

Compton散乱の検証

2023A1後期

青梨光祐 青柳昂生 粟田光一 ケンプシヨーン 田口桜大 三日月柊斗

January 2024

Abstract

コンプトン散乱とは高エネルギーの電磁波と物体の散乱であり,そのエネルギー角度分布は光の粒子性により,散乱確率の角度分布はQED(量子電磁気学)によって理論的に導かれている.これらを実験的に確かめるために,本実験は実際に ^{137}Cs を線源とした γ 線の散乱のシンチレータによる観測と理論の比較を行った.結果として,エネルギー角度分布は理論と十分近い値が,散乱確率の角度分布はシンチレータによる補正を考慮して理論と近い値が得られ,理論の十分な検証ができた.

Contents

1	序論	2
1.1	背景	2
1.2	実験目的	2
2	理論的背景	2
2.1	エネルギーの角度依存性	2
2.2	散乱頻度の角度依存性	2
2.2.1	摂動展開による遷移確率計算	2
2.2.2	微分断面積	6
3	実験装置	8
3.1	実験装置の配置	8
3.1.1	使用する器具	8
3.1.2	装置の配置図	8
3.2	平均自由行程	8
3.3	本実験	10
3.3.1	配線図	10
3.3.2	オシロスコープに表示される情報	10
3.4	ペDESTAL	12
4	結果	12
4.1	エネルギー較正	12
4.2	実験結果	14
4.3	エネルギーの角度分布	14
4.4	微分散乱断面積の角度分布	16
5	考察	20
5.1	エネルギー角度分布	20
5.2	散乱確率の角度分布	20
5.2.1	NaIシンチレータの補正	21
5.2.2	LaBr ₃ シンチレータの補正	22
5.2.3	LaBr ₃ シンチレータの補正の妥当性	25
6	結論	27

1 序論

1.1 背景

物体に高エネルギーの電磁波を照射すると、その電磁波のエネルギーが減少する、コンプトン散乱という現象がある。このエネルギーの減少は光子の粒子性によって説明することができる。コンプトン散乱によって光子がどの方向に散乱されるかに関しては完全な確率過程であり、その散乱確率は量子力学と特殊相対性理論の両方を用いたQED(量子電磁気学)による摂動計算によって計算できることが知られている。

1.2 実験目的

本実験では、 ^{137}Cs を放射線源として、 LaBr_3 シンチレータでコンプトン散乱した γ 線を NaI シンチレータで測定し、そのエネルギーと散乱数の角度分布を計算することで理論式との比較を行い、光子の粒子性及びQEDの検証を行うことが目的である。

2 理論的背景

2.1 エネルギーの角度依存性

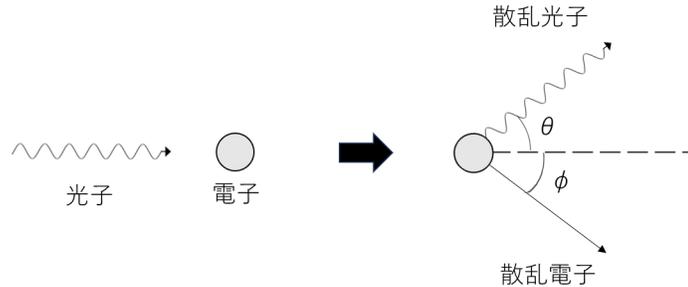


Figure 1: コンプトン散乱の図

図1のような、光子と電子が弾性衝突をする状況を考える。入射前後の光子の振動数を ν, ν' 、電子の質量を m 、運動量を p 、プランク定数を h 、光速を c とする。エネルギーと運動量の保存則から

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \quad (1)$$

$$\frac{h\nu}{c} = p \cos \phi + \frac{h\nu'}{c} \cos \theta \quad (2)$$

$$0 = p \sin \phi - \frac{h\nu'}{c} \sin \theta \quad (3)$$

これらから p, ϕ を消去して解くと

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2}(1 - \cos \theta)} \quad (4)$$

となり、各々の角度に対するエネルギーの表式が得られる。

2.2 散乱頻度の角度依存性

2.2.1 摂動展開による遷移確率計算

電子陽電子場と電磁場が相互作用している系（量子電磁力学:QED）を考える。QEDのハミルトニアン H は

$$H = H_0 + V \quad (5)$$

で与えられる.ここで

$$H_0 = H(IP) + H(P) + H("P) \quad (6)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, \alpha} a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha} \omega_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{p}, \epsilon} (b_{\mathbf{p}\epsilon}^\dagger b_{\mathbf{p}\epsilon} + d_{\mathbf{p}\epsilon}^\dagger d_{\mathbf{p}\epsilon}) E_{\mathbf{p}} \quad (7)$$

および

$$V = -e \int d^3 r \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (8)$$

で与えられ, $a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger, a_{\mathbf{k}\alpha}$ は波数ベクトル \mathbf{k} , 偏極 α の光子を消滅, 生成させる演算子, $b_{\mathbf{p}\epsilon}^\dagger, b_{\mathbf{p}\epsilon}$ は運動量 \mathbf{p} , ヘシリティ ϵ の電子を生成, 消滅させ, $d_{\mathbf{p}\epsilon}^\dagger, d_{\mathbf{p}\epsilon}$ は運動量 \mathbf{p} , ヘシリティ ϵ の陽電子を生成, 消滅させる演算子である. また, ψ は自由空間におけるDirac方程式の一般解を量子化したもの, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, A_μ は放射ゲージにおける自由空間での一般解を量子化したもの, γ^μ はガンマ行列である.

さて, QEDの時間発展演算子について

$$e^{-iHt} = e^{-iH_0 t} [1 + e \hat{O}_1(t) + e^2 \hat{O}_2(t) + \dots] \quad (9)$$

と摂動展開する. 始状態を $|i\rangle$, 終状態を $|f\rangle$ とすれば, 確率振幅は

$$\Gamma \langle f | e^{iH_0 t} e^{-iHt} | i \rangle = \langle f | i \rangle + \langle f | e \hat{O}_1(t) | i \rangle + \langle f | e^2 \hat{O}_2(t) | i \rangle + \dots \quad (10)$$

となる. 確率振幅の計算で $e^{iH_0 t}$ の演算子をブラケット内に挟んだ. この演算子は位相の違いに影響してくるが遷移確率には影響しないので遷移確率を考える限りでは問題ない. \hat{O}_n の表式は式(9)の両辺を比較することで得られ, $t \rightarrow \infty$ で2次の摂動項まで考えれば,

$$\hat{O}_1 = i \int d^4 x \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}) A_\mu(\mathbf{x}) \quad (11)$$

$$\hat{O}_2 = i^2 \int d^4 x_2 \bar{\psi}(\mathbf{x}_2) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}_2) A_\mu(\mathbf{x}_2) \int_{t_2 > t_1} d^4 x_1 \bar{\psi}(\mathbf{x}_1) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}_1) A_\mu(\mathbf{x}_1) \quad (12)$$

となる. $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は4元位置ベクトルを表す. また, $\psi(\mathbf{x}), A(\mathbf{x})$ は

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{r}, t) = \psi^-(\mathbf{r}, t) + \psi^+(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}, \epsilon} \sqrt{\frac{m}{V E_{\mathbf{p}}}} [\mathbf{u}_\epsilon(\mathbf{p}) b_{\mathbf{p}\epsilon} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - E_{\mathbf{p}} t)} + \mathbf{v}_\epsilon(\mathbf{p}) d_{\mathbf{p}\epsilon}^\dagger e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - E_{\mathbf{p}} t)}] \quad (13)$$

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{r}, t) = A^-(\mathbf{r}, t) + A^+(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k})}{\sqrt{2V \omega_{\mathbf{k}}}} [a_{\mathbf{k}\alpha} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}] \quad (14)$$

で与えられる. また, $\bar{\psi}$ は

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}) = \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = \bar{\psi}^+(\mathbf{r}, t) + \bar{\psi}^-(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}, \epsilon} \sqrt{\frac{m}{V E_{\mathbf{p}}}} [\bar{\mathbf{u}}_\epsilon(\mathbf{p}) b_{\mathbf{p}\epsilon}^\dagger e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - E_{\mathbf{p}} t)} + \bar{\mathbf{v}}_\epsilon(\mathbf{p}) d_{\mathbf{p}\epsilon} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - E_{\mathbf{p}} t)}] \quad (15)$$

となる. $+$ は生成演算子, $-$ は消滅演算子の項をまとめたものであることを意味するとして $\bar{\psi}^+(\mathbf{r}, t)$ のように置いた. これらを用いて2次の摂動項まで確率振幅を計算する.

まず \hat{O}_1 について考える. 演算子に着目すれば

$$(b_{\mathbf{p}'\epsilon'}^\dagger + d_{\mathbf{p}'\epsilon'}) (b_{\mathbf{p}\epsilon} + d_{\mathbf{p}\epsilon}^\dagger) (a_{\mathbf{k}\alpha} + a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger) \quad (16)$$

の形であり, 展開すれば8つの項が出てくることがわかる. しかしながら, いずれの項に対応する過程に対しても運動量保存とエネルギー保存を両立できないので

$$\langle f | e \hat{O}_1 | i \rangle = 0 \quad (17)$$

次に \hat{O}_2 について考える.

