

確率現象をめぐって

尾上 わか奈 , 角田 智幸 , 服部 泰佑 , 浜口 直孝 , 村上 亮

平成 19 年 10 月 19 日

目次

第 1 章	実験動機	1
1.1	隠れた変数理論	1
1.2	ベルの不等式	1
第 2 章	実験方法	3
2.1	ベルの不等式の破れ	3
2.2	隠れた変数理論による相関の限界	5
2.3	実験による検証	6
第 3 章	Setting	9
3.1	概論	9
3.2	信号処理系	12
3.2.1	amp	12
3.2.2	coincidence	13
3.2.3	discriminator	13
3.2.4	high voltage	13
3.2.5	gate generator	13
3.2.6	calibration	13
3.3	実験機器の配置	15
3.3.1	角度ぶれとなまし効果	15
3.3.2	設置距離	15
3.3.3	散乱角	15
3.3.4	鉛遮蔽	15
3.4	回転対称性の考察	16
3.4.1	方法	16
3.4.2	結果	16
第 4 章	結果 考察	17
4.1	データ解析	17
4.2	考察	19
4.3	定量的な考察	21
4.4	補足	23
4.4.1	ADC 分布の fitting について	23
4.4.2	simulation の妥当性について	23

第 5 章 Simulation	25
5.1 simulation の手法	25
5.1.1 逆関数法	25
5.1.2 棄却法	25
5.2 simulation の手順	26
第 6 章 Summary	28
6.1 反省	28
6.2 今後の展望	29

概要

本実験では、隠れた変数理論と量子論との決定的な差を示したベルの不等式の検証を行なった。Bell state と呼ばれる状態において、相関を得たところ、ベルの不等式が破られ、隠れた変数理論が棄却された。

第1章 実験動機

この章では、実験の動機について述べる。まずは隠れた変数理論について、量子論と違う点を述べ (1.1 節)、次に両者の矛盾を示すベルの不等式について述べる (1.2 節)。

1.1 隠れた変数理論

量子論は、

すべての物理量が確定値をもった状態は存在しない (測定値は確率的にばらつく)

という考えのもと構築される。これに対して隠れた変数理論では、

すべての物理量は確定値をもつ (測定値が確率的にばらつくときは、制御しきれない変数-隠れた変数が存在する)

と考える。このような考え方は实在論と呼ばれ、ニュートン以来暗に仮定されてきた素朴な考え方である。

このように両者の思想部分には大きな違いがあるものの、測定値が確率的にばらつくことに変わりはなく、単なる考え方の違いにすぎないように思われる。しかし 1964 年、J.S.Bell はついにベルの不等式と呼ばれる不等式により、相関に関して両者の間に食い違いがあることを見出したのである。

1.2 ベルの不等式

ベルの不等式とは、隠れた変数理論により計算される相関(を組み合わせた量)が、必ず満たす不等式のことである。ここで相関には、粒子対の系における、2 地点での物理量の測定値の相関を用いる。また、測定する物理量は、スピンや偏光のように、(適当な単位のもとで) 測定値が +1 または -1 に限られるとする。さらに測定の際に、測定方向など、測定器のパラメータを自由に設定できるとする。このとき、以下のように隠れた変数理論で相関が定式化される。

隠れた変数を λ とする。一方の地点では、パラメータを θ と選んだとしよう。すると測定値は θ と λ 両方の影響を受けるので、 $a(\theta, \lambda)$ と書ける。 λ は測定の度に変化し得るので、測定値 $a(\theta, \lambda)$ は毎回ばらつく。その確率分布を $\{P(\lambda)\}$ とすると、測定値 a の平均値 $\langle A \rangle$ は

$$\langle A \rangle = \sum_{\lambda} P(\lambda) a(\theta, \lambda) \quad (1.1)$$

のように表される。もう一方の地点についても同様に考えて、パラメータを ϕ と選んだとすると、測定値 b の平均値 $\langle B \rangle$ は、

$$\langle B \rangle = \sum_{\lambda} P(\lambda) b(\phi, \lambda) \quad (1.2)$$

であり、従って、2地点の測定値の相関 $\langle AB \rangle$ は

$$\langle AB \rangle = \sum_{\lambda} P(\lambda) a(\theta, \lambda) b(\phi, \lambda) \quad (1.3)$$

となる。

このままではまだ量子論との違いは生じない。そこでパラメータを θ とは別の θ' に時々変えて測定し (ϕ についても同様)、 $\langle AB \rangle, \langle A'B \rangle, \langle AB' \rangle, \langle A'B' \rangle$ を得る。これらを組み合わせて、

$$C = \langle AB \rangle + \langle A'B \rangle - \langle AB' \rangle + \langle A'B' \rangle \quad (1.4)$$

