

2006年度前期 課題演習 A2 レポート
～ EPR パラドックスを検証する～

佐藤 大輔 廣田 誠子 藤崎 淳 前田 陽祐

2006. 10. 27

概要

本課題演習では量子力学に於ける「確率解釈」が本当に正しいか、という問いに対して Einstein らによって提唱された「EPR パラドックス」を、 ^{22}Na と Compton ポラリメータを用いた実験により検証した。

実験の結果は、Einstein らの提唱した「隠れた変数理論」ではなく、量子力学に近く、自然は量子力学に従っていることが結論付けられた。

目次

第 1 章	Introduction	2
1.1	本課題演習の意義および本レポートの流れ	2
1.2	本課題演習での具体的な取り組み	3
第 2 章	理論背景	4
2.1	EPR パラドックス	4
2.2	Bell の不等式	5
2.3	Bell の不等式の検証と A2 実験	8
第 3 章	実験装置	10
3.1	実験機器	10
3.2	実験装置の概略	11
3.3	セットアップ	12
3.4	距離を 15cm としたことの理由	18
3.5	$\theta = 80^\circ$ にしたことの理由	20
第 4 章	実験データの解析	22
4.1	calibration	22
4.2	使用した data 範囲	27
4.3	補正	28
第 5 章	結果・考察	29
5.1	測定結果	29
5.2	シミュレーションによる実験結果の考察	30
5.2.1	プログラムの概要	31
5.2.2	プログラムのアルゴリズム	31
5.2.3	逆関数法について	32
5.2.4	シミュレーションの結果	33
5.3	その他の考察	35
5.3.1	得られたデータのうち使用していないものに関して	35
第 6 章	結論	38
第 7 章	謝辞	40

第1章 Introduction

1.1 本課題演習の意義および本レポートの流れ

「物事の状態はそもそも一つに決まっておらず、決まっているのはどんな状態を取りうるかという確率だけである。観測が行われるまで、その状態は決定されない。」1900年代初頭から発展してきた量子力学はやがて、このような概念を含むようになった。「自然ははじめから決まっいて、私たちはそれを調べていく」という考えの下に発展してきたそれまでの古典論とは違う、この量子力学のもつ「確率」に抵抗を覚えた人が少なからずおり、様々な人によって量子力学の是非をめぐる議論が展開された。1935年、Einstein, Podolsky, Rosenの三人は量子力学が不完全である、という証拠として一般に「EPRパラドックス」と呼ばれる、ある状況を提唱し、そしてそれを説明する「隠れた変数理論」の存在を示唆した。この論文で三人は抽象的な議論に徹しており、具体的に実験によって確かめる手段がなかったため「EPRパラドックス」にまつわる議論は30年あまり続けられた。その間に「隠れた変数理論」は多くの人に研究され、たくさんのモデルが存在する。1950年代にBohmによってEPRパラドックスを含む具体的で実験可能な状況が提唱され、1964年にBellによって「隠れた変数理論と量子力学との差を明確に表す「Bellの不等式」なるものが提唱された。「隠れた変数理論」は「Bellの不等式」を満たすが、量子力学は満たさないとされている。こうして実験によって検証可能となったEPRパラドックスは多くの人の手によって検証され、結果、量子力学が正しいとする結論が現在では一般的となっている。

本課題演習で我々は先人達の後を辿り、ポジトロニウムからの 2γ の偏光状態にまつわるEPRパラドックスを検証することで、自然は量子力学にしたがっているのか、はたまた量子力学に代わる理論として提唱された「隠れた変数理論」に従っているのかを自らの手で確認した。その報告を本レポートによって行う。本レポートの流れは以下のとおりである。まず、第2章では本課題演習の理論背景、すなわち今回の用いた実験環境を例にとったEPRパラドックス、Bellの不等式、そして実験手法を説明する。そして第3章で本実験での詳しいセットアップとそれに起因する理論値とデータとのずれに関する事柄を、第4章では実験によって得られたデータとその解析方法を掲載する。第5章で、Set upに起因するデータの理論値からのずれを解消するために行ったシミュレーション等について述べ、最後に第6章で結論を述べる。

1.2 本課題演習での具体的な取り組み

本課題演習では理論背景をよりよく理解するため、実験の前に演習やゼミを行った。始めは演習の形でパラポジトロニウムがそれぞれ逆向きのスピンを持つ 2γ に崩壊することを導いた。

電磁気学の復習から始まり、量子力学に於ける角運動量・スピンを導入し、スピンの合成等について学習した。次いで parity 変換や荷電変換について学び、パラポジトロニウムの崩壊に関しては CP 保存が成立することから崩壊後の 2γ の偏極方向、つまりスピンの向きが逆向きになることを導いた。

更に実際の実験に必要な知識として、荷電粒子の物質中での減衰や Compton 散乱に関して学習し、オシロスコープや PMT, ADC 等の各エレクトロニクスの用法については実際に使って、その動作を一つずつ確認しながら学んでいった。又、誤差の取り扱いやコンピュータを用いた測定データの解析方法もこうした実験を通じて身につけた。

EPR パラドックスについてはある程度実験技法が身についた段階でゼミを行った。その後、本実験のセットアップの決定や必要な各パラメータの設定のための実験を経て、本レポートに記したような実験を行った。

第2章 理論背景

2.1 EPR パラドックス

Einstein が指摘した量子力学の不完全性は様々な例で確認することができるが、ここでは ^{23}Na の放射線同位体である ^{22}Na を例にとってみよう。

^{22}Na は



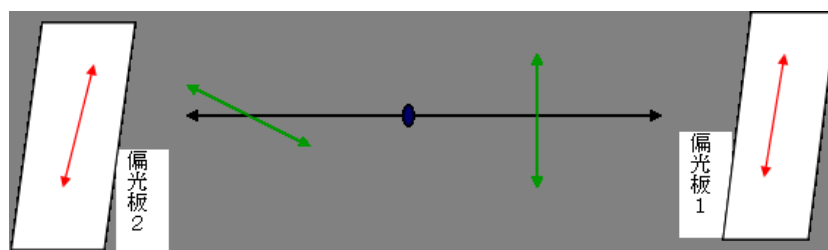
のように β^+ 崩壊をし、そこで放出された陽電子は空気中の電子と準安定状態のポジトロニウムを作る。その中でも、スピン 0 のパラポジトロニウムは崩壊して 2 つの光子を互いに逆向き (back to back) に放出する。その偏光状態は、

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle |L_2\rangle - |L_1\rangle |R_2\rangle) \quad (2.2)$$

というベクトルで表される。ただし、 $|R_1\rangle$ は光子 1 の右巻き偏光状態、 $|L_2\rangle$ は光子 2 の左巻き偏光状態を表すものとする。偏光状態を右巻き、左巻き偏光から直線偏光に置き換えたベクトルは

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle |y_2\rangle - |y_1\rangle |x_2\rangle) \quad (2.3)$$

で表される。ここで、偏光板を 2 つ用意し、光子の偏光状態を観測してみることにする。



まず私達が偏光板 1 にいるとしよう。式 (2.3) より、偏光板 1 で観測した偏光が x 偏光ならば偏光板 2 での光子は y 偏光である。又、偏光板 1 での光子が y 偏光ならば偏光板 2 での光子は x 偏光である。つまり私達は、偏光板 1 に居ながら「偏光板 2 での光子の偏光状態が 100% 予想できる」ということになる。言葉を変えれば、「偏光板 2 の情報が私達に一瞬で伝わる」と言える。この「一瞬で伝わる」ということが問題なのである。もし偏光板 1 と偏

光板 2 が 1 光年離れていたとしたら、この間を光は 1 年かけて進むわけだが、「一瞬で伝わる」のならば、この情報伝達は確実に光速を超えている。アインシュタインの局所性原理をいとも簡単に破るこの理論を論破するために、次の議論が提唱された。

先ほどの偏光板の設定で、「偏光板 2 での光子の偏光状態が 100% 予想できる」と言えたが、直線偏光から円偏光に変換して考えてみると、奇妙なことが起きる。今、偏光板 1 での光子が「 x 偏光」と観測されるとする。すると、容易に偏光板 2 での光子が 100% 「 y 偏光」だと予想できる。しかし、偏光板 1 でこの光子を「右巻き偏光」と観測したとすればどうだろうか。この場合、偏光板 2 での光子は同様に 100% 「左巻き偏光」だと予想できるが、円偏光と直線偏光の関係

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \quad (2.4)$$

より、偏光板 2 での光子が x 偏光なのか y 偏光なのかは、50% の確率でもってしか予想できない。このような矛盾を、提案した Einstein, Podolski, Rosen の 3 人の頭文字を取って「EPR パラドックス」と言う。

彼らが主張している量子力学の欠陥は、量子力学では偏光状態のベクトル (2.2), (2.3) のように 1 つの空間に 2 つの状態が実現可能であり、50% の確率でどちらかの状態が現れるという描像である。そこで Einstein の局所性原理に矛盾せず、量子力学と同じ結果を与える理論が存在すればこの世界は無矛盾な理論で説明され、以上のような論争も起こることはないだろう。その理論では、まだ私達が知らないある変数が存在して、その変数が古典力学における正準変数のように量子の世界を支配しているのだ。この概念を用いて、上述の理論を「隠れた変数理論」と呼ぶ。

2.2 Bell の不等式

この隠れた変数理論に内在する不等式を導き出したのが J.S. Bell である。彼は隠れた変数理論を駆使するために、ある思考実験を行った。

まず、 ^{22}Na から発生する 2 光子を観測する設定は変えない。偏光板も 2 つ用意する。次に、偏光板 1, 偏光板 2 でそれぞれ方向を決めておく。同時に、偏光板 1 で α , 偏光板 2 で β という値を用意する。そして、偏光板 1 に入ってきた光子の偏光方向と事前に偏光板 1 で決めていた方向に一致していたら $\alpha = 1$, 直交していたら $\alpha = -1$ とする。同様に偏光板 2 に入ってきた光子の偏光方向が事前に偏光板 2 で決めていた方向に一致していたら $\beta = 1$, 直交していたら $\beta = -1$ とする。偏光板 1 と偏光板 2 でそれぞれ 4 つの方向を決めて、 α_i, β_j の値を求める。(i, j は方向のラベル) 最後に $\alpha_i \beta_j$ の平均値 (期待値) を求めるのだが、そこでついに隠れた変数が登場する。下の表は、全ての α と β の値の組み合わせと隠れた変数を示している。

α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	β_4	隠れた変数
+	+	+	+	-	-	-	-	P ₁
+	+	+	-	-	-	-	+	P ₂
+	+	-	+	-	-	+	-	P ₃
+	-	+	+	-	+	-	-	P ₄
-	+	+	+	+	-	-	-	P ₅
+	+	-	-	-	-	+	+	P ₆
+	-	+	-	-	+	-	+	P ₇
+	-	-	+	-	+	+	-	P ₈
-	+	+	-	+	-	-	+	P ₉
-	+	-	+	+	-	+	-	P ₁₀
-	-	+	+	+	+	-	-	P ₁₁
+	-	-	-	-	+	+	+	P ₁₂
-	+	-	-	+	-	+	+	P ₁₃
-	-	+	-	+	+	-	+	P ₁₄
-	-	-	+	+	+	+	-	P ₁₅
-	-	-	-	+	+	+	+	P ₁₆

この表より $\alpha\beta$ の期待値を求める．例えば，偏光板 1 での 4 番目の方向 & 偏光板 2 での 2 番目の方向についての $\alpha\beta$ の期待値は，

$$\alpha_4\beta_2 = -P_1 + P_2 - P_3 + P_4 - P_5 + P_6 - P_7 + P_8 + P_9 - P_{10} + P_{11} - P_{12} + P_{13} - P_{14} + P_{15} - P_{16} \quad (2.5)$$