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}) A_\mu(\mathbf{x}) \quad (18)$$

とすれば時間順序積 T を用いて

$$\begin{aligned}\hat{O}_2 &= -\frac{1}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\mathcal{H}(\mathbf{x}_1)\mathcal{H}(\mathbf{x}_2)] \\ &= -\frac{1}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\bar{\psi}_{l_1}(\mathbf{x}_1)\gamma_{l_1 m_1}^{\mu_1}\psi_{m_1}(\mathbf{x}_1)A_{\mu_1}(\mathbf{x}_1)\bar{\psi}_{l_2}(\mathbf{x}_2)\gamma_{l_2 m_2}^{\mu_2}\psi_{m_2}(\mathbf{x}_2)A_{\mu_2}(\mathbf{x}_2)]\end{aligned}\quad (19)$$

と表される. 今,コンプトン散乱の過程

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- \quad (20)$$

を考えているので, \hat{O}_2 に左側から $\langle f|$,右側から $|i\rangle$ をかけたときに残る項は,ウィックの定理を用いて時間順序積の式 $T[\mathcal{H}(\mathbf{x}_1)\mathcal{H}(\mathbf{x}_2)]$ を変形したもののうち, $|i\rangle$ の状態の電子と光子を消滅させる演算子と $\langle f|$ の状態の電子と光子を生成する演算子のみが残っている項で,すなわち $\bar{\psi}, \psi, A, A$ の4つの演算子のみが残る項で

$$\langle 0|T[\psi_{m_1}(\mathbf{x}_1)\bar{\psi}_{l_2}(\mathbf{x}_2)]|0\rangle N[\bar{\psi}_{l_1}(\mathbf{x}_1)\gamma_{l_1 m_1}^{\mu_1}A_{\mu_1}(\mathbf{x}_1)\gamma_{l_2 m_2}^{\mu_2}\psi_{m_2}(\mathbf{x}_2)A_{\mu_2}(\mathbf{x}_2)] \quad (21)$$

$$\langle 0|T[\bar{\psi}_{l_1}(\mathbf{x}_1)\psi_{m_2}(\mathbf{x}_2)]|0\rangle N[\gamma_{l_1 m_1}^{\mu_1}\psi_{m_1}(\mathbf{x}_1)A_{\mu_1}(\mathbf{x}_1)\bar{\psi}_{l_2}(\mathbf{x}_2)\gamma_{l_2 m_2}^{\mu_2}A_{\mu_2}(\mathbf{x}_2)] \quad (22)$$

の二つの項である.ここで, N は正規順序積を表すとする.まず式(21)について考える.左側から $\langle f|$,右側から $|i\rangle$ をかけた際に残る項は, $|i\rangle$ に対応した消滅演算子を持ち,かつ $\langle f|$ に対応した生成演算子を持つ項,すなわち $\psi^-, A^-, \bar{\psi}^+, A^+$ の4つからなる項で,

$$\begin{aligned}(21) &= \langle 0|T[\psi_{m_1}(\mathbf{x}_1)\bar{\psi}_{l_2}(\mathbf{x}_2)]|0\rangle [\bar{\psi}_{l_1}^+(\mathbf{x}_1)\gamma_{l_1 m_1}^{\mu_1}A_{\mu_1}^+(\mathbf{x}_1)\gamma_{l_2 m_2}^{\mu_2}\psi_{m_2}^-(\mathbf{x}_2)A_{\mu_2}^-(\mathbf{x}_2)] \\ &\quad + \langle 0|T[\psi_{m_1}(\mathbf{x}_1)\bar{\psi}_{l_2}(\mathbf{x}_2)]|0\rangle [\bar{\psi}_{l_1}^+(\mathbf{x}_1)\gamma_{l_1 m_1}^{\mu_1}A_{\mu_2}^+(\mathbf{x}_2)\gamma_{l_2 m_2}^{\mu_2}\psi_{m_2}^-(\mathbf{x}_2)A_{\mu_1}^-(\mathbf{x}_1)]\end{aligned}\quad (23)$$

であり,第一項,第二項に対応するファインマンダイアグラムはそれぞれ図2a,2bの2つである.



Figure 2: ファインマンダイアグラム

ここで $\langle 0|T[\psi_{m_1}(\mathbf{x}_1)\bar{\psi}_{l_2}(\mathbf{x}_2)]|0\rangle$ について, $\langle 0|T[\psi(\mathbf{x}_1)\bar{\psi}(\mathbf{x}_2)]|0\rangle$ はファインマンの伝播関数と呼ばれ,計算すれば

$$\begin{aligned}\langle 0|T[\psi(\mathbf{x}_1)\bar{\psi}(\mathbf{x}_2)]|0\rangle &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_F(\mathbf{p}) e^{-ip(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \\ S_F(\mathbf{p}) &= \frac{(p_\mu \gamma^\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\end{aligned}\quad (24)$$

式(23)の第一項について,左側から $\langle f|$,右側から $|i\rangle$ をかけてファインマンの伝播関数を用いれば

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{m}{VE_f}} \bar{\mathbf{u}}_{\epsilon_f}(\mathbf{p}_f) e^{i\mathbf{p}_f \mathbf{x}_1} \gamma^{\mu_1} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_f}} \varepsilon_{\alpha_f \mu_1}(\mathbf{k}_f) e^{i\mathbf{k}_f \mathbf{x}_1} \\ &\times i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_F(\mathbf{p}) e^{-ip(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \gamma^{\mu_2} \sqrt{\frac{m}{VE_i}} \mathbf{u}_{\epsilon_i}(\mathbf{p}_i) e^{-i\mathbf{p}_i \mathbf{x}_2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_i}} \varepsilon_{\alpha_i \mu_2}(\mathbf{k}_i) e^{-i\mathbf{k}_i \mathbf{x}_2}\end{aligned}\quad (25)$$

ここで始状態,終状態に対応する物理量には添え字*f,i*を付けた.また,指数関数部分は4元ベクトル表記に書き直した.指数関数部分についてまとめて x_1, x_2 についての積分を実行すれば

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{i\mathbf{k}_f \mathbf{x}_1 + i\mathbf{p}_f \mathbf{x}_1 - i\mathbf{p}_i \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{p}_i \mathbf{x}_2 - i\mathbf{p}_i \mathbf{x}_2 - i\mathbf{k}_i \mathbf{x}_2} \\ & = (2\pi)^8 \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}) \delta^4(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \end{aligned} \quad (26)$$

であるから, x_1, x_2, \mathbf{p} についての積分を実行すれば

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 \int d^4x_2 (25) & = i \sqrt{\frac{m}{VE_f}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_f}} \sqrt{\frac{m}{VE_i}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_i}} \\ & \times \bar{\mathbf{u}}_{\epsilon_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^{\mu_1} \varepsilon_{\alpha_f \mu_1}(\mathbf{k}_f) S_F(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}_i) \gamma^{\mu_2} \varepsilon_{\alpha_i \mu_2}(\mathbf{k}_i) \mathbf{u}_{\epsilon_i}(\mathbf{p}_i) \\ & \times (2\pi)^4 \delta(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \end{aligned} \quad (27)$$

式(23)の第二項についても同様に左側から $\langle f|$,右側から $|i\rangle$ をかけて, x_1, x_2 について積分を実行して

$$\begin{aligned} & i \sqrt{\frac{m}{VE_f}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_f}} \sqrt{\frac{m}{VE_i}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_i}} \\ & \times \bar{\mathbf{u}}_{\epsilon_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^{\mu_1} \varepsilon_{\alpha_f \mu_2}(\mathbf{k}_f) S_F(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}_f) \gamma^{\mu_2} \varepsilon_{\alpha_i \mu_1}(\mathbf{k}_i) \mathbf{u}_{\epsilon_i}(\mathbf{p}_i) \\ & \times (2\pi)^4 \delta(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \end{aligned} \quad (28)$$

また式(22)について整理すると

$$\langle 0|T[\psi_{m_2}(\mathbf{x}_2) \bar{\psi}_{l_1}(\mathbf{x}_1)]|0\rangle N[\bar{\psi}_{l_2}(\mathbf{x}_2) \gamma_{l_2 m_2}^{\mu_2} A_{\mu_2}(\mathbf{x}_2) \gamma_{l_1 m_1}^{\mu_1} \psi_{m_1}(\mathbf{x}_1) A_{\mu_1}(\mathbf{x}_1)] \quad (29)$$

であり,式(21)と比較して,添え字の1と2が入れ替わっていることがわかる.したがって,左側から $\langle f|$,右側から $|i\rangle$ をかけて, x_1, x_2 について積分を実行して得られる値は式(21)と同じである.

以上の議論から

$$\begin{aligned} \langle f|e^2 \hat{O}_2|i\rangle & = -ie^2 \sqrt{\frac{m}{VE_f}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_f}} \sqrt{\frac{m}{VE_i}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_i}} (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \\ & \times \{ \bar{\mathbf{u}}_{\epsilon_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^{\mu_1} \varepsilon_{\alpha_f \mu_1}(\mathbf{k}_f) S_F(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}_i) \gamma^{\mu_2} \varepsilon_{\alpha_i \mu_2}(\mathbf{k}_i) \mathbf{u}_{\epsilon_i}(\mathbf{p}_i) \\ & + \bar{\mathbf{u}}_{\epsilon_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^{\mu_1} \varepsilon_{\alpha_f \mu_2}(\mathbf{k}_f) S_F(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}_f) \gamma^{\mu_2} \varepsilon_{\alpha_i \mu_1}(\mathbf{k}_i) \mathbf{u}_{\epsilon_i}(\mathbf{p}_i) \} \end{aligned} \quad (30)$$

と求められる.ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{M} & = \{ \bar{\mathbf{u}}_{\epsilon_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^{\mu_1} \varepsilon_{\alpha_f \mu_1}(\mathbf{k}_f) S_F(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}_i) \gamma^{\mu_2} \varepsilon_{\alpha_i \mu_2}(\mathbf{k}_i) \mathbf{u}_{\epsilon_i}(\mathbf{p}_i) \\ & + \bar{\mathbf{u}}_{\epsilon_f}(\mathbf{p}_f) \gamma^{\mu_1} \varepsilon_{\alpha_f \mu_2}(\mathbf{k}_f) S_F(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}_f) \gamma^{\mu_2} \varepsilon_{\alpha_i \mu_1}(\mathbf{k}_i) \mathbf{u}_{\epsilon_i}(\mathbf{p}_i) \} \end{aligned} \quad (31)$$

と定義する. \mathcal{M} は不変散乱振幅とよばれるものである.