という量をつくると、以下に示すようにこの量は、

$$-2 \leq C \leq 2 \quad (1.5)$$

という不等式を満たす。これがベルの不等式である。

ベルの不等式を示すために、 $(a + a')b - (a - a')b'$ という ($P(\lambda)$ をかけて λ について和を取れば C となる) 量のとりうる値の範囲を考えよう。三角不等式により、

$$|(a + a')b - (a - a')b'| \leq |(a + a')b| + |(a - a')b'| \quad (1.6)$$

であるが、 $|b| = |b'| = 1$ であるから、右辺は $|a + a'| + |a - a'|$ となる。各項はそれぞれ、 a と a' の値に応じて $\pm(a + a')$ 、 $\pm(a - a')$ のどちらかの符号をとったものとなるが、どの組み合わせにおいても $\pm 2a$ または $\pm 2a'$ となるから、結局、

$$|(a + a')b - (a - a')b'| \leq 2 \quad (1.7)$$

であることがわかり、ベルの不等式が示された。

次節で示すように、量子論で C を計算するとベルの不等式が破られる (量子論の方が相関が強い)。本実験ではこの矛盾を検証する。もしベルの不等式の破れを見ることができれば、それは自然現象の中には、隠れた変数理論では決して記述できない現象があることを意味する。实在論のような素朴な考え方を捨てない限り、それらの現象を説明することはできないのである。

第2章 実験方法

この章では、実験方法について述べる。まず、具体的な系でのベルの不等式の破れをみる(2.1節)。次に、隠れた変数理論に従う際の相関の限界をみて、量子力学との違いを定式化する(2.2節)。最後に、その違いを実験でどう検証するかについて述べる(2.3節)。

2.1 ベルの不等式の破れ

先ほど導いたベルの不等式を量子力学で破れる事を示す。使用する系はパラ-ポジトロニウムの崩壊である。

$$e^+e^- \rightarrow 2\gamma \quad (2.1)$$

この時、運動量保存則から2つの光子は互いに逆向き(back-to-back)に出る。この向きを z 方向にし、以後、添え字1は $+z$ 方向、添え字2は $-z$ 方向を表すことにする。また、パラ-ポジトロニウムの角運動量がゼロであること、崩壊過程で角運動量が保存されることより、2の偏光状態は

$$|R_1\rangle |R_2\rangle, |L_1\rangle |L_2\rangle$$

の組のみが許される(R は右円偏光, L は左円偏光)。これらの線形結合のうち、パラ-ポジトロニウムの内部パリティがマイナスであることから、偏光状態は

$$|F\rangle = |R_1R_2\rangle - |L_1L_2\rangle \quad (2.2)$$

となる。 $(P|F\rangle = |L_1L_2\rangle - |R_1R_2\rangle = -|F\rangle)$ 。ここで右円偏光、左円偏光状態の偏光ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y)$ より、 $|R_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + i|y_1\rangle)$ 、 $|L_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle - i|y_1\rangle)$ が使える。これを用いて直線偏光状態に書き直すと

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|x_1\rangle |y_2\rangle - |y_1\rangle |x_2\rangle] \quad (2.3)$$

となる。これは、ある2光子の $+z$ 方向の偏光が x 方向と測定された場合、 $-z$ 方向の光子の偏光は垂直な方向の y 方向になることを意味している(逆も同様)。

このback-to-backの2つの γ 線を、2つの偏光板(上の添え字に合わせて、偏光板1,2とする)で測定する。この時、偏光板1の測定値を A 、偏光板2の測定値を B とおく。そして、偏光板1に入ってきた光子が、偏光板1の測定方向に平行なら $a = +1$ 、垂直なら $a = -1$ と決める。同様に、逆向きに飛ぶ光子が偏光板2に入ってきた時、偏光板2の測定方向に対して平行なら $b = +1$ 、垂直なら $b = -1$ とする。

その測定値の相関 $\langle AB \rangle$ を調べる。今、偏光板1は x 軸方向、偏光板2は x から ϕ 傾いた x' 方向で測定する(図2.1)。以後、 x 軸からの角度を ϕ_A, ϕ_B とする(今 $\phi_A = 0, \phi_B = \phi$)。

まず、偏光板1での偏光方向は x か y 方向であり、それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で起こる。それぞれの場合について、偏光板2での偏光方向を考える。

