

オルソポジトロニウムの 寿命測定

課題演習A2 2020年度後期

恩田 直人 小埜 朋樹 對馬 拓実 成川 佳史 正木 敬梧 湊 修平

目次

1. 目的、理論 (湊)
2. 実験原理、器具 (成川)
3. セットアップ、回路 (小埜)
4. 生データ、キャリブレーション、TQ補正 (恩田)
5. Pick-off補正 (正木)
6. 考察、結論 (對馬)

1. 目的、理論

ポジトロニウムとは？

ポジトロニウム  電子・陽電子の束縛状態
(束縛エネルギーは6.8eVで非相対論的)

こうした粒子の生成消滅演算子はQEDのラグランジアンの中に直接的には含まれないが、実際には1つの粒子のように振る舞う

ポジトロニウムの状態

$L=0$ を満たす基底状態を考えると、
Psの状態は静止系において合成スピンのみで分類可能:

スピン三重項  オルソポジトロニウム (o-Ps)

スピン一重項  パラポジトロニウム (p-Ps)

※ L は軌道角運動量

実験の目的

電子・陽電子の対消滅のためポジトロニウムは水素原子などとは異なり、比較的短寿命(\sim ns)でいくつかの光子へと崩壊する

今回は特にオルソポジトロニウムの寿命を測定する

ポジトロニウムの状態(再掲)

$L=0$ を満たす基底状態を考えると、
Psの状態は静止系で合成スピンのみで分類可能:

スピン三重項  オルソポジトロニウム (o-Ps)

スピン一重項  パラポジトロニウム (p-Ps)

※ L は軌道角運動量

C parityによる選択則

P_s状態ベクトルの C parity

$$\hat{C}|o\text{-}P_s \rangle = -|o\text{-}P_s \rangle$$

$$\hat{C}|p\text{-}P_s \rangle = |p\text{-}P_s \rangle$$

n光子状態ベクトルの C parity

$$\hat{C}|n\gamma \rangle = (-1)^n |n\gamma \rangle$$

C parityによる選択則

QEDでは荷電共役対称性が成り立つ

→ o-Psは3,5,7,...光子にのみ崩壊可能
p-Psは2,4,6,...光子にのみ崩壊可能

→ o-Psは3光子への崩壊が主要
p-Psは2光子への崩壊が主要

→ (p-Psの寿命) \ll (o-Psの寿命)

理論からの帰結

	ortho(L=0)	para(L=0)
C parity	-1	1
崩壊の選択則	$3r, 5r, \dots$	$2r, 4r, \dots$
寿命	142ns	0.124ns

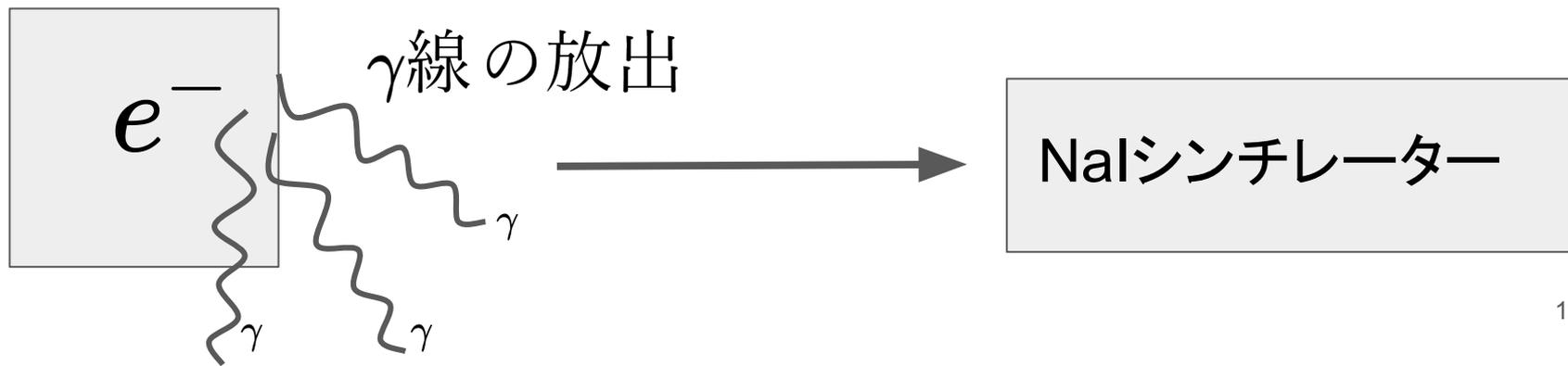
2. 実験原理、器具

実際の実験方法



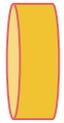
シリカパウダー

ポジトロニウムの形成と崩壊



P. S.

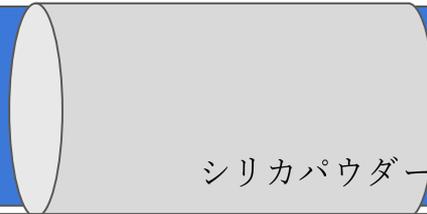
^{22}Na 線源



NaI2

NaI1

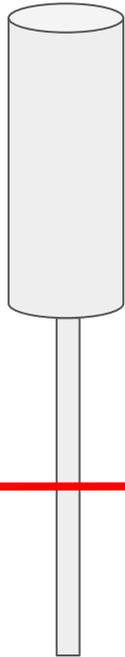
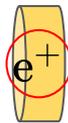
NaI3



シリカパウダー

P. S.

^{22}Na 線源



NaI2

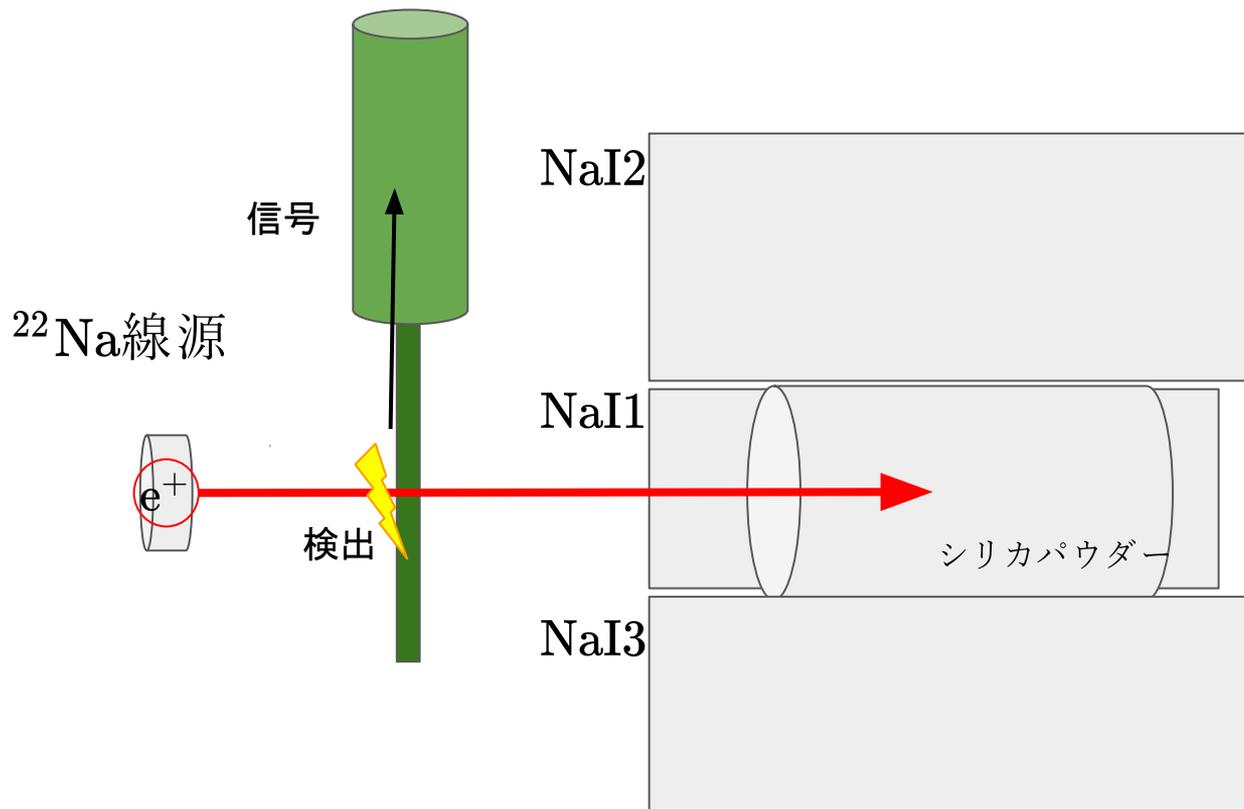
NaI1

NaI3

シリカパウダー

① 線源から が放出される

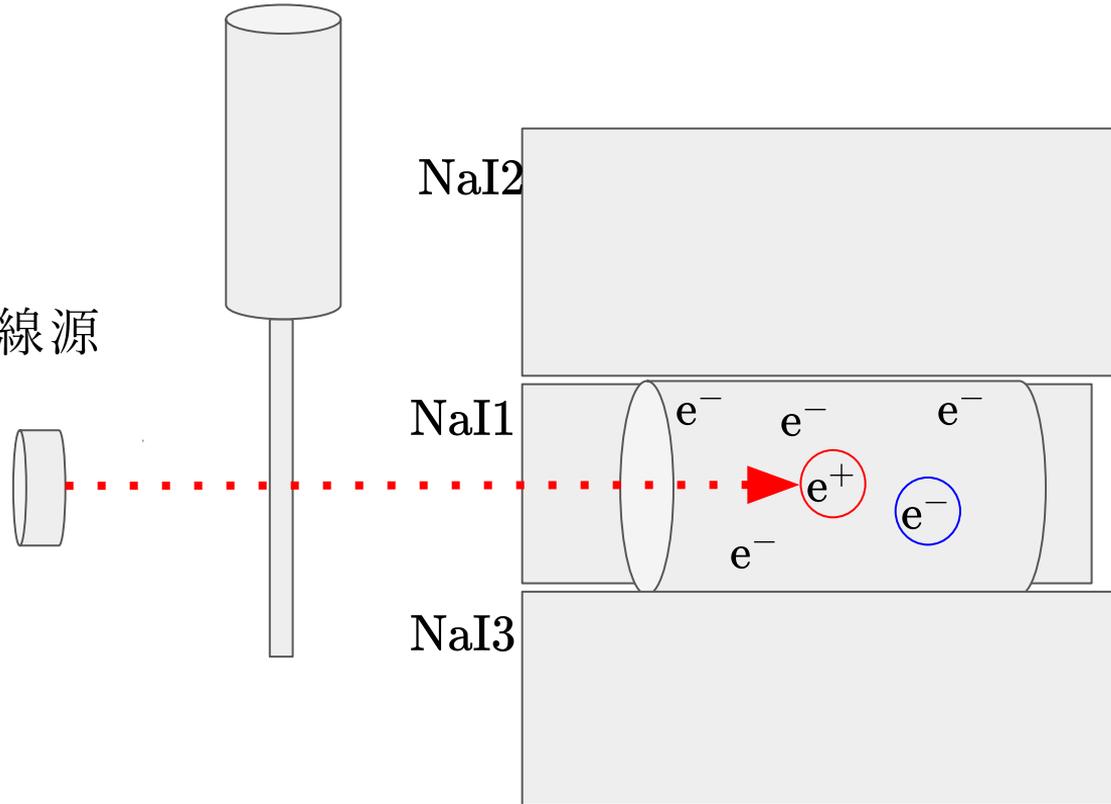
P. S.



② e^+ が通過するとプラスチックシンチレーターから信号が出される

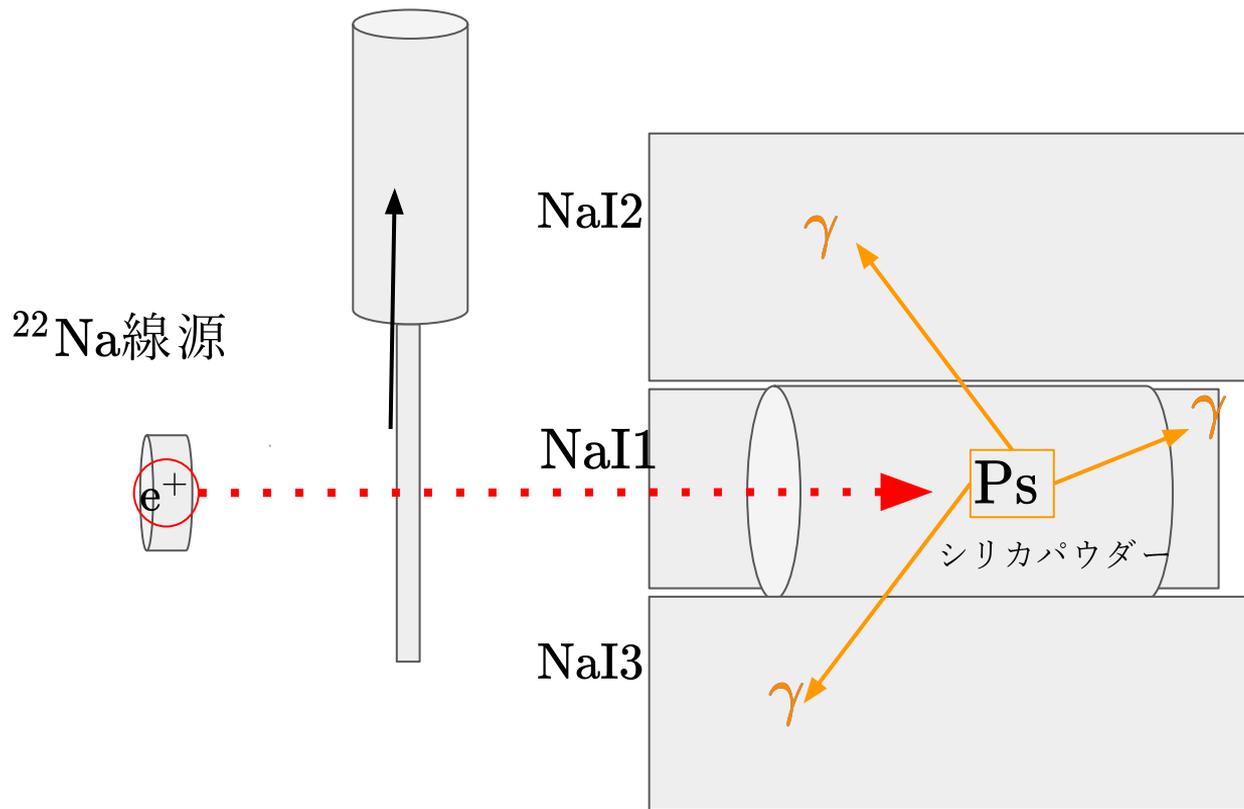
P. S.

^{22}Na 線源



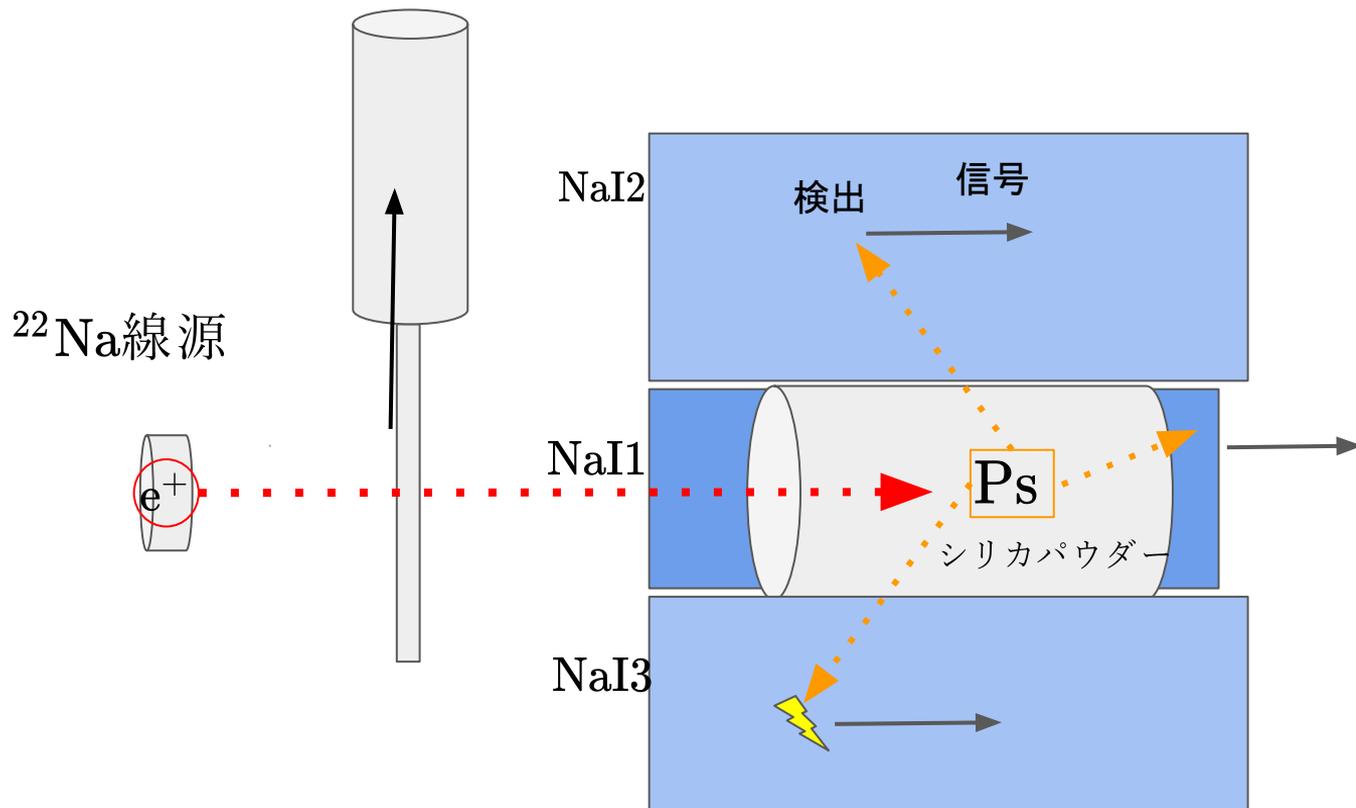
③シリカパウダー内の e^- とPsを生成する。

P. S.



④Psが崩壊するのと同時に γ 線を放出する。

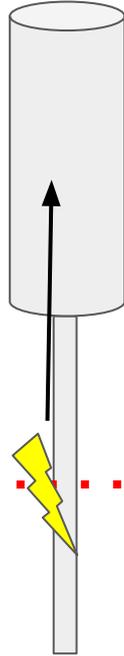
P. S.



⑤ γ 線をNaI1or,2or,3,が検出する。

P.S.