ここまでは始状態と終状態の電子のスピン,光子の偏極を指定した状況を考えてきたので,始状態についてはそれぞれについて平均を,終状態についてはそれぞれについて和を取る必要がある.すなわち

$$M = \frac{1}{4} \sum_{spin, pol} |\mathcal{M}|^2 \quad (32)$$

を考える必要がある,これを計算すれば

$$M = \frac{1}{4} \sum_{spin, pol} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2m^2} \left[\frac{\omega_i}{\omega_f} + \frac{\omega_f}{\omega_i} - \sin^2 \theta \right] \quad (33)$$

となる.以上より

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin, pol} |\langle f|e^2 \hat{O}_2|i\rangle|^2 & = M \frac{m^2 e^4}{4E_i E_f \omega_i \omega_f V^4} \\ & \times (2\pi)^4 (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \end{aligned} \quad (34)$$

したがって電子と光子それぞれが散乱前後で異なるエネルギー,運動量を持つとすれば,2次の摂動までを考えた遷移確率Pは

$$P = \frac{1}{4} \sum_{spin, pol} |\langle f|i \rangle + \langle f|e\hat{O}_1(t)|i \rangle + \langle f|e^2\hat{O}_2(t)|i \rangle|^2$$

$$= M \frac{m^2 e^4}{4E_i E_f \omega_i \omega_f V^4} (2\pi)^4 (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i)$$
(35)

2.2.2 微分断面積

次の反応を考える



A,Bの粒子密度を ρ_A, ρ_B とし,AとBの相対速度を v_{rel} ,空間の体積を V とする. T 秒間に N 回の散乱が起こった時,散乱断面積 σ は

$$N = TV\rho_A\rho_B v_{rel}\sigma$$
(37)

で定義される. コンプトン散乱について考え,終状態について,光子の運動量が $\mathbf{p}_1 + d\mathbf{p}_1$,電子の運動量が $\mathbf{p}_2 + d\mathbf{p}_2$ であるような状況を考える. $\sigma \rightarrow d\sigma, N \rightarrow dN$ と表記することにする.始状態から運動量が $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の終状態への遷移確率を P とすれば,終状態の状態数は $\frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_1 \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_2$,始状態の光子数は $\rho_A V$,始状態の電子数は $\rho_B V$ で光子と電子を1つずつ選ぶ選び方は $\rho_A V \rho_B V$ 通りあるので

$$dN = P\rho_A V \rho_B V \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_1 \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_2$$
(38)

したがって

$$d\sigma = P \frac{V^4}{TV v_{rel}} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3}$$
(39)

これを今回の状況に適用して

$$d\sigma = M \frac{m^2 e^4}{4E_i E_f \omega_i \omega_f V^4} \frac{V^4}{TV v_{rel}}$$

$$\times (2\pi)^4 (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}$$
(40)

ここで積分を実行するとデルタ関数の片方については $\delta(0)$ となり, T, V が十分に大きければ

$$(2\pi)^4 \delta(0) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_V d^3 x = TV$$
(41)

であることから

$$d\sigma = M \frac{m^2 e^4}{4E_i E_f \omega_i \omega_f v_{rel}} (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}$$
(42)

となる.積分変数を取り換えて

$$d\sigma = M \frac{m^2 e^4}{16\pi^2 E_i E_f \omega_i \omega_f v_{rel}} \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) |k_f|^2 d|k_f| d\Omega d^3 p_f$$
(43)

となるので,微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = M \frac{m^2 e^4}{16\pi^2 E_i E_f \omega_i \omega_f v_{rel}} \delta^4(\mathbf{k}_f + \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) |k_f|^2 d|k_f| d^3 p_f$$
(44)

右辺の積分を実行して,エネルギーと運動量の保存則から導かれる関係式を用いて整理すれば

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 M$$
(45)

となる.式(33)を代入すれば

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega_f}{\omega_i}\right)^2 \frac{1}{2m^2} \left[\frac{\omega_i}{\omega_f} + \frac{\omega_f}{\omega_i} - \sin^2\theta\right] \quad (46)$$

微細構造定数 $\alpha = e^2/(4\pi)$ を用いて $\omega_i \rightarrow \omega, \omega_f \rightarrow \omega'$ として整理すれば

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta\right] \quad (47)$$

これはクライン仁科の式と呼ばれている式で,求めたかった散乱頻度の角度依存性についての式である.

3 実験装置

3.1 実験装置の配置

3.1.1 使用する器具

- ・ ^{137}Cs

本実験で使用した放射線源. 611 keV の γ 線を放出する

- ・ シンチレータ (NaI, LaBr₃)

放射線が中でエネルギーを落とすと光を発する物質

- ・ 光電子増倍管

シンチレータで発生した光を増大させて信号を送る器具

3.1.2 装置の配置図

Csからの放射線がLaBr₃に入射してコンプトン散乱を起こし,その後 NaIに入射するように配置する.本実験ではCsからLaBr₃までの距離を 15 cm,LaBr₃からNaIまでの距離を20 cmにして実験した.また,Csからの放射線が直接NaIに入ることを防ぐために,角度 θ が π に近すぎない場合はCsとNaIの間に鉛を設置した.

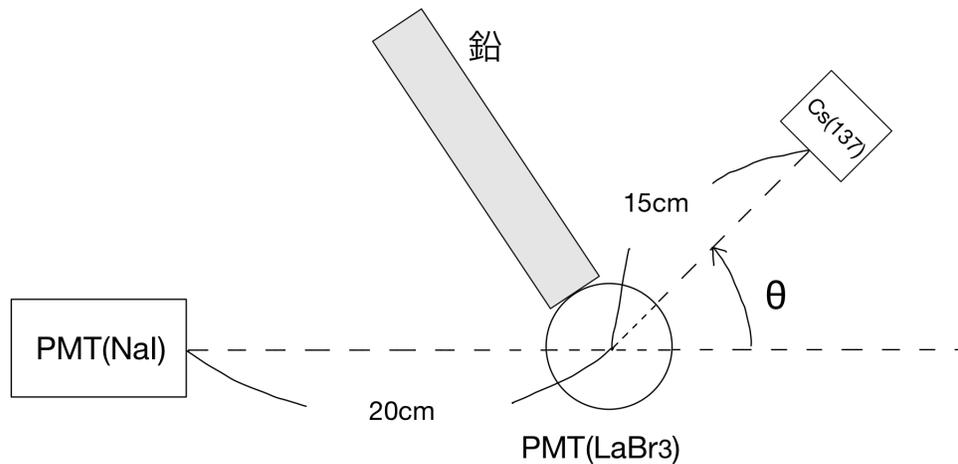


Figure 3: 実験装置の配置図

3.2 平均自由行程

Csからの放射線がLaBr₃のどの位置で反応するかを確認する.

図5のような装置を用いて平均自由行程の測定を行う.線源からの放射線が10秒間で観測される回数を,線源とシンチレータの距離を変えながら測定する.

- ・ DISC(Discriminator)

PMTからある値より大きい信号が送られてきた際に矩形波を発する

- ・ Scaler

信号が入力された回数を記録する.

得られたデータを

$$y = \frac{b}{(x + a)^2}$$

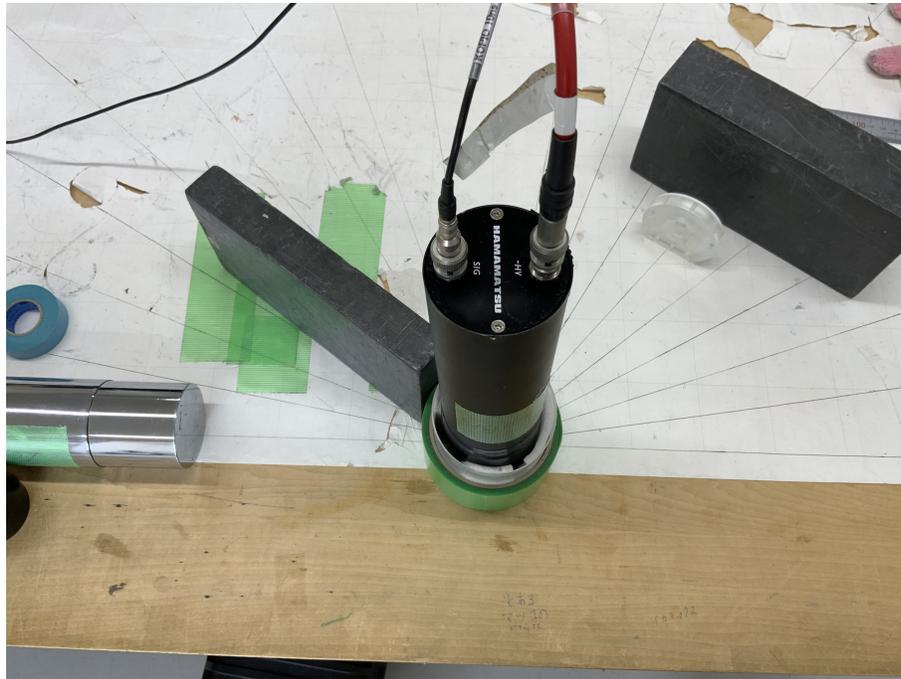


Figure 4: 実際の実験装置の写真

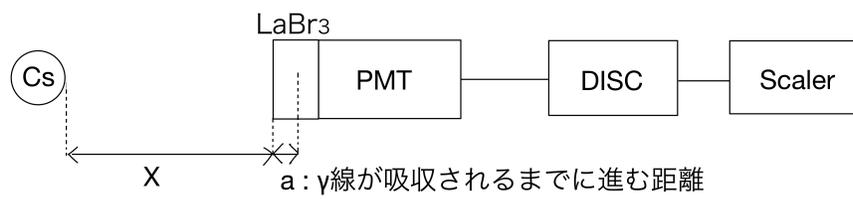


Figure 5: 平均自由行程測定装置図

の関数形でフィッティングすると,次の図6のようなグラフを得ることができる.
(y : 計測回数, x : 線源からシンチレータの距離)

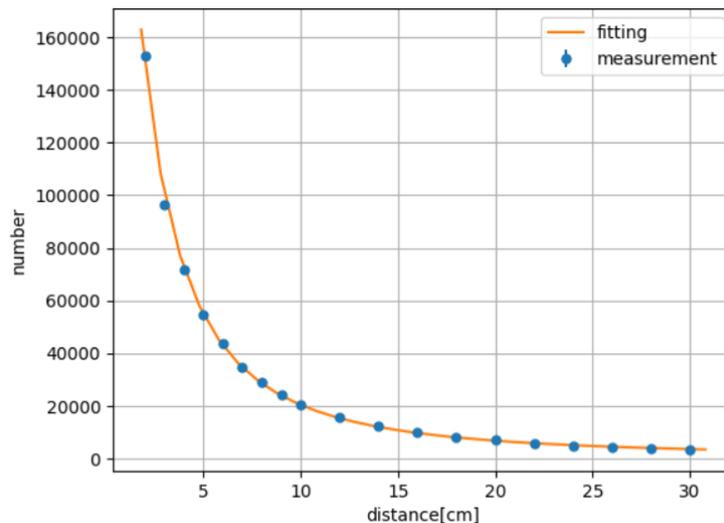


Figure 6: シンチレータからの距離と計測回数のグラフ

ここで最小二乗フィットで求めた a の値は

$$a \sim 2.56 \text{ cm}$$

と求まる.これが平均自由行程である.シンチレータの半径は2.4 cmであるので,シンチレータの中心で γ 線が吸収されるとして,図4のようにシンチレータを立てて設置した.

3.3 本実験

3.3.1 配線図

実験装置を図7のようにつないでデータを取得する.

【装置の説明】

- ・ Divider
送られてきた信号を二つに分割して送信する
- ・ DISC(Discriminator)
ある値よりも大きい信号が送られてきた際に矩形波を発する
- ・ Delay
信号を送信する先に届くまでの時間を遅らせる. (本実験では長いコードを利用して遅らせた)
- ・ COINC(Coincidence)
二つの送信元から同時に信号が送られてきた場合に信号を発する
- ・ GG(Gate Generator)
矩形波を発する
- ・ VETO
続けて送られた複数の信号がつながって一つの信号に変わることを防ぐ
- ・ ADC
GATEからの矩形波の幅に入っている部分を積分した値を求める

3.3.2 オシロスコープに表示される情報

図7のように配線することで,オシロスコープには図8のような波形が映し出される.