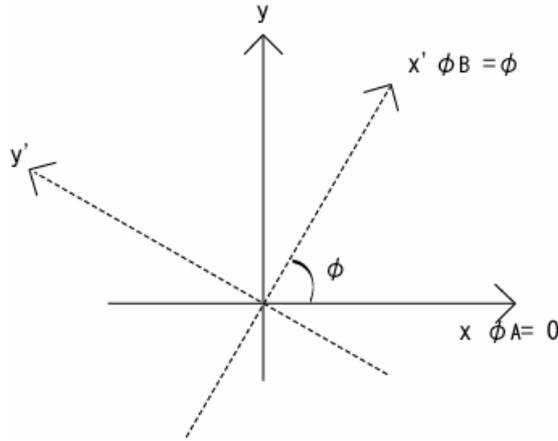


図 2.1: 測定方向

偏光板 1 で偏光が x 方向だった場合 ($a = +1$), 偏光板 2 の方では偏光は y 方向である. この時, 古典的には y 方向に偏った波であり, その振幅を C_0 とすると, x から ϕ 傾けた x' 方向の偏光板を通過する波の振幅は $C_0 \sin \phi$, y' 方向の偏光板を通過する波の振幅は $C_0 \cos \phi$ になる. 光の強度は振幅の 2 乗に比例するので, x' 方向を通過する光の強度は $C_0^2 \sin^2 \phi$ に, y' 方向を通過する光の強度は $C_0^2 \cos^2 \phi$ に比例する. 量子論的には, 一個一個の光子が偏光を持つことになるが, 多数の光子の統計的性質を見る場合, 古典論の結果と一致することが知られており, 強度は光子の個数に対応すると考えられる. 結局,

- $\sin^2 \phi$ の確率で x' 方向 ($b = +1$)
- $\cos^2 \phi$ の確率で y' 方向 ($b = -1$)

の偏光が測定されることになる.

同様に偏光板 1 で偏光が y 方向だった場合 ($a = -1$), 偏光板 2 の方では偏光は x 方向であるが, $x'y'$ 系で測定した場合,

- $\cos^2 \phi$ の確率で x' 方向 ($b = +1$)
- $\sin^2 \phi$ の確率で y' 方向 ($b = -1$)

となる.

以上より, 相関 $\langle AB \rangle$ を求めると,

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{2} [2 \sin^2 \phi - 2 \cos^2 \phi] = -\cos 2\phi \quad (2.4)$$

が得られる. 次に, 偏光板 1 の角度を ϕ_A とは別の $\phi_{A'}$ でも測定し (偏光板 2, ϕ_B についても同様), 相関 $\langle AB \rangle, \langle A'B \rangle, \langle AB' \rangle, \langle A'B' \rangle$ を考える. 角度を図 2.2 のように設定してやり (式 1.4) の C を計算すると,

$$\begin{aligned} C &= |\cos\{2(\phi_A - \phi_B)\} + \cos\{2(\phi_{A'} - \phi_B)\} - \cos\{2(\phi_A - \phi_{B'})\} + \cos\{2(\phi_{A'} - \phi_{B'})\}| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 2 \end{aligned}$$

となり, 確かにベルの不等式 (式 1.5) が破られている.

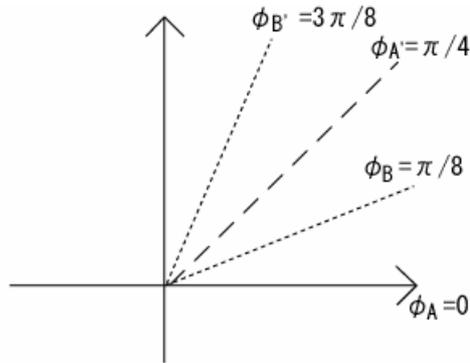


図 2.2: 測定方向

2.2 隠れた変数理論による相関の限界

隠れた変数理論の例として Bohm-Aharonov の仮説

1. 各光子の円偏光状態は，一方から見た回転は互いに逆になる.
2. 各光子はある方向の直線偏光状態になるが，互いに垂直になっている.

がある. これによって先の相関 $\langle AB \rangle$ を計算すると，

$$\langle AB \rangle = -\frac{1}{2} \cos 2\phi$$

となる. 係数が 1 より小さいので，量子力学より弱い相関になり，ベルの不等式を破ることはない. このような相関の強さの，隠れた変数理論に従う場合の限界はベルの不等式で与えられる. $\langle AB \rangle = -k \cos 2\phi$ とおき，ベルの不等式に代入し，最大の k を求めると，

$$|k| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

が得られる. 量子力学では $k = 1$ というより強い相関があった. このように偏光の相関には量子力学と隠れた変数理論で差があり，実験ではそれを調べることになる.