^{22}Na 線源



NaI2

NaI1

NaI3

Ps

シリカパウダー

⑥Ps生成時刻-崩壊時刻

=崩壊時間

P.S.検出時刻

NaI検出時刻

=Ps生成時刻

=Ps崩壊時刻



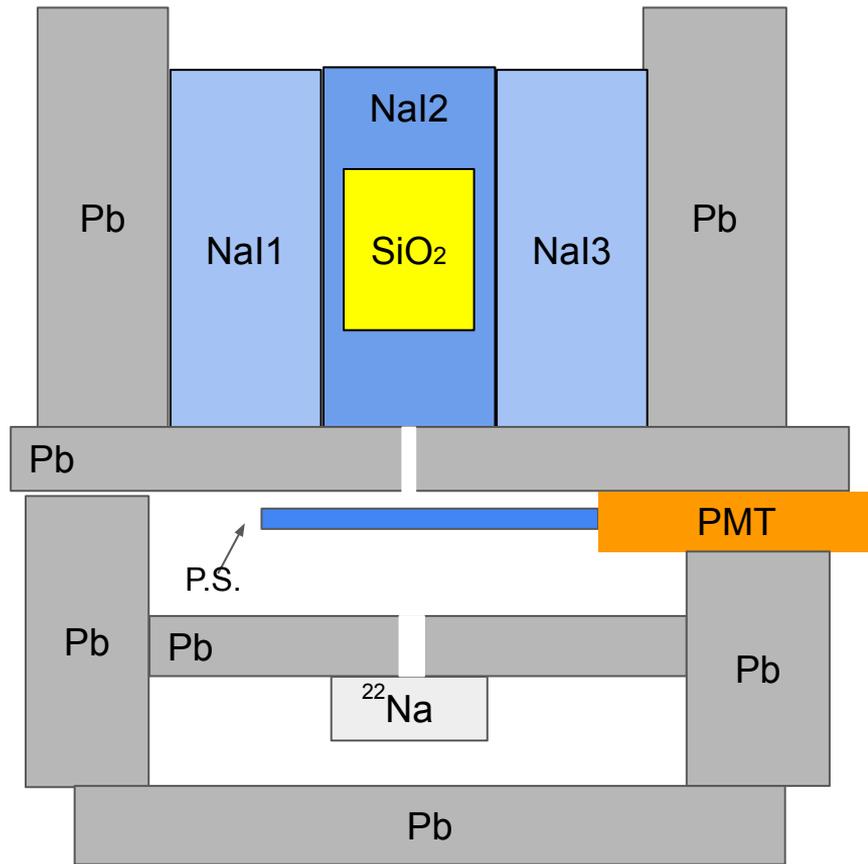
電子や γ 線の速度は十分速いとして

器具

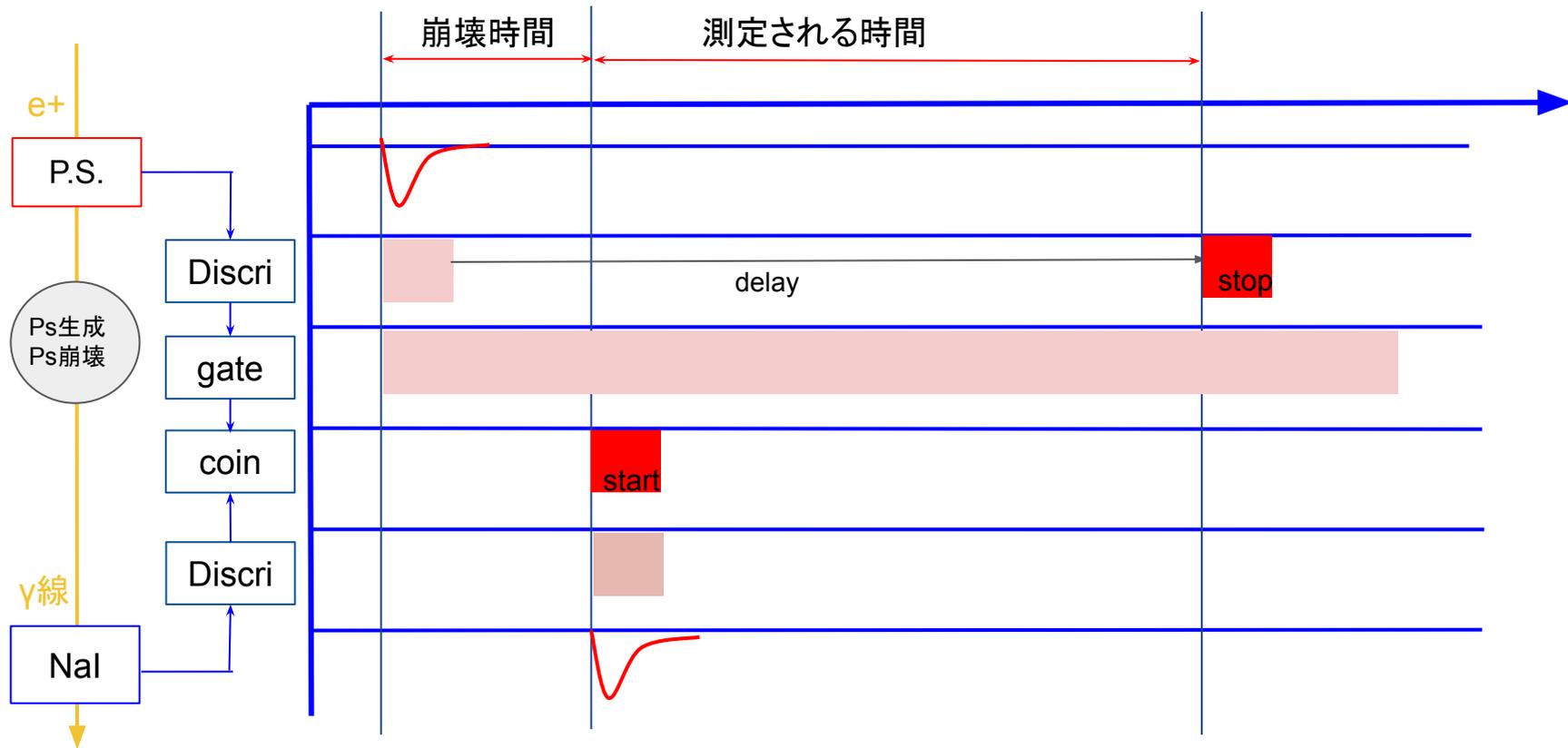
- ・ ^{22}Na e^- を放出する放射線源
- ・ プラスチックシンチレーター(P.S.): e^- を検出する
- ・ シリカパウダー(SiO_2 を多く保有し、 e^- とPsを形成する
- ・ NaIシンチレーター: γ 線を検出する
- ・ 鉛ブロック: 外部からの放射線を遮断する
- ・ 遮光ビニール: P.S.に光が入らないように全体を覆う