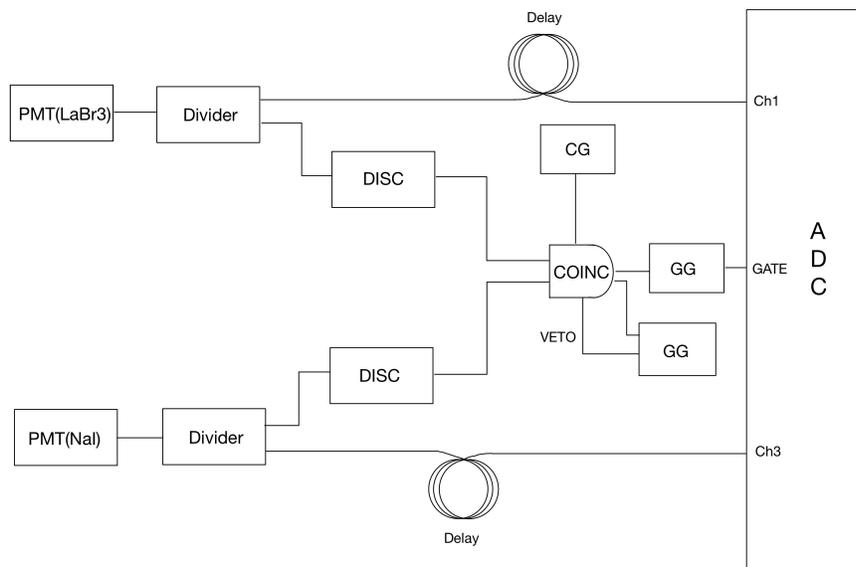


Figure 7: 配線図

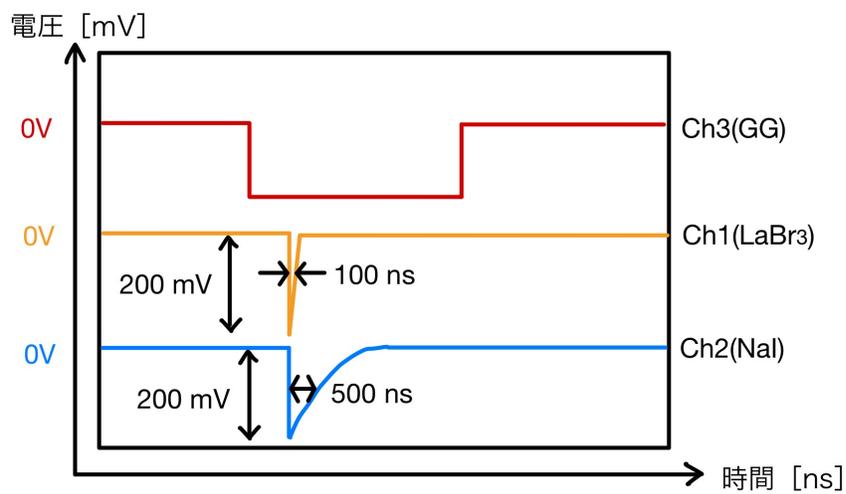


Figure 8: オシロスコープに映る波形

Ch1,Ch2の信号にDelayを書けることで,二つの信号がGGの矩形波の中に収まっている.
 GGの矩形波の範囲内でCh1,Ch2の波形が作る面積を計算することでエネルギーを求める.
 また,エネルギー校正で用いるデータは,COINCを使わず,1つ1つの光電子増倍管から得られる信号の面積をADCで計算する.

3.4 ペDESTAL

実際にADCで信号を積分しようとする場合,線源からの放射線による入力がない場合でもADCの値が有限の値をとり,信号がギザギザになり余計な積分を行ってしまう.これをペDESTALと呼ぶ.

ペDESTALによるADC値への寄与を差し引いた値を解析で使用するため,ペDESTAL分のADC値を別で求める必要がある.

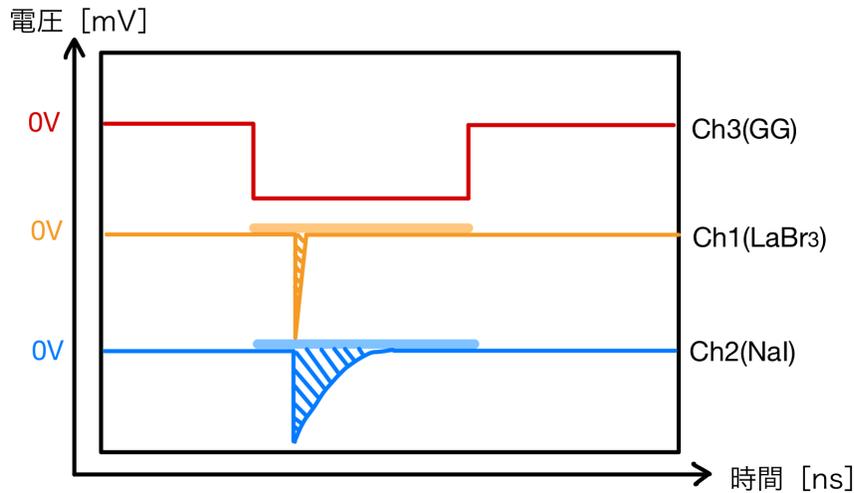


Figure 9: 薄い線で示した部分にペDESTALの影響が現れる

配線は図7と同様にしたうえで,線源を鉛で覆った状態にして クロックジェネレーターから矩形波を発生させる.

- ・ CG
一定周期で信号を発生させる装置

本実験では1kHz周期の信号を発生させ,この矩形波で積分した値をペDESTALのADC値として全体のADC値から差し引く.

4 結果

4.1 エネルギー較正

実験で得たADCの値をエネルギーの値に対応させるため,これらの関係式を実験データと既知の値を使って求める.今回の実験では¹³⁷Csのピーク値662keVを既知として用いた.

またピーク値におけるADCカウントは,分布図でピーク周りをガウス関数に近似(fitting)して得た.¹以下の図は例としてを90°に設置した際のNaIにおけるADCカウントである.

¹関数 $G(x) = A \exp(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2})$ をフィッティングしてA, \bar{x} , σ を求めた.

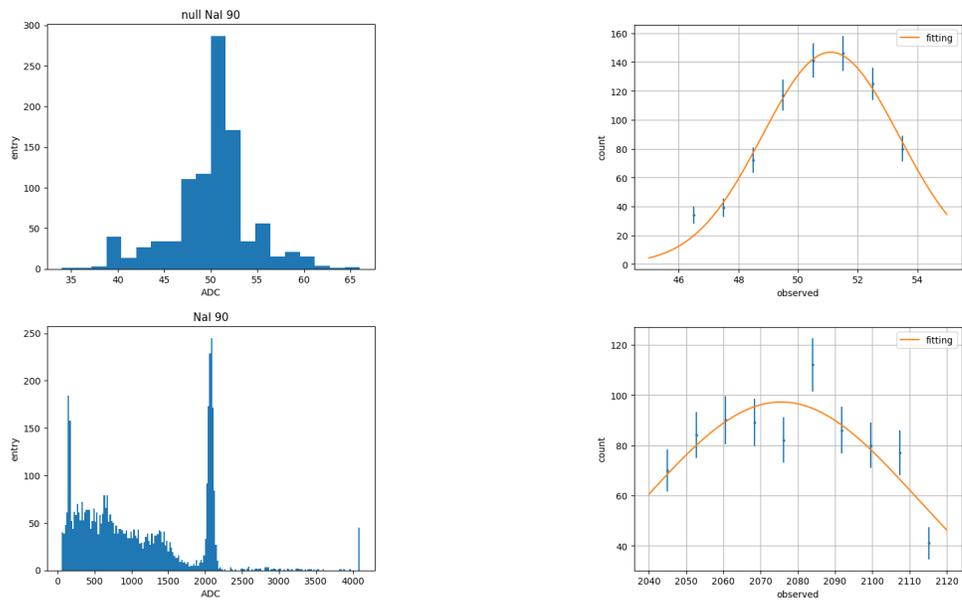


Figure 10: ^{137}Cs が 90° の時のNaIにおけるADCカウント

0keVに対応するADCカウントは 51.09 ± 0.1 , 662keVでは 2075.5 ± 3.1 となった。

また 90° でのLaBr₃についても同様の測定,計測をした。

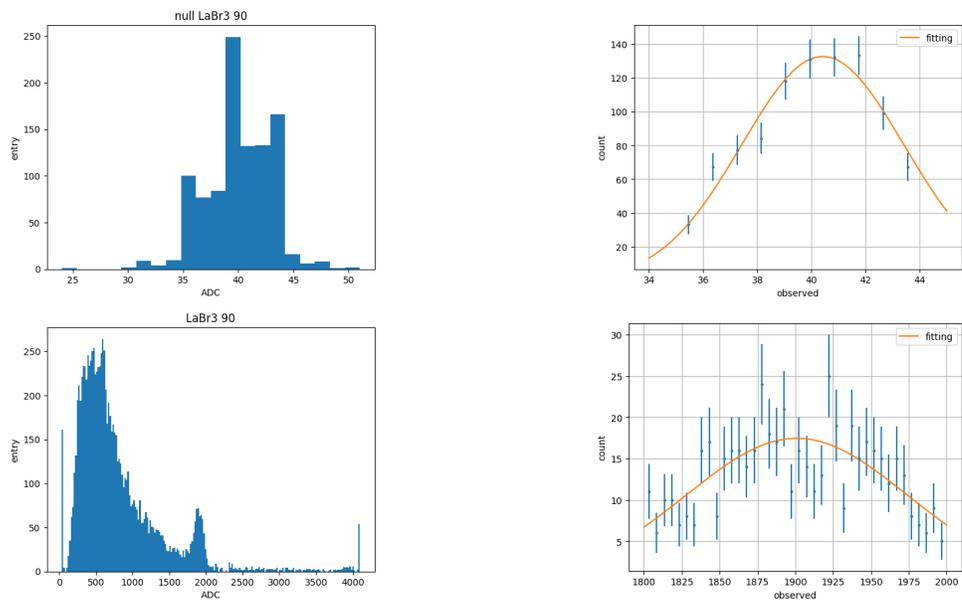


Figure 11: ^{137}Cs が 90° の時のLaBr₃におけるADCカウント

0keVに対応するADCカウントは 40.414 ± 0.162 , 662keVでは 1900.9 ± 5.1 となった。

次にそれぞれの図から0keVと662keVにおけるADCの値を読み取り,線形な関係があると仮定して回帰直線を描くとそれぞれ以下の図のようになった。

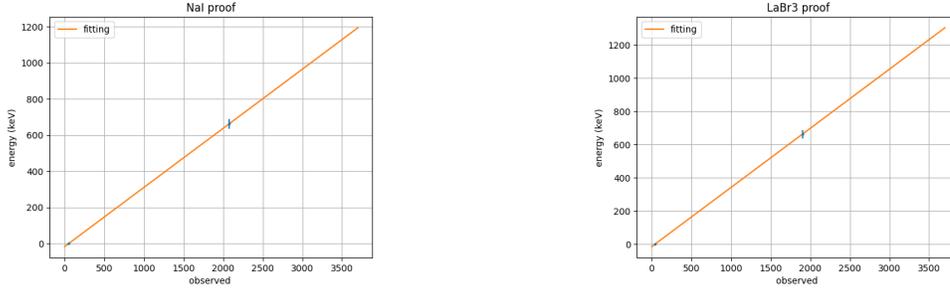


Figure 12: 回帰直線

このグラフからエネルギー E とADCの値 X の関係式

$$E = ax + b \quad (48)$$

の係数 a, b がもとまる.それぞれの関係式を以下の表にまとめた.