と計算される．このようにして $\alpha_4\beta_3$, $\alpha_1\beta_2$, $\alpha_1\beta_3$ を求め， $|\alpha_4\beta_2 + \alpha_4\beta_3| + |\alpha_1\beta_2 - \alpha_1\beta_3|$ に代入して計算すると

$$|\alpha_4\beta_2 + \alpha_4\beta_3| + |\alpha_1\beta_2 - \alpha_1\beta_3| < 2 \quad (2.6)$$

なる不等式が成立する．これを Bell の不等式と呼ぶ．この不等式には隠れた変数が出てこない．文字通り「隠れて」いるのである．ところが，この Bell の不等式は量子力学と矛盾する時がある．偏光板 1 の方向と偏光板 2 の方向がなす角度を ϕ とすると，偏光板 1 での座標 (x, y) は偏光板 2 での座標 (x', y') を用いると

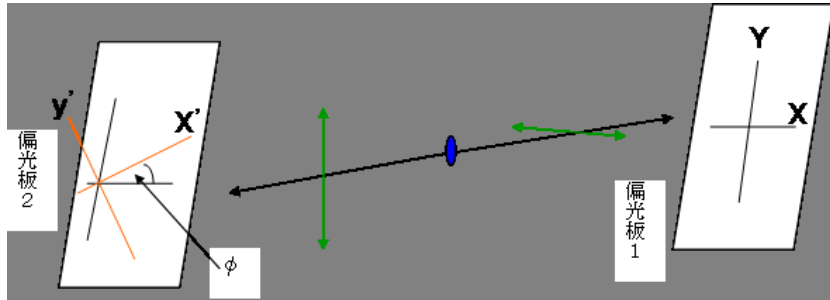
$$x = x' \cos \phi - y' \sin \phi \quad (2.7)$$

$$y = x' \sin \phi + y' \cos \phi \quad (2.8)$$

式 (2.7) , (2.8) を式 (2.3) に代入して 2 つの光子の偏光状態のベクトルを求めると，

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle |x'\rangle \sin \phi + |x\rangle |y'\rangle \cos \phi - |y\rangle |x'\rangle \cos \phi + |y\rangle |y'\rangle \sin \phi) \quad (2.9)$$

となる．



式 (2.9) を見ると, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ の確率は

$$\langle F | (\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi |x\rangle |x'\rangle) = \frac{1}{2} \sin^2 \phi \quad (2.10)$$

同様に, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ の確率は $\frac{1}{2} \cos^2 \phi$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ の確率は $\frac{1}{2} \cos^2 \phi$, $\alpha = -1$, $\beta = -1$ の確率は $\frac{1}{2} \sin^2 \phi$, であることが分かる. すると, $\alpha\beta$ の期待値は

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \frac{1}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \cos^2 \phi + \frac{1}{2} \sin^2 \phi \\ &= -(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ &= -\cos(2\phi) \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる. ψ_i を偏光板 1 での i 番目の方向, ψ_j を偏光板 2 の j 番目の方向, $\psi_j - \psi_i = \phi$ という関係があるとすると,

$$\alpha_i \beta_j = -\cos^2(\psi_j - \psi_i) \quad (2.12)$$

ここで $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 3\pi/8$, $\psi_3 = \pi/8$, $\psi_4 = \pi/4$ と選ぶと,

$$\begin{aligned} |\alpha_4 \beta_2 + \alpha_4 \beta_3| + |\alpha_1 \beta_2 - \alpha_1 \beta_3| &= \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \\ &= 2\sqrt{2} > 2 \end{aligned}$$

このことより, Bell の不等式は量子力学の枠組みの中で, ある場合には成り立たないことが分かる. それでは, どの範囲なら Bell の不等式が成り立つのだろうか. $\alpha\beta$ を隠れた変数理論で計算すると, その結果出てくる式は現象の仮定の仕方によって異なるが, いずれも $\propto -\cos(2\phi)$ の形を仮定しており, その係数が違うだけなので

$$\alpha\beta = -k \cos(2\phi) = -k \cos^2(\psi_j - \psi_i) \quad (2.13)$$

という形におく. 量子力学が Bell の不等式を満たさない角度をもう 1 度とって, $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 3\pi/8$, $\psi_3 = \pi/8$, $\psi_4 = \pi/4$ とすると,

$$|\alpha_4 \beta_2 + \alpha_4 \beta_3| + |\alpha_1 \beta_2 - \alpha_1 \beta_3| = 2\sqrt{2}|k| \quad (2.14)$$

Bell の不等式が成り立つためには

$$2\sqrt{2}|k| < 2 \quad \rightarrow \quad |k| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.15)$$

以上の議論より，量子力学では $k = 1$ ，隠れた変数理論では $k < 1/\sqrt{2}$ という違いを検証できればよいということが分かる．

2.3 Bell の不等式の検証と A2 実験

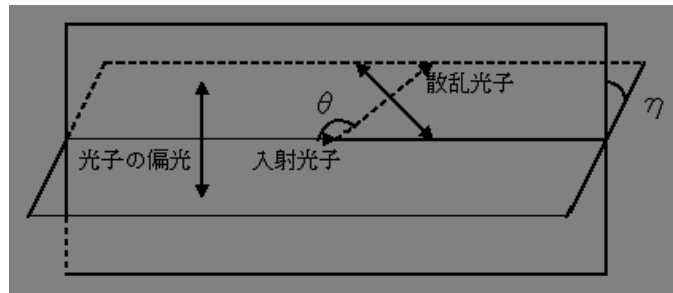
さて検証では上述の偏光板を 2 つ使えばよいのだが，511keV のエネルギー領域に対応した偏光板は開発されていないので，Compton ポラリメータを使わざるを得ない．これは back to back に放出された 2 つの光子を Compton 散乱させ，散乱された光子を検出することで光子の偏光方向を間接的に知るためのものである．

何故 Compton 散乱させた光子を検出するだけで光子の偏光状態がわかるかを説明する．

光子が Compton 散乱される際の散乱断面積は Klein-仁科の公式で与えられるのだが，Klein-仁科の公式は光子の偏光方向の変化分に依存している．Klein-仁科の公式:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\hbar\omega'}{\hbar\omega} \right)^2 \left(\frac{\hbar\omega}{\hbar\omega'} + \frac{\hbar\omega'}{\hbar\omega} - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \eta \right) \quad (2.16)$$

$r_e = \frac{\hbar\alpha}{m_e c}$ ， $\hbar\omega$: 散乱前の光子のエネルギー， $\hbar\omega'$: 散乱後の光子のエネルギー

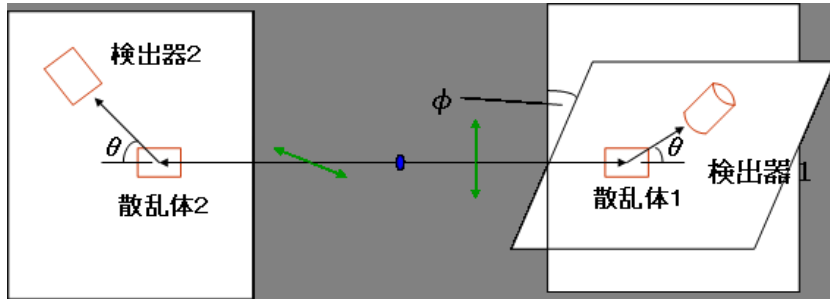


これより，光子の散乱される方向によって散乱される確率が違うので，単位時間当たりに検出される光子の数 (レート) が光子の散乱角度によって変わってくる．量子力学に基づき，且つ $\alpha\beta = -k \cos(2\phi)$ となるように計算すると，レートは

$$\text{Rate} \propto 1 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{2 - \cos \theta + \frac{1}{2 - \cos \theta} - \sin^2 \theta} \right)^2 \alpha\beta \quad (2.17)$$

となる。

今回の A2 実験ではプラスチックシンチレーターで光子を散乱させ、NaI シンチレーターで散乱された光子を検出する。プラスチックシンチレーター 2 つ、NaI シンチレーター 2 つの計 4 つのシンチレーターで同時に光子を検出した時にだけカウントする (コインシデンスをとる) ことによって Compton 散乱された 511keV の光子だけが検出できる。



現実が量子力学、隠れた変数理論のどちらに近いかわかる方法は以下のとおりである。

ϕ を色々変えてコインシデンスレートを計測してプロットし、式 (2.17) と比較することで k の値を求めて、式 (2.15) で判断する。つまり、 k が 1 に近ければ量子力学が正しく、 k が $1/\sqrt{2}$ より小さければ隠れた変数理論が正しいことが示される。

また、指標として、

$$\rho = \frac{\phi = \pi/2 \text{ のレート}}{\phi = 0 \text{ のレート}} \quad (2.18)$$

とする。実験で ρ の値を求めて、それが理論で $k = 1$ とした時の ρ に近いかわ、 $k < 1/\sqrt{2}$ とした時の ρ に近いかわを判断すれば、量子力学が正しいかわ、隠れた変数理論が正しいかわ、どちらかを言うこともできる。

今回の A2 実験では、この方法で Bell の不等式の検証を行った。

第3章 実験装置

3.1 実験機器

本実験で使用した実験機器で、主なものについて述べる。

検出器 本実験では ^{22}Na の崩壊によって生じるポジトロニウムが更に崩壊して生じる、それぞれ 511keV のエネルギーを持つ 2γ を始め、数 100keV ~ 数 1000keV の高エネルギーの光子を測定しなければならない。数 eV の光子を検出するには、光電子増倍管 (PMT, ホトマル) を用いればよい。これは筒状の検出器で、窓から光子が入るとその光子は光電面で光電子 (photoelectron) に変わり、約 1000V から 2000V ほどの高電圧の中で電子は電極 (ダイノード) にぶつかり、二次電子を生成しながら加速され、最終的には1つの光電子が印加電圧によって 10^5 - 10^7 倍に増幅され、光子を電流として観測することができる。しかし、高エネルギーの γ 線ではそのまま PMT で観測することは出来ないのでシンチレータ (scintillator) を用いる。これは光子と相互作用しやすい物質でできていて、光子と相互作用した際に光子の失ったエネルギーを吸収して、シンチレータ内の分子や原子の励起等が起こり、その脱励起により 2 - 3eV の光子を吸収したエネルギー分に相当する数だけ得ることが出来るものである。これと PMT を組み合わせて用いることで、 γ のような高エネルギーの光子であっても、PMT からの電流をオシロスコープで観測するなどすれば、その通過を知ることが出来る。シンチレータを作る物質により、また光子の持つエネルギーによって光子とシンチレータの相互作用の仕方が異なり、今回実験で用いた γ 線は 511keV であるので、NIST のデータベースによるとこの時、 NaI シンチレータは光電吸収、Compton 散乱共に起こすが、プラスチックシンチレータは Compton 散乱しか起こさず、光電吸収はしない。光子がシンチレータ内でどのような相互作用をしたかは、後に述べるように光子が失ったエネルギー (即ちシンチレータに落とされたエネルギー) がいくらであるかを知ることによってわかる。

エレクトロニクス PMT から得られる電流は、環境放射線や宇宙線等、測定したい光子以外のものを含んでしまうことがある。特に環境放射線等のノイズは常に出ているので、測定の邪魔になるばかりか、測定データを見にくくする等、データの質を下げ測定の妨げとなるので、除かれることが望ましい。こうしたノイズの信号は光子を測定したときのものに比べ小さいので、