3. セットアップ、回路

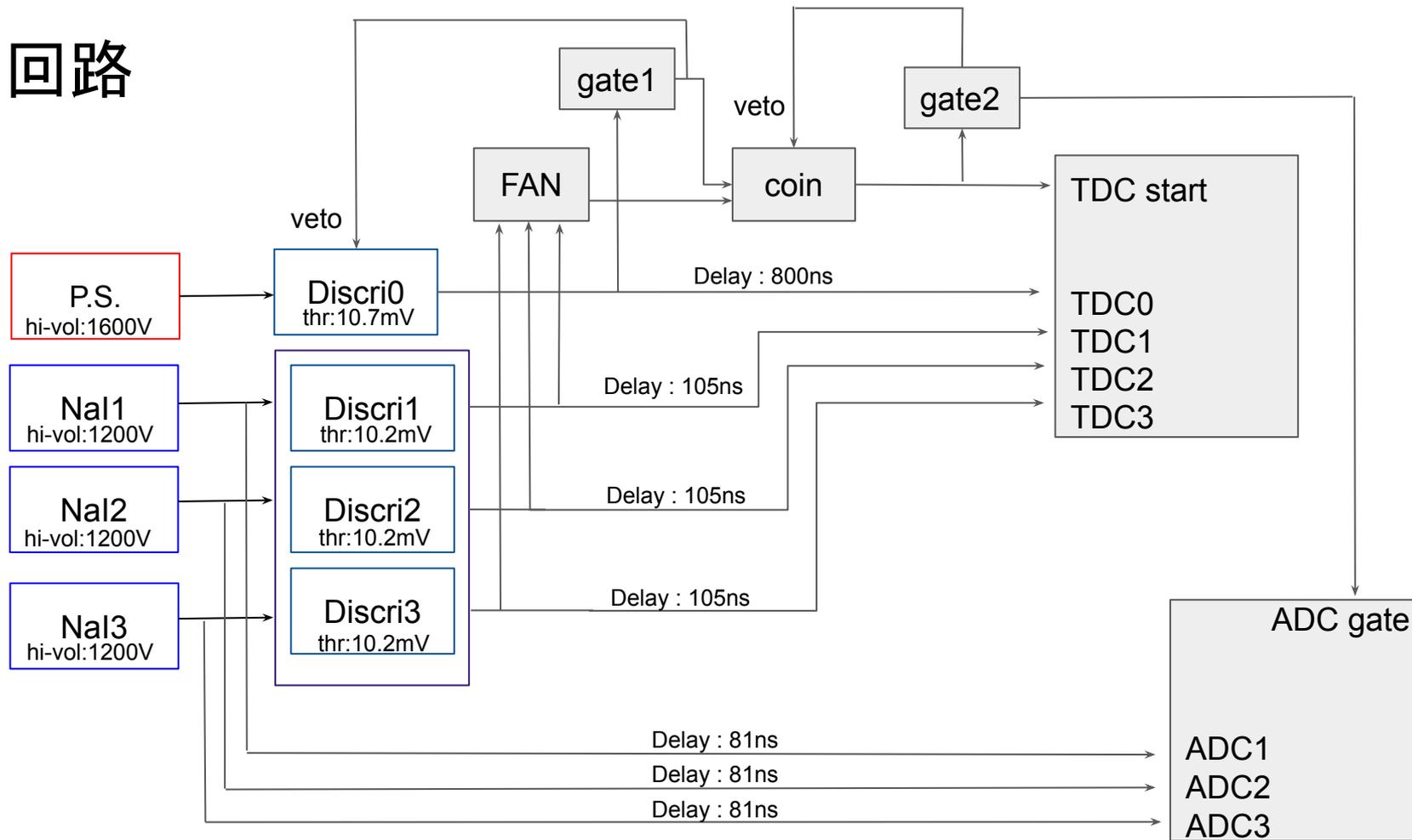
セットアップ



回路

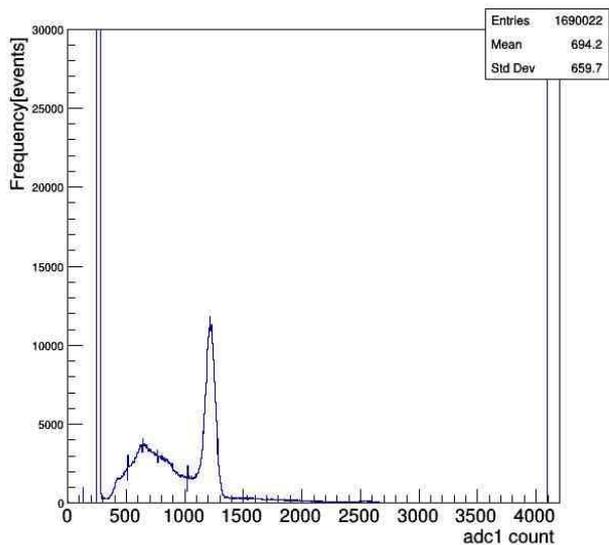


回路

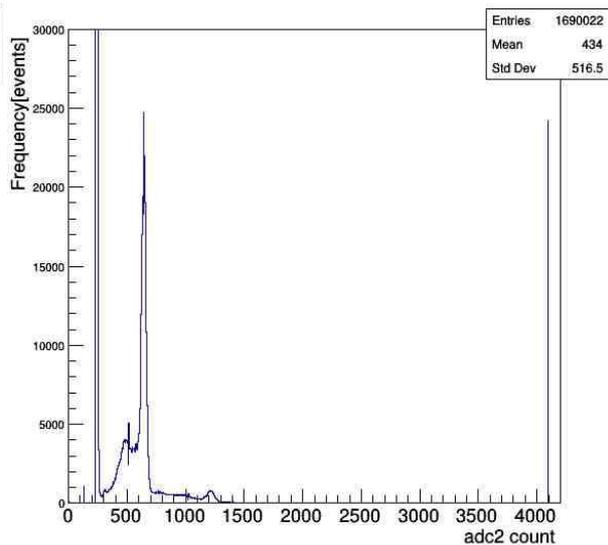


4. 生データ、キャリブレーション、TQ補正

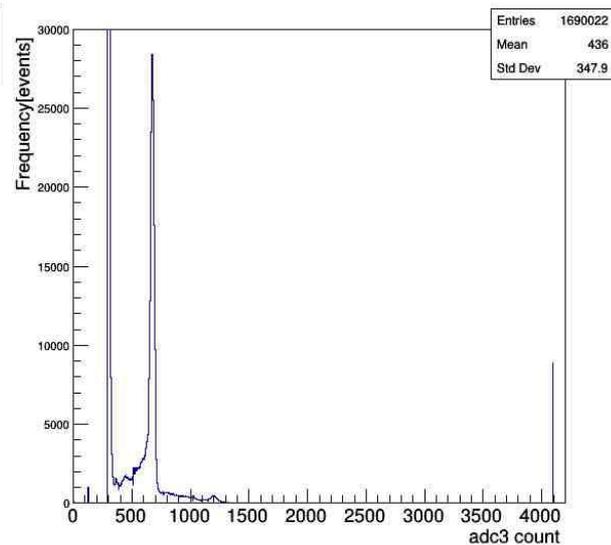
ADC 生データ



ADC1の生データ

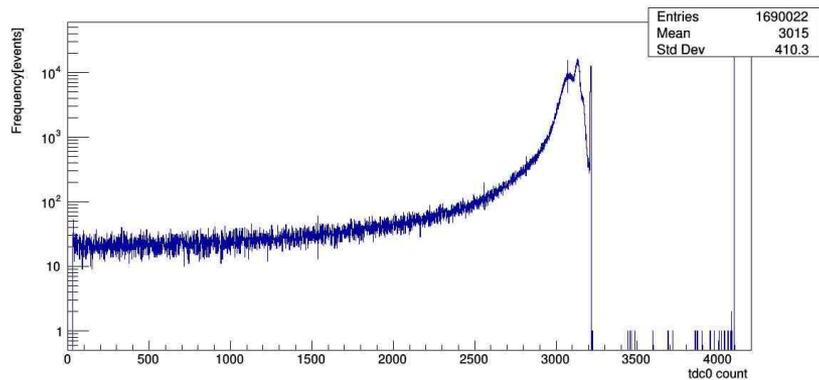


ADC2の生データ

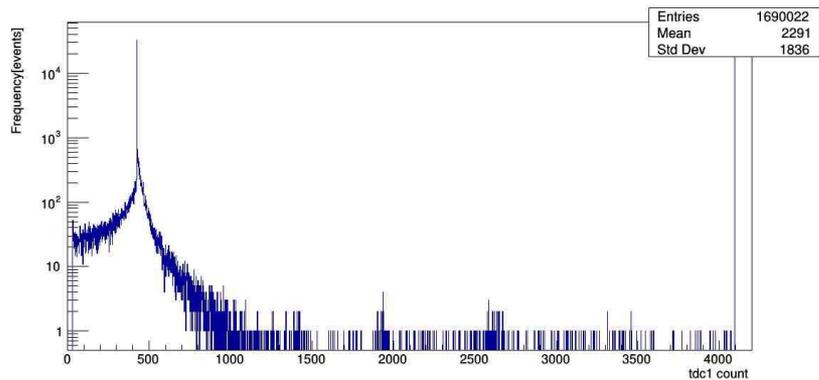


ADC3の生データ

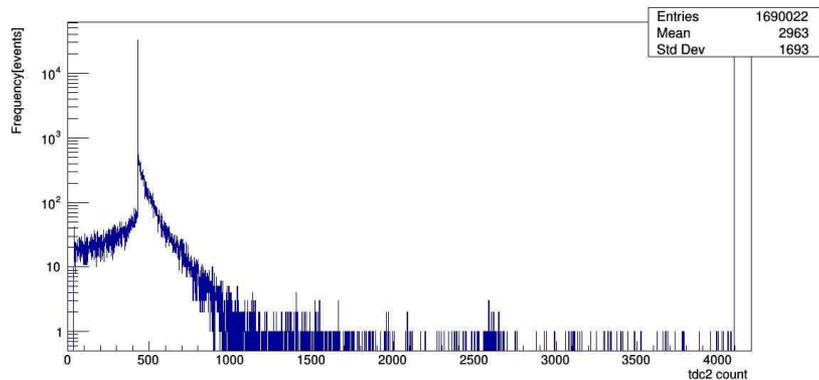
TDC 生データ



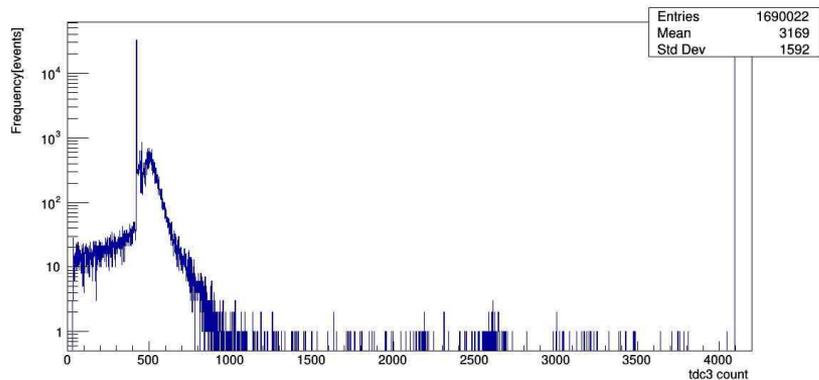
TDC0の生データ



TDC1の生データ



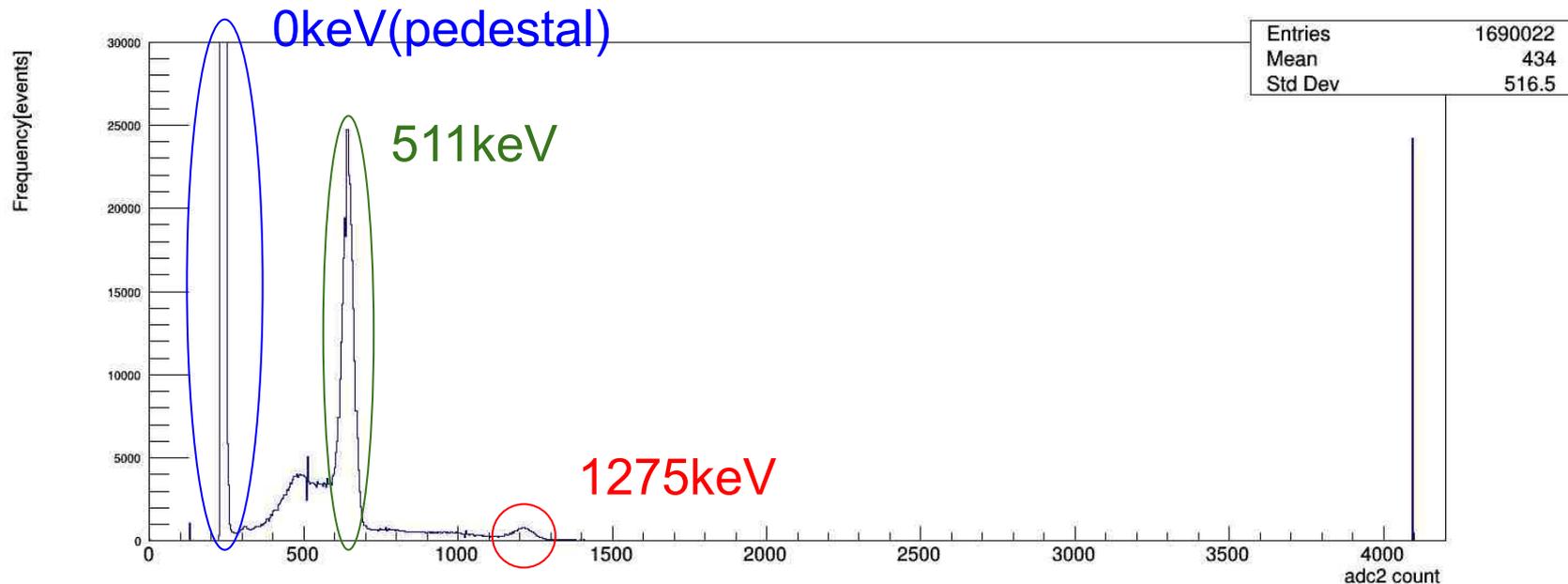
TDC2の生データ



TDC3の生データ

ADCキャリブレーション

本実験(^{22}Na 線源)で得られたADCのデータを用いてADCのキャリブレーションを行った



ADC2の生データ

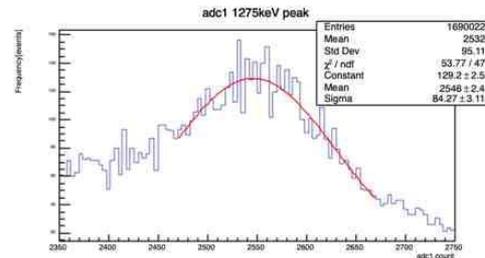
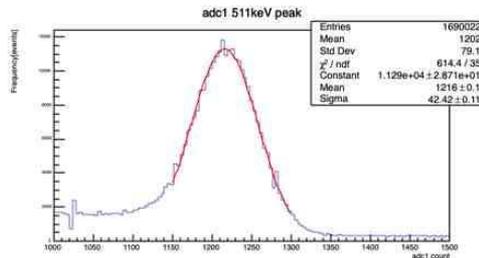
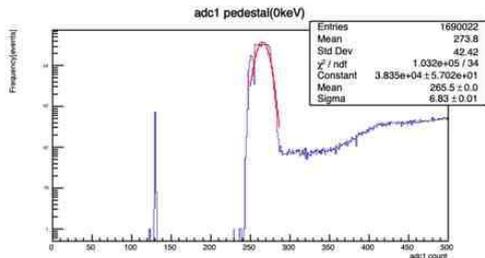
ADCキャリブレーション

0 keV

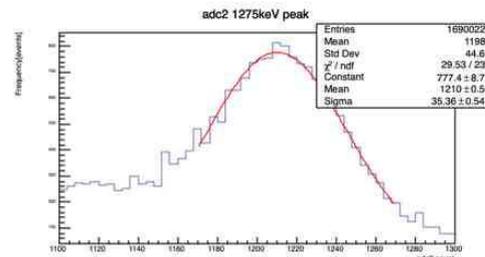
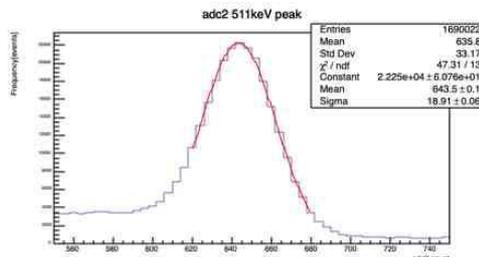
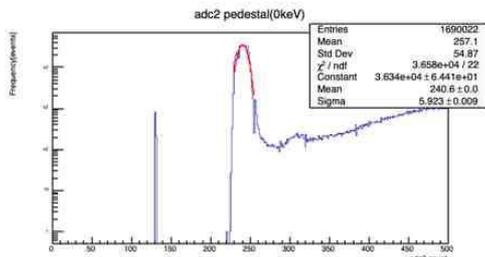
511keV

1275keV

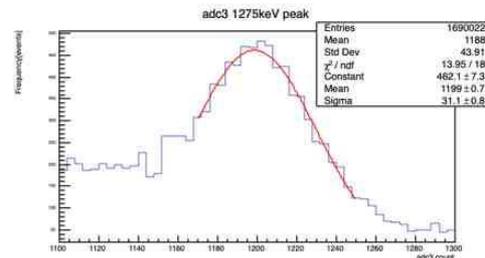
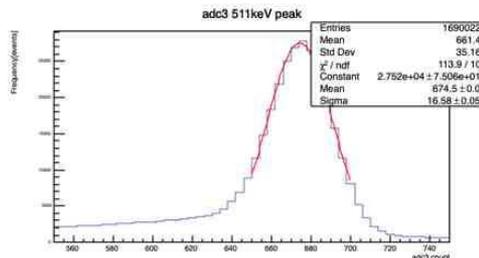
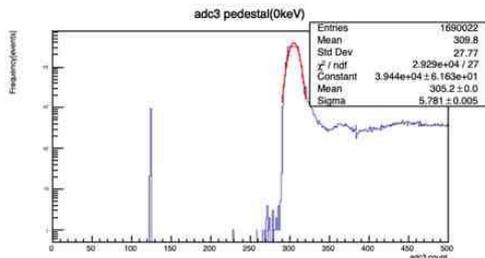
ADC1



