2.39)$$

$$\bar{\psi}^-(x) |0\rangle = \sum |e^- \mathbf{p}\rangle \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \bar{u}(\mathbf{p}) e^{ipx} \quad (2.40)$$

$$\psi^-(x) |0\rangle = \sum |e^+ \mathbf{p}\rangle \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} v(\mathbf{p}) e^{ipx} \quad (2.41)$$

$$A_{\alpha}^-(x) |0\rangle = \sum |\gamma \mathbf{k}\rangle \sqrt{\frac{1}{2VE_{\omega_{\mathbf{k}}}}} \epsilon_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{ikx} \quad (2.42)$$

これらをもとに散乱振幅を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle f | S_a | i \rangle = & -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left[\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}}} \bar{u}(\mathbf{p}') e^{ip'x_1} \right] \left[\sqrt{\frac{1}{2VE_{\omega_{\mathbf{k}'}}} \not{\epsilon}(\mathbf{k}') e^{ik'x_1} \right] \\ & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q S_F(q) e^{-iq(x_1 - x_2)} \\ & \left[\sqrt{\frac{1}{2VE_{\omega_{\mathbf{k}}}}} \not{\epsilon}(\mathbf{k}) e^{ikx_2} \right] \left[\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \bar{u}(\mathbf{p}') e^{ipx_2} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

x_1, x_2 について積分を行うと、

$$\int d^4x_1 e^{ix_1(p'+k'-q)} \int d^4x_2 e^{ix_2(p-q-k)} \quad (2.44)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) \quad (2.45)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) \quad (2.46)$$

よって、エネルギーと運動量は二つの結節点で保存し、過程全体でも保存する。(2.46) を (2.43) に代入すると、

$$\langle f | S_a | i \rangle = \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{\omega_{\mathbf{k}}}}} \sqrt{\frac{1}{2VE_{\omega_{\mathbf{k}'}}} \right] \mathcal{M}_a \quad (2.47)$$

ここで、 \mathcal{M}_a はファインマン図 (a) に対応するファインマン振幅であり、

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') i S_F(q = p + k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \quad (2.48)$$

となる。同様にファインマン図 (b) に対応するファインマン振幅は、

$$\mathcal{M}_b = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) i S_F(q = p - k') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') u(\mathbf{p}) \quad (2.49)$$

である。これより、求める量は、始状態における粒子の四元運動量を $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ ($i = 1, 2$)、終状態における粒子の四元運動量を $p'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f)$ ($f = 1, 2$) とすると、

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \prod_i \sqrt{\frac{1}{2VE_i}} \prod_f \sqrt{\frac{1}{2VE'_f}} \prod_l \sqrt{2m_l} \mathcal{M} \quad (2.50)$$

ただし、添え字 l はすべての外線レプトンにつける番号であり、 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$ である。

2.2.3 微分断面積

単位時間あたりの遷移確率 ω は、

$$\omega = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \quad (2.51)$$

と書ける。デルタ関数の定義より、

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_V d^3\mathbf{x} e^{ix(\sum p'_f - \sum p_i)} \quad (2.52)$$

であり、これを用いて時間、体積について有限なものにしておく。 T, V が十分に大きいとき、

$$\left[\lim_{T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_V d^3\mathbf{x} e^{ix(\sum p'_f - \sum p_i)} \right]^2 \simeq TV (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \quad (2.53)$$

と近似できる。このとき、(2.51) は、 $T \rightarrow \infty$ で、

$$\omega = V (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \prod_i \left(\frac{1}{2VE_i} \right) \prod_f \left(\frac{1}{2VE'_f} \right) \prod_l \sqrt{2m_l} |\mathcal{M}|^2 \quad (2.54)$$

これはある状態 $|f\rangle$ に遷移する確率なので、この終状態の各粒子に範囲を設けて、その範囲内の終状態に遷移する確率は、 ω に次の状態数をかける必要がある。

$$\prod_f \frac{V d^3\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^2} \quad (2.55)$$

微分断面積は、このような終状態のグループへの遷移が起こる確率を、散乱中心の数と入射粒子の流速密度で割ったものである。体積 V のなかに散乱中心が一つ含まれ、入射粒子の流速密度は、衝突する粒子の相対速度 v_{rel} を用いて、 v_{rel}/V と書ける。ここで、 v_{rel} は

$$E_1 E_2 v_{rel} = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} \quad (2.56)$$

をみたら。微分断面積の式は、

$$d\sigma = \omega \frac{V}{v_{rel}} \prod_f \frac{V d^3 \mathbf{p}'_f}{(2\pi)^2} \quad (2.57)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p_i \right) \frac{m^2}{E_1 E_2 v_{rel}} \left(\prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (2.58)$$

$$= f(p'_1, p'_2) \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) d^3 \mathbf{p}'_1 d^3 \mathbf{p}'_2 \quad (2.59)$$

である。ただし、

$$f(p'_1, p'_2) \equiv \frac{m^2}{16\pi^2 v_{rel} E_1 E_2 E'_1 E'_2} |\mathcal{M}|^2 \quad (2.60)$$

であり、 \mathbf{p}'_2 についての積分を実行すると、

$$d\sigma = f(p'_1, p'_2) \delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2) |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| d\Omega'_1 \quad (2.61)$$

となる。 $|\mathbf{p}'_1|$ についても積分して、デルタ関数からもとまる $|\mathbf{p}'_1|$ を $|\mathbf{p}'_1|$ と置くと、

$$d\sigma = f(p'_1, p'_2) |\mathbf{p}'_1|^2 d\Omega'_1 \left(\frac{\partial(E'_1 + E'_2)}{\partial|\mathbf{p}'_1|} \right)^{-1} \quad (2.62)$$

コンプトン散乱では、始状態で、電子の運動量 $p = (E, \mathbf{p})$ 、スピン状態は $u = u_r(\mathbf{p})$ 、光子の運動量は $k = (\omega, \mathbf{k})$ 、偏極状態は $\epsilon = \epsilon_s(\mathbf{p})$ と置き、終状態で電子の運動量 $p' = (E', \mathbf{p}')$ 、スピン状態は $u' = u'_r(\mathbf{p}')$ 、光子の運動量は $k' = (\omega', \mathbf{k}')$ 、偏極状態は $\epsilon' = \epsilon'_s(\mathbf{p}')$ と置く。この時、この過程の微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 \omega'}{16\pi^2 E E' \omega v_{rel}} \left(\frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} \right)^{-1} |\mathcal{M}|^2 \quad (2.63)$$

と書かれる。極座標の基準軸は \mathbf{k} の向き、 (θ, ω) は \mathbf{k}' を表す極座標の角度成分、 θ は光子の散乱角なので、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \omega \omega' \cos \theta$ である。四元運動量保存則より、 $p + k = P' + k'$ である。実験室系で、

$$p = (m, 0, 0, 0) \quad (2.64)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}' \quad (2.65)$$

$$E' = \sqrt{m^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} = \sqrt{m^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos \theta} \quad (2.66)$$

$$pk = p'k + k'k = pk' + k'k \quad (2.67)$$

$$v_{rel} = 1 \quad (2.68)$$

と書ける。これらより、

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos \theta)} \quad (2.69)$$

が成立し、

$$\frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} = \frac{m\omega}{E'\omega'} \quad (2.70)$$

と書けるので、微分断面積の式は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 |\mathcal{M}|^2 \quad (2.71)$$

と書ける。

2.2.4 ファインマン振幅の計算

ここからは $|\mathcal{M}|$ を計算する。(2.48,2.49) は、

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b \quad (2.72)$$

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') iS_F(q = p + k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) \quad (2.73)$$

$$\mathcal{M}_b = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) iS_F(q = p - k') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') u(\mathbf{p}) \quad (2.74)$$