ある程度の大きさの信号が来た時だけに測定を行うようにすればよい。これはディスクリミネータ (discriminator) という装置を用いれば可能である。具体的には信号は電圧によって与えられるので、電圧の絶対値がある値 (閾値, threshold) より大きい信号が来た時のみに矩形波を出すようになっている。又、本実験では複数の PMT を用いて、 2γ の測定を行うので、複数の PMT が同時に反応した時のみ測定を行うようにしなければならない。それにはコインシデンス (coincidence) という装置を用いる。閾値より大きい信号が来るとディスクリミネータが論理信号 (矩形波) を出し、その信号がコインシデンスに送られる。コインシデンスは指定した複数のディスクリミネータから来た矩形波が重なった時のみ、矩形波を出す装置である。更にこのコインシデンスからの矩形波に対し、一定時間遅らして一定の長さの矩形波を出す装置がゲートジェネレータ (gate generator) であり、次に述べる ADC を用いる時に必要になる。このゲートジェネレータには VETO という入力端子があり、ここに信号が来ている間は新たな矩形波を出さないようにすることができる。この他に使用したエレクトロニクスとしては、信号を増幅するアンプや、信号を 2 つに分けるディバイダ (divider) 等がある。アンプは、ディスクリミネータが複数の入力に対しても全てに共通にしか閾値をかけることが出来ないの、相対的に小さい信号を増幅するために用いた。

解析装置 光子がシンチレータで失ったエネルギーは、PMT から流れた電流の電荷量に比例する形で表されるが、その電荷量を求め、データをデジタル化してコンピュータに入力する装置が ADC (Analog to Digital Converter) である。ゲートジェネレータ等によって作られたゲートの開いている (即ち矩形波の出ている) 時間だけ、入力された電流を積分し、更にその電荷量を 0.25pc で割った値を返す装置である。ADC が流れてきた電荷量を積分している間に次の信号がきてしまうと不具合を起こすので、ADC が積分をしている間は次のゲートは開かないようにしておく必要がありここで VETO を使用している。本実験は多くの測定を要求されるため、データ取得をコンピュータにより自動化する必要があるが、ADC を用いることで数値データを自動で多く得ることが可能となる。

3.2 実験装置の概略

第 2 章で述べた Compton ポラリメータの概念図を図 3.1, 3.2 示す。

ポジトロニウムが崩壊して出来た 2γ は散乱体で Compton 散乱され、更に特定の方向に置いた検出器で検出される。このイベントは殆ど同時であるので、散乱体としてプラスチックシンチレータをつけた PMT、検出器として NaI をつけた PMT を用いて、4 つの PMT でコインシデンスをとれば、散乱された光子が 2 つの検出器の両方で検出されるというイベントだけを観測で

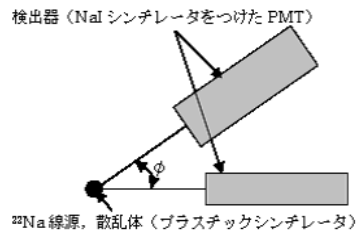


図 3.1: Compton ポラリメータを真上から見たもの

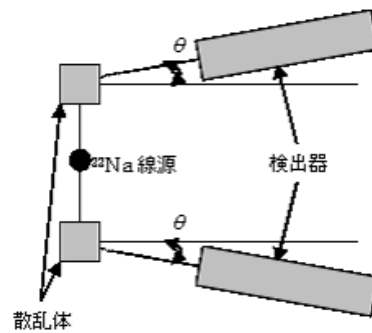


図 3.2: Compton ポラリメータを真横から見たもの

きる．4つのPMTの配置は図からもわかるように3次元的になるので，台を用いるなどの工夫が必要である．又，線源から直接検出器（NaIシンチレータをつけたPMT）に γ 線が入らないようにしなければならない．実際にはこれだけで時間を測ってレートを出すだけでは不十分であるので（詳しくは第4章で述べる），更に確認のために各PMTについてADCに接続して γ 線が失ったエネルギーを測定する．これにより測定した各 2γ がどのようなイベントを起こしたのかを知ることが出来る．ADCに入力する手順としては先のセクションで述べた機器を用い，まずPMTからの信号をディバイダで二つにわけ，そのうち一方からディスクリミネータ，コインシデンスを通してゲートを作りADCに，もう一方から直接の信号をADCに入力した．矩形波の幅や遅れの時間はADCにつなぐ前にオシロスコープで波形を見ながら調節してやればよい．

3.3 セットアップ

これまで述べてきたことをもとに，図 3.3-3.5 と図 3.6-3.8 の写真に示すような実験装置を組み上げた．4つのPMTには，区別のためNaIシンチレータをつけたもの2つにDirac, Landau, プラスチックシンチレータをつけた

もの2つには Feynman, Yukawa という名前をそれぞれつけた。それぞれの PMT にかけた印加電圧 (High Voltage), ディスクリミネータの矩形波の幅 (width), 閾値 (threshold), VETO に入力した矩形波の幅などの具体的な値は図 3.5 に掲載した。本実験では ϕ の値の変化によるレートの変化を見ることが重要であるため, セットアップに於いても ϕ の値を容易に変えられることが必要である。そのため上半分が回転する台を用いて, そこを回転するだけで ϕ の値を変えられるようにしている。又, NaI に直接 γ 線が入らないように鉛を積み上げた。その様子を図 3.4 に示した。図 3.3・3.4 では, 実際の実験装置の縮図となっている。その他, パラメータに関しては, 散乱体 (プラスチックシンチレータ) と検出器 (NaI シンチレータをつけた PMT) との距離を 15cm, 散乱角 θ は $\theta = 80^\circ$ と設定した。これらの値に関しては後にその設定理由を述べる。

このようなパラメータにおいては第 2 章で述べた ρ の理論値は式 2.182.17 より

$$\rho = \frac{1.74}{0.52} = 2.82 \quad (3.1)$$

となる。

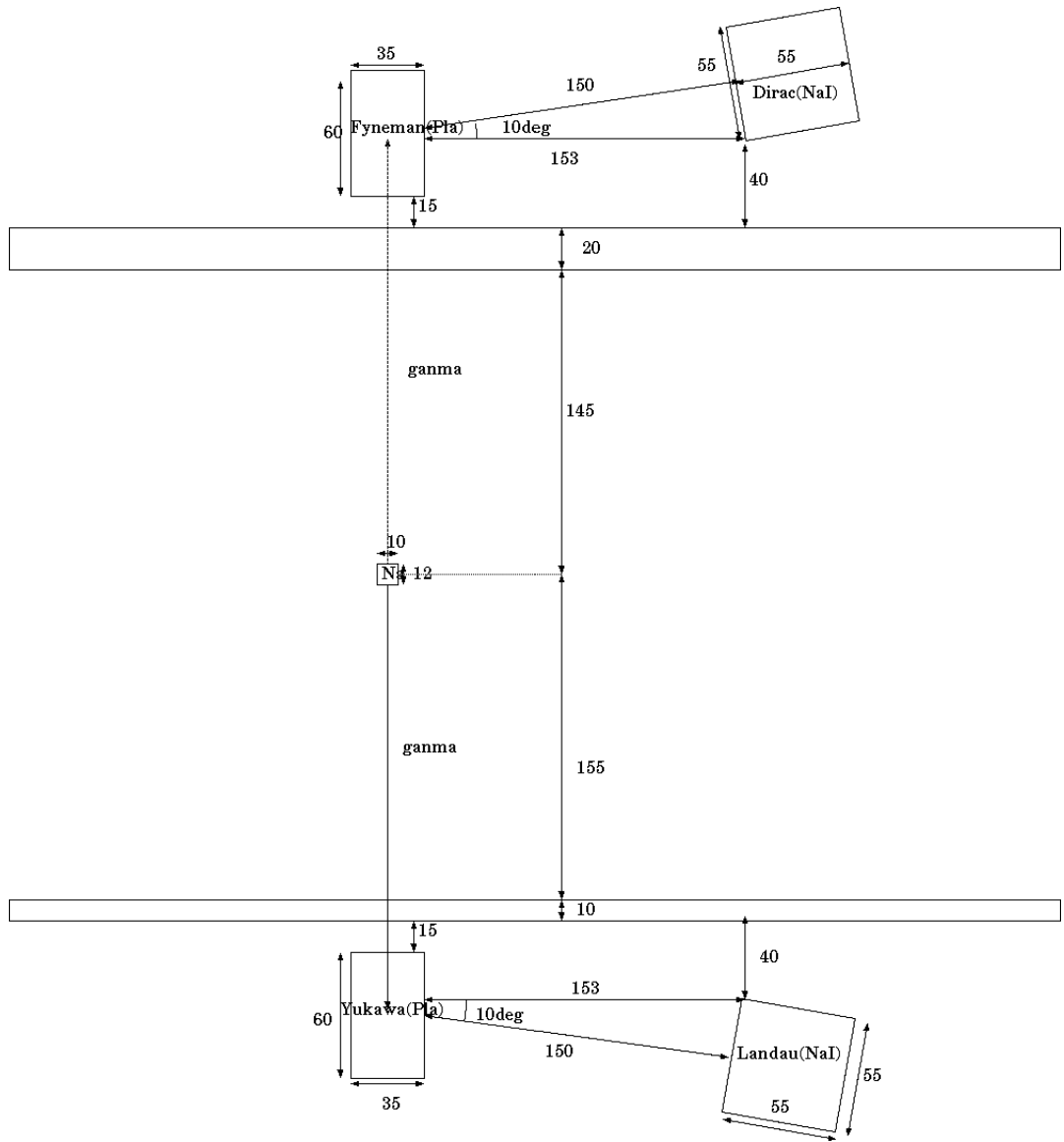


図 3.3: 真横から見た geometry

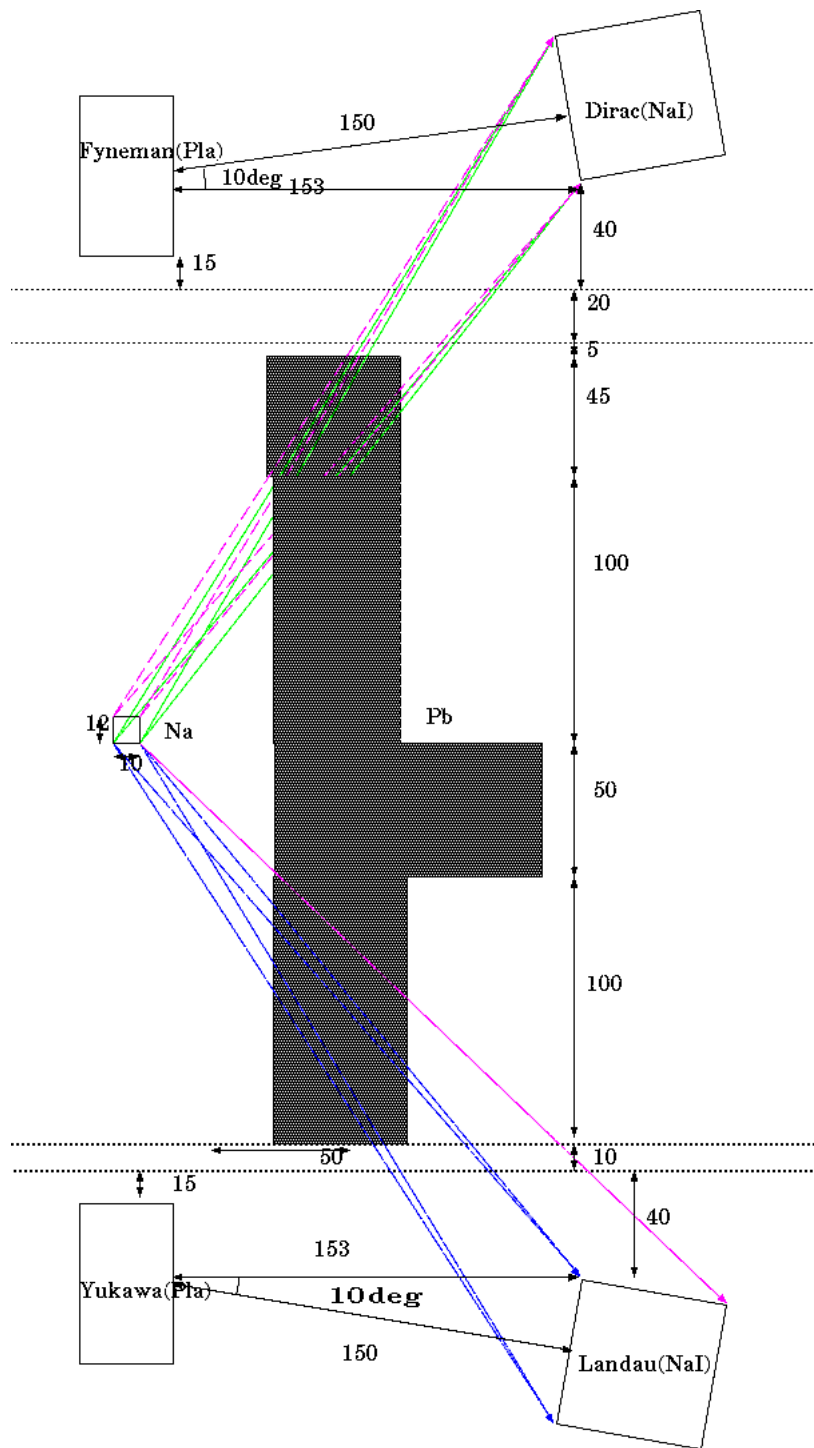


図 3.4: 真横から見た geometry (鉛あり)