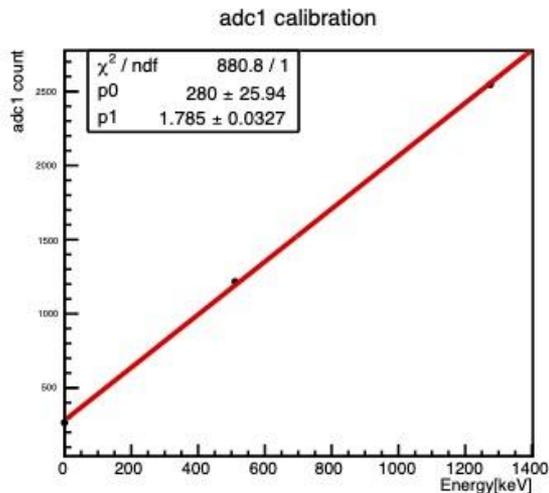
ADC2



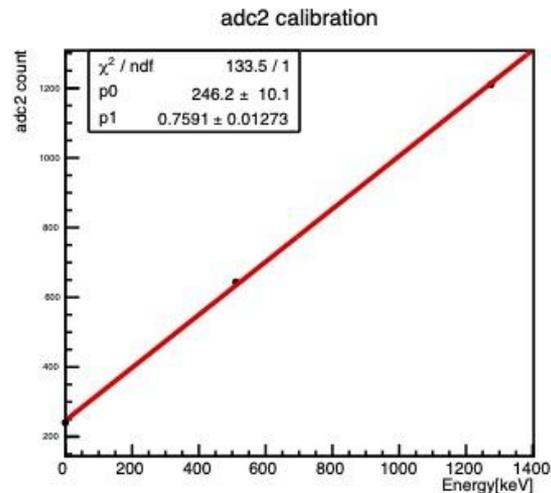
ADC3



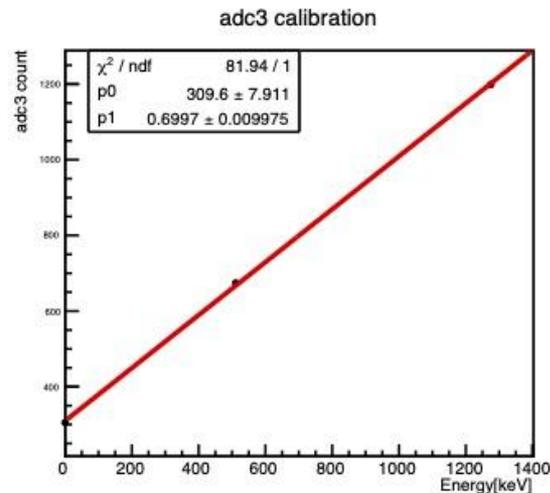
ADCキャリブレーション



ADC1



ADC2

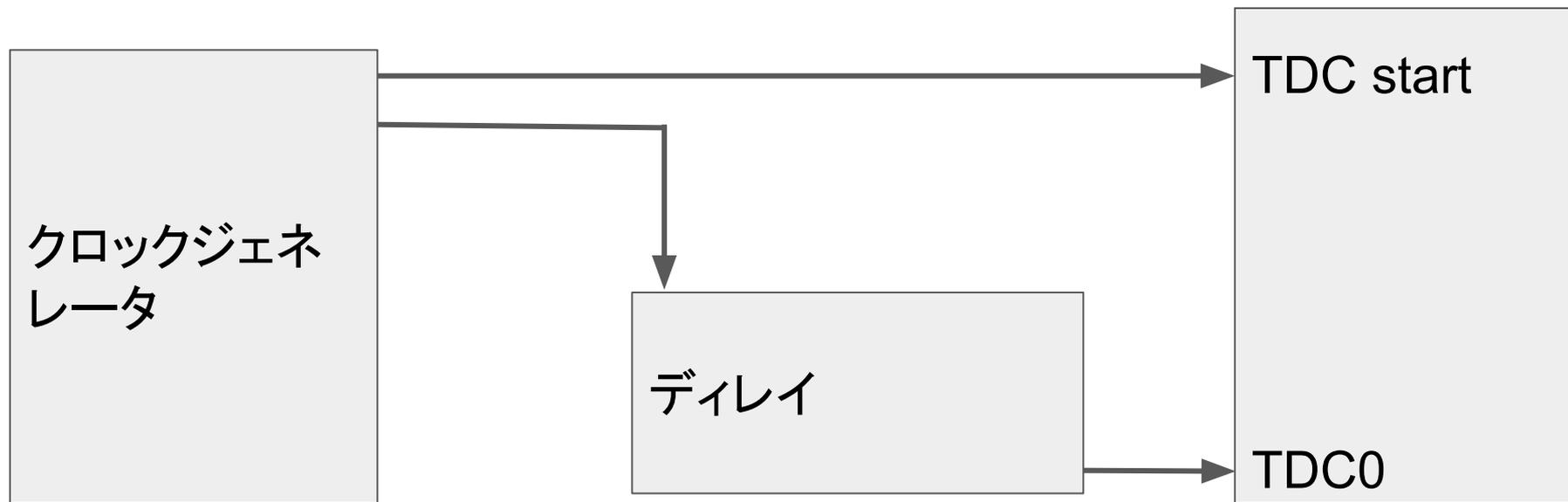


ADC3

adc count = $p1 \times \text{Energy} + p0$ でフィッティング

$\Rightarrow \text{Energy} = (\text{adc count} - p0) / p1$

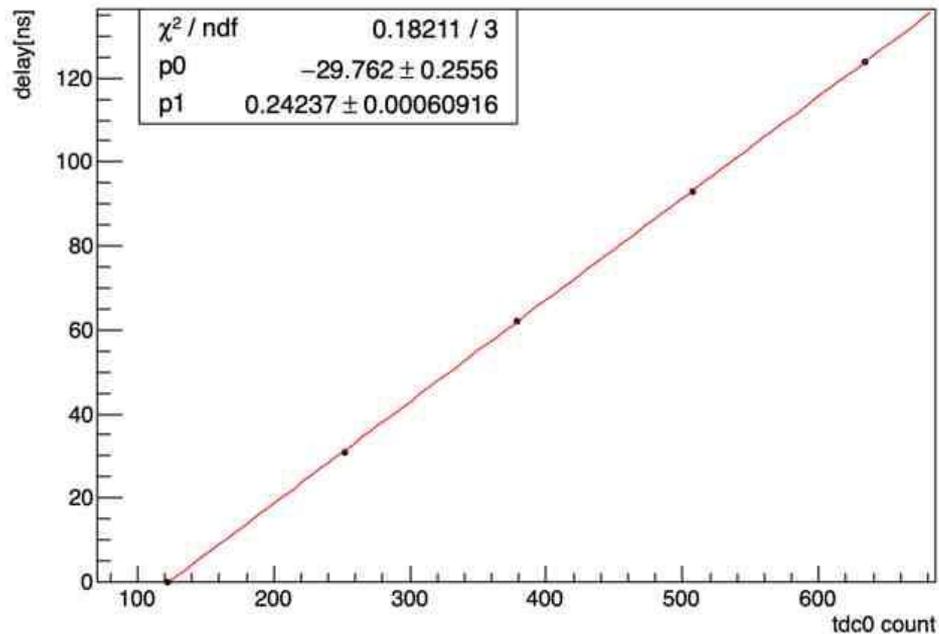
TDC0キャリブレーション



TDCキャリブレーションで用いたセットアップ

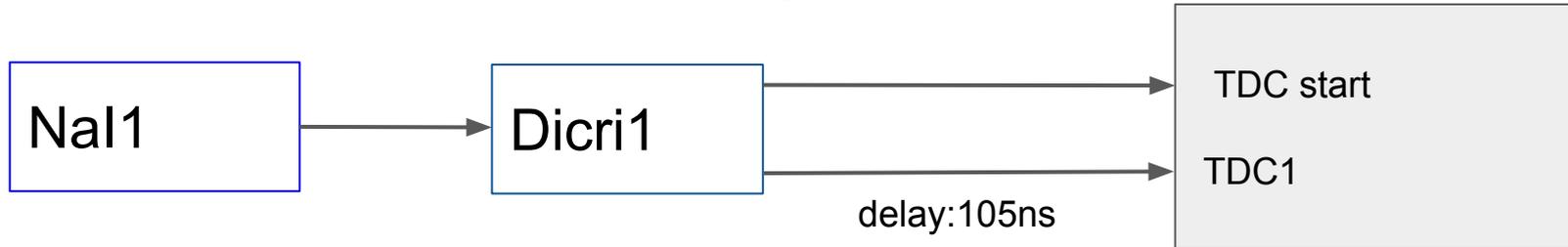
ディレイでの信号の遅延0ns,31ns,62ns,93ns,124nsにて測定

TDC0キャリブレーション

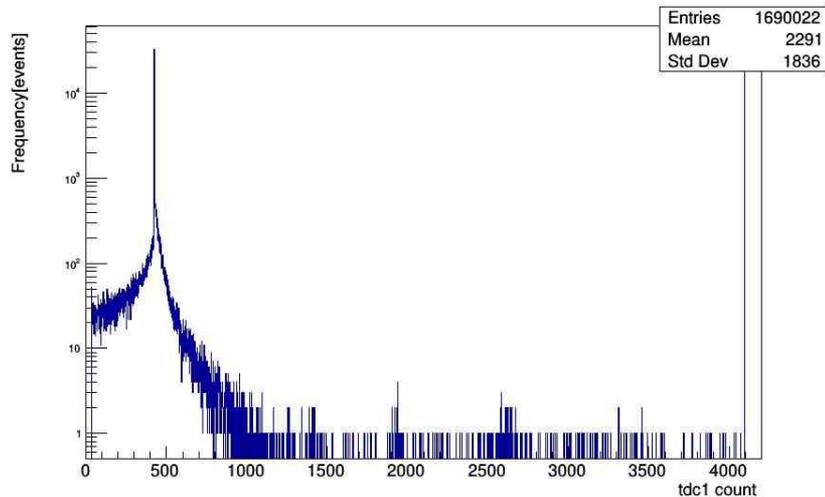


$$\text{Time[ns]} = -0.2423 \times \text{tdc0 count}$$

TDC1~3によるデータの選択

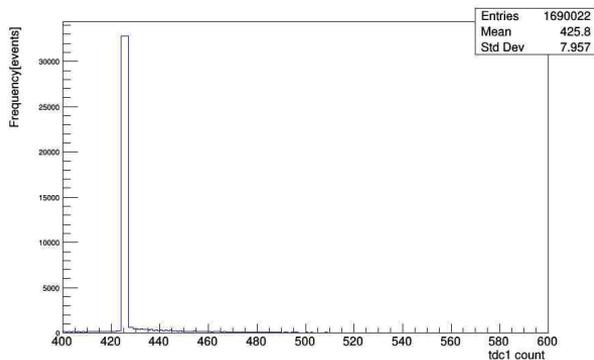


回路をTDC1に関する部分だけ取り出したイメージ図

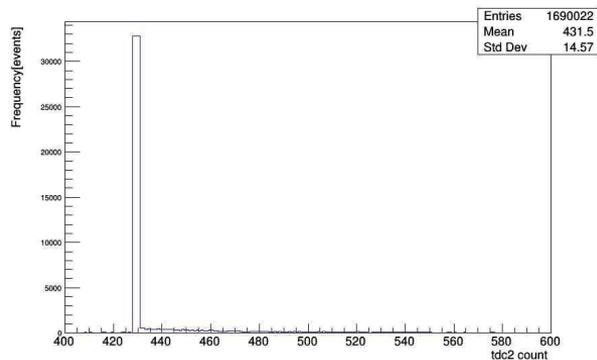


TDC1の生データ

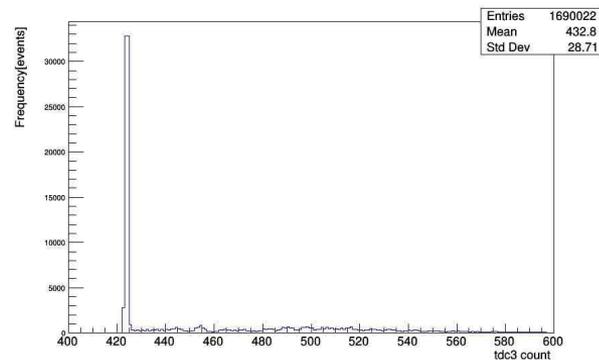
TDC1~3によるデータの選択



TDC1



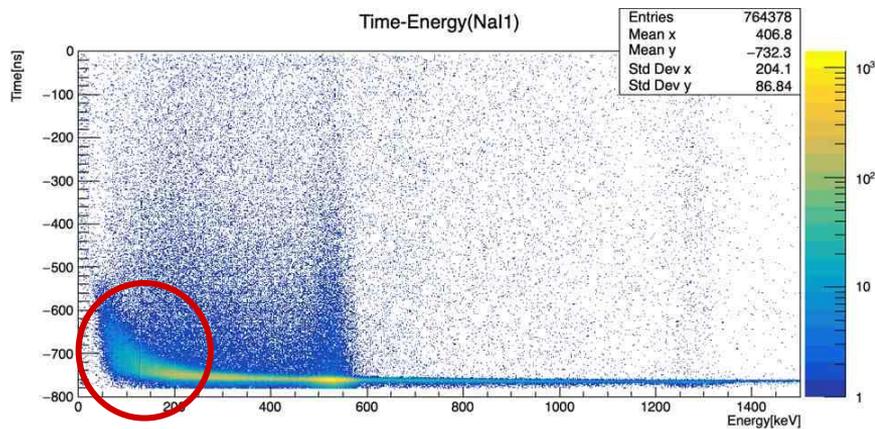
TDC2



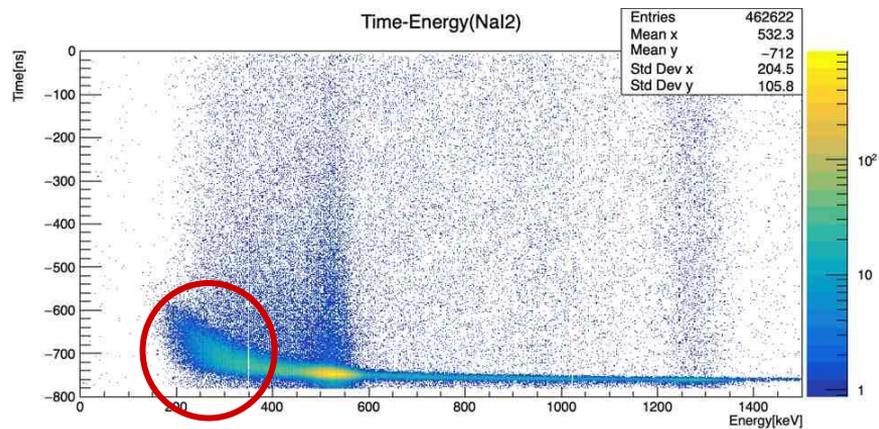
TDC3

NaI1	$424 \leq$	TDC1	< 427
NaI2	$428 \leq$	TDC2	< 431
NaI3	$422 \leq$	TDC3	< 425

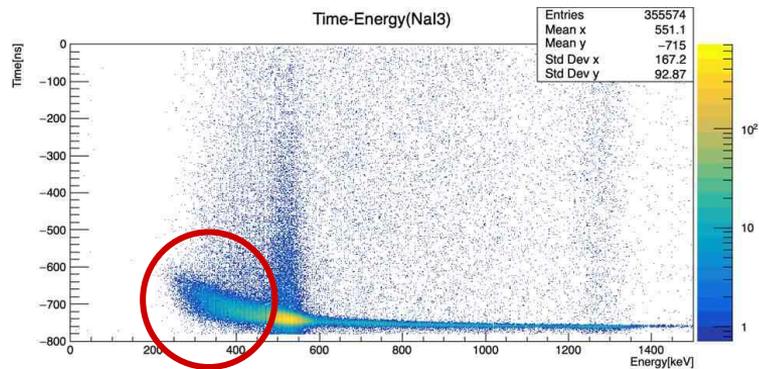
Time - Energy 分布



Na1

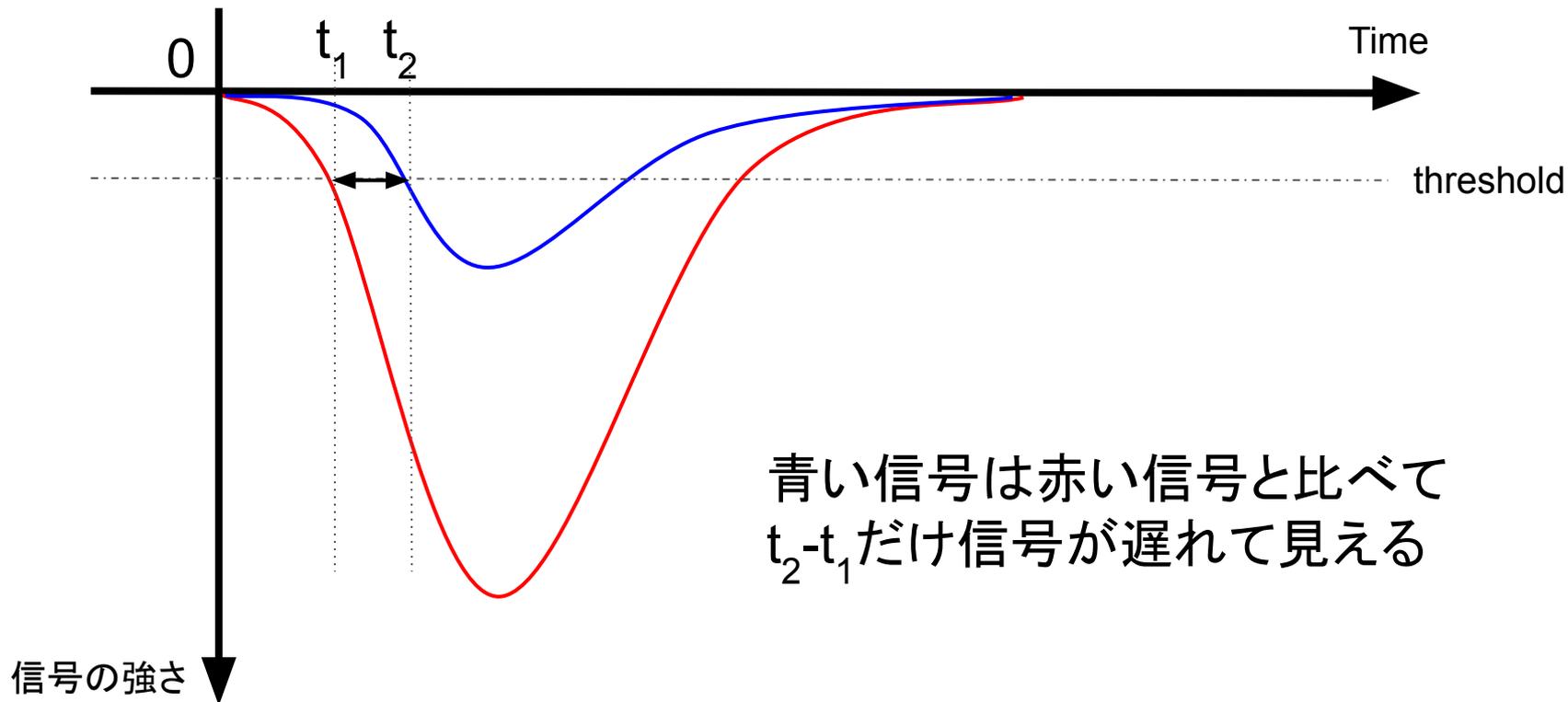


Na2

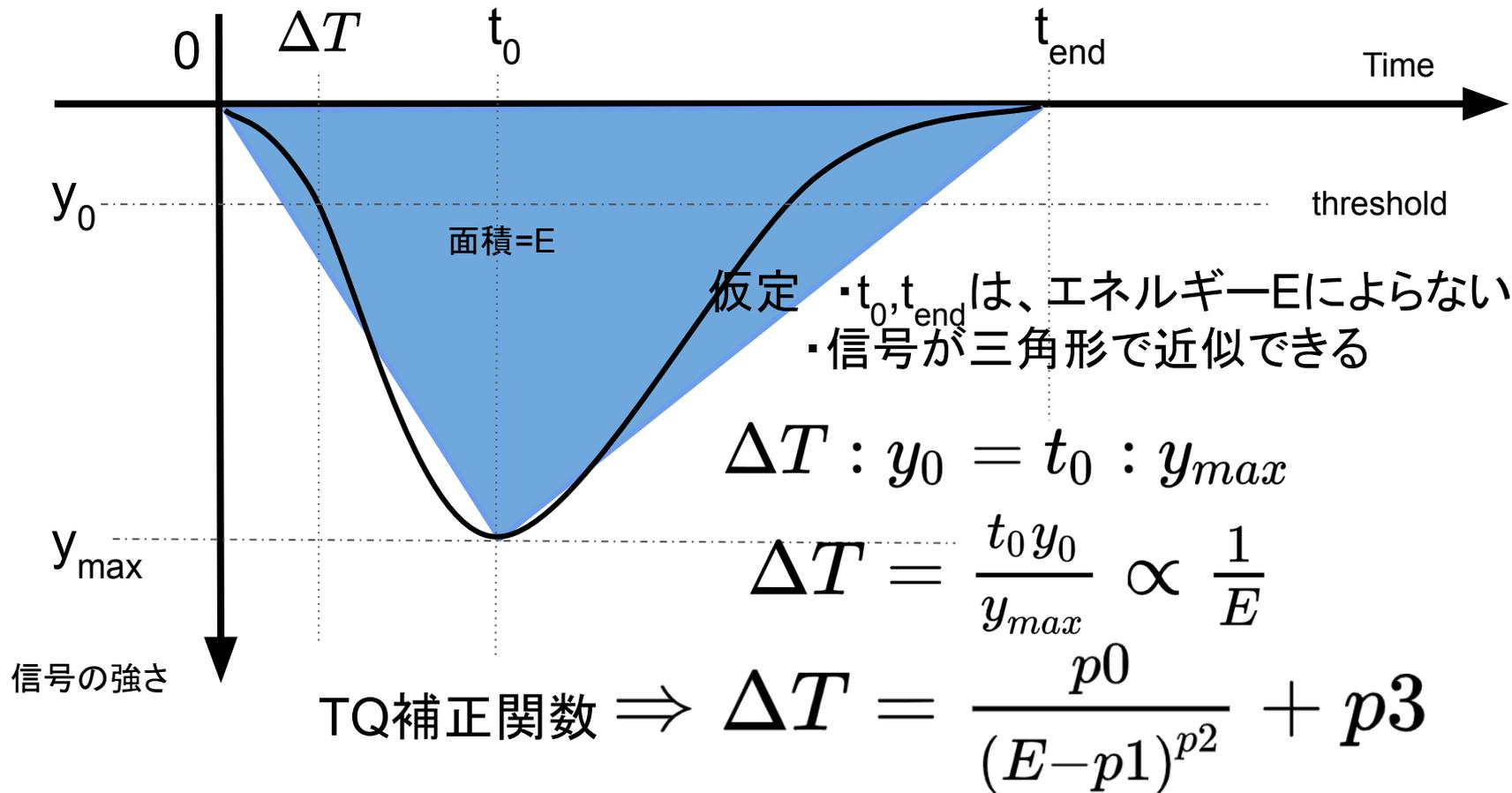


Na3

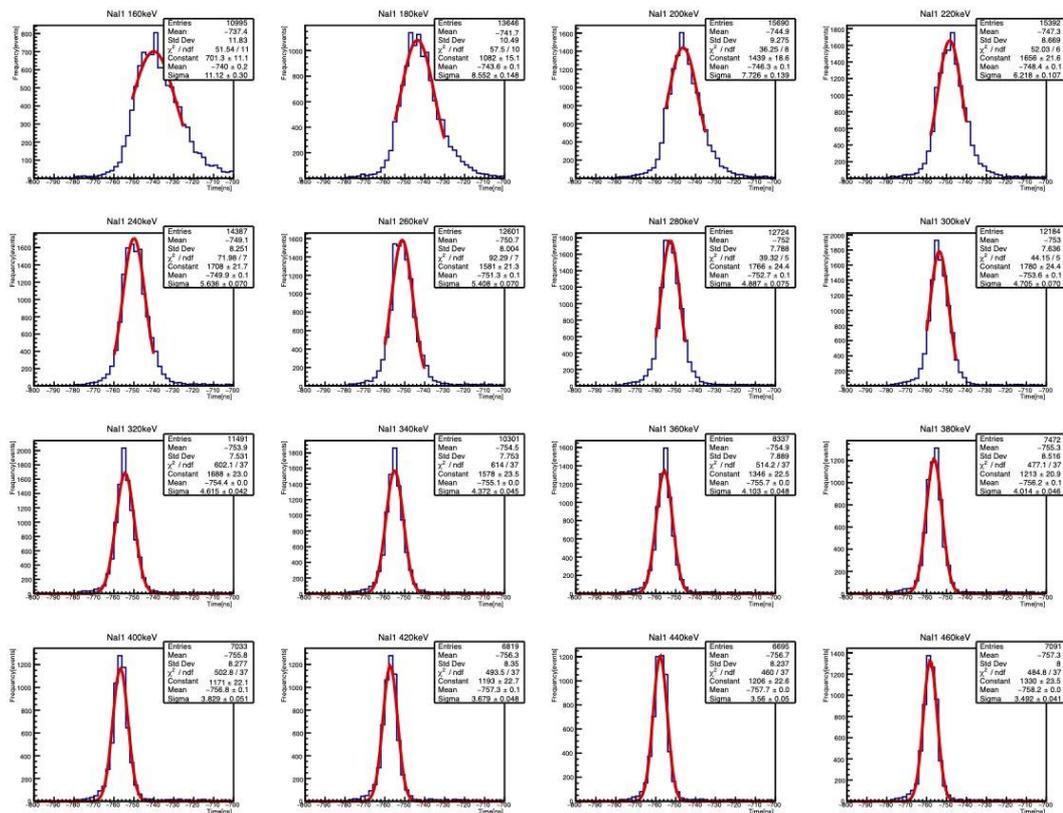
TQ補正—原理



TQ補正一原理

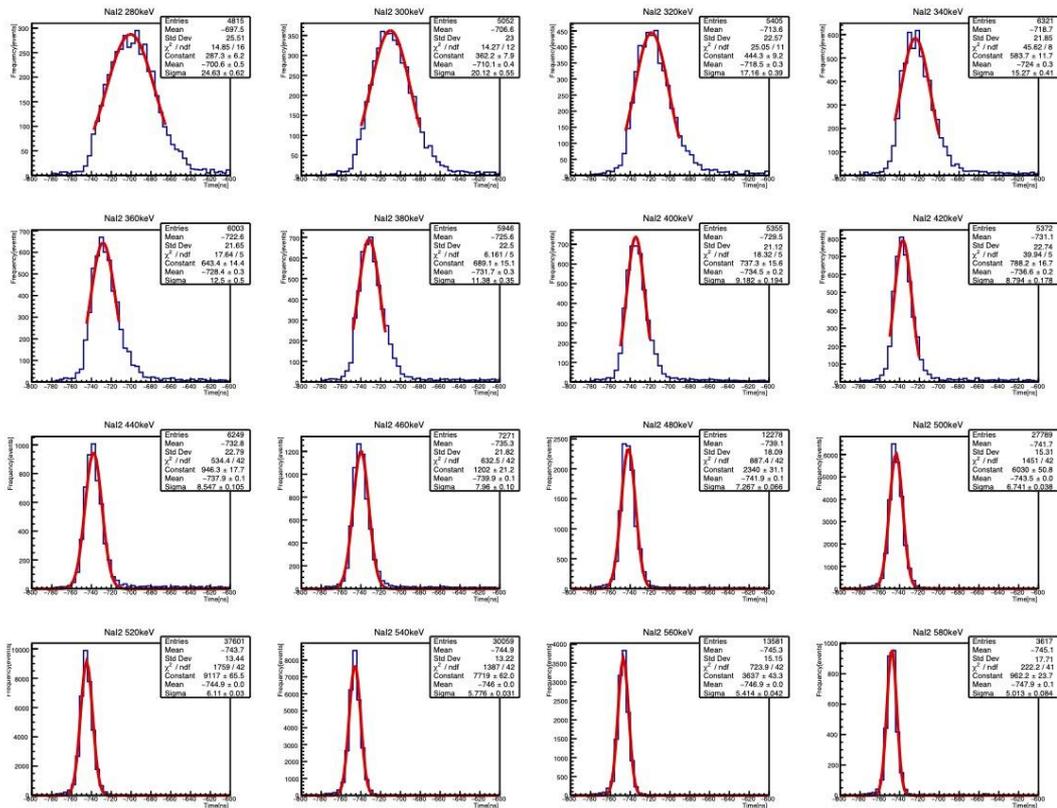


TQ補正一NaI1



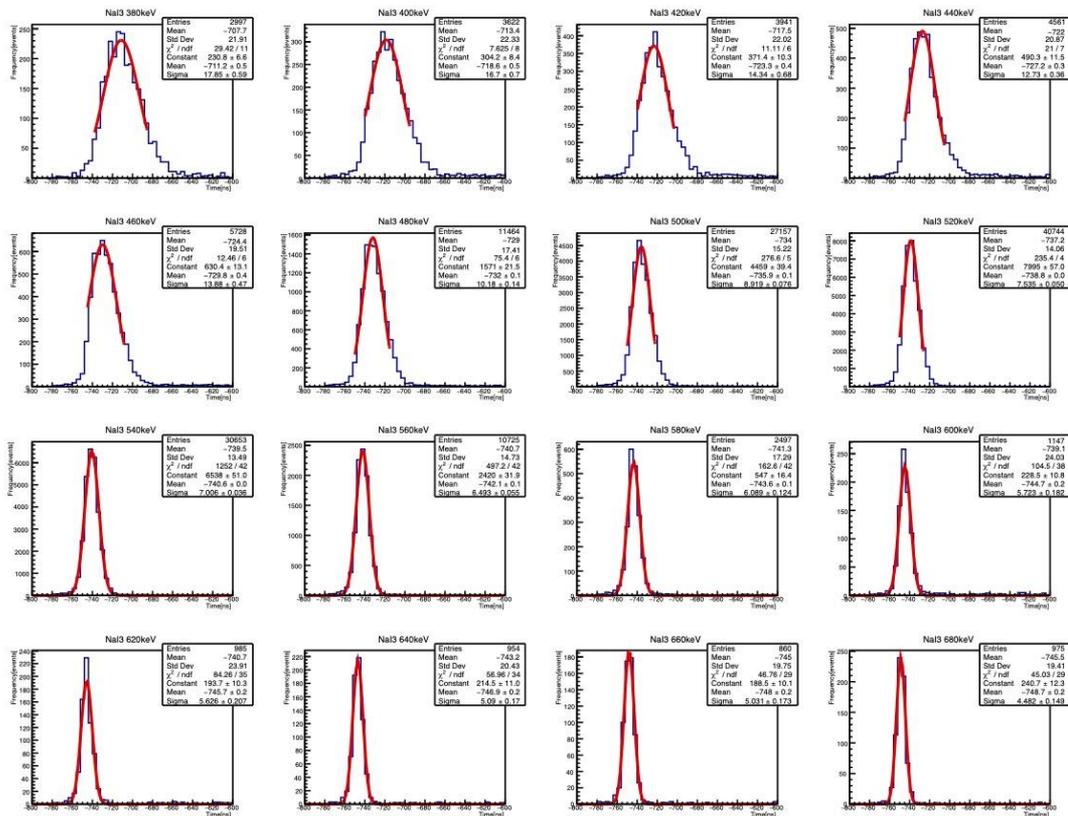
160keVから460keVまで20keVごとに±5keVの範囲で取り出した時間のデータについてGaussianフィッティングし、その平均値をそのエネルギーでの ΔT の値とした。