であった。これは、 $f_1 \equiv p + k, f_2 \equiv p - k'$ を用いると、

$$\mathcal{M}_a = -ie^2 \frac{\bar{u}' \not{\epsilon}' (f_1 + m) \not{\epsilon} u}{2pk} \quad (2.75)$$

$$\mathcal{M}_b = -ie^2 \frac{\bar{u}' \not{\epsilon}' (f_2 + m) \not{\epsilon}' u}{2pk'} \quad (2.76)$$

と書ける。(2.71) は電子のスピン、光子の偏極を指定したもののなので、始状態でこれらを平均し、終状態について和を取ったような式が求めるものである。ここで、偏極に対する和、

$$\sum_{r \in \text{pole}} \epsilon_\mu^r \epsilon_\nu^{r*} = -g_{\mu\nu} \quad (2.77)$$

と、スピノルに対する和

$$\sum_{s=1,2} u_j^s(p) \bar{u}_k^s(p) = \frac{(\not{p} + m)_{jk}}{2m} \quad (2.78)$$

を用いて、

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2 = \sum_{\text{spin}} \sum_{\text{pol}} [|\mathcal{M}_a|^2 + |\mathcal{M}_b|^2 + \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b] \quad (2.79)$$

$$= \frac{e^4}{64m^2} \left[\frac{X_{aa}}{(pk)^2} + \frac{X_{bb}}{(pk')^2} - \frac{X_{ab} + X_{ba}}{(pk)(pk')} \right] \quad (2.80)$$

$$X_{aa} = \text{Tr}[\gamma^\beta (f_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\alpha (f_1 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m)] \quad (2.81)$$

$$X_{bb} = \text{Tr}[\gamma^\alpha (f_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma_\beta (f_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m)] \quad (2.82)$$

$$X_{ab} = \text{Tr}[\gamma^\beta (f_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\beta (f_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m)] \quad (2.83)$$

$$X_{ba} = \text{Tr}[\gamma^\alpha (f_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} + m) \gamma_\alpha (f_1 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m)] \quad (2.84)$$

と書ける。 X を計算する。

$$k \leftrightarrow -k' \quad (2.85)$$

の置き換えに、

$$f_1 \leftrightarrow f_2 \quad (2.86)$$

が対応し、

$$X_{aa} \leftrightarrow X_{bb}, X_{ab} \leftrightarrow X_{ba} \quad (2.87)$$

の対応があるので、 X_{aa}, X_{ab} を計算すればよい。トレースの循環性と、 $\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = -2\not{p}$ を用いると、4次元では奇数個の γ 行列の積のトレースはゼロなので、

$$X_{aa} = \text{Tr}[(f_1 + m)(-2\not{p} + 4m)(f_1 + m)(-2\not{p}' + 4m)] \quad (2.88)$$

$$= \text{Tr}[4f_1 \not{p} f_1 \not{p}' + 16m^4 + [-8f_1 \not{p} + 16f_1 f_1 - 8f_1 \not{p}' - 8\not{p} f_1 + 4\not{p} \not{p}' - 8f_1 \not{p}'] m^2] \quad (2.89)$$

である。 $\text{Tr}[16m^4] = 64m^4$ となる。(2.64) と、 $\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta] = 4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})$ より、

$$\text{Tr}[4f_1\not{p}f_1\not{p}'] = 16[2(m^2kp' - (kp)(kp') + m^2pp')] \quad (2.90)$$

$$(2.91)$$

である。また、 $\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ 、(2.67)、(2.64) より、

$$\text{Tr}[-8f_1\not{p} + 16f_1f_1 - 8f_1\not{p}' - 8\not{p}f_1 + 4\not{p}\not{p}' - 8f_1\not{p}'] \quad (2.92)$$

$$= \text{Tr}[16(-f_1\not{p} + f_1f_1 - f_1\not{p}') + 4\not{p}\not{p}'] \quad (2.93)$$

$$= -64m^2 + 16pp' \quad (2.94)$$

である。よって、(2.67),(2.64) より、

$$X_{aa} = 32[m^2(kp' + pp') + (kp)(kp')] \quad (2.95)$$

$$= 32[m^4 + m^2(kp) + (kp)(k'p)] \quad (2.96)$$

同様に、

$$X_{ab} = X_{ba} = 16m^2[2m^2 + (pk) - (pk')] \quad (2.97)$$

$$X_{bb} = 32[m^4 - m^2(pk') + (pk)(pk')] \quad (2.98)$$

となる。これより、

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2m^2} \left[\left(\frac{pk}{pk'} + \frac{pk'}{pk} \right) + 2m^2 \left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{pk} - \frac{1}{pk'} \right)^2 \right] \quad (2.99)$$

であり、実験室系で、 $pk = m\omega, pk' = m\omega'$ なので、

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} = \frac{1}{m}(\cos\theta - 1) \quad (2.100)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2m^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right] \quad (2.101)$$

である。これを(2.71)に代入して、 $\alpha = e^2/2\pi$ とすると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right] \quad (2.102)$$

となる。これが、クライン仁科の式である。これに、(2.10)、

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2}(1 - \cos\theta)} \quad (2.103)$$

を代入して整理すると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \left[\frac{1}{1 + \alpha'(1 - \cos\theta)} \right]^2 \left[\frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right] \quad (2.104)$$

$$\cdot \left[1 + \frac{\alpha'^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \alpha'(1 - \cos\theta)]} \right] \quad (2.105)$$

ただし、この時、 α' は微細構造定数ではなく、 $\alpha' = \omega/m, r_0 = \alpha\lambda/2\pi$ (λ は電子のコンプトン波長) である。また、 $\hbar = c = 1$ である。また、実際に標的になるのはひとつの電子ではなく、物質の中の電子である。よって、断面積は原子内の電子が大きくなるほど大きくなると考えられるので、原子番号に比例すると考えて、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Zr_0^2 \left[\frac{1}{1 + \alpha'(1 - \cos\theta)} \right]^2 \left[\frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right] \quad (2.106)$$

$$\cdot \left[1 + \frac{\alpha'^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \alpha'(1 - \cos\theta)]} \right] \quad (2.107)$$

として、実験結果と比較する。

3 実験方法

3.1 概要

^{137}Cs から放射される γ 線と LaBr_3 シンチレータ内の電子でコンプトン散乱させる。散乱電子のエネルギーを LaBr_3 シンチレータで、散乱 γ 線のエネルギーを NaI シンチレータで測定する。実験ではエネルギーの代わりに ADC 値を測定し、それをエネルギーに変換する。

3.2 器具について

本実験およびエネルギー構成に用いた実験器具について説明する。

- 線源
 ^{137}Cs を用いた。
- シンチレータと光電子増倍管
今回はこれら二つが密に接合している。以下、これをシンチレータと呼ぶ。
- 鉛塊
散乱 γ 線を検出するシンチレータに線源の γ 線が入射するのを防ぐために用いた。
- オシロスコープシンチレータからの光の波形を観測し、回路のセットアップに用いた。
- モジュール
DIVIDER 入力と同じ信号を二つ出力する
DISCRIMINATOR 閾値を超えた信号を矩形波に変換する
COINCIDENCE 入力の論理積を出力する
GATE GENERATOR 入力に反応して GATE 信号を出力する
ADC Analog-to-Digital Converter. 各シンチレータの波形を GATE 信号ごとに積分したデータを PC 経由で出力する。