2.3 実験による検証

γ 線に対応できる偏光板はないため、偏光を測定するのに Compton 散乱を用いる。Compton 散乱で散乱する方向は、偏光によるため (Klein-Nishina の公式)、Compton 散乱の散乱する方向を調べてやることによって、偏光が分かるのである。

具体的には図 2.3 のような setup で、中央 (O) から、発生した back-to-back の 2γ を測定する代わりに散乱体を置き (S_1, S_2)、散乱された γ 線を検出器 (C_1, C_2) で検出する。この時、 γ_1 の散乱面 OS_1C_1 (π_1 とする) と γ_2 の散乱面 OS_2C_2 (π_2 とする) のなす角を ϕ とすると (図 2.4)、偏光の相関が ϕ によるため、散乱のしやすさは ϕ によることになる。それを見るために C_1 で検出があった際に、 C_2 でも検出される確率 ($P(\phi)$)、即ち、 2γ が両方検出される確率を求めよう。

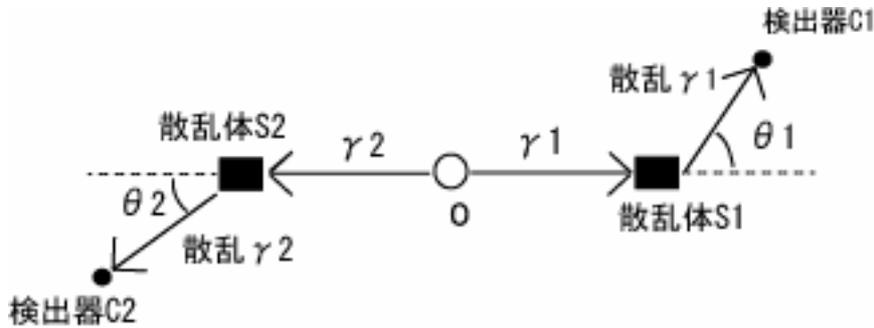


図 2.3: 実験の setup

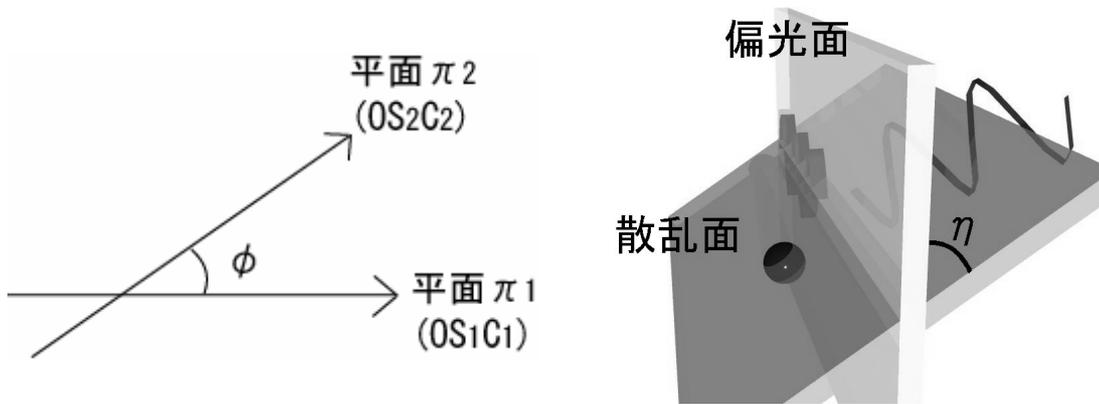


図 2.4: 散乱面のなす角

図 2.5: 偏光面と散乱面のなす角 η

微分断面積は Klein-Nishina の公式から散乱面と偏光面のなす角を η とすると (図 2.5) ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \gamma_e^2 \left(\frac{k^2}{k_0^2} \right) (\gamma - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \eta)$$

とかける (ここで $\gamma_e = \frac{\hbar\alpha}{m_e c}$, $k_0 =$ 入射 γ 線の波数, $k =$ 散乱 γ 線の波数 $\gamma = \frac{k}{k_0} + \frac{k_0}{k}$, θ は γ 線の散乱角). 今回の実験では Compton 散乱過程が偏光の測定にあたり、偏光は散乱面に平行 ($\eta = 0$) か、垂直か ($\eta = \pi/2$) で得られる. 上の式から、それぞれの場合の微分断面積は、