TQ補正一NaI2



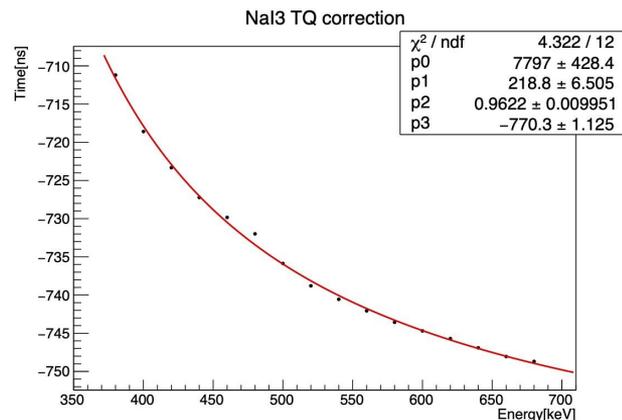
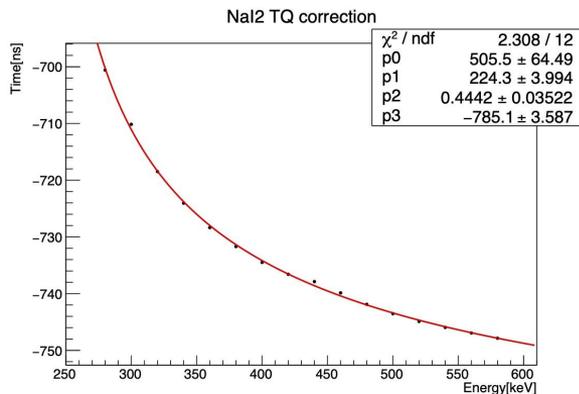
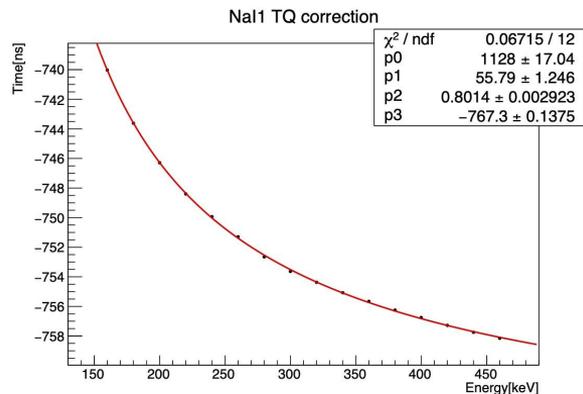
280keVから580keVまで20keVごとに±5keVの範囲で取り出した時間のデータについてGaussianフィッティングし、その平均値をそのエネルギーでの ΔT の値とした。

TQ補正一NaI3



380keVから680keVまで20keVごとに±5keVの範囲で取り出した時間のデータについてGaussianフィッティングし、その平均値をそのエネルギーでの ΔT の値とした。

TQ補正

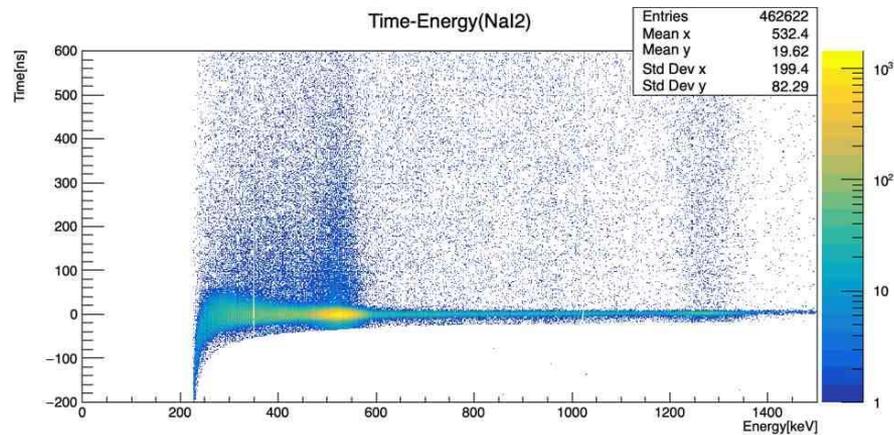
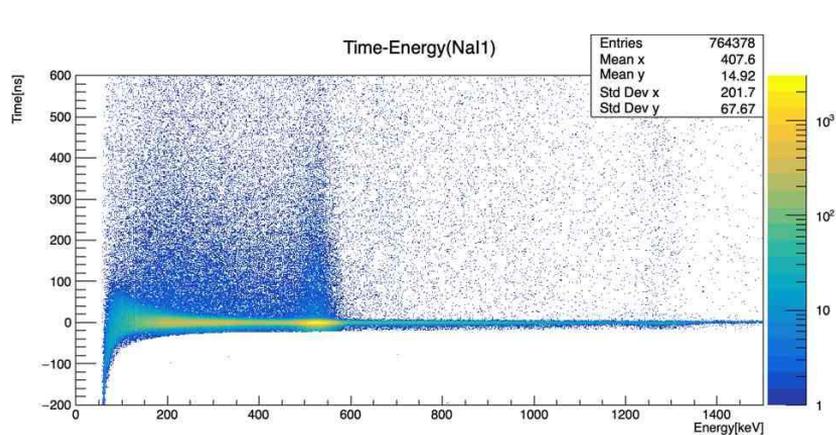


求めた補正関数 $\Delta T = \frac{p0}{(E-p1)^{p2}} + p3$ でフィッティング

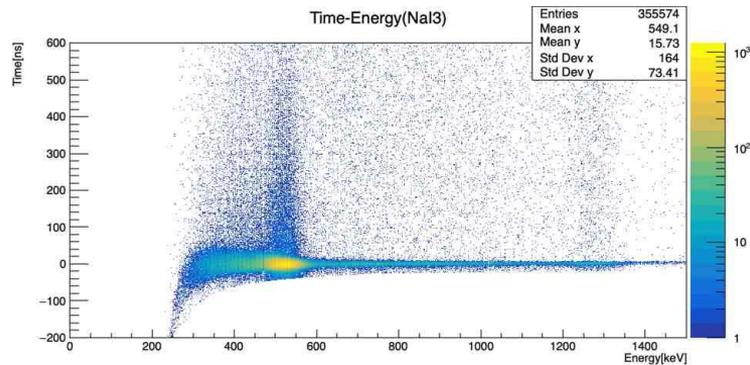
もっともイベント数の多いTimeがパラポジトロニウム(寿命124ps)の崩壊であり、この時間がポジトロニウムが生成した時間(Time=0)であるとする

$$\Rightarrow \text{Time}' = \text{Time} - \Delta T(E)$$

TQ補正後のTime-Energy 分布



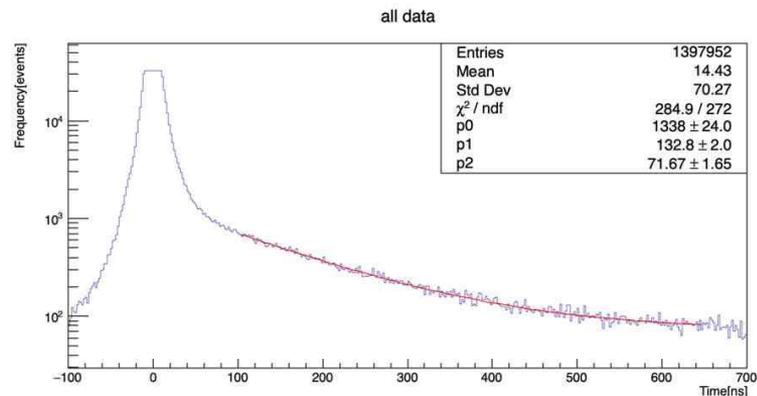
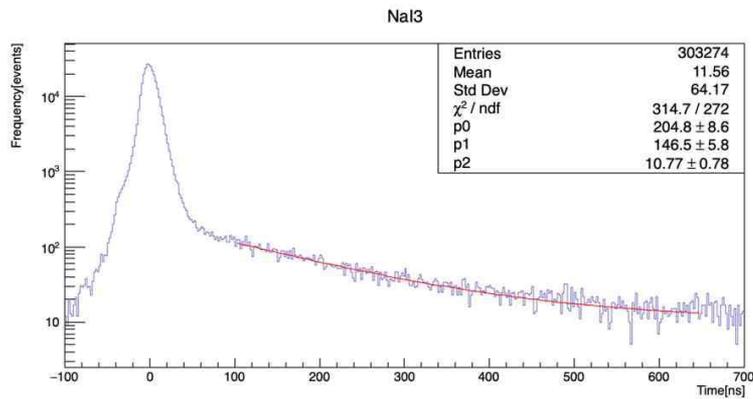
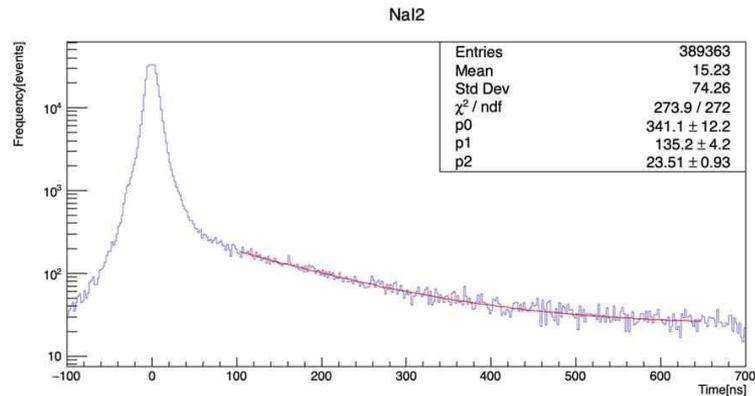
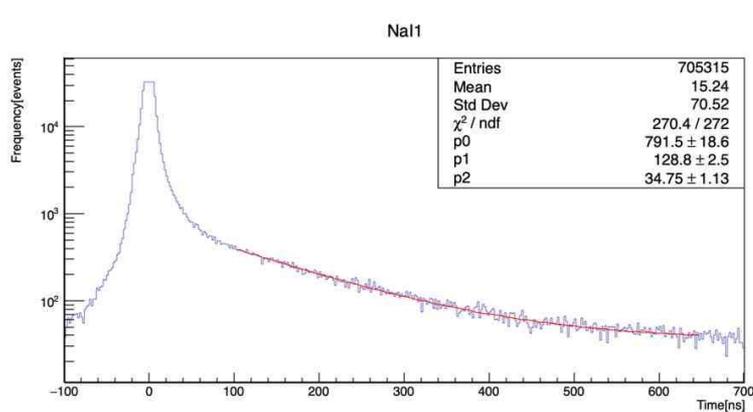
Na1



Na2

Na3

TQ補正後のオルソポジトロニウムの寿命



$p0 \times \exp\left(-\frac{\text{Time}'}{p1}\right) + p2$ でフィッティング $\Rightarrow p1$ が求める寿命

TQ補正後のo-PSの寿命

Nal1	128.8 ± 2.5 ns
Nal2	135.2 ± 4.2 ns
Nal3	146.5 ± 5.8 ns
全データ	132.8 ± 2.0 ns

Nal1とNal2の値は誤差の範囲で一致しているが、Nal1とNal3の値は有意にずれていると言える。

また、Nal1,全データの値はオルソポジトロニウムの寿命の理論値142nsよりも短いように思える。

⇒ Pick - Off 補正について考える。

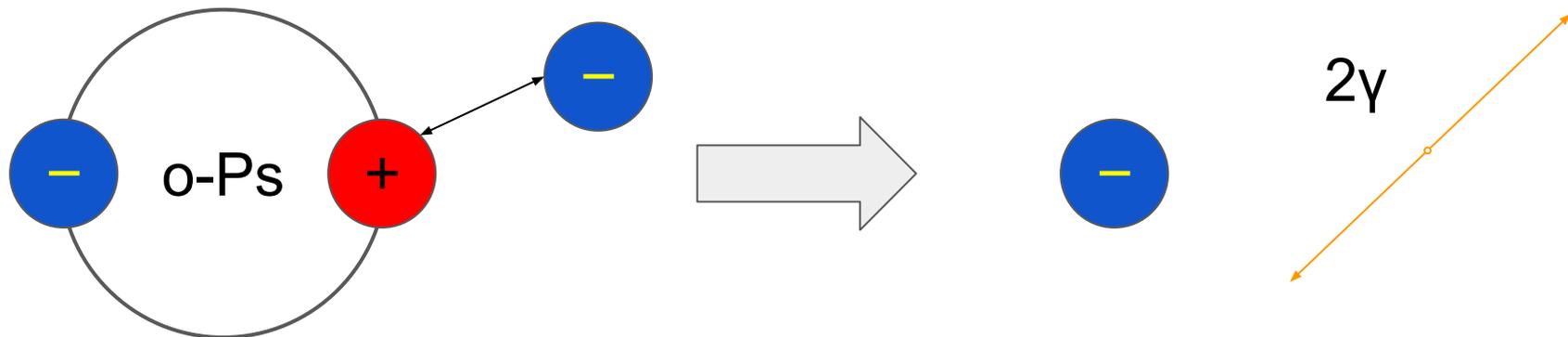
5. Pick-off補正

o- P_s の 2γ 放出

o- P_s の崩壊は基本 3γ を放出

しかし様々な反応によって 2γ を放出することもある

例) Pick-off反応



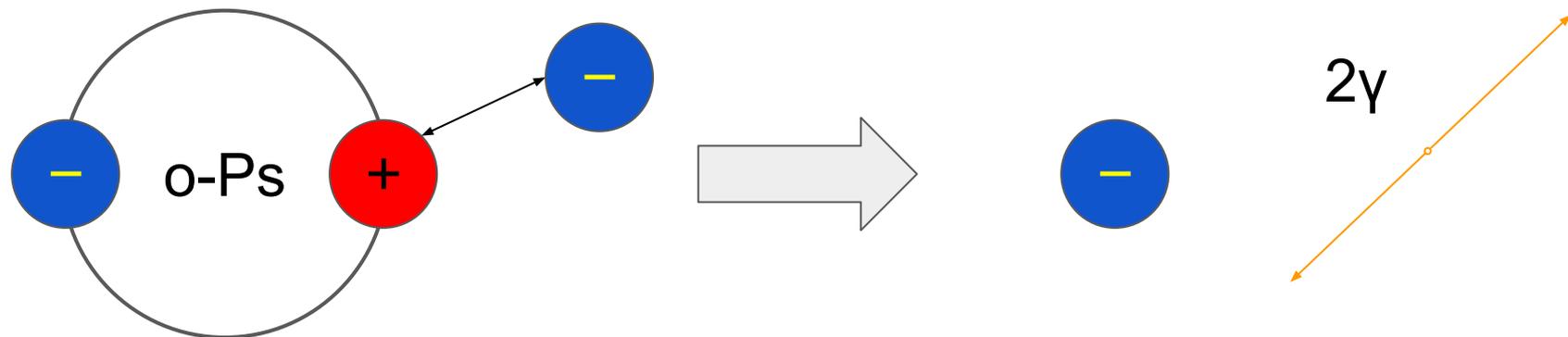
o-Posの2 γ 放出

o-Posの崩壊は基本3 γ を放出

しかし様々な反応によって2 γ を放出することもある

総称して「Pick-off反応」と呼ぶ

例) Pick-off反応



Time-Energyと反応

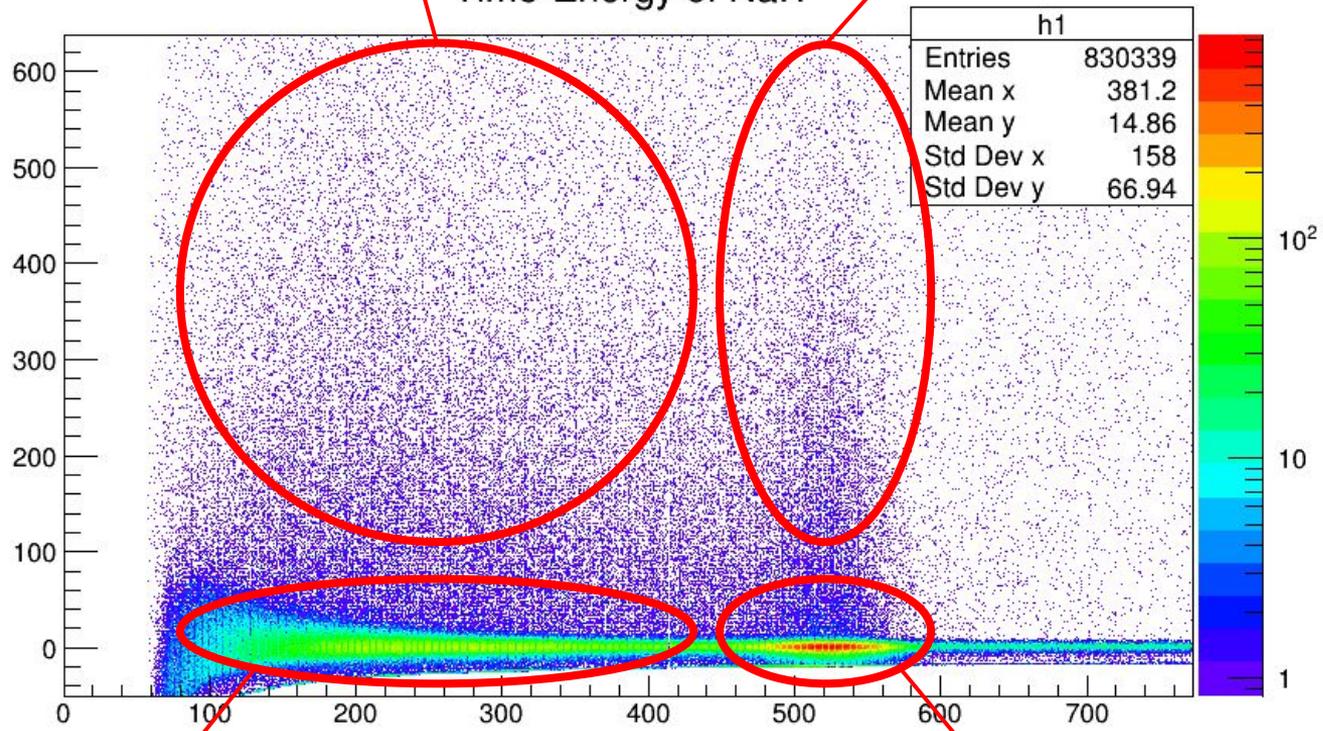
④

①のPs崩壊、③の電子散乱

Pick-off反応

③

Time-Energy of NaI1



②

①のコンプトン散乱

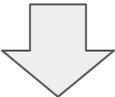
対消滅、p-Ps崩壊

①

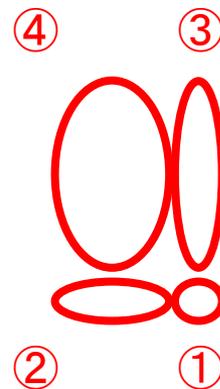
o-Psの崩壊数

仮定: 2γ による511 keVピークとコンプトン散乱の比は常に一定

➡ o-Psの 3γ への崩壊数は

$$\textcircled{4} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \times \textcircled{3}$$


$$N_{\text{under511}} = \frac{N_{\text{under511}}(0)}{N_{\text{peak}}(0)} N_{\text{peak}}$$