3.3 セットアップ方法

3.3.1 器具の配置

以下の図 3.1 のように配置する。実際の写真は図 3.2 である。NaI と LaBr_3 はシンチレータを表す。鉛塊は線

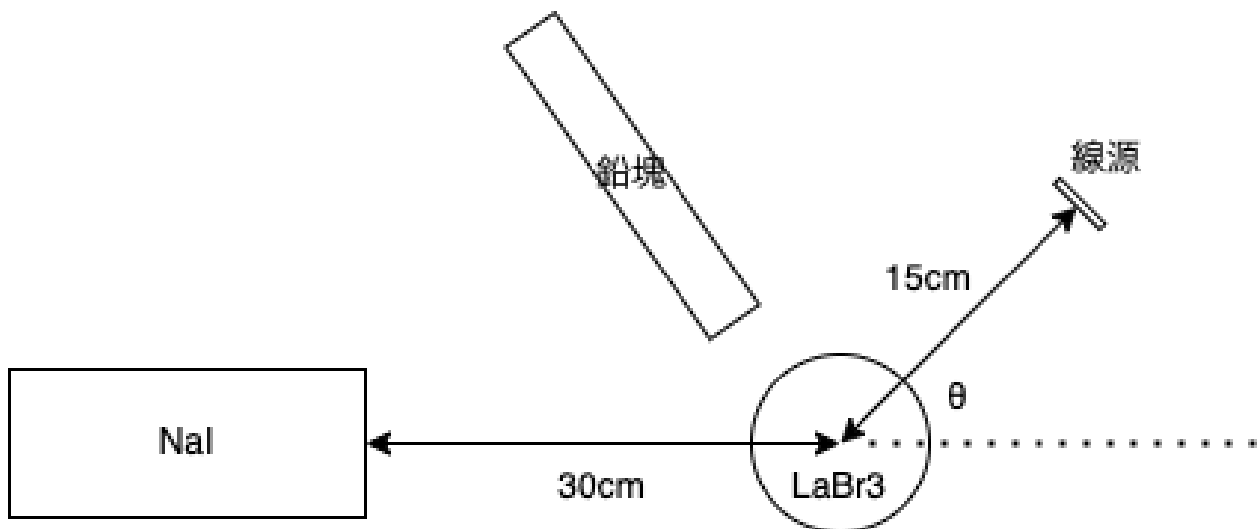


Figure 3.1: 実験装置の配置

源から出た γ 線が散乱 γ 線測定用の NaI シンチレータに入射しないように配置する。

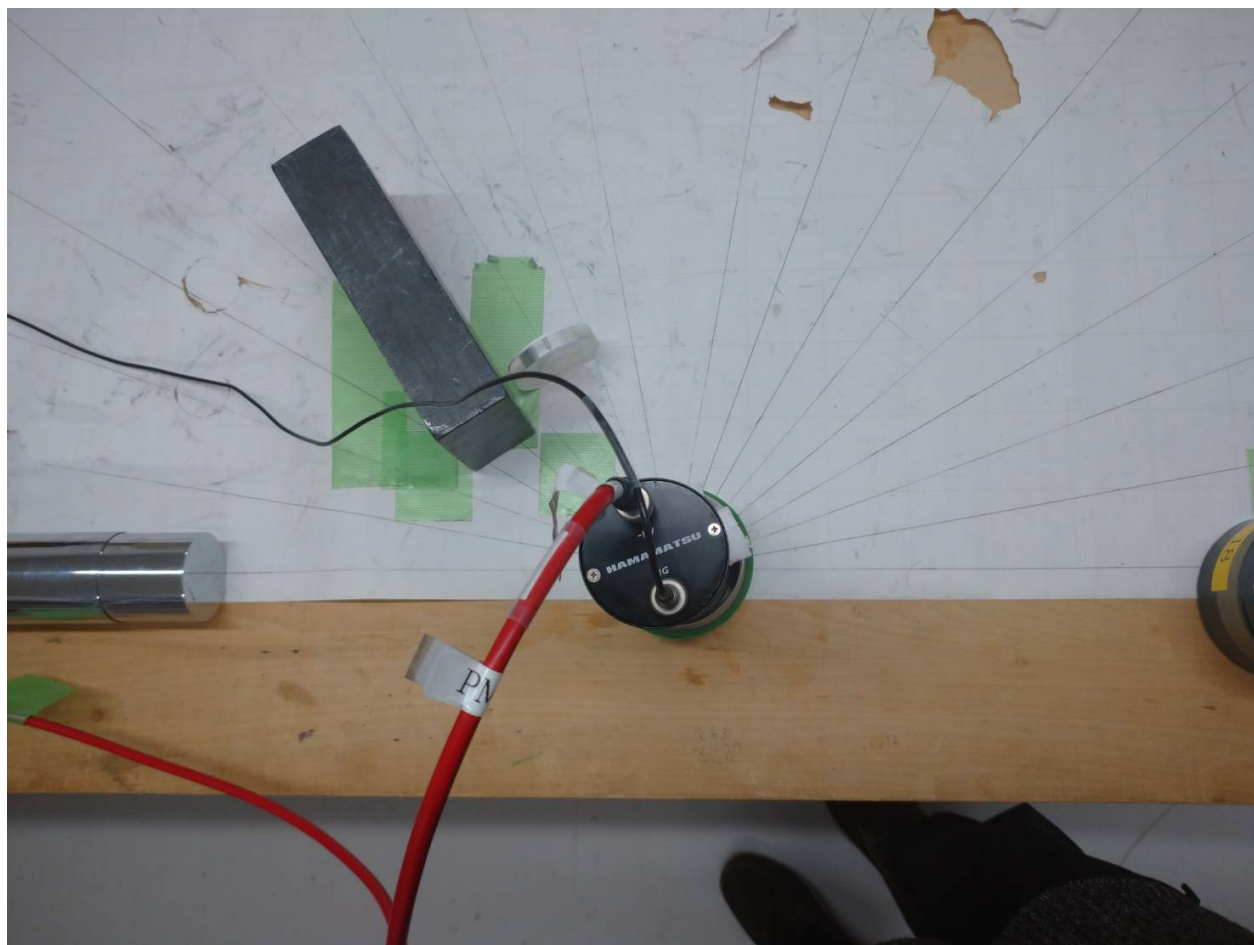


Figure 3.2: 実際の写真

3.3.2 回路図

図 3.3 がシンチレータから受け取った信号を ADC カウントに変換する回路図である。GATE 信号が ADC に入る時間はシンチレータから受け取った信号が ADC に入る時間より遅くなってしまうので、正確な ADC カウントを測定できない。なので、シンチレータからの ADC への信号が入る時間を遅らせるために遅延ケーブルを用いた。(本実験では 30m) 実際の回路は図 3.4 である。

3.4 本実験の手順

線源の位置を移動することで角度依存性を調べた。 θ は 30° , 45° , 60° , 90° , 120° , 150° , 180° に関して測定を行った。