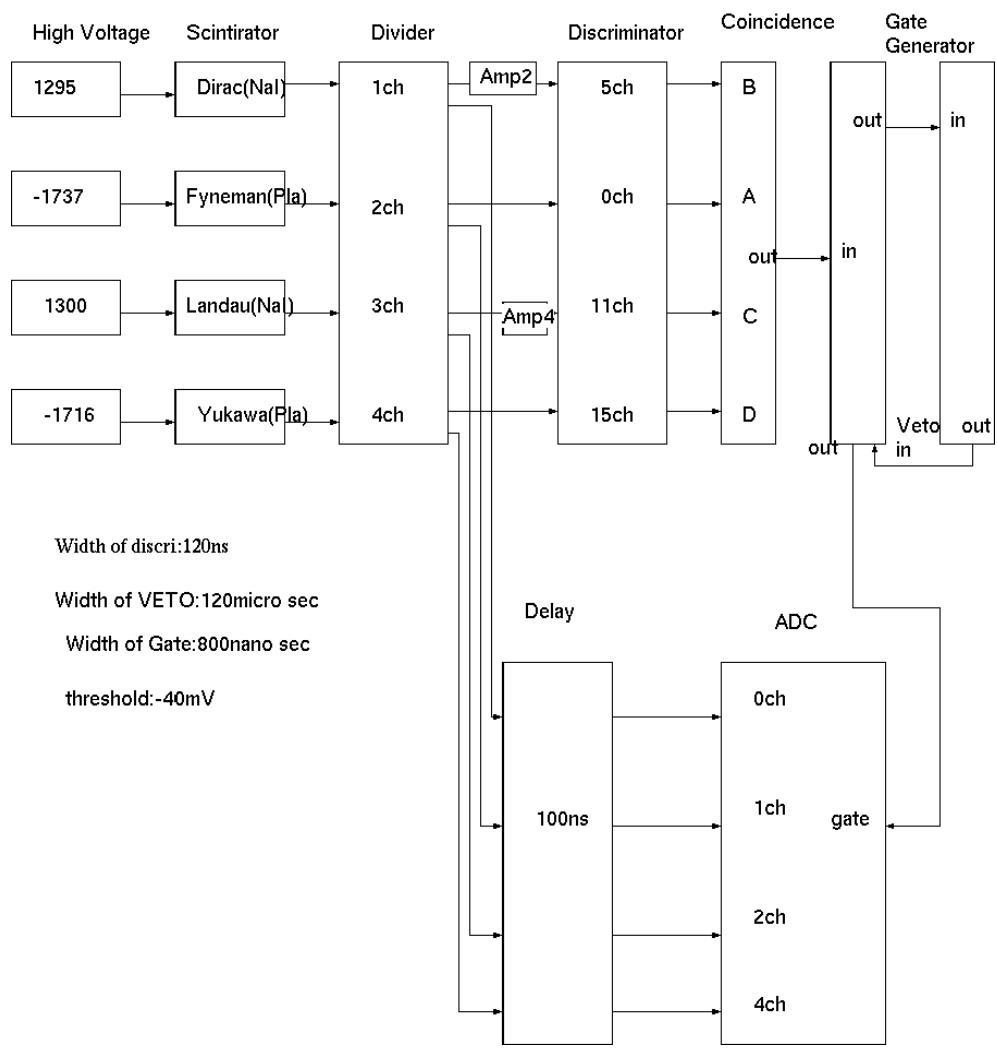


图 3.5: 回路图

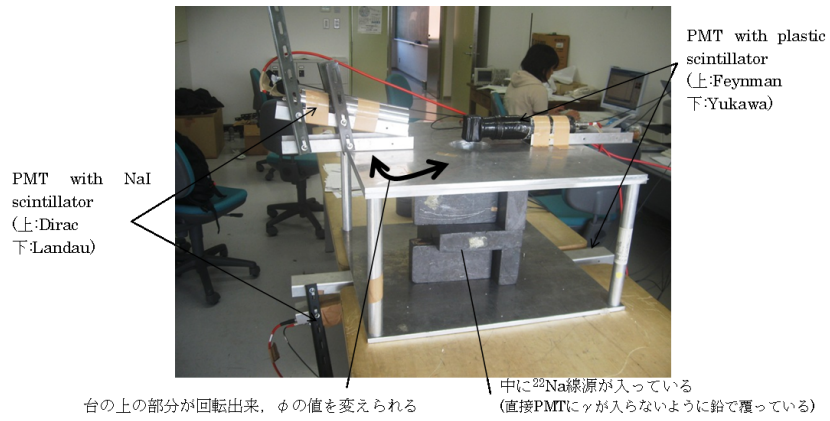


図 3.6: 実験装置全体の様子 ($\phi = 0^\circ$)

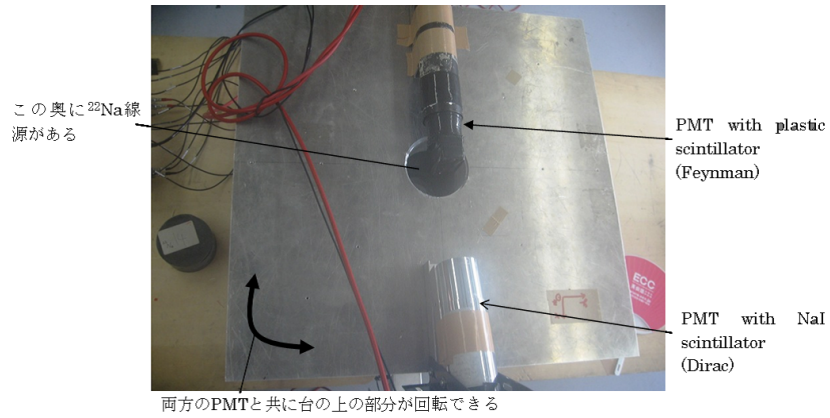


図 3.7: 真上からみた様子

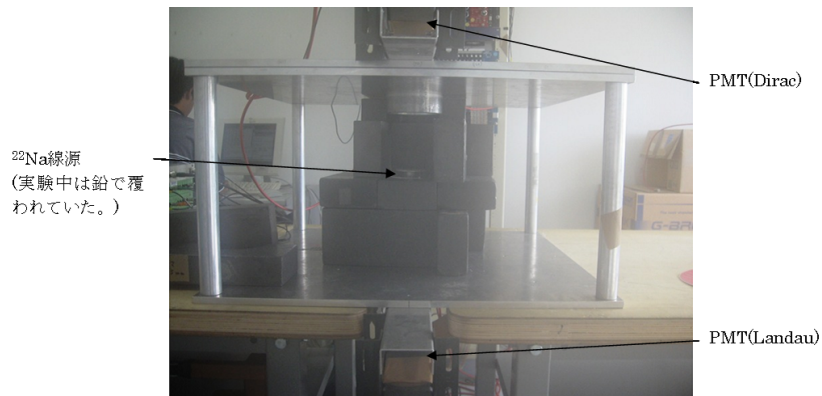


図 3.8: 真横からみた様子 (線源が見えるようにいくつか鉛を除いてある)

3.4 距離を 15cm としたことの理由

線源並びにシンチレータには大きさがあるので、角度揺らぎが生ずる。これは立体角の大きさに起因するものなので、これを減らすためには PMT 間 (NaI シンチレータをつけたものとプラスチック シンチレータをつけたもの) の距離を離すか、もしくはコリメータをつけるかをすればいいが、その分レートが下がるのでどこかで妥協しなければならない。今回の実験ではなるべく角度揺らぎを小さくし、質の良いデータを取ることが求められる。角度揺らぎを小さくするため、実際に距離を離す方法、コリメータを設置する方法のどちらも試してみたが、*symmetry* を確保したままコリメータを設置することは困難であったうえ、データの質があがっているともあまり感じられなかったので、コリメータを設置するという方法はとらないことにした。一方、距離を離す方法に関しては、距離を離すほうが良いが、1 回の測定に 3 日以上かかるのは現実的でない。測定にかかる時間は ϕ の値にも依るので、最も時間がかかる場合でも丸 2 日以内には 1 回の測定が終わるような距離を何度も測定を繰り返すことによって決め、最終的にはシンチレータ間の距離を 15cm に決定した。その他にも、比較的自由に寸法を変えられる NaI シンチレータなどを散乱体として使い、角度揺らぎを減らすことも考えられるが角度揺らぎの減少はレートの減少に直結する。ただ NaI シンチレータの場合は Compton 散乱に対してプラスチックシンチレータの約 2 倍の質量減衰定数をもつため、Compton 散乱はされやすくなる。光電吸収も起こることになるがこちらはコインシデンスをとれば消えることが予想されるので、使用することも出来るかもしれないが、密度が高く多重散乱を起こすことが考えられるので、そうなる散乱された後の γ 線のエネルギーを判定しにくくなり、散乱体としてはあまりふさわしくないとされる。

さて、距離が 15cm のときの角度揺らぎは概算すると、 θ では $\pm 25^\circ$ 、 ϕ では $\pm 16.7^\circ$ ほどになる。この角度揺らぎによって、レートは一定とならず幅を持ち、 ρ の値は理論値とは変わってしまう (式 2.17, 式 2.18 参照)。次節で述べるように ρ の値が最も大きいのは $\theta = 81.4^\circ$ のときであり、そこからずれば下がってしまう。 θ 、 ϕ の揺らぎによってどのくらい ρ の値が下がってしまうかを、式 (2.18) から求まる ρ の値を、それぞれ $\theta = 80^{circ}$ 、 $\phi = 90^{circ}$ と一方の値を固定したうえでもう一方の角度揺らぎの範囲で積分することで大まかに定量した (図 3.9, 図 3.10)。しかし、実際には両者が同時にゆらぐ上、線源の大きさによるゆらぎなども入ってくるため正確な定量は難しい。そこで後の第 5 章で述べるとおり、シミュレーションにより、より正確な定量を試みた。