Pick-off反応を踏まえた寿命

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

↓

$$\frac{dN_{3\gamma}}{dt} + \frac{dN_{2\gamma}}{dt} = -(\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma}) N$$

実験データから崩壊幅を求める

$$f(t) = \frac{\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} = \frac{\frac{dN_{2\gamma}}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}}{dt}} \simeq \frac{\Delta N_{2\gamma}}{\Delta N_{3\gamma}}$$

$$\begin{aligned}\Delta N_{2\gamma}(t) &= N_{\text{peak}}(t) + \frac{N_{\text{under511}}(0)}{N_{\text{peak}}(0)} N_{\text{peak}}(t) \\ &= \frac{N_{\text{all}}(0)}{N_{\text{peak}}(0)} N_{\text{peak}}(t)\end{aligned}$$

N_{peak} : 511 keVピークのイベント数

N_{under511} : 511 keV未満のイベント数

$$\Delta N_{3\gamma}(t) = N_{\text{all}}(t) - N_{2\gamma}(t)$$

N_{all} : 511 keV以下のイベント数

$$= N_{\text{all}}(t) - \frac{N_{\text{all}}(0)}{N_{\text{peak}}(0)} N_{\text{peak}}(t)$$

実験データから崩壊幅を求める

$$f(t) = \frac{\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} = \frac{\frac{dN_{2\gamma}}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}}{dt}} \simeq \frac{\Delta N_{2\gamma}}{\Delta N_{3\gamma}}$$

$$f(t) = \frac{\frac{N_{\text{all}}(0)}{N_{\text{peak}}(0)} N_{\text{peak}}(t)}{N_{\text{all}}(t) - \frac{N_{\text{all}}(0)}{N_{\text{peak}}(0)} N_{\text{peak}}(t)} = \frac{N_{\text{all}}(0) N_{\text{peak}}(t)}{N_{\text{all}}(t) N_{\text{peak}}(0) - N_{\text{all}}(0) N_{\text{peak}}(t)}$$

N_{peak} : 511 keVピークのイベント数

N_{under511} : 511 keV未満のイベント数

N_{all} : 511 keV以下のイベント数

Pick-off反応を考慮した寿命

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma_{3\gamma} [1 + f(t)] N$$

$$N(t) = N(0) \exp \left[-\frac{1}{\tau_{\text{ortho}}} \left(t + \int_0^t f(t') dt' \right) \right]$$

$$\left(\tau_{\text{ortho}} = \frac{1}{\Gamma_{3\gamma}} \right)$$

寿命を実験データから求める

実験で実際に観測できるのは、 $-dN/dt (=N_{\text{all}})$ だけ

$$N_{\text{all}} = -\frac{dN}{dt} = \frac{N(0)}{\tau_{\text{ortho}}} [1 + f(t)] \exp \left[-\frac{1}{\tau_{\text{ortho}}} \left(t + \int_0^t f(t') dt' \right) \right]$$

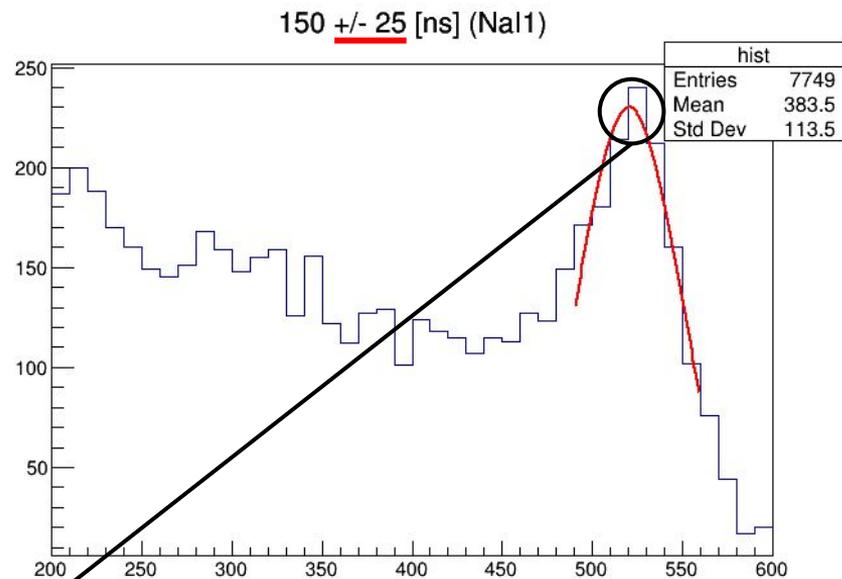
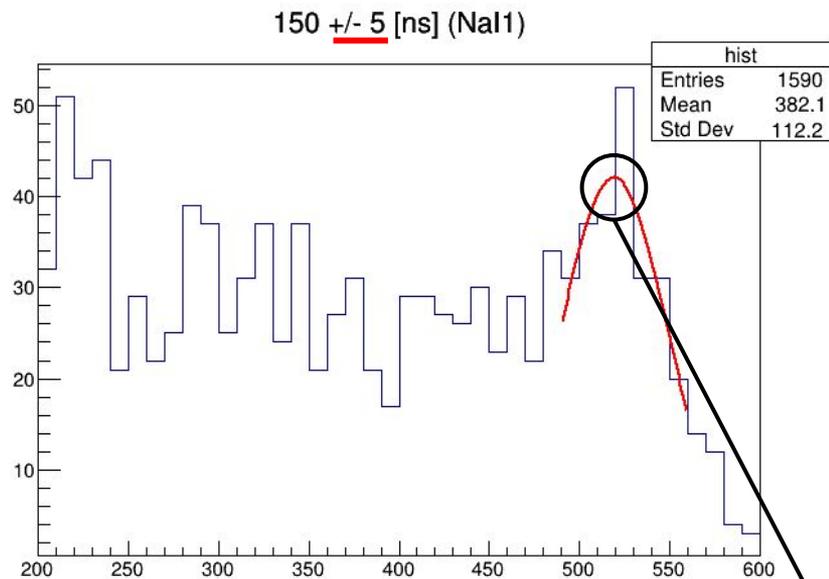
このフィッティングをするためには、 $f(t)$ のフィッティングが必要

例年に倣って

$$f(t) = p_0 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + p_2$$

でフィッティング

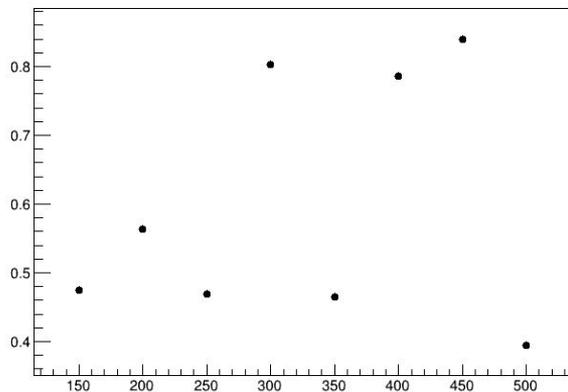
Pick-off補正(ガウシアン)



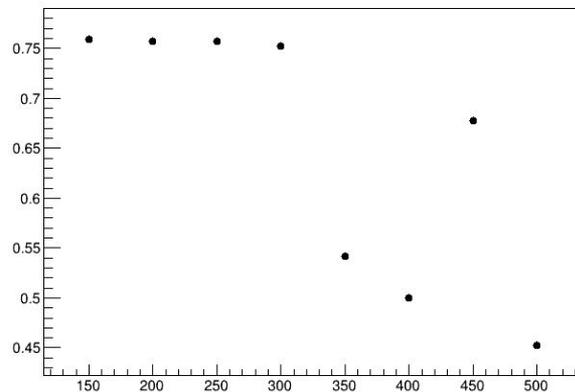
ピークの使用

Pick-off補正(ガウシアン、 $\Delta t = 5$ ns)

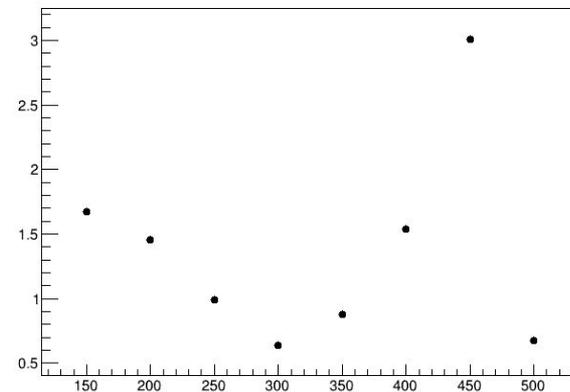
Pick-off Correction of NaI1



Pick-off Correction of NaI2

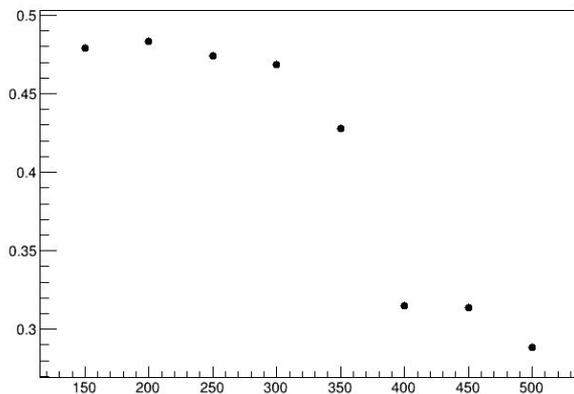


Pick-off Correction of NaI3

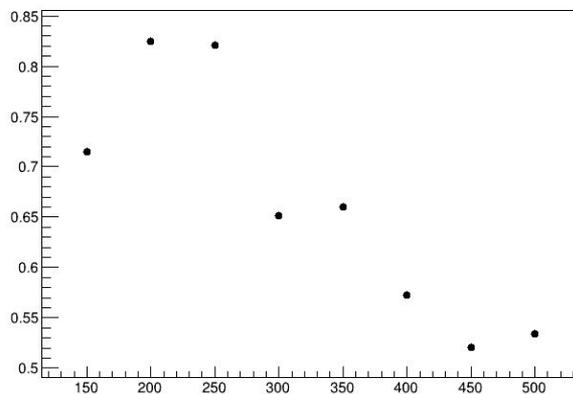


Pick-off補正(ガウシアン、 $\Delta t = 25$ ns)

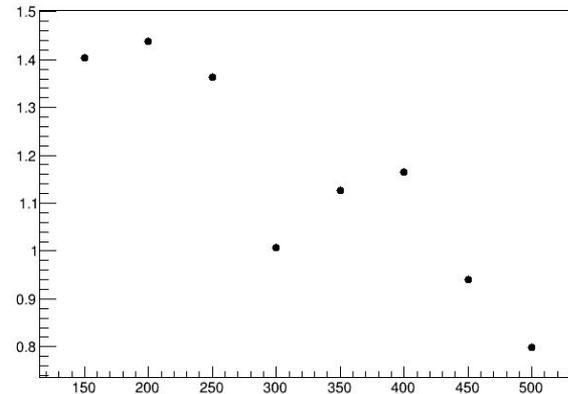
Pick-off Correction of NaI1



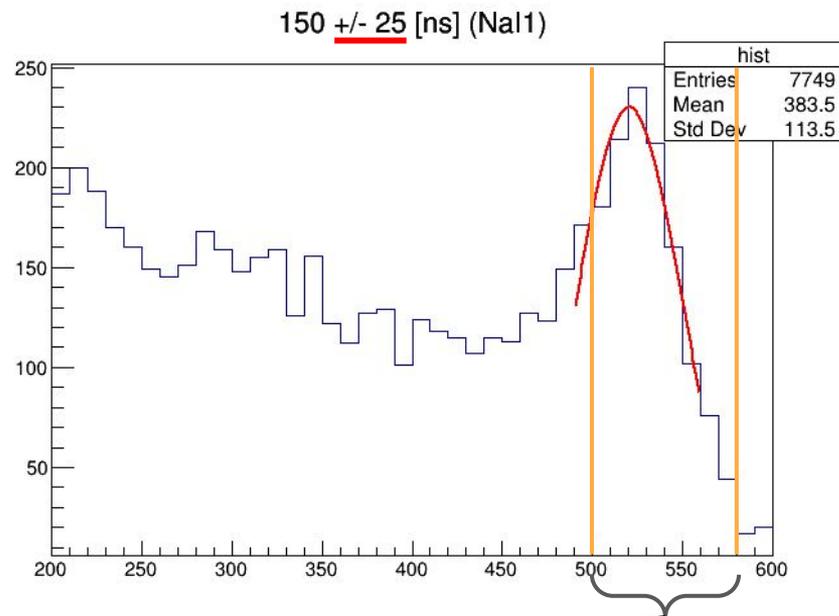
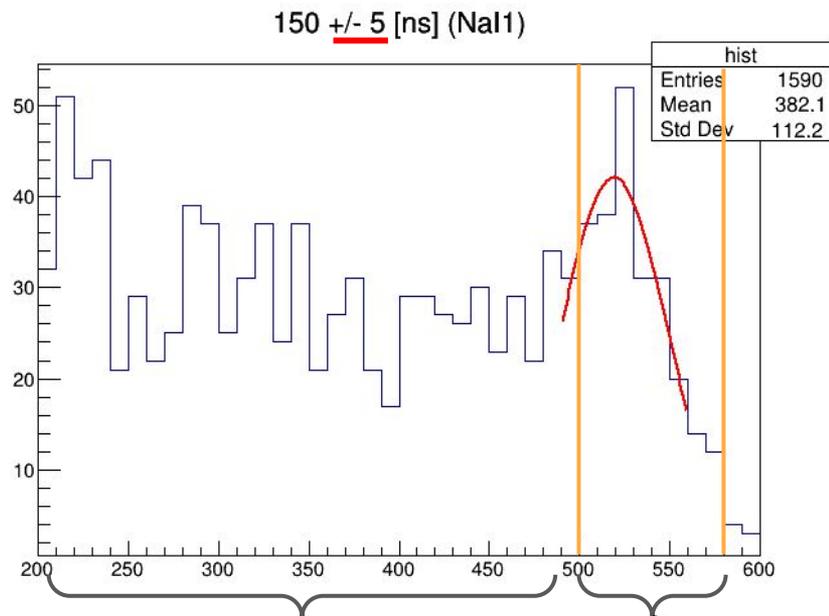
Pick-off Correction of NaI2



Pick-off Correction of NaI3



Pick-off補正(イベント総数)

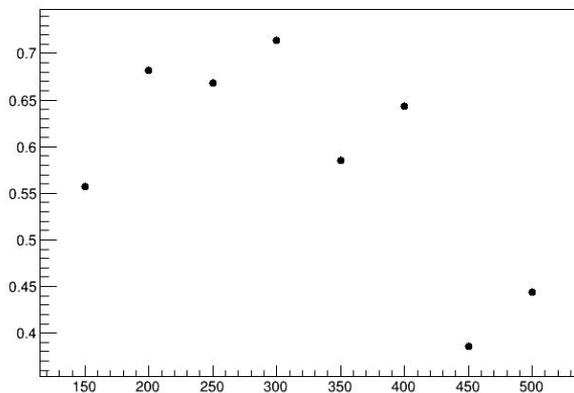


コンプトン効果などがあるため、
511 keVから等間隔には取らない

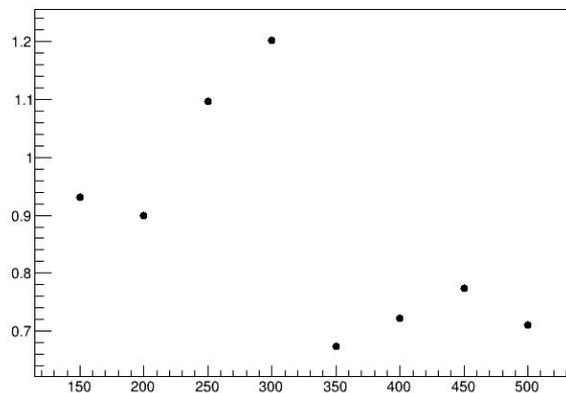
イベント総数を使用

Pick-off補正(イベント総数、 $\Delta t = 5$ ns)

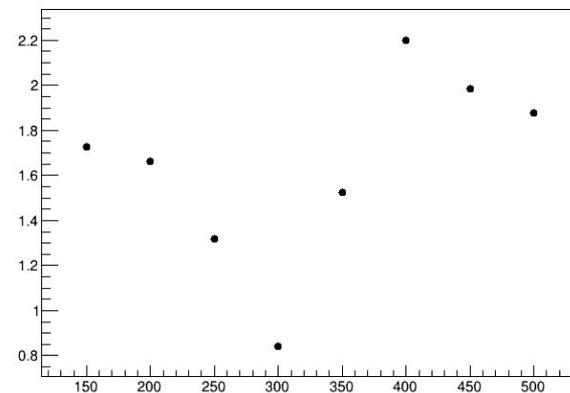
Pick-off Correction of NaI1



Pick-off Correction of NaI2

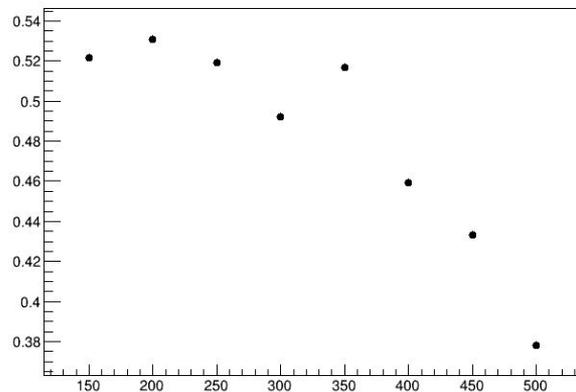


Pick-off Correction of NaI3

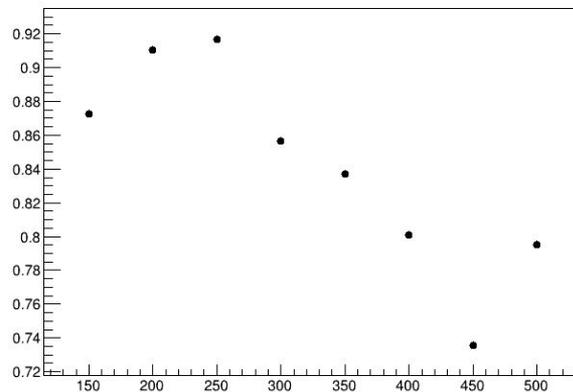


Pick-off補正(イベント総数、 $\Delta t = 25$ ns)