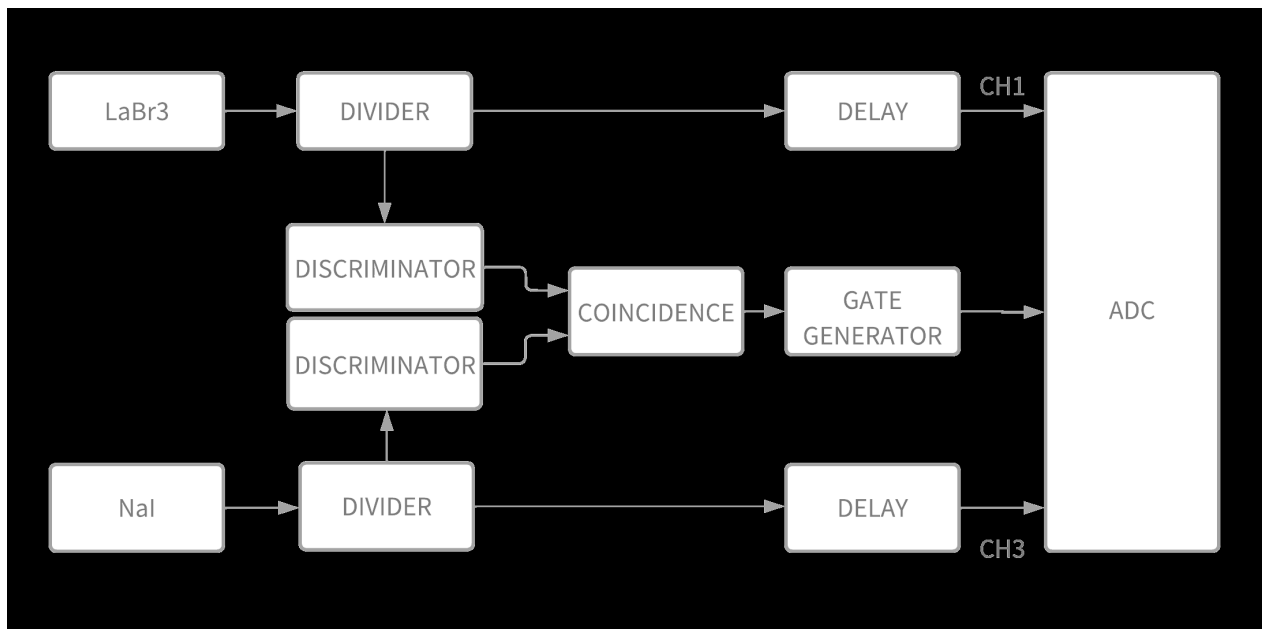


Figure 3.3: 回路図



Figure 3.4: 実際の回路

4 実験結果と解析

4.1 エネルギー較正

実験で得られたのは ADC 値なので、ADC 値をエネルギーの値に変換する必要がある。そのために ADC 値とエネルギーの関係式を求める。

エネルギー較正には Cs^{137} のエネルギー 0keV のピークと 662keV を用いた。

まず二つのシンチレータそれぞれについて、 Cs^{137} の 0keV と 662keV に対応する ADC カウントのピークをガウス分布で近似して得る。ただし 0keV については fitting に十分なデータ点がなかったため ADC カウントの平均値をピークとした。これを図 4.1 に示す。

662keV の誤差には次の式を用いた。

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{Gauss}}}{\sqrt{N}} \quad (4.1)$$

0keV は求まった平均値を用いて誤差を計算した。

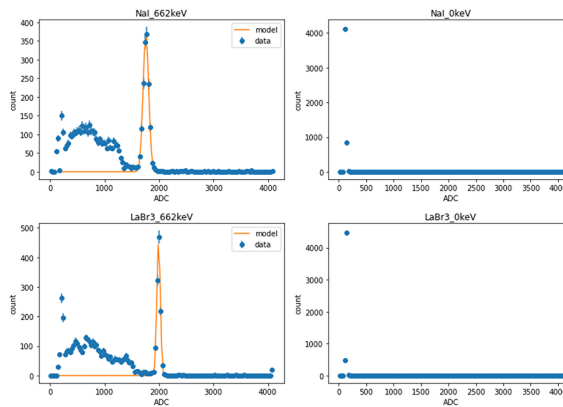


Figure 4.1: エネルギー較正に用いた ADC カウントのデータ

求まったピークの値を表 4.1 に示す。

Table 4.1: 0keV と 662keV に対応する ADC カウント値

シンチレータ	0keV	662keV
LaBr ₃	135 ± 0.652	1990 ± 0.930
NaI	130 ± 1.00	1760 ± 1.32

また ADC の値 X とエネルギーの値 E の間には線形な関係、つまり

$$X = aE + b \quad (4.2)$$

が成り立つと仮定する。

すると表 4.1 の値から回帰直線を引けるので、¹係数 a と b の値が求まる。これを表 4.2 に示す。

4.2 実験結果

LaBr₃、NaI の ADC 値から散布図を作成し、式 4.2 を用いて ADC 値をエネルギーに変換した。

また各シンチレータ、各角度で計測されたエネルギー分布とそれらの和をプロットした。さらにそれらをガウシアンでフィッティングし、フィッティングしたガウシアンをプロットした。これらを図 4.2 にしめす。

¹今回は 2 点しかないのでこれらを結ぶだけ。 Cs^{137} 以外の線源も用いて 3 点以上取るべきだった。

Table 4.2: エネルギー較正式の係数

シンチレータ	a	b
LaBr ₃	2.81	135
NaI	2.46	130

4.3 エネルギーの角度分布

4.2 節のようにして求めた各シンチレータ、またそれらの和のエネルギーの角度分布を表 4.3 と図 4.3 示す。図 4.3 の理論式には式 2.10 を用いた。この誤差には次の式²を用いた。

$$\sigma = \frac{\sigma_{Gauss}}{\sqrt{N}} \quad (4.3)$$

Table 4.3: エネルギーの角度分布

θ (degree)	LaBr ₃ (keV)	NaI(keV)	合計 (keV)
30	88.7 ± 0.796	558 ± 1.52	655 ± 0.561
45	171 ± 0.906	476 ± 1.28	659 ± 0.536
60	249 ± 0.967	428 ± 1.07	684 ± 0.563
90	371 ± 0.773	297 ± 0.809	673 ± 0.462
120	431 ± 0.723	231 ± 0.667	666 ± 0.426
150	461 ± 0.619	194 ± 0.502	666 ± 0.465
180	463 ± 1.16	199 ± 1.40	671 ± 1.15

4.4 コンプトン散乱のデータの抽出

微分散乱断面積に関する考察を行うために、得られた実験データからコンプトン散乱が起こっているデータを抽出する必要がある。なぜなら実験データには環境放射線によるノイズなどが含まれているからである。

コンプトン散乱では電子のエネルギーと光子のエネルギーの和が一定 (662keV) となる。また図 4.3 より、各角度、各シンチレータでのエネルギーも分かっている。これらを用いると、図 4.2 の散布図より抽出したい範囲が分かりその範囲で特にデータ点の密度が高い部分を選んだ。³

抽出した後の散布図を図 4.4 に示す。

4.5 微分散乱断面積

4.4 節のようにして各角度でのコンプトン散乱の回数が出たので、これを計測時間で割ることにより微分散乱断面積に比例する値が求まる。これを表 4.4 に示す。

²エネルギー較正の誤差も加味しなければいけないが、今回は 2 点だったため誤差がなかった

³密度が高い部分は主観的に選んだ。定量的に評価する方法があればその方法を用いるべきである。

Table 4.4: 微分散乱断面積に関するデータ

$\theta(\text{degree})$	データ数 (回)	計測時間 (t)	$\frac{dN}{dt}$ (回/s)
30	1143	940.879	1.22
45	1060	1218.278	0.870
60	1117	1509.543	0.740
90	1256	1867.050	0.673
120	1545	2098.527	0.736
150	1321	1676.219	0.788
180	417	560.219	0.744