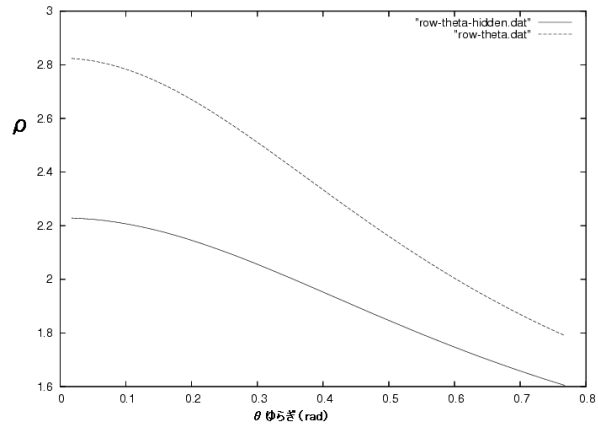


図 3.9: θ ゆらぎによって下がる ρ の値 (上...量子力学, 下...隠れた変数理論)

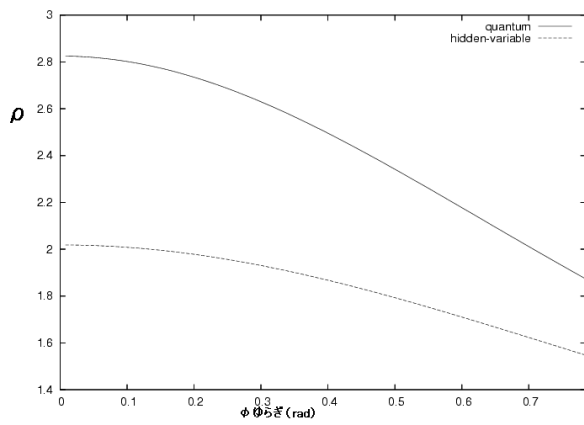


図 3.10: ϕ ゆらぎによって下がる ρ の値 (上...量子力学, 下...隠れた変数理論)

3.5 $\theta = 80^\circ$ にしたこと理由

第2章で述べた ρ の値は θ によって大きく変わる (図 3.11) . θ の値が小さい程, 量子力学と隠れた変数理論の両方に於いて ρ の値は 1 に近づき, 両者の差は見えにくくなる. 最も両者の差が顕著になるのは $\theta = 81.4^\circ$ の場合である. 一方, Klein-仁科の微分断面積の公式 (2.16) に拠ると θ の値が小さい程レートは高くなる (図 3.12) . 従って, θ の値をある程度小さくすることでレートを上げ, その分だけ PMT の距離を離して角度揺らぎを小さくすることも可能である. しかし, 始めは $\theta = 90^\circ$ で実験を行っていたが, これでも比較的揺らぎが大きく, もともと量子力学と隠れた変数理論の差が見えにくかった. また θ を小さくしてレートがあがったところで, 距離を少し離すと大きくレートが落ちるため (4 つの PMT でコインシデンスをとっているため), それに見合うだけ揺らぎが小さくなることはあまり望めない. 更に, 揺らぎによる効果はシミュレーション等である程度予測することが可能であるため, 本実験に於いては量子力学と隠れた変数理論の差を出るだけわかりやすくすることを重視した. $\theta = 81.4^\circ$ に正確に設定するのは困難と考え、最終的には $\theta = 81.4^\circ$ に近く, 合わせやすいと思われる $\theta = 80^\circ$ で測定を行うこととした.

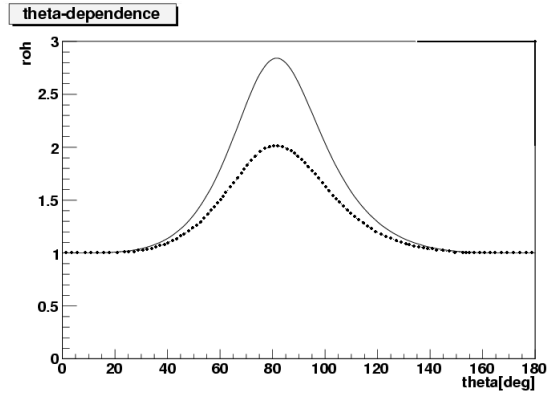


図 3.11: ρ の θ 依存 (上...量子力学、下...隠れた変数理論)

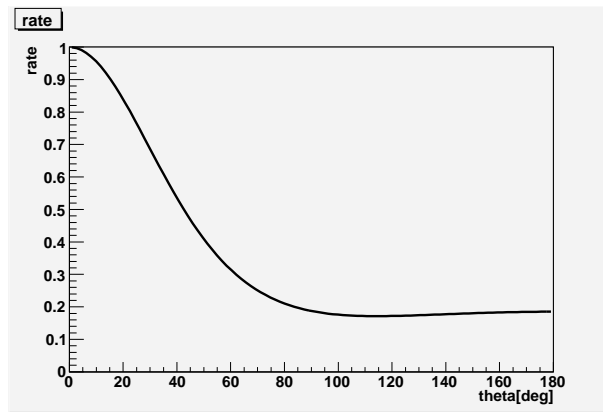


図 3.12: レートの θ 依存

第4章 実験データの解析

今回の実験に必要な測定は第2章で述べた通りレートの測定であり、その測定に使用する機器については第3章で述べた。それらの機器から実際に得られる値は、PMTの前面に取り付けたシンチレータに入ってきた高エネルギーの γ 線がエネルギーの小さな光子へと、そして光電面で光電子へと変換されダイノード内で増幅されたものを0.25pcで割ったADC channelの値である。つまり1回のコインシデンスに対して、4つのPMTに落とされたエネルギーに対応するADC channelの値が得られるわけである。レートを知るためにはコインシデンスの回数を測定時間で割ってやればよいわけだが、環境放射線や宇宙船等が4つのPMTでコインシデンスをとっても入り込んでしまう場合がある。我々が知りたいのはポジトロニウムの崩壊による 2γ のコインシデンスのレートであるから、それ以外に由来するものは取り除かねばならない。コインシデンスを起こしたのかが何であるかは4つのPMTに落とされたエネルギーを調べることである程度決定することが出来る。

4.1 calibration

ADC channelの値は入ってきた γ 線のエネルギーの値に対応しており、一次関数になっている。そのパラメータは、使用したADCの入力端子やPMTがそれぞれで個々に違っているため、4つ全てで測る必要がある。それぞれのPMTで、ある決まったエネルギーの γ 線を測り、その結果として得られるADC channelの値がいくらであるかを調べた。使用した γ 線は、

$$551\text{keV} ({}^{22}\text{Na}) \text{ Na}, 662\text{keV} ({}^{137}\text{Cs}), 1275\text{keV} ({}^{22}\text{Na})$$

である。第3章で述べたように、シンチレータがNaIシンチレータの場合には上記のようなエネルギーの γ 線はCompton散乱も光電吸収も起こすが、プラスチックシンチレータの場合にはCompton散乱しか起こさないといいよい。光電吸収が起きれば入ってきた γ 線のエネルギーは全てシンチレータに落とされるが、Compton散乱が起きれば、光子のエネルギーは散乱される方向によってシンチレータに落とされるエネルギーは変わり、それは以下の

式に従う:

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)} \quad (4.1)$$
$$\gamma = \frac{h\nu}{m_e c^2}$$

$h\nu$: 入ってきた γ 線のエネルギー

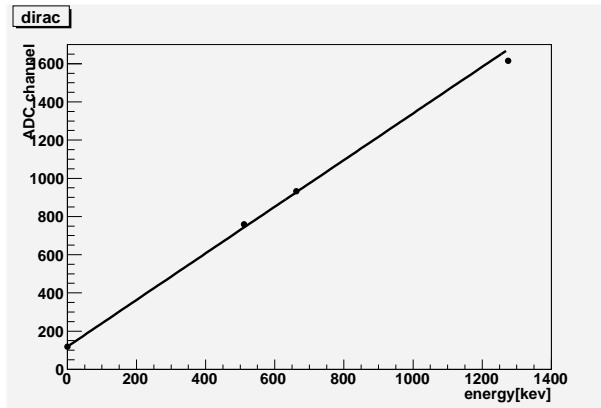
$h\nu'$: 散乱された γ 線のエネルギー

また, シンチレータに最もエネルギーを落とすのは光子が後方に散乱される場合で, この時のエネルギー値が Compton edge となる.

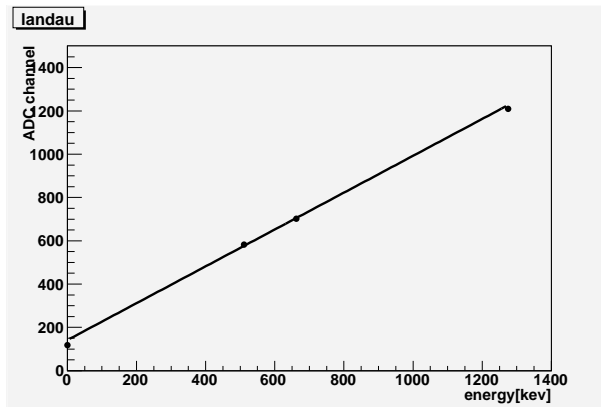
$$T_{\max} = h\nu - h\nu'_{\theta=180^\circ} = h\nu \left(\frac{2\gamma}{1 + 2\gamma} \right) \quad (4.2)$$

光電吸収が起こる NaI シンチレータの場合は, エネルギースペクトルに光電ピークがはっきり現れるので, そこに gaussian をフィットし, ピークの値, エラーの範囲を得ることで信頼できる calibration が行える. しかし, プラスチックシンチレータの場合は Compton 散乱のみとなるので, calibration に用いることの出来る値は Compton edge になるが, シンチレータの状態や, 光電面で光子から光電子への変換等に起因する resolution により Compton edge はエネルギースペクトルに於いてははっきりと現れずぼけてしまい, エッジのピークは若干小さいほうにずれてしまう. 今回の実験では厳密なエネルギー値が必要, というわけではない. Compton edge に gaussian をフィットしてピークから 1σ の値を Compton edge と考え大まかに calibration を行った.

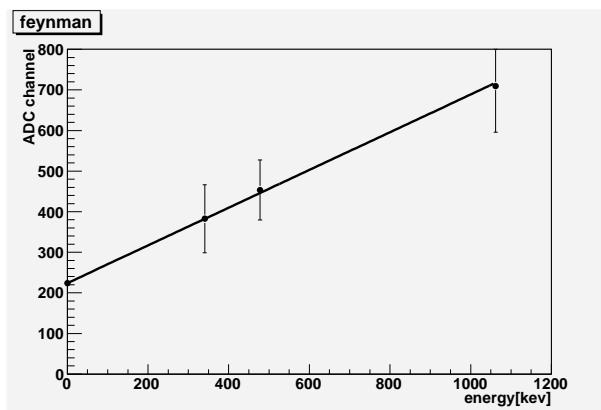
以下に calibration の結果, 及びその calibration を用いて得られたエネルギースペクトルを載せる (図 4.1-図 4.10). 但し Yukuwa の calibration (図 4.4) に関しては 2 次元のエネルギースペクトル (図 4.10) と照らし合わせたところ, 50keV ほどずれているものと思われる. Yukawa に関するエネルギースペクトル (図 4.8, 図 4.10) についてはエネルギー値から 50keV 差し引いて考える必要があるかもしれない.