Table 1: 角度ごとのエネルギー較正式の係数

角度	NaI		LaBr3	
	a (keV/counts)	b (keV)	a (keV/counts)	b (keV)
30	0.359	-11.7	0.352	-14.9
60	0.363	-12.2	0.339	-15.1
90	0.327	-16.7	0.356	-14.4
120	0.365	-11.7	0.336	-14.0
150	0.358	-13.0	0.342	-16.2
180	0.354	-17.6	0.337	-20.1

4.2 実験結果

角度を変えながら両方のシンチレータでcoincidenceを取り,同時に信号が入射した時のADC値をとる.こうして得られたNaIとLaBr₃のADC値を前節で得られた値を用いてエネルギー値に変換し,角度ごとにヒストグラムと散布図を作成した.これを図13に示す.

4.3 エネルギーの角度分布

得られたデータから,散布図の密度が濃いコンプトン散乱が起こっていると思われるエネルギー付近でガウスフィッティングを行い,それぞれのシンチレータがコンプトン散乱で得たエネルギーを求めた.このエネルギーの角度分布を表2と図14に示す.なお,表の理論曲線は式4を用いた.

Table 2: エネルギー角度分布

θ	NaI (keV)	LaBr ₃ (keV)	合計 (keV)
30	556.7 ± 2.07	91.5 ± 2.34	648.2 ± 0.41
60	413.2 ± 1.90	248.2 ± 1.41	661.4 ± 0.31
90	276.5 ± 0.95	387.0 ± 1.04	663.5 ± 0.34
120	237.5 ± 1.02	433.5 ± 0.68	671.0 ± 0.24
150	194.6 ± 1.66	462.5 ± 0.70	657.1 ± 0.39
180	171.6 ± 1.54	466.7 ± 1.11	638.3 ± 0.35

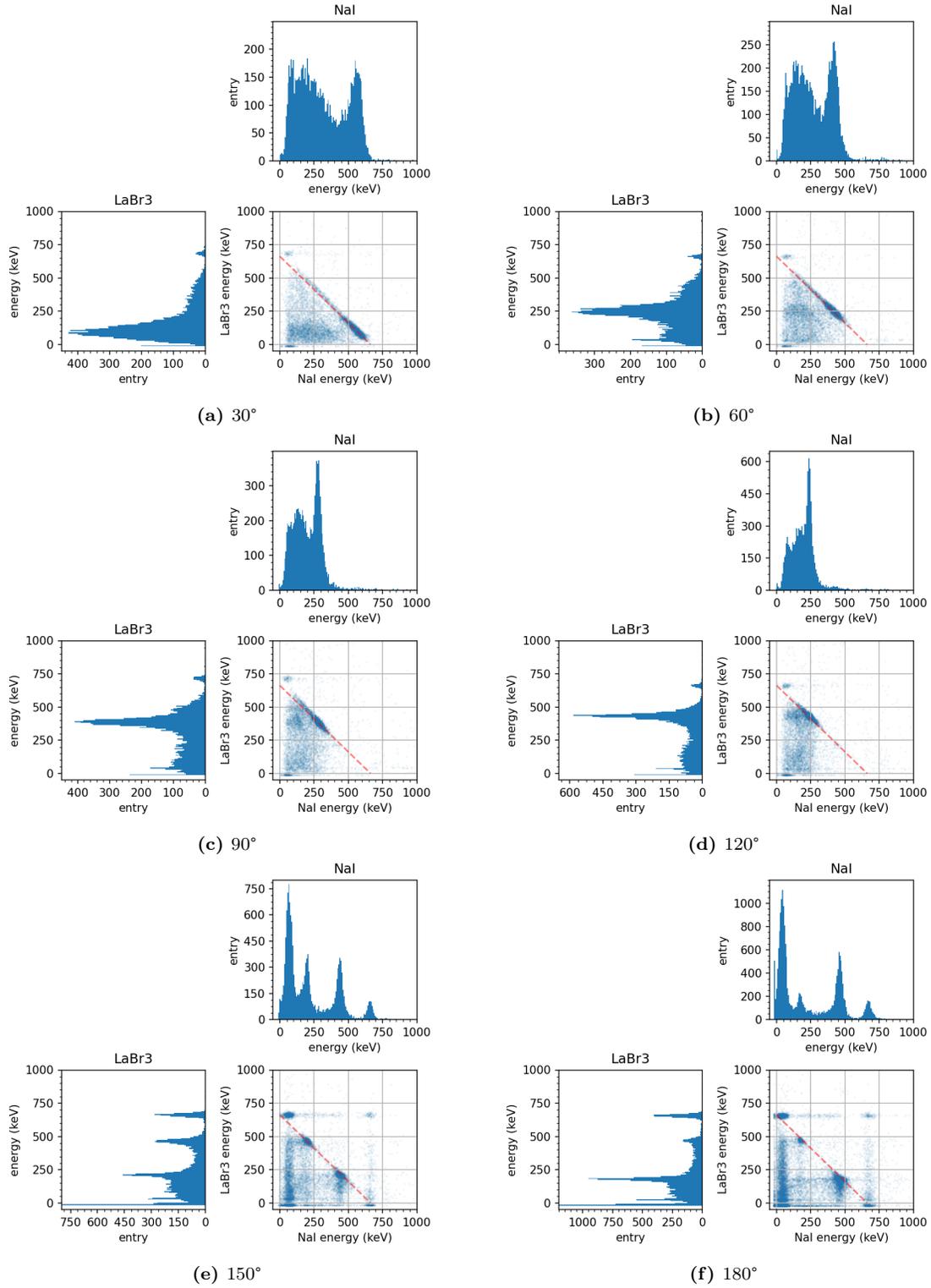


Figure 13: エネルギー分布

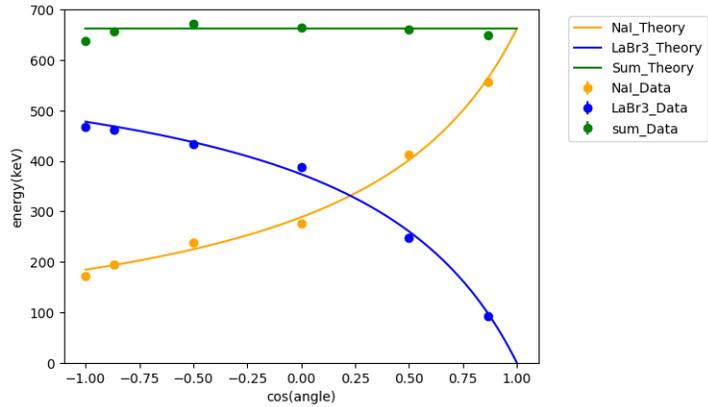


Figure 14: エネルギー角度分布

4.4 微分散乱断面積の角度分布

得られたデータの角度ごとの入射数をカウントし、微分散乱断面積を求めた。このとき、NaIシンチレータにおいてLaBr₃で散乱された後に入射したガンマ線のうち全てが反応するわけではなく、またシンチレータで反応したものも光電吸収されたもの以外はバックグラウンドや線源から直接入ってしまった不要なデータとの区別が難しい。そのため、一度散乱した後に光電吸収したガンマ線のみをカウントし、ガンマ線が各エネルギーごとに光電吸収を起こす比重から、角度ごとの全散乱数を求めた。

NaIシンチレータにおける光電吸収の数をカウントした方法について述べる。まず、NaIシンチレータにおいてとられたデータのうち、LaBr₃シンチレータで散乱した後にNaIシンチレータで光電吸収された数をとるために、図14から二つのシンチレータのエネルギーの合計が 662 ± 50 の幅に入るものだけをとった。必要なデータの見分け方について、図15のようにデータを切り取った後にも無視できないノイズがあった場合には、図16で示す赤枠のようにノイズの影響が小さい高エネルギー領域のデータ数をカウントし、その数を2倍してNaIで光電吸収した数とみなした。また、図17のようにカット後に複数のガウス分布がある場合には、赤線で囲った部分(エネルギーの低い順に二番目)のガウス分布が今回のターゲットの反応であると考えられるので、ここに含まれるデータ数をカウントした。