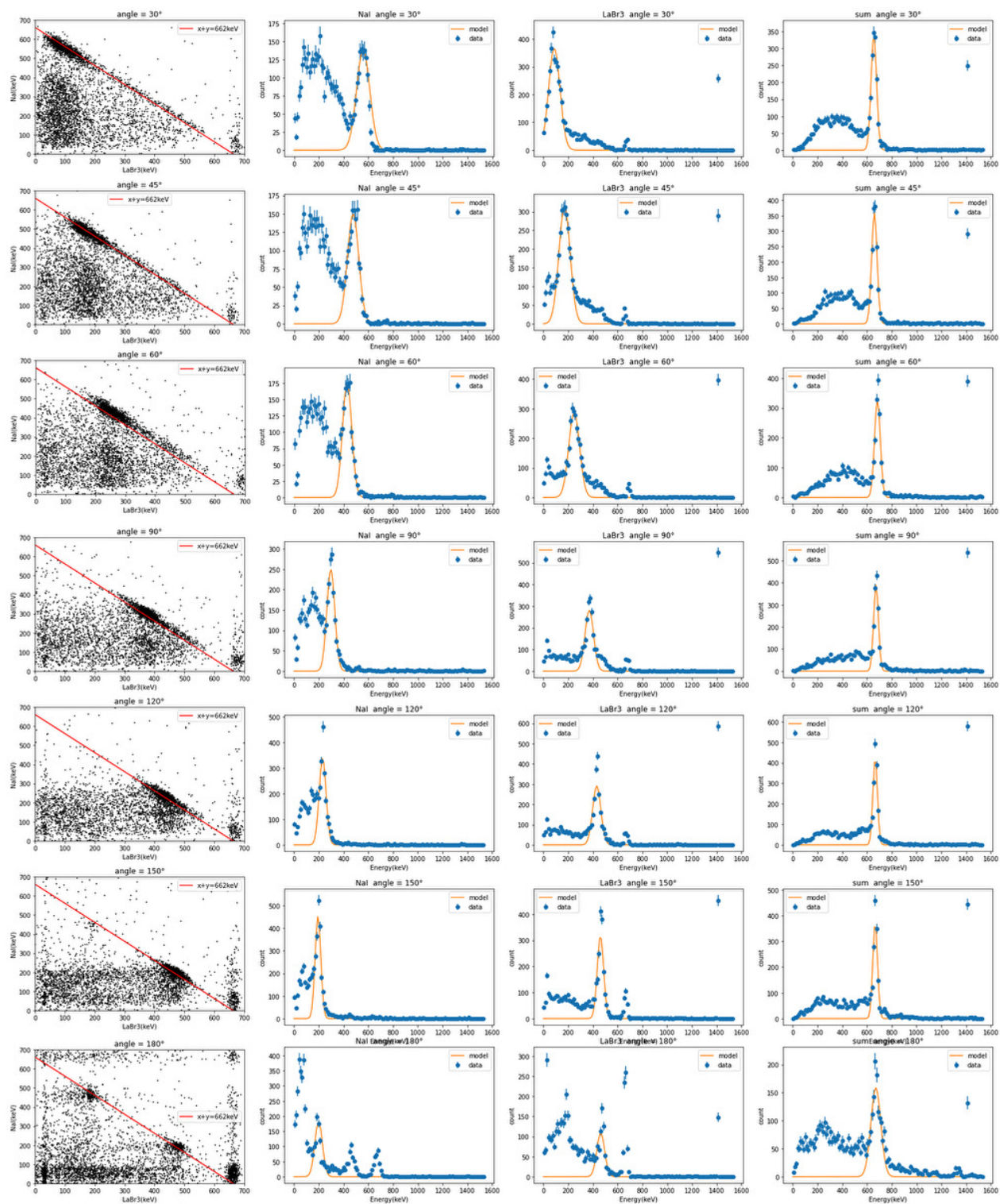


Figure 4.2: 実験データ

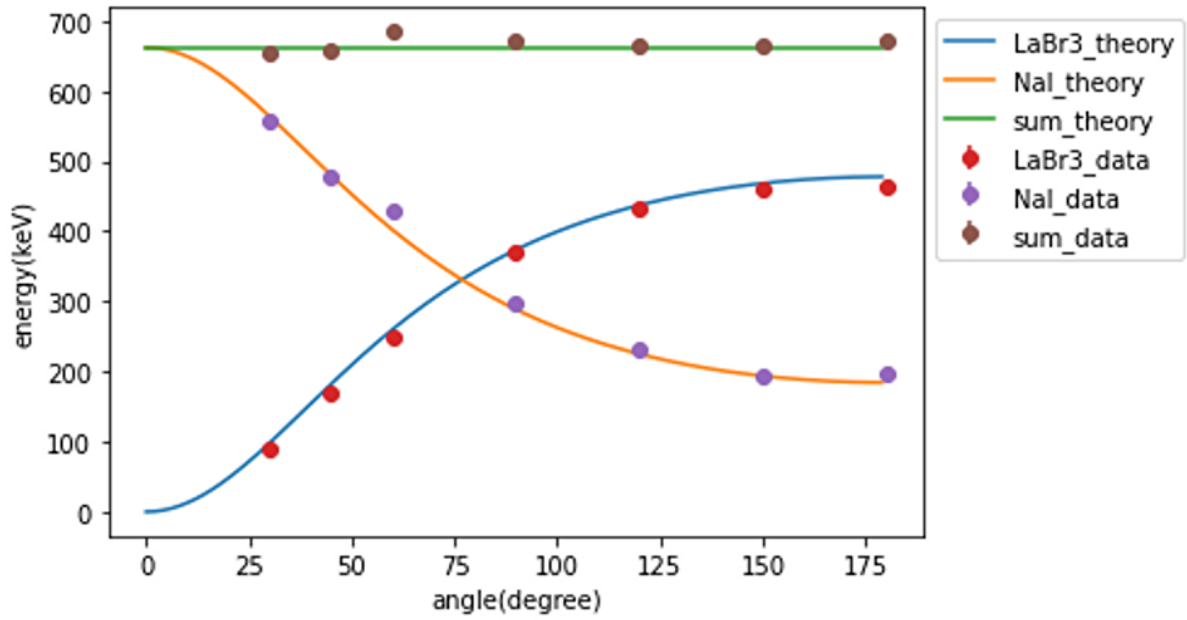


Figure 4.3: エネルギーの角度分布

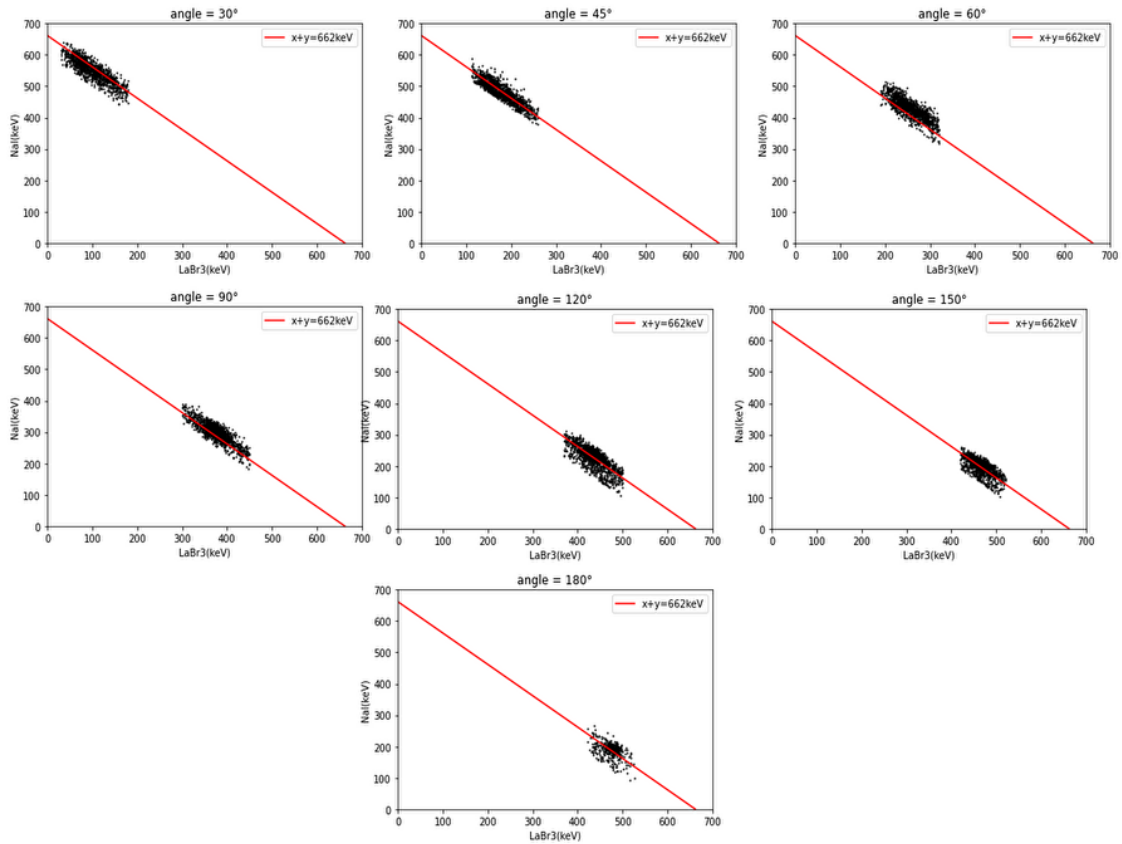


Figure 4.4: 抽出後の散布図

5 考察

5.1 エネルギーの角度分布に関する考察

散乱角度とエネルギーの関係のグラフを図 5.1 に示す。

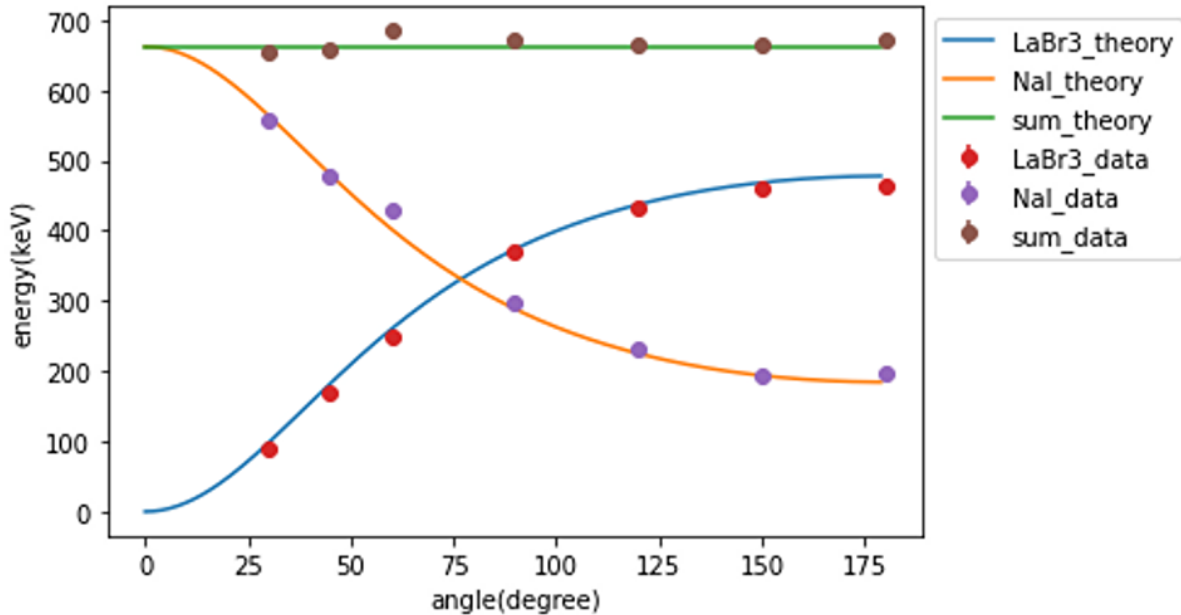


Figure 5.1: エネルギーの角度分布

測定によって得られたデータと理論値を比較するとよく一致していることが見て取れる。誤差についてはシンチレータのサイズにより期待する角度と違う γ 線も計測しているためだと考えられる。

5.2 微分散乱断面積に関する考察

散乱角度と微分散乱断面積の関係のグラフを図 5.2 に示す。

なお今回の実験で得られた $\frac{dN}{dt}$ の値は微分散乱断面積に比例する量であるから、その比例係数 C を最小二乗法を用いた fitting より求めた。その結果を以下に示す。

$$C = 2.68058918$$

$$\chi^2 = 1199.71229$$

実験から求められた微分散乱断面積の角度分布の測定値は Klein-仁科の式による理論値と一致していない。このずれの原因として今回は以下の 2 つを考える。

- LaBr₃ シンチレータ内で散乱する γ 線のうち、LaBr₃ シンチレータ内で吸収されてしまい、NaI シンチレータまで届かない γ 線を考慮してカウント数を補正する必要がある。
- NaI シンチレータに入射した γ 線のうち、エネルギーが吸収されずにシンチレータを通過していった γ 線を考慮してカウント数を補正する必要がある。

5.2.1 γ 線の LaBr₃ シンチレータ内での減衰に関する考察

理想的には線源からの γ 線が円形の LaBr₃ シンチレータの中心までエネルギーを失うことなく進入し、中心で散乱を起こし、エネルギーを失うことなく NaI シンチレータまで届くことが望ましいが、実際には LaBr₃ シンチレータを進む間にエネルギーを失ってしまうためその通りにはならない。

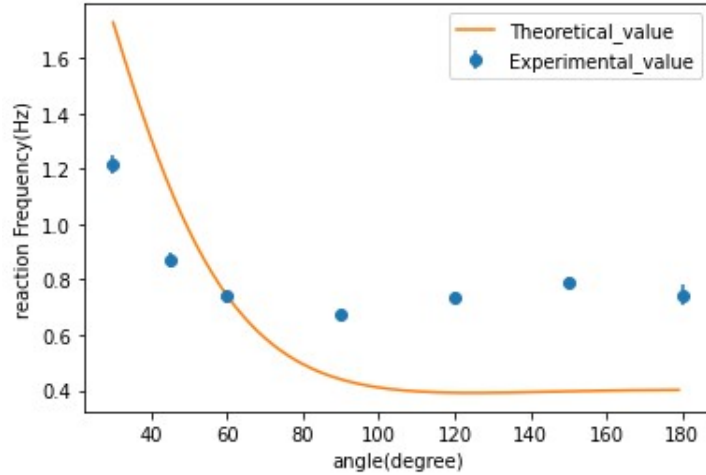


Figure 5.2: 微分散乱断面積の角度分布

そこでまず、減衰を考慮した散乱位置を決定する。今回の考察では図 5.3 のように γ 線の進行方向を x 軸に取りその軸上のどこかで散乱が起こっていると、減衰係数を考慮した期待値を求めその点を散乱位置とする。