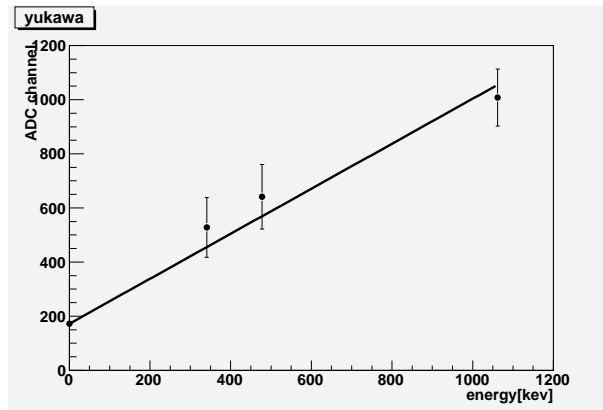
☒ 4.1: calibration (dirac)



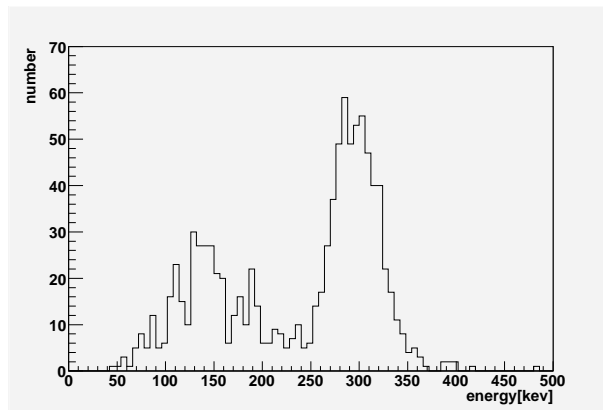
☒ 4.2: calibration (landau)



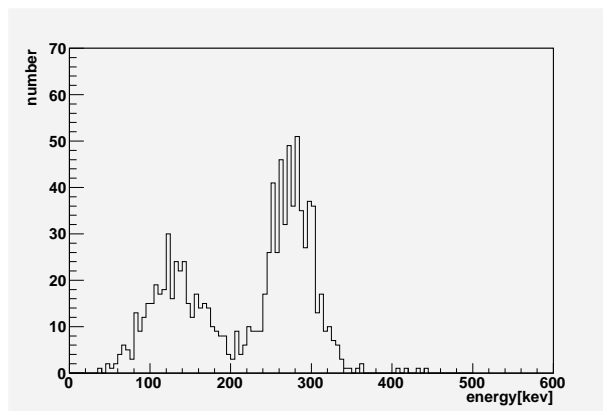
☒ 4.3: calibration (feynman)



☒ 4.4: calibration (yukawa)



☒ 4.5: エネルギースペクトル (dirac)



☒ 4.6: エネルギースペクトル (landau)

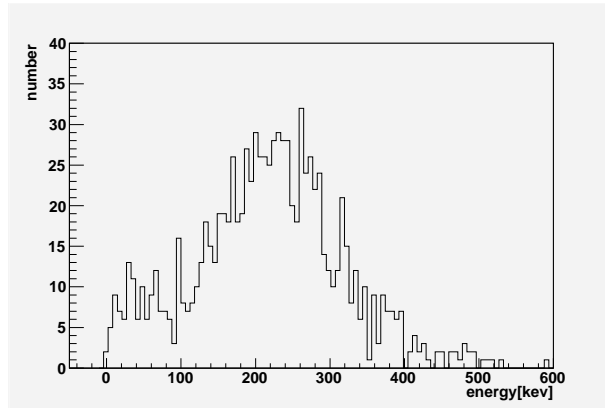


図 4.7: エネルギースペクトル (feynman)

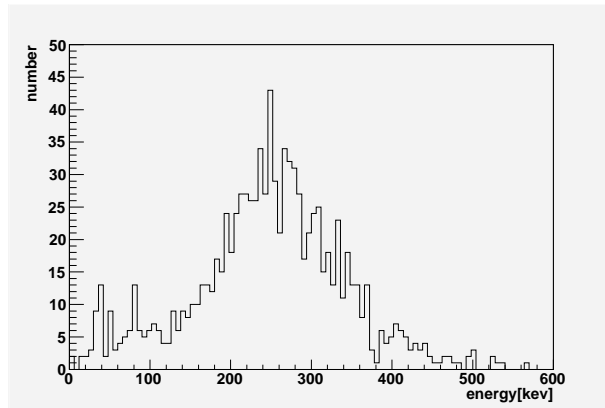


図 4.8: エネルギースペクトル (yukawa)

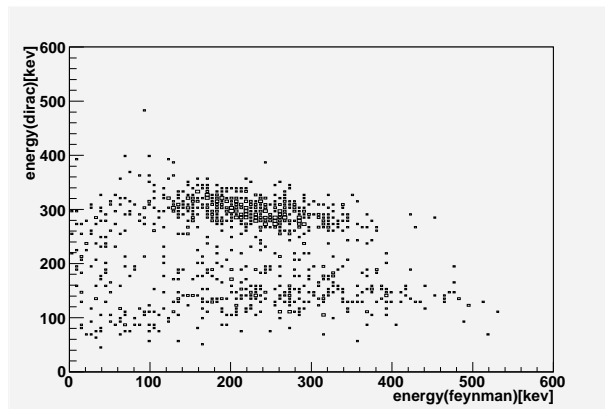


図 4.9: 二次元エネルギースペクトル (dirac-feynman)

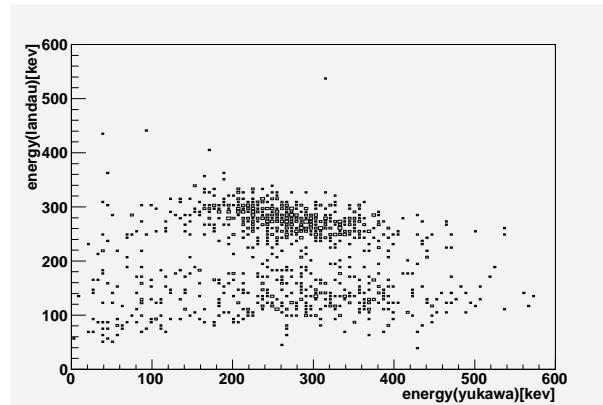


図 4.10: 二次元エネルギースペクトル (landau-yukawa)

4.2 使用した data 範囲

calibration を用いて得られたエネルギースペクトルをもとに，ポジトロニウムからの 2γ だとわかるものとして，プラスチック シンチレータで Compton 散乱し，NaI シンチレータで光電吸収されているもののみを取り出した．NaI シンチレータは $\theta = 80^\circ$ の位置に置かれていることから，散乱された後に NaI シンチレータに入ってくる γ 線は式 (4.1) より，

$$279[\text{keV}] = \frac{511[\text{keV}]}{1 + \gamma(1 - \cos 80^\circ)}$$

また，4 つでコインシデンスをとった場合，プラスチック シンチレータに落とされるエネルギーは，

$$232[\text{keV}] = 511[\text{keV}] - 279[\text{keV}]$$

ただし第 3 章の角度揺らぎの項目で述べたように，検出器や線源の幅等による揺らぎが存在するのでその分を考慮に入れる必要がある．シミュレーションについては第 5 章において詳しく述べるが，Set up を考慮に入れたシミュレーションの結果，NaI シンチレータに入る γ 線のエネルギーは約 230keV から約 370keV，プラスチック シンチレータに落とされるエネルギーは約 140keV から約 280keV となることがわかる (ここで使ったプログラムは第 5 章で述べるものと同様アルゴリズムのプログラムに，得られた光子の散乱方向を式 (4.1) に代入してエネルギー値を求めさせる部分を加えたもの)．NaI シンチレータに於いて光電吸収されれば全エネルギーが落とされるため，NaI シンチレータのエネルギースペクトルを見ると丁度その辺に光電ピークが現れる．もちろん NaI シンチレータに入ってくる γ 線は Compton 散乱も起こすが，この場合は NaI シンチレータに Compton edge 以下のエネルギーなら

どんな値のものでも落とすことになり、落とされたエネルギーが γ 線由来とは断定しにくくなる。また、NaI シンチレータからの信号についてはディスクリミネータに於いてノイズを除外するために -4mV の閾値を設定しており、約 70keV 以下のエネルギーが落とされた場合には測定が行われていない。測定結果に人為的な影響が含まれてはいけないこともあり、Compton 散乱されたものは使用せず光電吸収されたもののみを使用した。

実際に用いたデータは NaI シンチレータのエネルギースペクトルに現れた光電ピークに gaussian をフィットし、 $\pm 3\sigma$ の範囲のものである。プラスチックシンチレータで得られた値に対しては何も制約をつけなかったが、NaI シンチレータで光電吸収されたものはプラスチックシンチレータでは先に述べた約 140keV から約 280keV に更に resolution を考慮に入れた約 80keV のから約 370keV の範囲に入っていることを確認したので問題は無い。

4.3 補正

本実験のセットアップでは、上のプラスチックシンチレータが ϕ の値を変える時、台座と共にまわした分だけ回転してしまう。そうするとプラスチックシンチレータは線源方向に正方形の面を向けているので、線源から出た γ 線が共に上下のプラスチックシンチレータに入ることが出来る面積が変化する（図 4.11）。今回はレートの ϕ 依存性をみたいので、 ϕ 以外の条件をそろえる必要がある。そこで、上下二つのプラスチックシンチレータのみでコインシデンスをとり、レートを測定し、 $\phi = 0^\circ$ の値を 1 として ϕ の変化に対する比率を求めた。この比率で測定されたレートの結果を割ることでたとえセットアップがほんの少しずれていたとしてもそれをも含めて補正することが出来る。

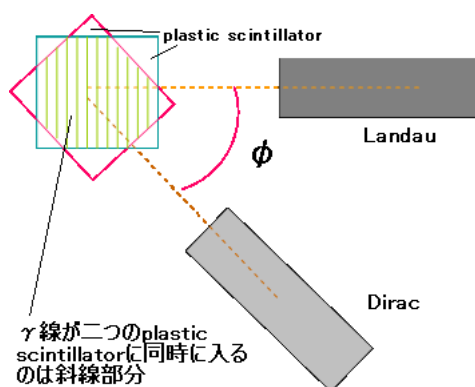


図 4.11: ϕ が変わるとそれに応じて有効なプラスチックシンチレータの面積は変化する（上から眺めた図）

第5章 結果・考察

5.1 測定結果

測定結果を以下の表にまとめた。

ϕ	有効 data 数	計測時間	レート 補正前 [mHz]	比率 (補正用)	レート 補正後 [mHz]
0°	321	45h23m30s	1.96 ± 0.11	1	1.96 ± 0.11
22.5°	300	32h00m29s	2.60 ± 0.15	0.99 ± 0.0104	2.62 ± 0.15
45°	321	30h24m34s	2.85 ± 0.16	0.98 ± 0.0104	2.90 ± 0.16
67.5°	336	24h29m29s	3.81 ± 0.21	1.0046 ± 0.0106	3.79 ± 0.21
90°	763	25h01m06s	4.30 ± 0.15	1.0208 ± 0.0107	4.21 ± 0.15
135°	353	30h18m17s	3.23 ± 0.17	0.988 ± 0.0104	3.26 ± 0.17
180°	269	40h41m45s	1.89 ± 0.081	1.0025 ± 0.0105	1.88 ± 0.083
270°	366	24h26m27s	4.16 ± 0.22	0.99 ± 0.0105	4.20 ± 0.22

これより求まる ρ の値は,

$$\rho = \frac{R_{\phi=90^\circ}}{R_{\phi=0^\circ}} = 2.14 \pm 0.142 \quad (5.1)$$

また, 得られたレートをプロットし, 第2章で述べた理論に基づく以下の式をフィットした (図 5.1) .

$$\text{rate} = p_1 \left(1 - k \left(\frac{\sin^2 80^\circ}{\gamma - \sin^2 80^\circ} \right) \right) \quad (5.2)$$

$$\gamma = \frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu}$$

p_1 : parameter (3.08 ± 0.05)