Compton 90 degree

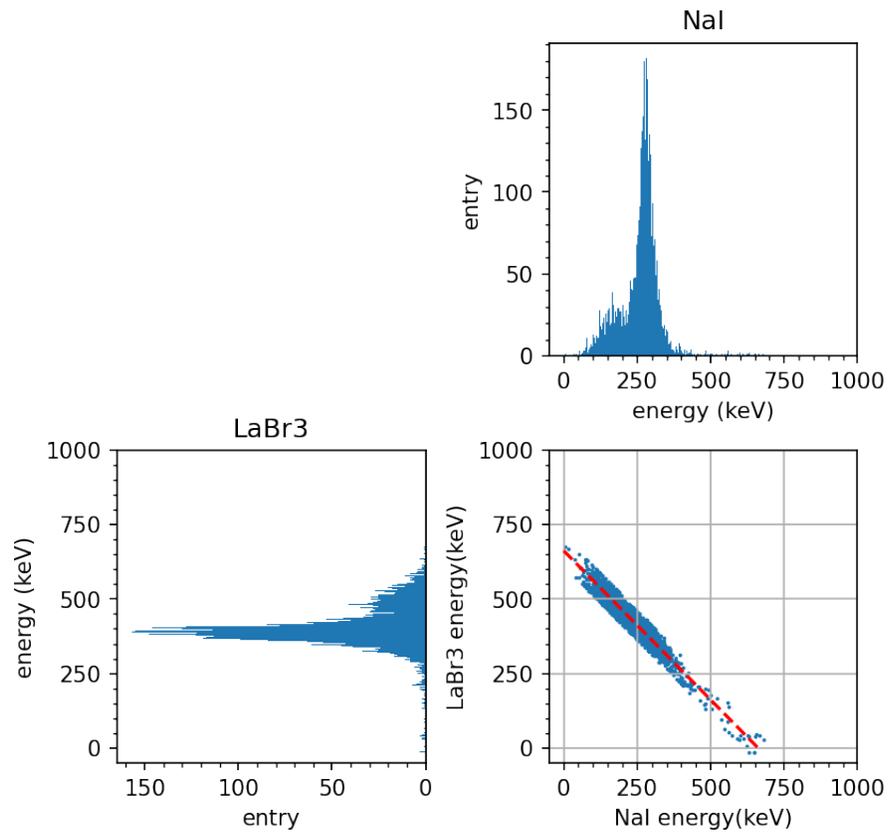


Figure 15: Compton散乱角 90° において,NaIとLaBr₃で落とすエネルギーの合計が 662 ± 50 の幅に入るようにカットしたもの

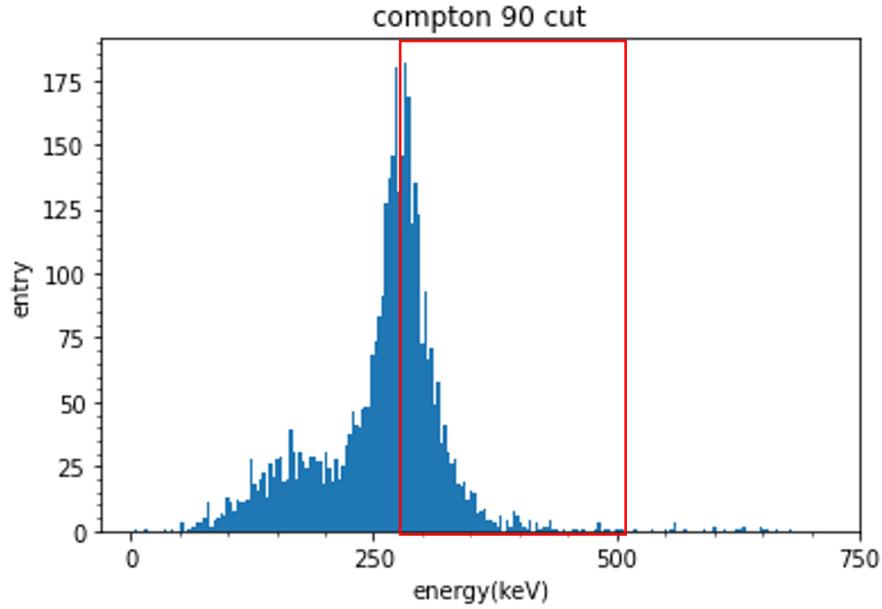


Figure 16: 図15におけるNaIシンチレータのデータ.低エネルギー領域はノイズによって分布とガウス分布のずれが大きい

Table 3: 光電吸収数の角度分布と測定時間

θ	Count	time
30	2292	19 min0.452 s
60	2580	32 min20.405 s
90	3162	38 min16.421 s
120	3282	42 min27.3605 s
150	1502	16 min13.603 s
180	557	7 min26.542 s

このようにして得られた光電吸収の数を表にまとめたものを表3に示す.これを用いてガンマ線の微分散乱断面積を求める.まず,単純にcount/timeとして,単位時間当たりの光電吸収の数をを用いて理論式(式47)でfittingしたものが図18である.

当然ではあるが,このデータは理論曲線とは全く異なったものとなっている.そこで,次に光電吸収の数から,全入射数を求める.ここで,単純なモデルとしてターゲットが一原子の場合を考える.このときには,小田切[7]より,光電吸収の数 I_{Count} が全入射数 I_{in} に対して

$$I_{\text{Count}} \propto I_{\text{in}}/E^{3.5} \quad (49)$$

となっている.これを用いてfittingしたグラフが,図19である.しかしながら,このグラフも理論値と実験値に有意な違いがみられる.

Compton 180 degree

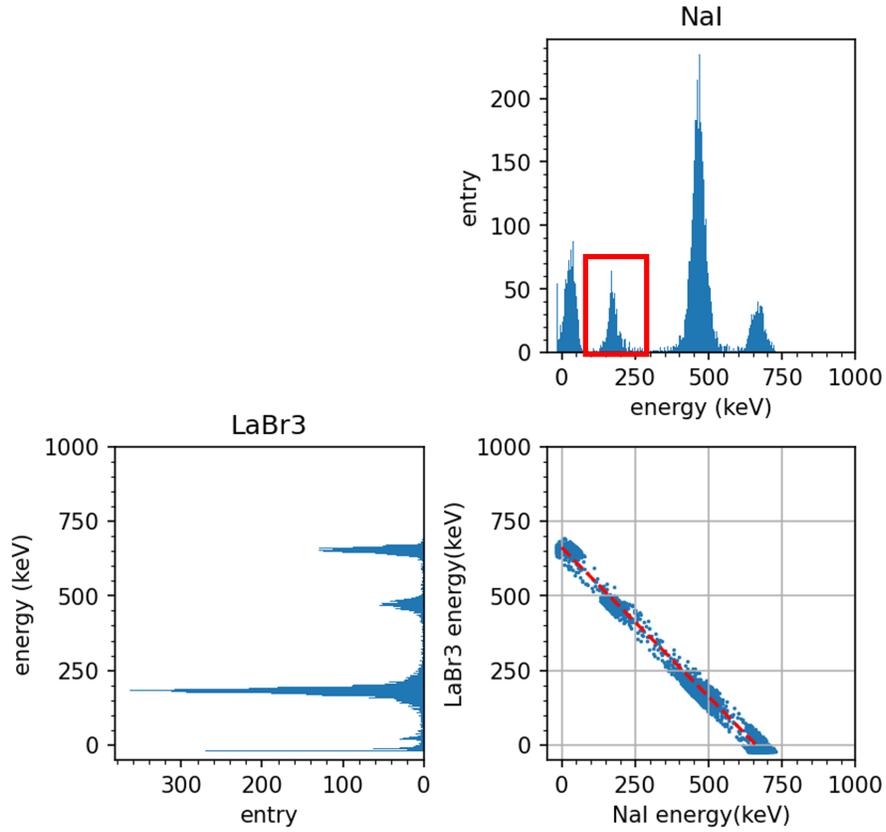


Figure 17: Compton散乱角 90° において,NaIとLaBr₃で落とすエネルギーの合計が 662 ± 50 の幅に入るようにカットしたもの.赤枠で囲った部分がLaBr₃で散乱したのちにNaIに入射し,光電効果を起こしたガンマ線を表す.

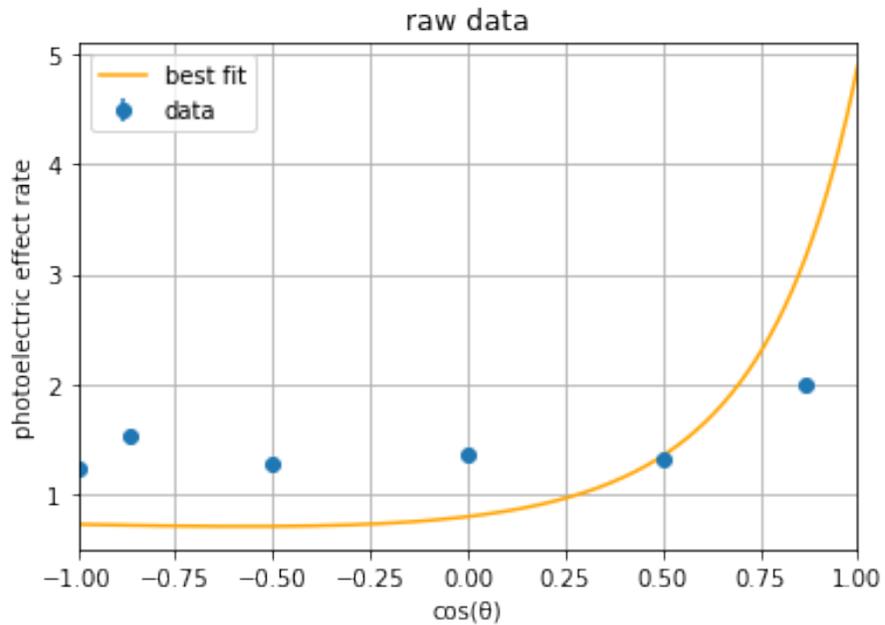


Figure 18: 光電吸収の数/測定時間のデータでfittingを行ったグラフ

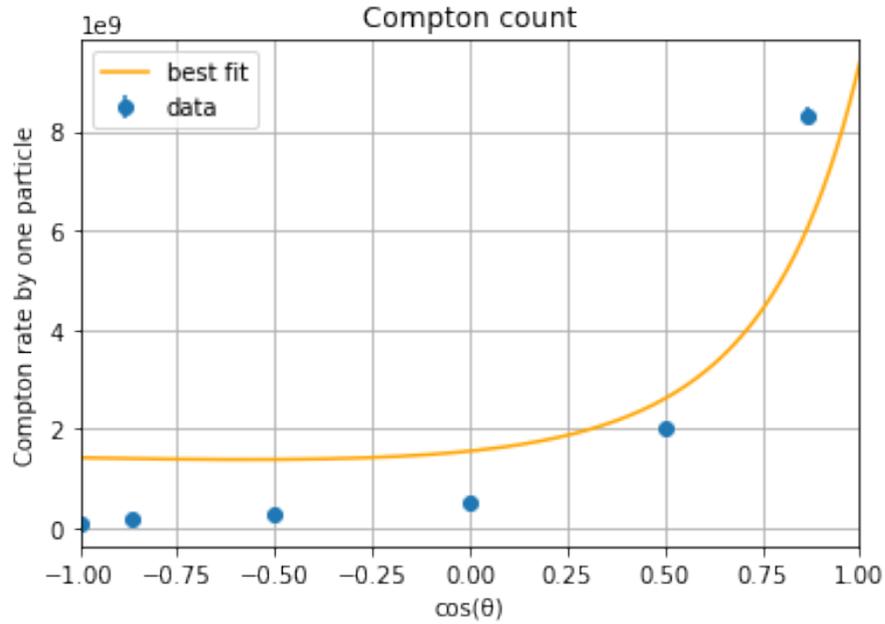


Figure 19: Eq49に基づいて換算したデータによるfitting

5 考察

5.1 エネルギー角度分布

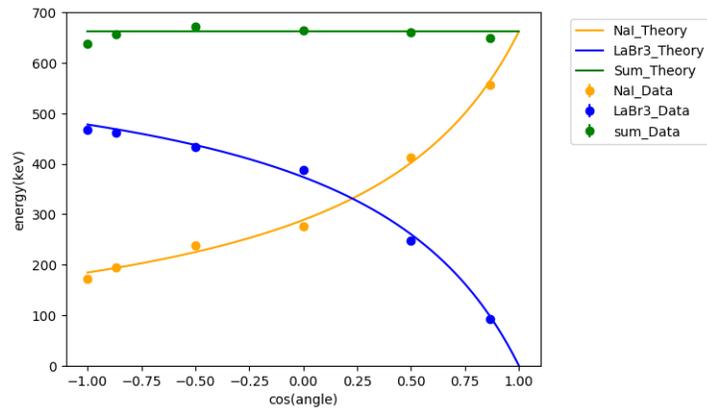


Figure 20: エネルギー角度分布

従前のおり,理論値とよく一致していると考えられる.このことは,光の粒子性を示している.