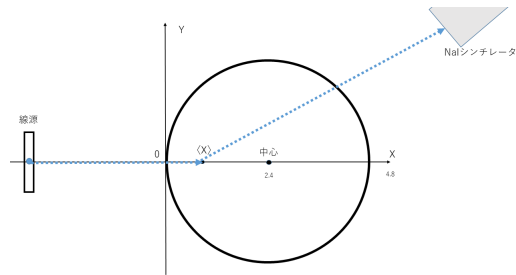


Figure 5.3: 散乱位置の期待値

LaBr_3 の密度は 5.29g/cm^3 、線源の放出する γ 線のエネルギーである 662KeV に対応する減衰係数は $0.072\text{cm}^2/\text{g}$ である。⁴ この時 x 軸上の点 x まで γ 線が進入する確率は以下の式で与えられる。

$$\exp(-x \times 5.29 \times 0.072)$$

よって散乱位置の期待値は以下の式で与えられる。

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^{4.8} x \times \exp(-x \times 5.29 \times 0.072) dx}{\int_0^{4.8} \exp(-x \times 5.29 \times 0.072) dx} \simeq 1.72$$

したがって図 5.4 のような位置で散乱が起こっていると考えられる。さらにこの点で散乱してから LaBr_3 シンチレータを脱出するまでに進む距離 $l(\theta)$ を求める。図 5.4 のように散乱位置の期待値を A、NaI シンチレータの中心を B とする。また LaBr_3 シンチレータを中心が $(2.4, 0)$ 、半径 2.4 の円であるとし、線分 AB が円によって切り取られる線分の長さを図形的に求めると表 5.1 のように求められた。ただしこの θ は散乱位置の期待値を基準にした角度ではなくシンチレータの中心を基準にした角度であることに注意しなければならない。

この結果を用いて実験で得られた観測された散乱回数 N の補正を行う。

補正後の散乱回数を N' とすると

⁴値は NIST XCOM を参照した。

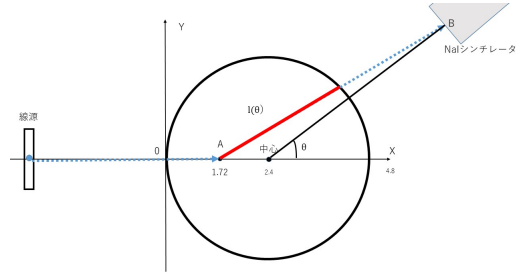


Figure 5.4: 散乱位置の期待値と $l(\theta)$

Table 5.1: 散乱角度と LaBr_3 シンチレータを脱出するまでに進む距離の関係

$\theta(\text{degree})$	$l(\theta) (\text{cm})$
30	2.974
45	2.850
60	2.692
90	2.333
120	2.007
150	1.793
180	1.72

$$N' = \frac{N}{\exp\{-l(\theta) \times 5.29 \times \mu/\rho\}}$$

が得られる。ただし LaBr_3 の質量減衰係数 μ/ρ は散乱角度ごとに表 5.2 で与えられる。シンチレータでの主要な吸収過程は光電吸収反応であると考えられるので今回の考察では光電吸収の減衰係数を用いた。⁵