その結果求まった k の値は,

$$k = 0.7645 \pm 0.0385 \quad (5.3)$$

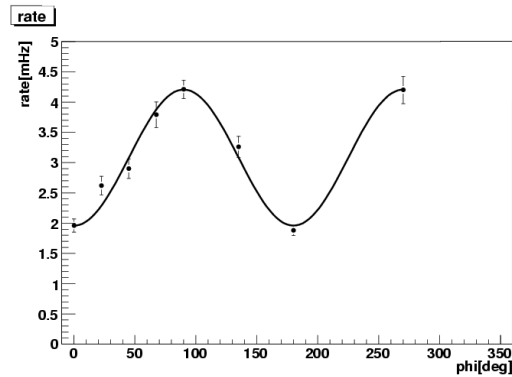


図 5.1: レートの測定結果 $\frac{\chi^2}{\text{NDF}} = 1.32$

5.2 シミュレーションによる実験結果の考察

これまで述べてきたように、本実験の実験装置は理想的なものではなく、検出器が有限の大きさを持っているため理論計算のように θ や ϕ を 1 つ値に絞ったような状況を再現することは不可能であり、必ず設定した角度からある程度のばらつきを持って散乱されたものを検出することになる。従って、得られた実験結果を θ や ϕ の値を 1 つに絞って計算した理論の予測と単純に比較することは出来ない。実際、測定結果から求めた $\rho = 2.14 \pm 0.142$ (式 5.1) は量子力学の理論から予測される ρ の値は式 3.1 より $\rho = 2.82$ から随分ずれていて、むしろ同様にして出される隠れた変数理論からの理論値 $\rho = 2.03$ に近いものとなっている。そこで角度揺らぎによる効果で測定結果と理論値のずれがどれくらい生じるのかを計算し、実験で得られた結果が妥当なものであるかどうかを検証する必要がある。

例えば、 $\phi = 0$ と $\phi = \pi/2$ の時のレートの比 ρ について考えてみれば、角度のばらつきを持っている場合は、 ρ の θ と ϕ に対する依存性は

$$\rho = 1 + \frac{2k \sin^4 \theta}{\gamma^2 - 2\gamma \sin^2 \theta + (1 - k) \sin^4 \theta} \quad (5.4)$$

で与えられることがわかっているので、これに適当な重みを付けて検出器の表面にそう立体角で積分することで実験と同じ状況を作ることが出来る。実際、重みをつけずに積分を行って ρ の値が角度揺らぎの効果によってどの程度変化するかを大まかに見積もった (図 3.9, 3.10 参照) しかし、これらの評価は実験結果とは一致しておらず、結果を説明するみは不十分である。このためには重みをつけて、 $\theta \cdot \phi$ の両方について積分せねばならないが、重みをどう付けるかや積分範囲を正確に定めることが困難であるため、この方法

で角度揺らぎによる値の変化を正確に見積もることは難しい。

そこでここでは、なるべく実際の実験に近いモデルを作り、これをコンピュータ上で再現させるという方法、即ちコンピュータプログラムによるシミュレーションによって、得られた実験結果が妥当なものであるかどうかを判断することにする。

又、シミュレーションに於いては k の値を変えることにより量子力学($k=1$)と隠れた変数理論($k < 1/\sqrt{2}$)を区別することが出来る。よって、これら2つの場合のシミュレーションを行い、実験結果がどちらのシミュレーションの結果に近いかを判定することで、この実験のテーマである、「自然は量子力学に従っているのか、それとも隠れた変数理論に従っているのか」を結論づけることが可能である。

5.2.1 プログラムの概要

^{22}Na 線源は大きさを持っているのでそのどこでポジトロニウムが崩壊して 2γ が飛び出すか、そしてその γ がどの方向に飛び出すか、更にプラスチックシンチレータに入ってからどれだけ走ってCompton散乱されるのか等は、確率によって決まっているため、各プロセスで乱数を発生させて γ の動きを決め、それを追っていくという方法、即ちモンテカルロ法によるシミュレーションを行う。

back to backに出た 2γ の両方がプラスチックシンチレータでCompton散乱されてNaIシンチレータに入れば1回コインデンスしたとカウントし、全試行回数中、何度コインデンスするかを求める。

このプログラミングにはC言語を用いた。

5.2.2 プログラムのアルゴリズム

シミュレーションで用いたプログラムのおおまかなアルゴリズムについて解説する。

座標は線源の中心を原点と、直方体のプラスチックシンチレータの中心のある方向を z 軸とし、 xy 平面はその底面と平行であるとする。

まず、 ^{22}Na 線源から飛び出す γ 線の方向を、ランダムに与える。この際、プラスチックシンチレータのある方向を z 軸とする極座標での $\cos\theta$ と ϕ の値を一様乱数で与え、その方向ベクトルを定める。また、線源は xy 平面内の半径0.5cmの厚みの無い円盤であるとし、その中のランダムな場所(これも乱数を用いて決定する)を起点とする。

以上で線源から飛び出した γ 線の軌跡が定まるので、 z 座標がプラスチックシンチレータの底面に達した時の x, y 座標がわかる。これより、 γ 線がプラスチックシンチレータの底面に入るかが判定出来る。入らない場合

は、処理を終了して次の試行に入る。

シンチレータ内では γ 線は走った距離の exponential に従って減衰する。プラスチックシンチレータでの γ 線の起こす反応は殆んど Compton 散乱だけであるので、このことから乱数によってどれだけ γ 線がプラスチックシンチレータ内を走るかを決め、この距離から散乱される位置の座標を求める。この座標がプラスチックシンチレータの外であれば、 γ 線はプラスチックシンチレータを通り抜けたことになるので、先と同様に処理を終了して次の試行に移る。

両方の γ 線について Compton 散乱すれば、次は各々の γ 線について Klein-仁科の微分断面積の公式 (2.16) により散乱される方向を定める。 η は偏極平面と散乱された γ 線のなす角である。

先ず一方の γ 線 (A) について、そのスピン (= 偏極方向) ± 1 を等しい確率で割り振り、式 (2.16) を ϕ の全範囲で積分した式より逆関数法で θ を決め、更に式 (2.16) にその θ の値を代入した式から ϕ を出す。ここで始めに決めたスピンの値が $+1$ であればそのまま、 -1 であればその値に $\pi/2$ を加えたものを改めて ϕ の値とする。この段階では ϕ 方向にはどこも等しい確率で散乱される。

最後にもう一方の γ 線 (B) について、散乱される方向を決め、散乱された各 γ 線に対して NaI シンチレータに入るかどうかを判定する。先ず B のスピンの方向を決定する。A, B のスピンには第 2 章で述べたように式 (2.13) のような相関があるので、この相関を満すような確率で ± 1 を決めた上で、 θ , ϕ について上と同様に定める。

これで A, B 両方の γ 線について Compton 散乱された後に飛んでいく方向の方向ベクトルを定めることが出来たので、座標の回転等を用いて一番最初と同様に NaI シンチレータに入るかどうかを判定し、両方入ればコインシデンス 1 回とカウントし、片方でも入らなければ処理を終了して新しい試行に移る。

5.2.3 逆関数法について

プラスチックシンチレータで γ が Compton 散乱されるとき、その方向は Klein-仁科の微分断面積の公式によって決まる。即ち、微分断面積の値がその方向に散乱される確率を表している。このように一様でない、連続な値をランダムに与えるために逆関数法を用いる。

逆関数法とは、簡単のため 1 変数の場合を考えると、 $[x_1, x_2]$ で定義された確率密度関数 $f(x)$ (規格化されているものとする) が与えられたとき、その積分

$$F(x) = \int_{x_1}^x f(t) dt \quad (5.5)$$

を考えると、 $0 \leq F(x) \leq 1$ であるから、 $[0, 1]$ の範囲で一様乱数を発生させ

(今これを仮に a_0 とする),

$$F(x) = a_0 \quad (5.6)$$

なる x の値を返せば, $f(x)$ によって与えられた確率分布を反映した値が得られるというものである.

更に $F(x)$ の逆関数が求めれば, 0-1 乱数をその逆関数に代入すれば, 一様でない分布に対しても容易に乱数を得ることが出来る.

例えば, シミュレーションでは線源を半径 0.5cm の円盤であると仮定しているが, その円盤の中から 1 点をランダムに選ぶに際し, 極座標で考えて r 方向, θ 方向でそれぞれ値を与える場合, θ 方向に関しては一様だが, r 方向については, 半径に比例して円周も大きくなるので, r の値をとる確率もこれに比例して大きくなる. 即ち, $[0, 0.5]$ の範囲で r の値を与えるとすると, その確率密度関数 $f(r)$ は, 規格化も考えて

$$f(r) = 8r \quad (5.7)$$

となるので, 0 から r までこれを積分すると

$$F(r) = \int_0^r f(t) dt = 4r^2. \quad (5.8)$$

これは簡単に逆関数が求まる. 即ち 0-1 乱数 a_0 に対して,

$$r = \frac{\sqrt{a_0}}{2} \quad (5.9)$$

とすれば, 円盤全体で一様な確率で点をランダムに点を選ぶことが出来る.

これは逆関数が簡単に求まったが, Klein-仁科の微分断面積のように式が複雑になると, 簡単には逆関数が求まらないので, そのような場合は式 (5.6) に於いて Newton 法で対応する x の値を求める.

5.2.4 シミュレーションの結果

ϕ の値をいろいろ変えてプログラムを何度も走らせ, 結果得られた数値を表 5.1・5.2 にまとめる.

ϕ_0 は 2 つ NaI シンチレータのなす角, レートは, 散乱された 2γ が両方の検出器に入る回数を試行回数で割ったものである.

またシミュレーションから出された新たな ρ の値は

$$\rho_{\text{測定結果}} = 2.14 \pm 0.142$$

$$\rho_{\text{量子力学}} = 2.13 \pm 0.083$$

$$\rho_{\text{隠れた変数理論}} = 1.70 \pm 0.077$$

となっており, 測定結果が量子力学から求まる ρ の値とほぼ一致している.

これらのデータについての解析は次の結論の章で行う.

ϕ_0	レート
0	$(4.30 \pm 0.13) \times 10^{-6}$
$\pi/8$	$(4.90 \pm 0.16) \times 10^{-6}$
$\pi/4$	$(7.22 \pm 0.17) \times 10^{-6}$
$3\pi/8$	$(9.18 \pm 0.22) \times 10^{-6}$
$\pi/2$	$(9.93 \pm 0.20) \times 10^{-6}$
$3\pi/4$	$(6.96 \pm 0.19) \times 10^{-6}$
π	$(4.28 \pm 0.15) \times 10^{-6}$
$3\pi/2$	$(9.77 \pm 0.23) \times 10^{-6}$

表 5.1: 量子力学 ($k = 1$) の場合のシミュレーション結果

ϕ_0	レート
0	$(5.27 \pm 0.19) \times 10^{-6}$
$\pi/8$	$(5.93 \pm 0.23) \times 10^{-6}$
$\pi/4$	$(6.85 \pm 0.21) \times 10^{-6}$
$3\pi/8$	$(8.88 \pm 0.30) \times 10^{-6}$
$\pi/2$	$(9.01 \pm 0.25) \times 10^{-6}$
$3\pi/4$	$(7.93 \pm 0.28) \times 10^{-6}$
π	$(4.91 \pm 0.22) \times 10^{-6}$
$3\pi/2$	$(9.17 \pm 0.30) \times 10^{-6}$

表 5.2: 隠れた変数理論 ($k = 1/\sqrt{2}$) の場合のシミュレーション結果

5.3 その他の考察

5.3.1 得られたデータのうち使用していないものに関して

第4章で述べたが、今回のレートの測定に於いて使用したのは得られたデータのうちの一部分である。ここではそれ以外のものについてその由来を考えたいと思う。まず第4章で掲載した二次元エネルギースペクトル(図4.9, 図4.10)に図5.2, 図5.3のような領域 area1 から area6 までを設ける。ちなみに area1 はレートの測定で使用した範囲とほぼ重なっている(Yukawa については、使用するデータ範囲は第4章で述べたように NaI シンチレータの光電ピークの値を基準に決定しており、Yukawa の calibration に関係なく決まっているので 50keV ずらした境界線を用いた場合とほぼ重なっている)。