5.2 散乱確率の角度分布

単位時間当たりのイベント数が,微分散乱断面積,すなわち散乱確率に比例していると仮定して,本実験からコンプトン散乱の微分散乱断面積の理論式であるクライン・仁科の式を検証する.

このとき,以下の式が成り立っている.

$$(\text{単位時間当たりのカウント数}) = (\text{微分散乱断面積}) \times C(\text{定数})$$

この式に従って C を最小二乗法を用いて求めると以下ようになる.

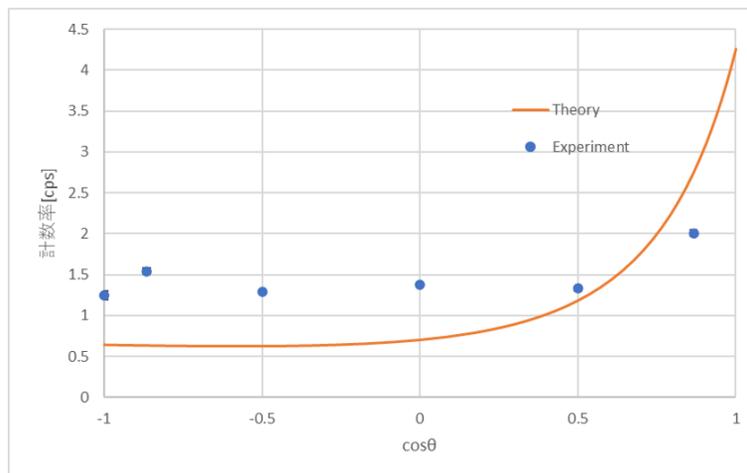


Figure 21: 計数率の角度分布

このとき, C と χ^2/ndf の値は以下である.

$$C = 4.262474$$

$$\chi^2/ndf = 0.694822$$

図21より, 実験値は理論式に従っていない. これは, γ 線のエネルギーによって透過力が異なるために, 角度によって検出率が変化したことによると考える.

したがって以下では, γ 線のエネルギーごとに各シンチレータにおける検出数の補正を考察する.

5.2.1 NaIシンチレータの補正

NaIシンチレータでは, コンプトン散乱した後の散乱光子を検出している. このため, シンチレータで吸収されずに透過してしまう光子によって検出数が減少することが考えられる.

よって, ここではNaIシンチレータを透過する光子の割合をもとめる.

透過光子数 I は吸収物質のない場合の光子数 I_0 を用いて以下のような関係にある.

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho x} \quad (50)$$

μ は線源減衰係数, ρ は密度, x は透過距離である.

今回用いられたNaIシンチレータは, 密度 3.67 g/cm^2 , 入射方向の長さ 5.5 cm であることから, 必要な補正は,

$$\frac{1}{1 - e^{\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \times 3.67 \times 5.5}}$$

であることがわかる.

また, 各角度に散乱された光子のエネルギーに対応する質量減衰係数 (μ/ρ) [8] をまとめたものが, 以下の表4, 図22である.

Table 4: NaIの光電吸収による質量減衰係数

θ [deg]	μ/ρ [cm^2/g]
30	0.01252
60	0.02952
90	0.07225
120	0.1448
150	0.2212
180	0.2545

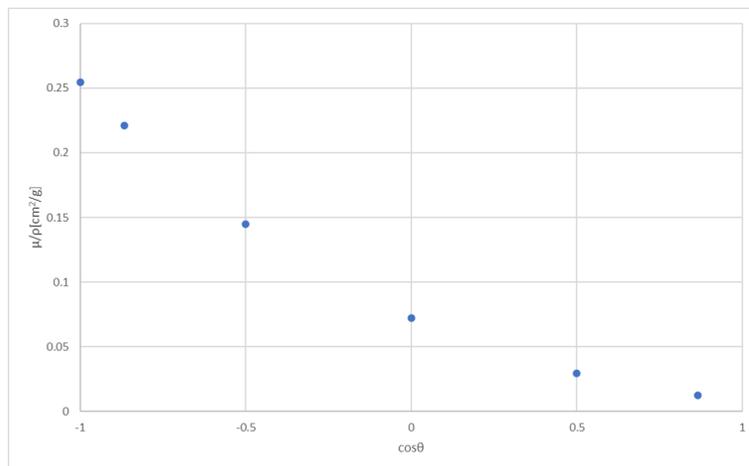


Figure 22: NaIの光電吸収による質量減衰係数の角度分布

以上より,検出数に補正をすると以下の図23になる.

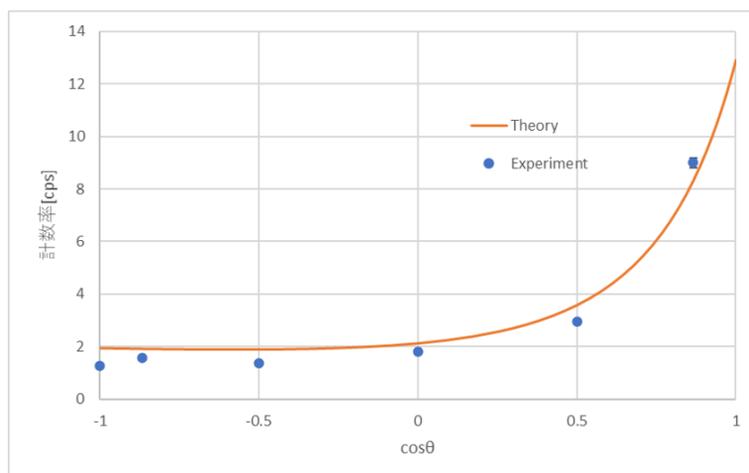


Figure 23: NaIシンチレータの補正を加えた計数率の角度分布

このとき, C と χ^2/ndf の値は以下である.

$$C = 12.87785$$

$$\chi^2/ndf = 0.131067$$

χ^2/ndf の値が減少し,理論値に近い値となった.これは妥当な補正であったと考える.

5.2.2 LaBr₃シンチレータの補正

次に,LaBr₃シンチレータにおける検出数の補正を考察する.

LaBr₃シンチレータでは,入射光子がコンプトン散乱したときに落とすエネルギーを検出している.本実験で検出している光子は,コンプトン散乱したのちNaIシンチレータに入射した光子をカウントしているため,LaBr₃シンチレータ内を目的の角度でコンプトン散乱したものの,LaBr₃シンチレータから脱出できなかった(シンチレータ内で吸収されてしまった)光子を検出することはできない.

この散乱後の光子が吸収される確率は,散乱光子のエネルギーによって異なると考えられる.よってこれを補正する.

以下のようなモデルを考える.

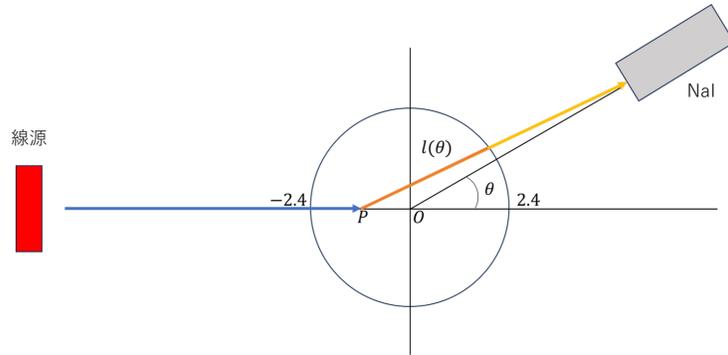


Figure 24: 散乱光子の透過距離

上の図24から,LaBr₃シンチレータの中心からずれた場所で散乱することにより,散乱角度によってシンチレータ内を透過する距離が異なることがわかる.この距離を $l(\theta)$ とおいておく.

まず,コンプトン散乱した入射光子の散乱位置の期待値 $d[\text{cm}]$ を求める.LaBr₃シンチレータの密度 $5.29\text{g}/\text{cm}^3$, 662keV の γ 線に対するコンプトン散乱の質量減衰定数 $0.06557\text{cm}^2/\text{g}$ [8]より,式50から,その値は,

$$d = \frac{\int_0^{4.8} x e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho x}}{\int_0^{4.8} e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho x}} \simeq 1.76$$

と求められる.

よって,入射光子がコンプトン散乱後にLaBr₃シンチレータ内を進む距離 $l(\theta)$ を求めると以下の表5,図25になる.

Table 5: 散乱角度と透過距離

$\theta[\text{deg}]$	$l(\theta)[\text{cm}]$
30	2.939
60	2.672
90	2.334
120	2.029
150	1.828
180	1.76

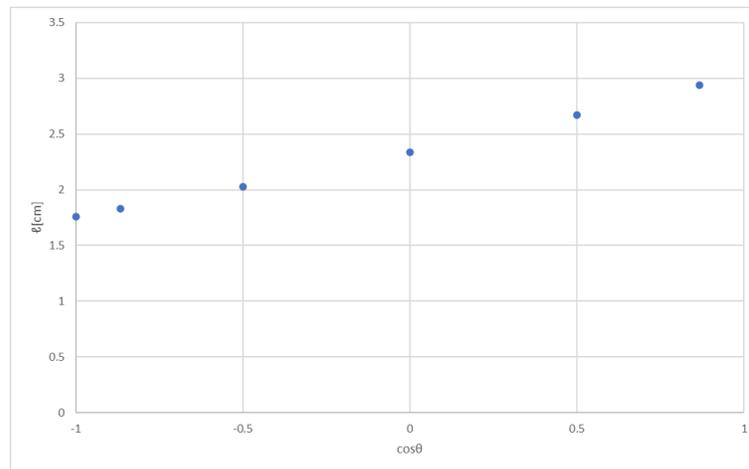


Figure 25: 透過距離の角度分布

また,LaBr₃の各散乱光子のエネルギーに対する質量減衰係数[8]をまとめたものが以下の表6,図26である.