Table 5.2: 各散乱角度に対応する LaBr_3 の質量減衰係数

$\theta(\text{degree})$	$\mu/\rho[\text{cm}^2/\text{g}]$
30	0.010
45	0.017
60	0.02
90	0.05
120	0.1
150	0.17
180	0.19

この N' を用いて各散乱角度に対応する微分散乱断面積の値を補正を行うと図 5.5 が得られた。また最小二乗法を用いた fitting により求めた比例係数 C の結果を以下に示す。

$$C = 3.99587147$$

$$\chi^2 = 931.277533$$

図 5.5 を見ると理論値から大きく外れており、さらに別の補正も考慮する必要がある。

⁵値は NIST XCOM を参照した。

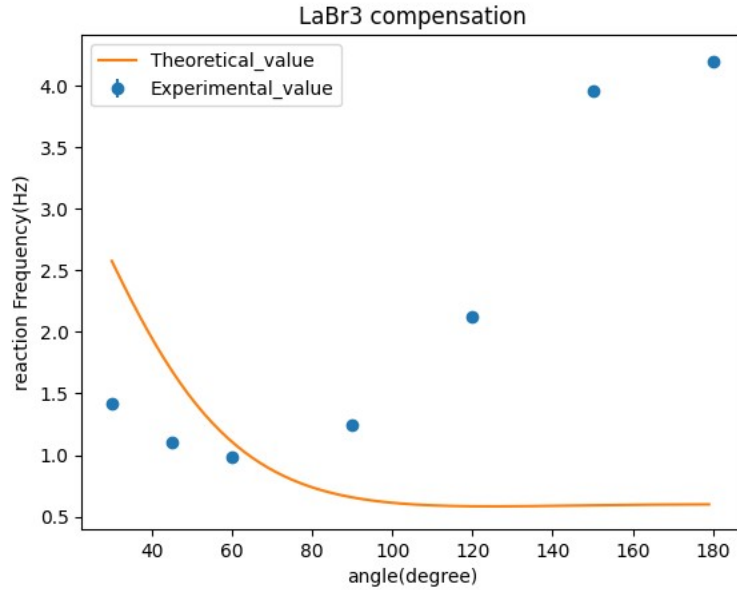


Figure 5.5: γ 線のLaBr₃シンチレータ内での減衰を考慮した微分散乱断面積の角度分布

5.2.2 γ 線のNaIシンチレータの透過に関する考察

次にNaIシンチレータに進入した γ 線について考察する。理想的にはすべての γ 線がNaIシンチレータに吸収されることが望ましいが、実際にはNaIシンチレータを透過する γ 線も存在する(図5.6)。そのため透過する γ 線を考慮するため前節と同様に減衰係数を再び用いる。

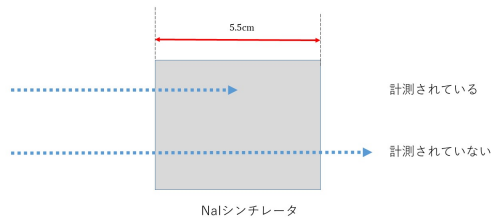


Figure 5.6: NaIシンチレータ内での γ 線の振る舞い

NaIの密度 ρ は 3.67g/cm^3 である。進入する γ 線の質量減衰係数 μ/ρ は散乱の角度ごとに表5.3のように与えられる。⁶

この時厚さ5.5cmのNaIシンチレータを γ 線が透過する確率は以下の式で与えられる。

$$1 - \exp(-5.5 \times 3.67 \times \frac{\mu}{\rho})$$

これを用いて N' をさらに以下の式に従って補正する。

$$N'' = \frac{N'}{1 - \exp(-5.5 \times 3.67 \times \frac{\mu}{\rho})}$$

この N'' を用いて各散乱角度に対応する微分散乱断面積の値を補正を行うと図5.7が得られた。

⁶値はKnoll, 放射線計測ハンドブックを参考にした。

Table 5.3: 各散乱角度に対応する NaI の質量減衰係数

$\theta(\text{degree})$	$\mu/\rho[\text{cm}^2/\text{g}]$
30	0.013
45	0.017
60	0.024
90	0.06
120	0.13
150	0.23
180	0.23

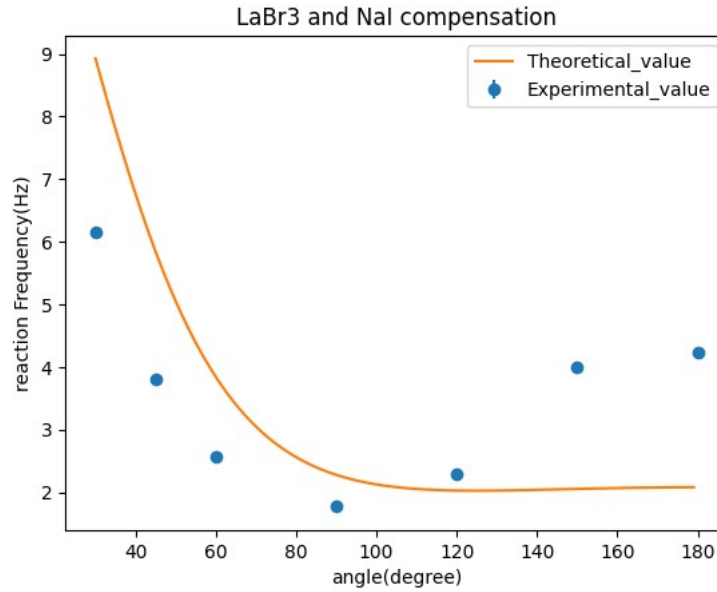


Figure 5.7: γ 線の LaBr_3 及び NaI シンチレータ内での減衰を考慮した微分散乱断面積の角度分布

また最小二乗法を用いた fitting により求めた比例係数 C の結果を以下に示す。

$$C = 13.8506607$$

$$\chi^2 = 293.170057$$

図 5.7 を見ると特に角度が大きいところでの理論値からの乖離が大きくなっている。一方で NaI シンチレータのみの補正を加えたデータをプロットすると図 5.8 が得られた。また最小二乗法を用いた fitting により求めた比例係数 C の結果を以下に示す。

$$C = 6.00502820$$

$$\chi^2 = 179.573747$$

図 5.8 を見ると角度が大きいところでは図 5.7 に比べて角度の大きいところで理論値に近づいている。しかし角度の小さいところでは一致しているとは言い難い。このことから 5.2.1 での考察で考えたモデルは角度が大きいところでは不適切であると考えられる。