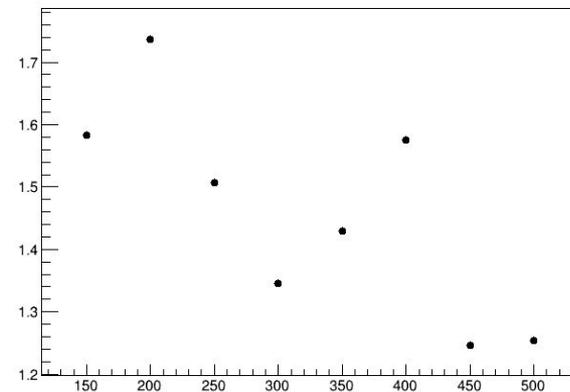
Pick-off Correction of NaI1



Pick-off Correction of NaI2



Pick-off Correction of NaI3



Pick-off補正後の寿命

N_{all} の積分

$$N_{\text{all}}(t) = \frac{N(0)}{\tau_{\text{ortho}}} \left[p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right] \exp \left[-\frac{p_0 p_1 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) \right\} + (p_2 + 1) t}{\tau_{\text{ortho}}} \right]$$

実験データを

$$N_{\text{all}}(t) = q_0 \left[p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right] \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1) t \right\} \right] + q_2$$

でフィッティングすれば、 q_1 が寿命となる

6. 考察、結論

誤差の評価

寿命fittingでの誤差 σ_{fit} に加え、各fittingについての系統誤差を順に評価する:

- ①TDCキャリブレーション
- ②TQ補正

誤差の評価 誤差伝搬の法則

パラメータ p_i 誤差 δp_i Fitting関数 $U(x)$ 誤差 $\delta U(x)$ は、

$$\delta U(x) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial p_i} \delta p_i \right)^2}$$

※各パラメータは独立と仮定

$U_{\pm} = U \pm \delta U$ を用いて寿命Fittingしなおし、誤差を

$$\sigma_U = \max\{|\tau - \tau_+|, |\tau - \tau_-|\}$$

で定義する(τ, τ_{\pm} U, U_{\pm} での寿命)

誤差の評価 ①TDCキャリブレーション

TDCキャリブレーションのFitting関数 $T(x)$

$$T(x) = ax$$

※ x はTDCカウント

 $\delta T(x) = \delta ax$

誤差の評価 ①TDCキャリブレーション

TDCキャリブレーションによる誤差

σ_{TDC}

	τ_+	τ	τ_-	σ_{TDC}
Nal1	123.6	128.8	128.4	5.2
Nal2	135.6	135.2	134.7	0.5
Nal3	142.4	146.5	144.6	4.1
全データ	129.3	132.8	132.2	3.5

誤差の評価 ②TQ補正

TQ補正のFitting関数 $\Delta T(E)$ [ns]:

※ E はエネルギー[keV]

$$\Delta T(E) = \frac{p_0}{(E-p_1)^{p_2}} + p_3$$



$$\delta\Delta T(E) = \sqrt{\left\{ \frac{1}{(E-p_1)^{p_2}} \delta p_0 \right\}^2 + \left\{ \frac{p_0 p_2}{(E-p_1)^{p_2+1}} \delta p_1 \right\}^2 + \left\{ -\frac{p_0 \ln(E-p_1)}{(E-p_1)^{p_2}} \delta p_2 \right\}^2 + (\delta p_3)^2}$$

誤差の評価 ②TQ補正

TQ補正による誤差 σ_{TQ}

	τ_+	τ	τ_-	σ_{TQ}
Nal1	128.6	128.8	129.1	0.3
Nal2	131.9	135.2	136.1	3.3
Nal3	143.7	146.5	144.8	2.8
全データ	131.8	132.8	132.9	1.0

誤差の評価

合計の誤差 σ_{total} を下式で定める:

$$\sigma_{\text{total}} = \sqrt{(\sigma_{\text{TDC}})^2 + (\sigma_{\text{TQ}})^2 + (\sigma_{\text{fit}})^2}$$

	σ_{TDC}	σ_{TQ}	σ_{fit}	σ_{total}
Nal1	5.2	0.3	2.5	5.8
Nal2	0.5	3.3	4.2	5.4
Nal3	4.1	2.8	5.8	7.6
全データ	3.5	1.0	2.0	4.2

誤差の評価 系統誤差まで含めた寿命

	寿命 [ns]
Na1	128.8 ± 5.8
Na2	135.2 ± 5.4
Na3	146.5 ± 7.6
全データ	132.8 ± 4.2

考察 Pick-off補正が上手く行えなかった理由

以下の4つが可能性として考えられる

- ①データ量が少なすぎる
- ②NaIの性能が低下している
- ③バックグラウンドノイズ
- ④そもそもPick-off反応が少なかった

※今回は比較実験が行えなかったため、過去のA2のデータとの比較が主になります

考察 ①データ量

今回は30日間で約170万のイベント数

昨年度とイベント数自体は変わらなかったが、

同様にPick-off補正に苦戦していた

2018年度以前は1000万以上あり、比較的きれいに

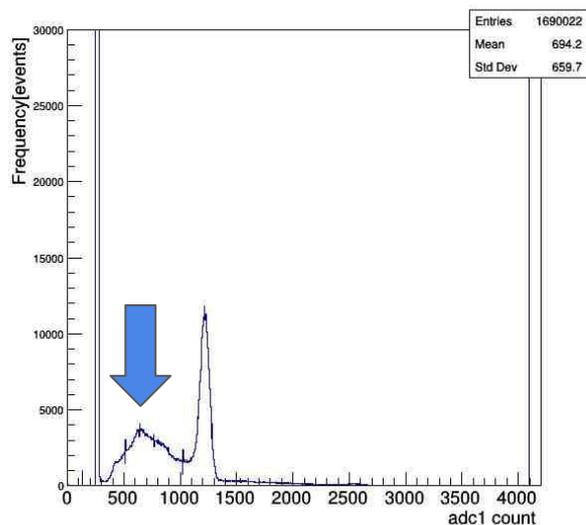
fitting関数にプロットが乗っている



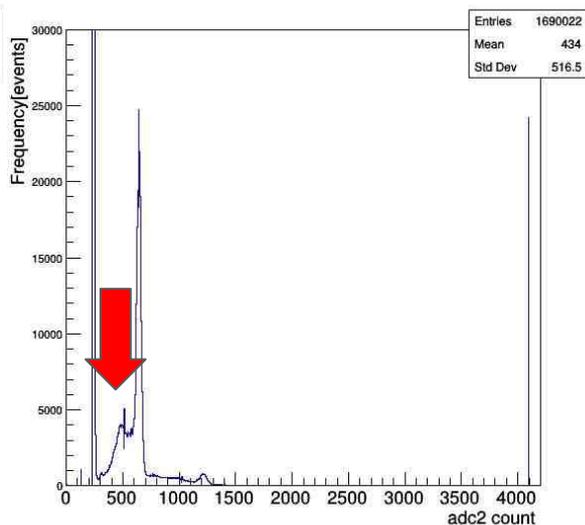
データ量の不足は最も大きな影響を
及ぼしていると考えられる

考察 ②各adcのデータについて

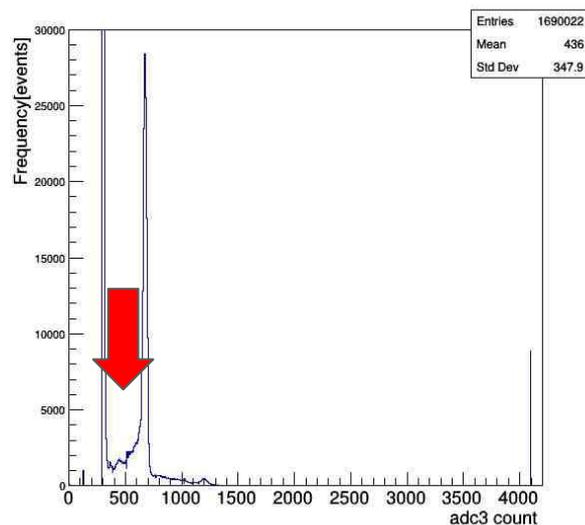
コンプトン散乱がNaI2,3では見えにくい



adcの生データ(NaI1)



adcの生データ(NaI2)



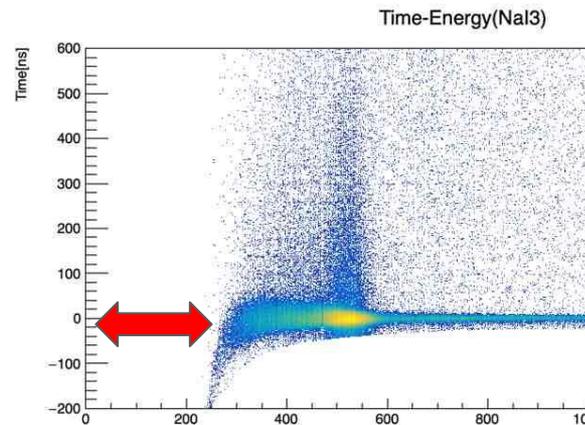
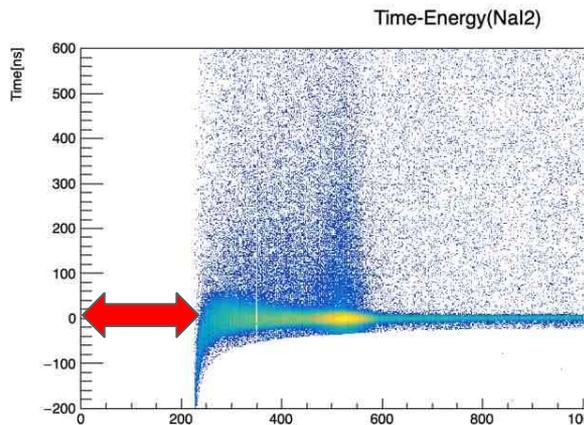
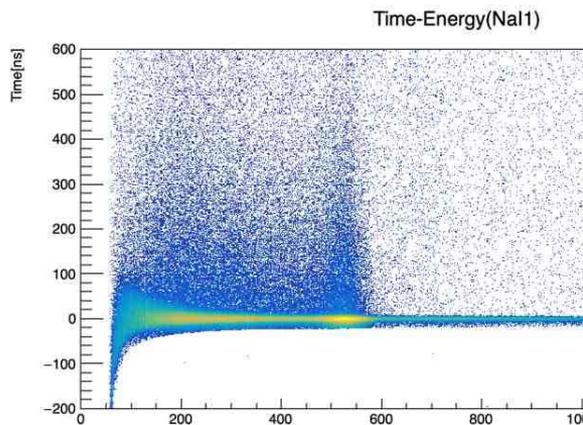
adcの生データ(NaI3)



NaI2,3はエネルギーの変換効率が悪い可能性

考察 ②各adcのデータについて

これにより、NaI2,3は低エネルギー領域のイベント数が少ない



※NaI2,3に加える電圧を大きくすることで改善すると考えられる

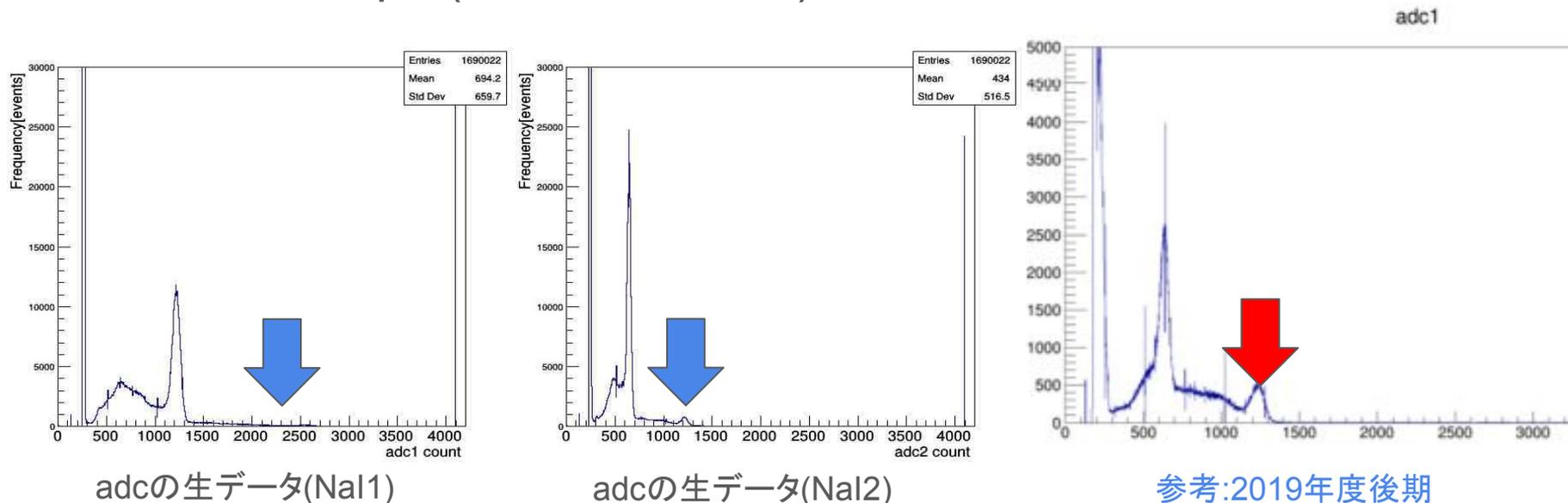
考察 ②各adcのデータについて

しかしNaI1でもPick-off補正は上手く行えていない

エネルギーの変換効率が悪いことでは説明できない

考察 ③バックグラウンドノイズ

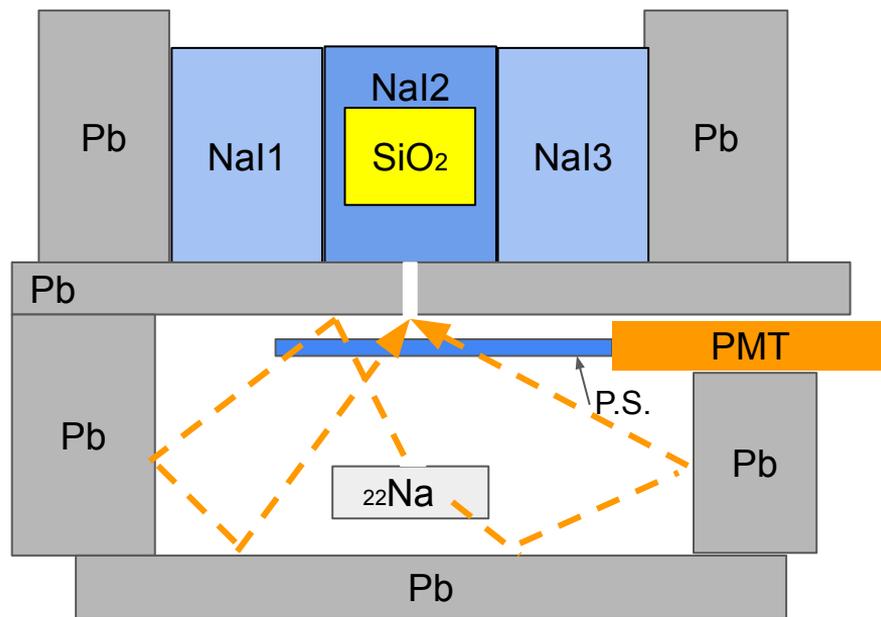
線源からの直接γ線(1275keVピーク)が例年に比べて非常に小さい



➡ セットアップでP.S.を穴あき鉛ではさんだため

考察 ③バックグラウンドノイズ

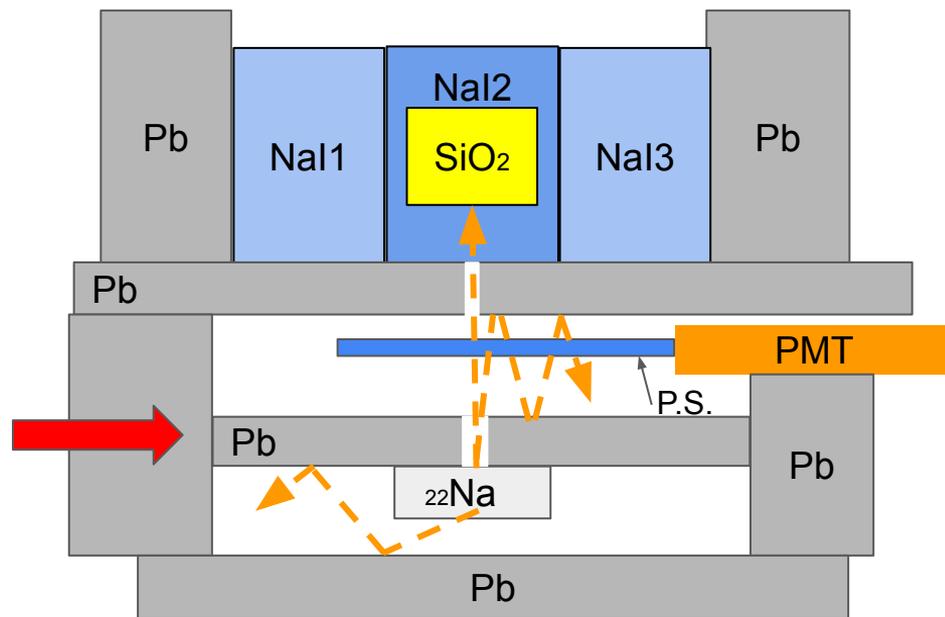
従来のセットアップ



さまざまな経路でNaIに入射可能

考察 ③バックグラウンドノイズ

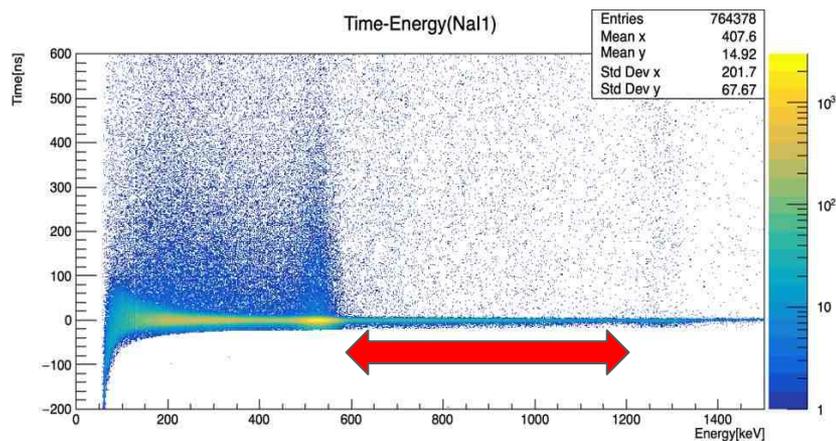
今回のセットアップ



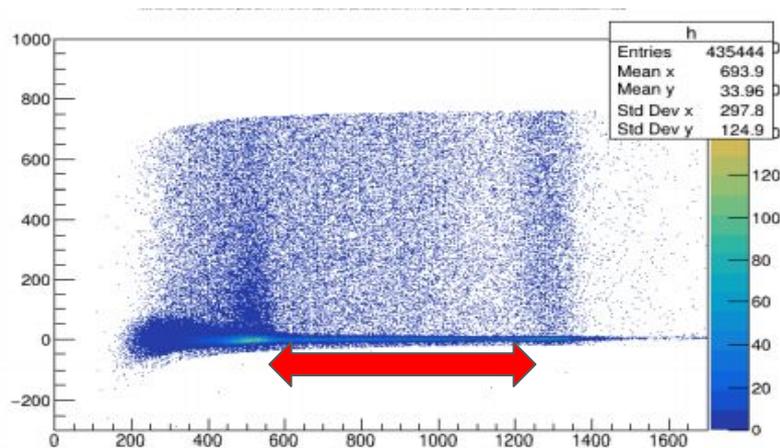
直接 γ 線の経路を大きく制限

考察 ③バックグラウンドノイズ

高エネルギー(511keV以上)のイベントが非常に少ない



今回のTime-Energy分布(NaI1)