Table 6: LaBr₃の質量減衰係数

θ [deg]	μ/ρ [cm ² /g]
30	0.07932
60	0.1018
90	0.1431
120	0.2037
150	0.2642
180	0.2902

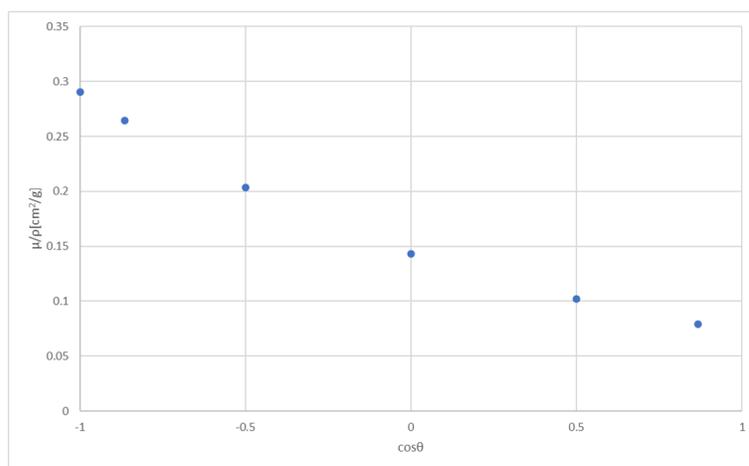


Figure 26: LaBr₃の質量減衰係数の角度分布

したがって,LaBr₃シンチレータの密度5.29g/cm²より,式50から,必要な補正は,

$$e\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \times 5.29 \times l(\theta)$$

であるとわかる.以上より,NaIの補正に加えてさらに補正したものが以下の図27である.

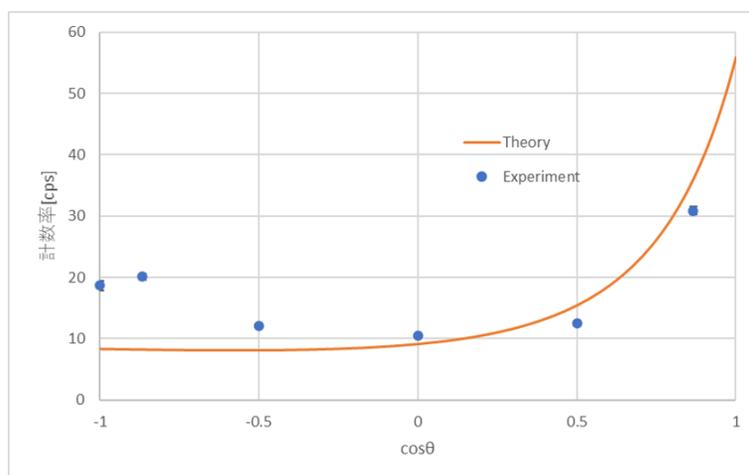


Figure 27: さらにLaBr₃シンチレータの補正を加えた計数率の角度分布

このとき, C と χ^2/ndf の値は以下である.

$$C = 55.79989$$

$$\chi^2/ndf = 6.612993$$

χ^2/ndf の値が大きく増加し, 理論値から遠ざかってしまった. これはよい補正とは言えない.

5.2.3 Labr₃シンチレータの補正の妥当性

Labr₃シンチレータの補正により理論値からばらけてしまった原因は, モデルの選択にあると考える.

今回のモデルにおいては, Labr₃シンチレータの中心に直進してきた光子が散乱することを仮定していたが, 実際に検出される散乱光子が散乱した位置には角度ごとに偏りがあったと考える.

すなわち, 以下のモデルである.

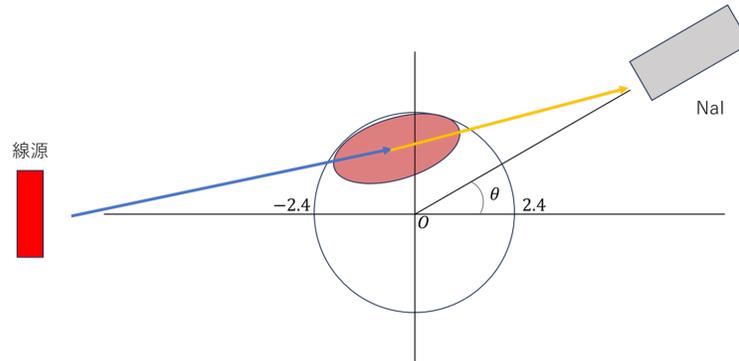


Figure 28: 散乱光子の実際の経路

上図のように, 実際の散乱位置の期待値は Labr₃シンチレータの中心から NaIシンチレータ側にずれた, より透過距離の短い経路を辿ったものであり, 検出された散乱光子は Labr₃シンチレータの表面付近で散乱されたもの多かったのではないかとと思われる.

このことにより, 今回の補正においては反対にばらつきを大きくしてしまったと考える.

この補正を改善することを考える. 入射 (散乱) 光子の線源減衰定数を μ_0, μ_1 , 入射 (散乱) 光子の透過距離を l_0, l_1 として, 式50より, 透過光子の割合が,

$$\frac{I}{I_0} = e^{-(\mu_0 l_0 + \mu_1 l_1)}$$

と書けることから, 積分

$$\frac{\int_D e^{-(\mu_0 l_0 + \mu_1 l_1)} dx dy}{\int_D dx dy}$$

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2.4^2\}$$

をPythonを用いて数値計算し, 検出数を補正する. これは Labr₃シンチレータ内のある点でコンプトン散乱した光子が透過する確率を積分した値を領域の大きさで規格化した値であり, 光子が検出される場合の数に対応している.

具体的な計算方法としては, 領域 $-2.4 \leq x, y \leq 2.4$ を $N \times N$ 分割し (今回は 200×200 とした), 領域 D 内にある格子点に対して l_0, l_1 を求め, 透過確率を足しあげた.

その結果が以下の表7, 図29である. またその比がわかるよう30度に対して規格化した.

Table 7: 透過確率の積分値の比

θ [deg]	積分値
30	1.000
60	0.9050
90	0.7988
120	0.6991
150	0.6440
180	0.6260

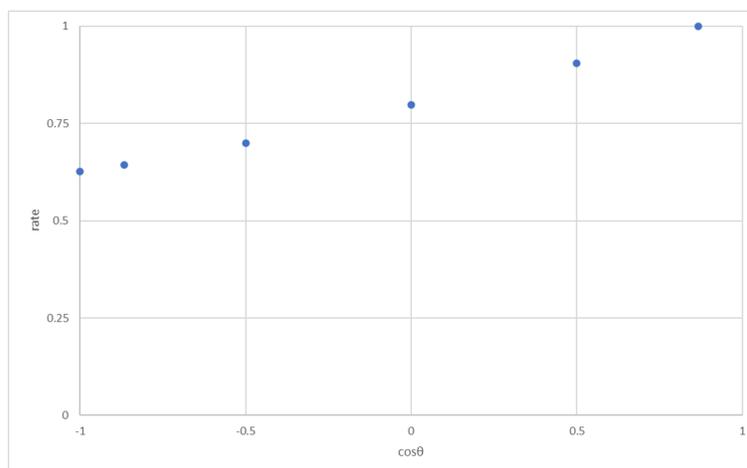


Figure 29: 透過確率の積分値の比の角度分布

以上の計算結果の逆数をかけて補正することにより,以下のグラフ30を得た.

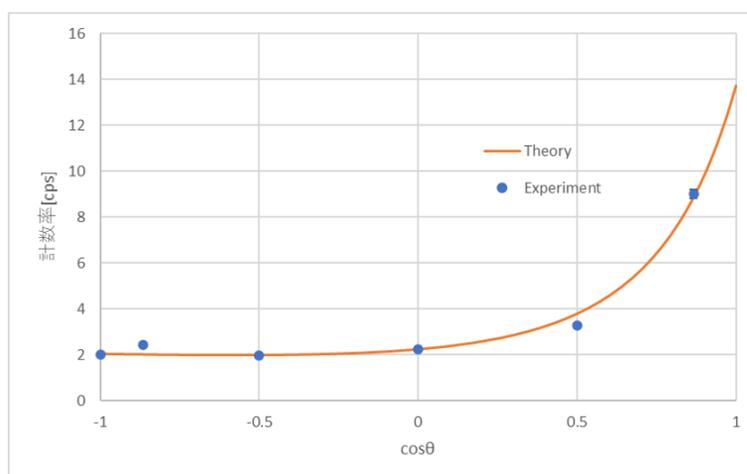


Figure 30: LaBr₃シンチレータの補正を改善した計数率の角度分布

このとき, C と χ^2/ndf の値は以下である.

$$C = 13.70898$$

$$\chi^2/ndf = 0.0309283$$

グラフ30より,明らかにばらつきが減り,理論式を再現できていることがわかる.よって,補正を改善することができたと考える.

6 結論

今回の実験では ^{137}Cs を用いてコンプトン散乱を散乱角度ごとに計測し,散乱光子のエネルギー角度分布,散乱確率の角度分布を検証した.

散乱光子のエネルギー角度分布においては,理論通りのグラフが得られ,光の粒子性を確かめることができた.

散乱確率の角度分布においては, LaBr_3 シンチレータ, NaI シンチレータに対してそれぞれ適切な補正を行うことにより,クライン・仁科の式を検証することができた.

References

- [1] W.N.コッチェンガム, D.A. グリーンウッド. 素粒子標準模型入門. 丸善出版, 2013. 樺沢宇紀, 訳.
- [2] Glenn F. Knoll. 放射線計測ハンドブック. オーム社, 第4版, 2013. 神野郁夫・木村逸郎・阪井英次, 訳.
- [3] 2021年度前期物理科学課題演習A1のレポート
<https://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/A1/reports/a1report21a.pdf>
- [4] 2021年度後期物理科学課題演習A1のレポート
<https://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/A1/reports/a1report21b.pdf>
- [5] 2022年度前期物理科学課題演習A1のレポート
<https://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/A1/reports/a1report22a.pdf>
- [6] 2022年度後期物理科学課題演習A1のレポート
<https://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/A1/reports/a1report22b.pdf>
- [7] 小田切丈.4 放射線と原子分子の相互作用.
Radioisotopes.2017,vol.66,no.10,p.417-424.
- [8] NIST XCOM: Element/Compound/Mixture
<https://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>