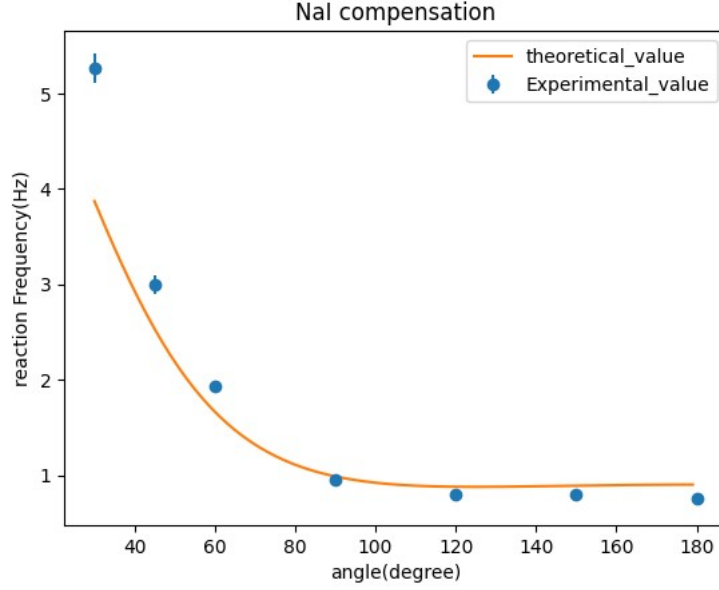


Figure 5.8: γ 線の NaI シンチレータ内での減衰を考慮した微分散乱断面積の角度分布

6 結論と反省

6.1 ファインマン図の選択と実験結果

今回、クライン仁科の式を計算するとき二つのファインマン図 2.2 を足しあげたものをファインマン振幅として計算した。この足し上げが正しかったのか考察する。二つのファインマン図を足し上げた、クライン仁科の式は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Zr_0^2 \left[\frac{1}{1 + \alpha'(1 - \cos\theta)} \right]^2 \left[\frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right] \left[1 + \frac{\alpha'^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \alpha'(1 - \cos\theta)]} \right] \quad (6.1)$$

であった。ここで、2.2 の (a) のみを考えた時の断面積を $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_a$ 、(b) のみを考えた時の断面積を $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_b$ とする。これは、(2.81) と (2.82) を計算し、足し上げる前に (2.10) などを代入すればよい。このとき、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_a = \frac{1}{2}\alpha'^2 r_0^2 \frac{1}{1 + \alpha'(1 - \cos\theta)} \left[\frac{1}{\alpha'^2} + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{1 + \alpha'(1 - \cos\theta)} \right] \quad (6.2)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_b = \frac{1}{2}\alpha'^2 r_0^2 (1 + \alpha'(1 - \cos\theta)) \left[\frac{1}{\alpha'^2} + \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{1 + \alpha'(1 - \cos\theta)} + \frac{1}{1 + \alpha'(1 - \cos\theta)} \right] \quad (6.3)$$

である。これを実験結果と比べると、(6.1) は、図 6.1 のように、(6.2) は、図 6.2 のようになる。また、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{(try)} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_a + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_b \quad (6.4)$$

とおくと、(6.4) は図 6.3 のようになる。

6.2 まとめと今後の展望

エネルギー角度分布については測定によって得られたデータと理論値を比較するとよく一致していることが見て取れ、光の粒子性を確認することができた。また散乱角度分布については全ての角度で一致したわけではないが、NaI シンチレータでの減衰を考慮することにより場の量子化に基づくクライン-仁科の式の特性を確認することができた。さらに測定精度を向上させるためには以下のような修正点が考えられる。

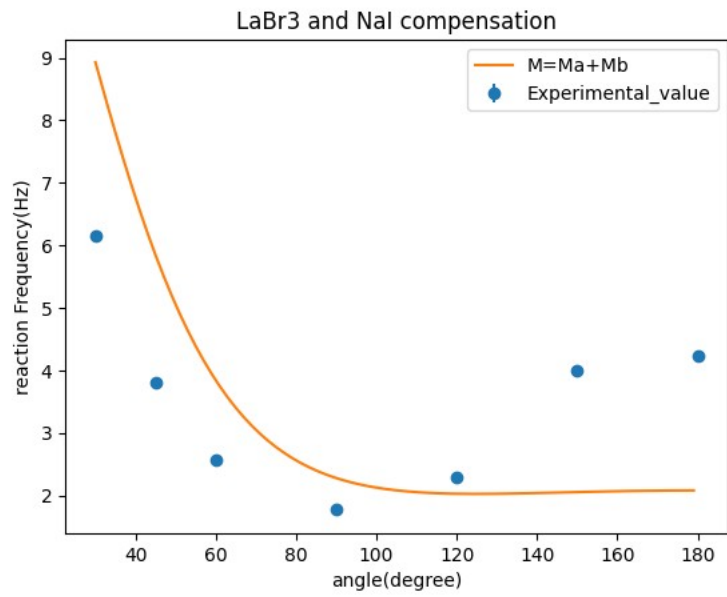


Figure 6.1: (6.1) と実験結果

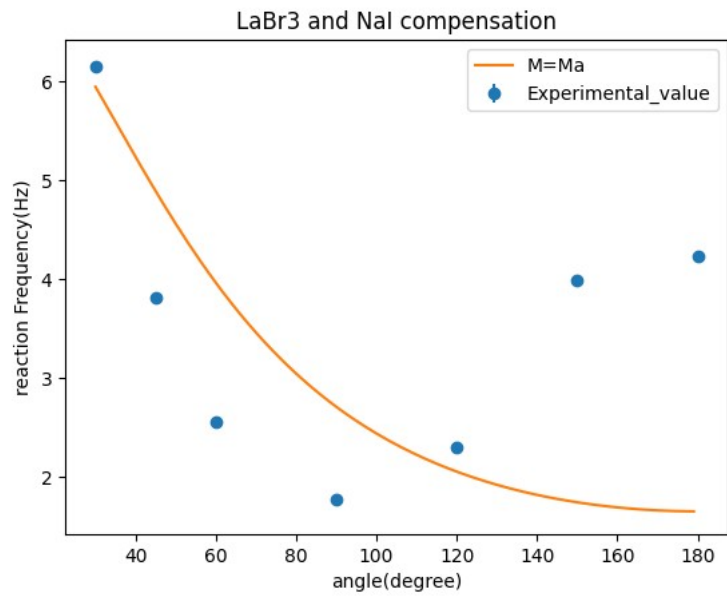


Figure 6.2: (6.2) と実験結果

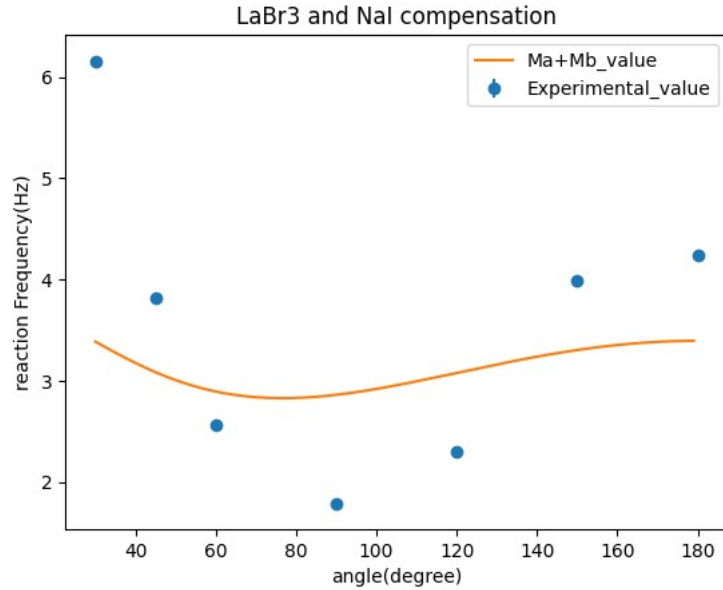


Figure 6.3: (6.4) と実験結果

- 線源を鉛等で囲ってコリメートを行い γ 線の入射の角度幅を小さくする
- 解析で用いたエネルギー較正において、別の線源の測定値を加えて回帰直線の精度を高める。

謝辞

今回の課題演習に際して、田島 治先生、吉田 健太郎先生、木河 達也先生、TA の竹内 広樹さんには理論面、実験面において基礎的な内容から丁寧にご指導いただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

参考文献

- [1] Glenn F. Knoll. 放射線計測ハンドブック. オーム社, 第 4 版, 2013. 神野郁夫・木村逸郎・阪井英次 訳.
- [2] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド. 素粒子標準模型入門. 丸善出版, 2013. 樺沢宇紀 訳.
- [3] 課題演習 A1 レポート. 2019 後期 2020 後期 2022 前期.
- [4] Andrew Lawson . Compton Scattering from Quantum Electrodynamics . 2014
- [5] NIST XCOM: Element/Compound/Mixture Retrieved from <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>