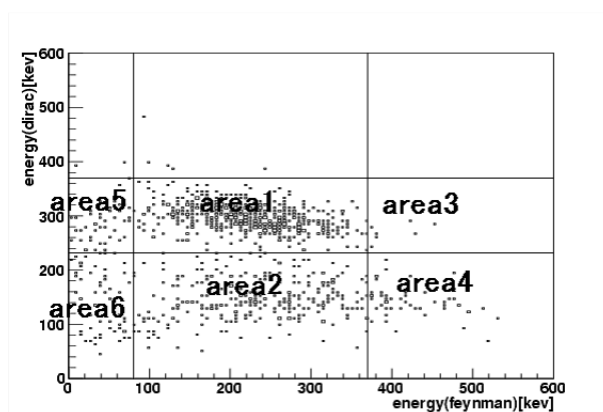


図 5.2: 二次元エネルギースペクトル (dirac-feynman)

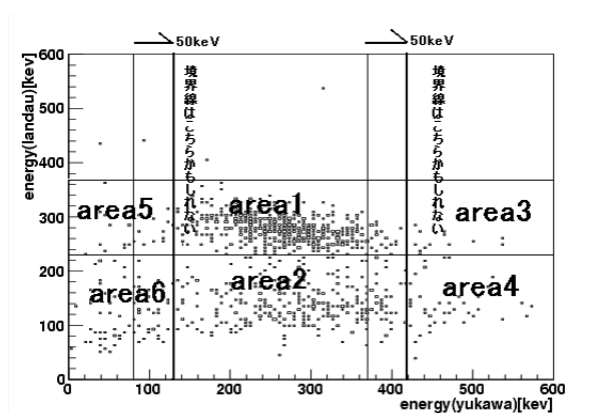


図 5.3: 二次元エネルギースペクトル (landau-yukawa)

area2 まず、使用はしなかったが一応由来がわかっているものとして、NaI シンチレータに約 220keV 以下のエネルギーを落とし、プラスチック シンチレータに約 80keV から約 370keV のエネルギーを落としているものに関しては、ポジトロニウムからの 511keV の 2γ がプラスチック シンチレータ、NaI シンチレータの両方の PMT で Compton 散乱したものと考えてよいだろう。220keV の数字については、NaI シンチレータに入るものうち最も大きなエネルギーは第 4 で述べたとおり約 370keV であるから、この Compton edge を式 4.2 から求めたときの値である。この範囲にあるものと、レートの測定で使用した area1 とが、本実験においてまず得られるであろうと予測される 511keV の γ 線由来のデータである。

図にはない部分 次に上に掲載したエネルギースペクトルの図では除かれているが、1MeV から 3MeV ほどの大きなエネルギーを落としているものがどの PMT にも 2% から 3% 存在している。最小電離粒子の損失エネルギーが (約 1.5MeV) \times (シンチレータの密度) \times (粒子の通過したシンチレータの厚さ) であることから、これは宇宙線が偶然コインシデンスしているところに入り込んだものと思われる。

area4 プラスチック シンチレータに 370keV から 550keV ほどのエネルギーを落とし、NaI シンチレータに 200keV までのエネルギーを落としているものが延べ 8.5% ほど存在している (図 4.9, 図 4.10 参照)。但し、上下の PMT の組において同じようにエネルギーを落としているわけではなく、上のプラスチック シンチレータと NaI シンチレータの組 (Dirac-Feynman) でのデータ点が上述のような area4 の場合は、下の組 (Landau-Yukuwa) では先に述べた、本実験においてまず得られると予測される area1 もしくは area2 となっている。同様に下の組が area4 である場合は、上の組は area1 もしくは area2 となっている。前者、後者共に 4% 強をあわせると 8.5% ほどである。このようなデータの由来についてまず、 ^{22}Na 線源からほぼ同時に出ると考えてよい 1275keV の γ 線が関わっているのではないかと考えた。1275keV の γ 線が 511keV の γ 線と同様にプラスチック シンチレータで散乱され NaI シンチレータに入ったとすると、511keV と同様に求めるとプラスチック シンチレータに落とされるエネルギーは 720keV から 940keV となるのでこれは当てはまらない。ただ 1275keV が NaI シンチレータに入らなくとも 511keV によってコインシデンスが起こっている場合はこの値以外のエネルギーも落ちる。ここで問題となっているエネルギー値はプラスチック シンチレータでは 370keV から 550keV である。この場合は 511keV の γ 線も入っていると考えられるので、その分を差し引くと由来が不明な分のエネルギーは 0keV から 180keV ほどである。この範囲のエネルギーを 1275keV の γ 線がプラスチック シンチレータに落とすためには $\theta = 20^\circ$ 以下の角度で散乱しなければならない。ここで図 3.12 を見ると確かに θ の値が小さいほどレートは高くデータ

点の個数は多くなりはするが、 $\theta = 0^\circ$ と $\theta = 20^\circ$ とではレートの比は 1:0.85 といったところである。しかし 370keV から 550keV の範囲データ点を見ると個数が少ないのでなんとも言えないが、370keV から 550keV までこの比以上の差で数は減っている。また、550keV より高いエネルギーのものもレートの減少に比例していくつかあってもよいと思われるがそれらしきものは無いように思われる。また area3 に注目してみるとここにも少しデータ点が存在している。今考えているような状況であれば、NaI シンチレータには 1275keV とは関係無しに 511keV がプラスチック シンチレータで散乱されているものが入っているはずなのでそうして入った γ 線はランダムに光電吸収されたり、Compton 散乱されたりする。area3 は NaI シンチレータでは光電吸収されている部分なので、area3 と area4 とのデータ点が 1275keV によるものならば両者の個数の比は NaI シンチレータに 230keV 前後 (511keV が $\theta = 80^\circ$ 方向に散乱された場合の値) の γ 線が入ったときに光電吸収をするか Compton 散乱をするかの比に近いものとなると考えらるが、area3 と area4 の比はおよそ 1:6 であり、他方光電吸収が起きる確率と Compton 散乱が起きる確率との比は NIST のデータベースによれば 230keV でおよそ 10:7 であることから、511keV がコインシデンスを起こしたところに 1275keV が偶然にプラスチックシンチレータにあたりエネルギーを落としていった、ということではなさそうだ。結局よくわからなかった。

area6 area6 にもデータ点が集まっている。特に NaI シンチレータに 100keV 以下の、プラスチック シンチレータに 80keV 以下のエネルギーを落としているもの (約 2%) は、実験の当初より由来がわからず悩んでいたものである。この部分は area2 や area4 で測定されているものより NaI シンチレータに落とされるエネルギーが小さい。エネルギーの小さいものに対しては閾値で切っているので、ある一定エネルギー以下のものについては一様に測定されないはずであるが、この領域にあるものだけは他の領域で測定されるものより小さい値を落としているものが明らかに多い。下の組でこの部分にあるものは上の組では area5 で測定されているものが多い。又上の組でこの部分にあるものは下の組では area1, area2, area5 および area6 にあまり特徴なく存在している。落とされたエネルギーは小さいので、両シンチレータの端を掠めて飛んでいった可能性もあるが、この領域もよくわからないままである。

第6章 結論

図 6.1 に前章のシミュレーションの結果を示す．ここで，シミュレーションの結果は量子力学の場合，隠れた変数理論の場合それぞれにつき式 (5.3) をフィットした時 $\cos(2\phi) = 0$ となる時の値，すなわちレートの値が k の値によらない $\phi = 45^\circ, 135^\circ$ の時のレートが測定結果のレートと一致するようにスケーリングし直してある（具体的には p_1 の値をそろえた．量子力学と隠れた変数理論であるかの差はこの式においては k の値にのみ現れるので， p_1 の値をそろえるのは差し支えないと考えた）．

実際の実験から得られた測定結果、量子力学に基づくシミュレーションの測定結果、並びに隠れた変数理論に基づくシミュレーションの測定結果から求めた k の値を以下に記す．

実験結果	0.765 ± 0.0385
量子力学	0.837 ± 0.0274
隠れた変数理論	0.588 ± 0.0358

図 6.1 を見ると，測定結果は隠れた変数理論に基づいたシミュレーションの結果より，量子力学に基づいたものに近いものであることが見て取れる．以下で， k の値に関して隠れた変数理論が棄却されることを定量的に示す．

シミュレーション結果は測定結果に対して無視できないほどの誤差を含んでいる．図 6 を見るとわかるように隠れた変数理論のシミュレーション結果と測定結果に関して，gaussian を考えたとき，それぞれ 3σ の範囲を取ると重なっている領域が存在する．そのため，測定結果側に 3σ より大きな値をとる確率は 0.135% であるから，これより大きな値をとることは無いと考え，隠れた変数理論のシミュレーション結果が取り得る最大の k の値を中心から 3σ 離れた点 ($k = 0.6954$) と考え，検定を行う．この値は，測定結果に於いては，中心から 1.81σ 小さい値となる．正規分布の表より， 1.645σ より小さい値をとる確率は 5% である（但し片側だけで考えている）従って今述べた $k = 0.6954$ の値は 5% 以下の確率でしか起こりえないから，隠れた変数理論のシミュレーションは少なくとも 5% の有意水準で棄却される．

この検定は隠れた変数理論のシミュレーション結果で取り得る最大の値に関して行ったものであり，しかも，この周辺の数値をとる確率は極めて低く，実際はより低い危険率で測定結果が隠れた変数理論には従ってはいないという

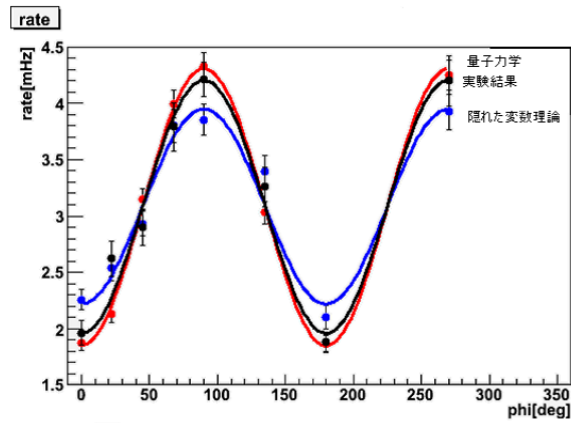


図 6.1: シミュレーションと測定結果のグラフ . シミュレーションの結果は測定値のスケールに直してある .

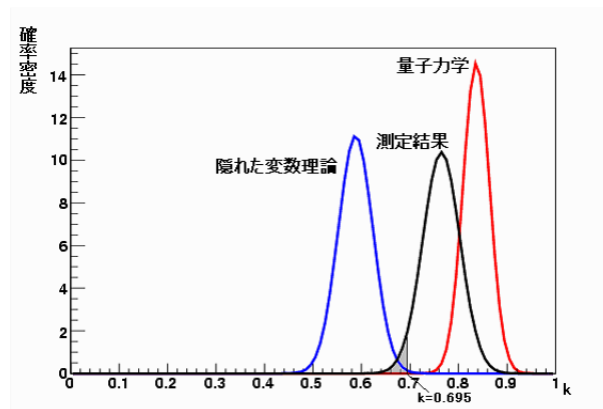


図 6.2: シミュレーション , 測定結果から求めた k の値の gaussian を考えたもの

ことが出来るであろう .

以上の点を踏まえ , 本実験結果から , 自然は隠れた変数理論ではなく量子力学に従っている , と結論付ける .

第7章 謝辞

半年間の長きに亘って本課題演習に於ける理論・実験について様々な指導をしてくださった南條先生，笹尾先生，そしてTAの塩見さんに心から感謝いたします．