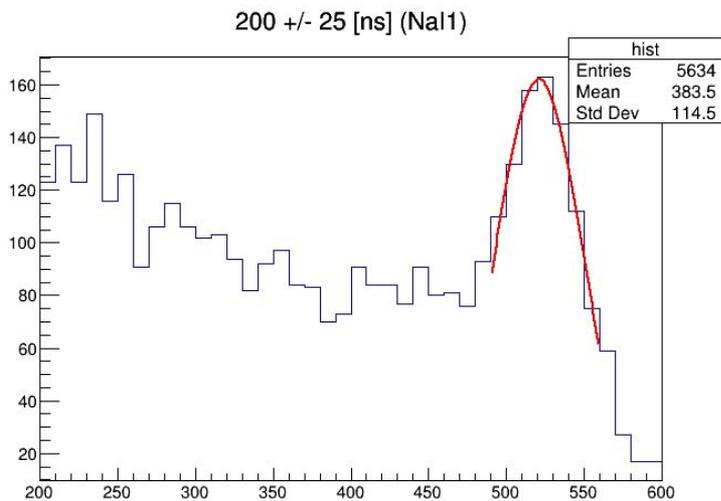
参考:2019年度後期



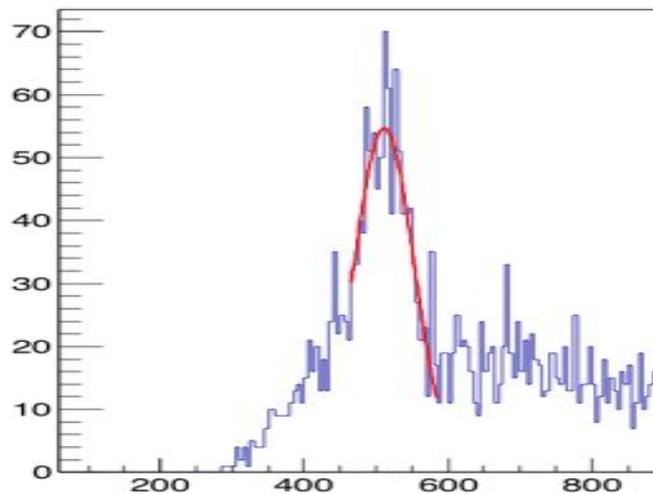
直接の線不足が原因だと考えている

考察 ④ Pick-off反応のイベント数

511keV以下のイベント数に比べてピークが小さすぎる



200±25nsのイベント(NaI1)

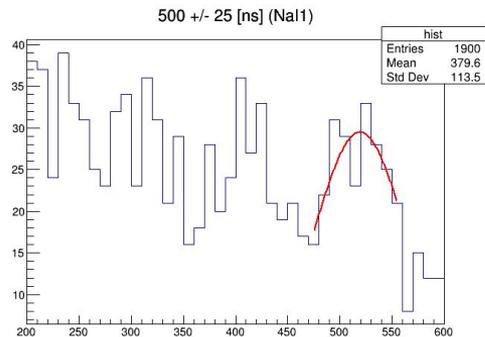
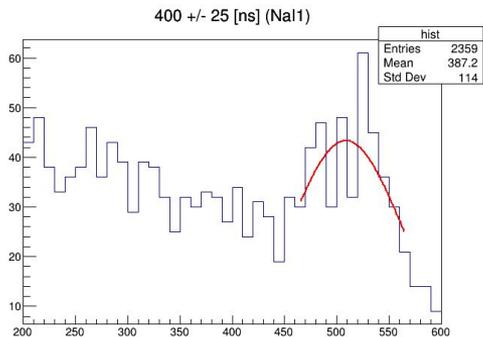
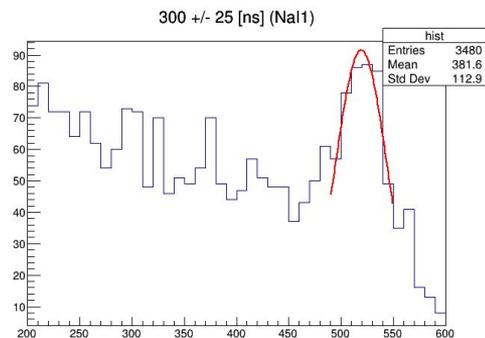
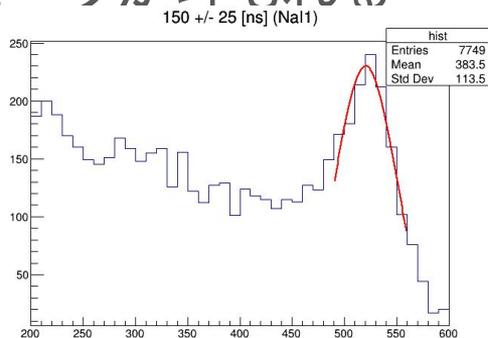
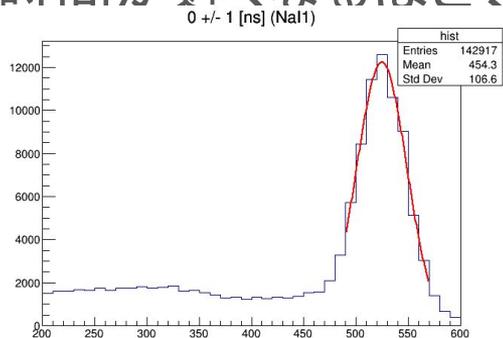


参考:2019年度後期(200±25ns)

総イベント数はほぼ同じで SiO_2 を焼いていない

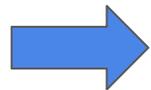
考察 ④ Pick-off反応のイベント数

時間が遅くなるほど、ピークが埋もれる



考察 ④Pick-off反応のイベント数

- ・511keV未満のイベントはほぼ(o-, p-)ポジトロニウムによるもの
- ・T-Q補正時点で寿命は理論値にかなり近い
- ・寿命fittingの範囲を変えても寿命の値はほとんど変化しない
(Pick-off補正後、範囲により50ns~200ns変化する年度もあった)



生データや解析自体に問題はなく、
Pick-off反応を十分抑制できていた可能性

考察 Pick-off補正が上手く行えなかった理由

可能性の高い順に、

①データ量が少なすぎる

≧④そもそもPick-off反応が少なかった

>②NaIの性能が低下している

≧③バックグラウンドノイズ

結論

データ量が少なくPick-off補正は行えなかったが、バックグラウンドノイズやPick-off反応を抑制でき、QEDを部分的にだが肯定しうる結果を得た。

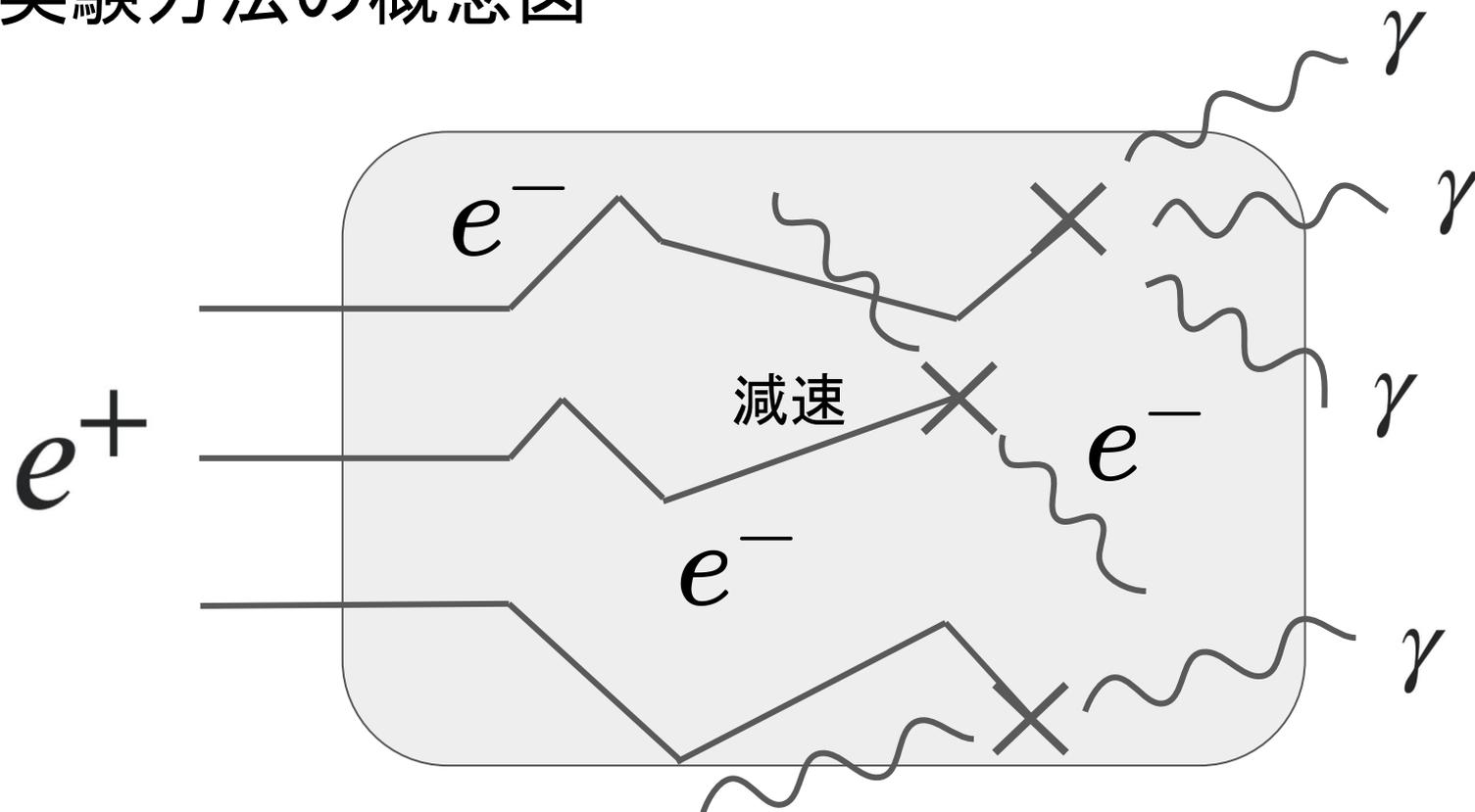
参考文献

- ・過去の課題演習A2のレポート、発表資料

<https://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/a1a2.html>

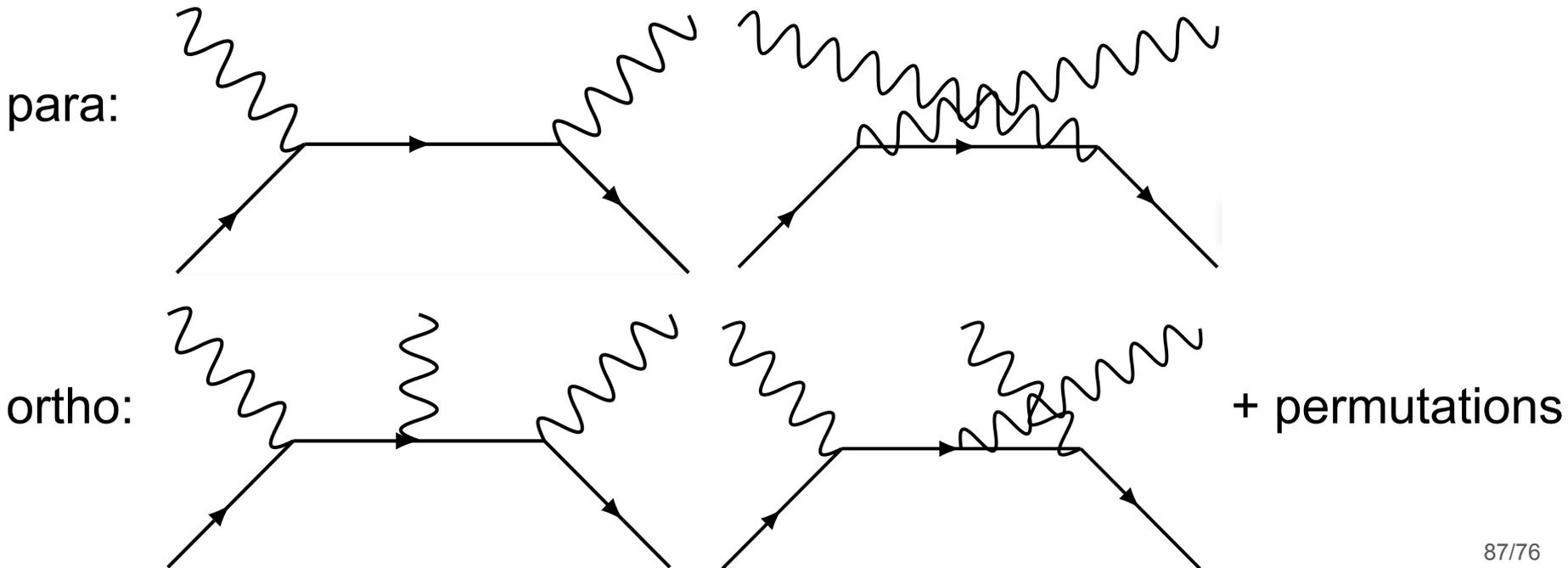
特に2018年度後期、2016年度後期を参考にした

実験方法の概念図



Psの寿命

以上からPsの光子への崩壊は最低次では次のダイアグラムによって計算される:



誤差の評価 ①TDCキャリブレーション

パラメータとその誤差は、

a	δa
-0.2423	0.000609

誤差の評価 ②TQ補正

各パラメータとその誤差は、

	p_0	δp_0	p_1	δp_1	p_2	δp_2	p_3	δp_3
NaI1	1128	17.0	55.79	1.25	0.8014	0.00292	-767.3	0.138
NaI2	505.5	64.5	224.3	3.99	0.4442	0.0352	-785.1	3.587
NaI3	7797	428	218.8	6.51	0.9622	0.00995	-770.3	1.13

誤差の評価 ③Pick-off補正

Pick-off補正のFitting関数 $f(t)$:

$$f(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2$$

寿命Fitting関数 $g(t)$:

$$g(t) = q_0 \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \\ \times \exp\left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\}\right] + q_2$$

$$\longrightarrow \delta g(t) = \sqrt{\sum_{i=0}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \delta p_i \right)^2}$$

※各偏微分は次ページに 90/85

誤差の評価 ③Pick-off補正

ただし $g(t)$ の偏微分はそれぞれ、

$$\frac{\partial g}{\partial p_0} = q_0 \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + (p_2 + 1)t \right\} \right] \\ \times \left[1 + \frac{p_1}{q_1} \left\{ p_0 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + p_2 + 1 \right\} \right] \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_1} = q_0 \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + (p_2 + 1)t \right\} \right] \\ \times \frac{p_0}{p_1} \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) \left[\frac{t}{p_1} + \frac{p_1 + t}{q_1} \left\{ p_0 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + p_2 + 1 \right\} \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_2} = q_0 \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + (p_2 + 1)t \right\} \right] \\ \times \left[1 - \frac{t}{q_1} \left\{ p_0 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + p_2 \right\} \right]$$

誤差の評価 ③Pick-off補正

各パラメータとその誤差は、

	p_0	δp_0	p_1	δp_1	p_2	δp_2
Na1						
Na2						
Na3						

誤差の評価 ③Pick-off補正

TQ補正による誤差 $\sigma_{\text{Pick-off}}$

	τ_+	τ	τ_-	$\sigma_{\text{Pick-off}}$
Nal1				
Nal2				
Nal3				

考察 $\Delta t \neq 30 \text{ ns}$ の妥当性

$$f(t) = \frac{\frac{dN_{2\gamma}}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}}{dt}}$$

Δt の寄与を考えるために $f(t)$ 近似を評価する:

微分の高次項は、

$$\Delta t^n \frac{d^n N_{i\gamma}}{dt^n} = (-\Gamma_{i\gamma} \Delta t)^n N = \left(-\frac{\Delta t}{\tau_{i\gamma}} \right)^n N$$

微小量

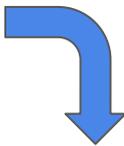
$$N_{i\gamma}(t + \Delta t) - N_{i\gamma}(t - \Delta t) \simeq \frac{dN_{i\gamma}}{dt} 2\Delta t + \frac{2}{3!} \frac{d^3 N_{i\gamma}}{dt^3} \Delta t^3$$

$$\therefore \frac{dN_{i\gamma}}{dt} \simeq \frac{1}{2\Delta t} \left(\Delta N_{i\gamma} - \frac{1}{3} \frac{d^3 N_{i\gamma}}{dt^3} \Delta t^3 \right)$$

考察 $\Delta \neq 30$ nsの妥当性

$$\therefore f(t) \simeq \frac{\Delta N_{2\gamma} - \frac{1}{3} \frac{d^3 N_{2\gamma}}{dt^3} \Delta t^3}{\Delta N_{3\gamma} - \frac{1}{3} \frac{d^3 N_{3\gamma}}{dt^3} \Delta t^3}$$

$$\frac{d^3 N_{i\gamma}}{dt^3} \simeq -\Gamma_{i\gamma} \frac{d^2 N}{dt^2} = -\Gamma_{i\gamma} (\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma})^2 N$$

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{\Delta N_{2\gamma}}{\Delta N_{3\gamma}} + \frac{\Delta t^3}{3\Delta N_{3\gamma}} \left(\frac{\Delta N_{2\gamma}}{\Delta N_{3\gamma}} \frac{d^3 N_{3\gamma}}{dt^3} - \frac{d^3 N_{2\gamma}}{dt^3} \right) \\ &= \frac{\Delta N_{2\gamma}}{\Delta N_{3\gamma}} - \frac{(\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma})^2 \Delta t^2}{3} \left(\frac{\Delta N_{2\gamma}}{\Delta N_{3\gamma}} - \frac{\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} \right) \frac{\Gamma_{3\gamma} N}{\frac{\Delta N_{3\gamma}}{\Delta t}} \end{aligned}$$


考察 $\Delta t = 30$ nsの妥当性

15%以下の誤差と、

$$f(t) \simeq \frac{\Delta N_{2\gamma}}{\Delta N_{3\gamma}} - \frac{(\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma})^2 \Delta t^2}{3} \frac{\Gamma_{3\gamma} N}{\frac{\Delta N_{3\gamma}}{\Delta t}} \left(\frac{\Delta N_{2\gamma}}{\Delta N_{3\gamma}} - \frac{\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} \right)$$

$\sim \frac{1}{3} \left(\frac{30}{100} \right)^2$ $\sim -\frac{1}{2}$ \sim 第一項

※青線部の寄与によりさらに小さいはず