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{1}{2}\gamma_e^2 \left(\frac{k^2}{k_0^2}\right) (\gamma - 2\sin^2\theta) \\ \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} &= \frac{1}{2}\gamma_e^2 \left(\frac{k^2}{k_0^2}\right) \gamma\end{aligned}$$

となる。

よって、 C_1 で検出された際、 γ_1 の偏光方向 (ϵ_1 とする) が散乱面 (π_1) に平行だったか垂直であったかの確率はそれぞれ、

$$\begin{aligned}\pi_1 \parallel \epsilon_1 &\cdots \frac{\gamma_1 - 2\sin^2\theta_1}{2(\gamma_1 - \sin^2\theta_1)} \\ \pi_1 \perp \epsilon_1 &\cdots \frac{\gamma_1}{2(\gamma_1 - \sin^2\theta_1)}\end{aligned}$$

となる。次に、それぞれの場合について、 C_2 の方で偏光面 (ϵ_2) が散乱面 (π_2) に平行になるか、垂直なるかを調べる。

1. $\pi_1 \parallel \epsilon_1$ の時 ($a = +1$),

$$\langle AB \rangle = -k \cos 2\phi, a = +1$$

より、

$$\langle B \rangle = -k \cos 2\phi$$

となり、 C_2 に入った場合、偏光方向が散乱面に平行 ($b = +1$) あるいは垂直 ($b = -1$) であった確率を

$$\begin{aligned}\pi_2 \parallel \epsilon_2 \quad (b = +1) &\cdots p \\ \pi_2 \perp \epsilon_2 \quad (b = -1) &\cdots q\end{aligned}$$

とおくと、確率の和が 1 であることより、

$$p + q = 1$$

また、 $\langle B \rangle = -k \cos 2\phi$ より、

$$p - q = -k \cos 2\phi$$

である。これらより、

$$\begin{aligned}\pi_2 \parallel \epsilon_2 \quad \cdots \quad p &= \frac{1}{2}(1 - k \cos 2\phi) \\ \pi_2 \perp \epsilon_2 \quad \cdots \quad q &= \frac{1}{2}(1 + k \cos 2\phi)\end{aligned}$$

が得られる。よって $\pi_1 \parallel \epsilon_1$ のもとで、 C_1, C_2 の両方で検出する確率は

$$\frac{\gamma_1 - 2\sin^2\theta_1}{2(\gamma_1 - \sin^2\theta_1)} \left[\frac{1}{2}(1 - k \cos 2\phi) \cdot \frac{\gamma_2 - 2\sin^2\theta_2}{2(\gamma_2 - \sin^2\theta_2)} + \frac{1}{2}(1 + k \cos 2\phi) \cdot \frac{\gamma_2}{2(\gamma_2 - \sin^2\theta_2)} \right]$$

となる (全断面積による規格化はしていない。以後の確率も同様)。

2. $\pi_1 \perp \epsilon_1$ の時 ($a = -1$) も同様にすると,

$$\begin{aligned} \pi_2 \parallel \epsilon_2 \quad \cdots \quad p &= \frac{1}{2}(1 + k \cos 2\phi) \\ \pi_2 \perp \epsilon_2 \quad \cdots \quad q &= \frac{1}{2}(1 - k \cos 2\phi) \end{aligned}$$

が得られる. よって $\pi_1 \perp \epsilon_1$ のもとで, C_1, C_2 の両方で検出する確率は

$$\frac{\gamma_1}{2(\gamma_1 - \sin^2 \theta_1)} \left[\frac{1}{2}(1 + k \cos 2\phi) \cdot \frac{\gamma_2 - 2 \sin^2 \theta_2}{2(\gamma_2 - \sin^2 \theta_2)} + \frac{1}{2}(1 - k \cos 2\phi) \cdot \frac{\gamma_2}{2(\gamma_2 - \sin^2 \theta_2)} \right]$$

となる.

以上を足し合せると, 確率 $P(\theta, \phi)$ (規格化はしていない) が得られる.

$$\begin{aligned} P(\theta, \phi) &= \frac{4(\gamma - \sin^2 \theta)^2 - 4k \sin^4 \theta \cos 2\phi}{8(\gamma - \sin^2 \theta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - k \left(\frac{\sin^2 \theta}{\gamma - \sin^2 \theta} \right)^2 \cos 2\phi \right] \end{aligned}$$

となる. ここで $\theta_1 = \theta_2 = \theta, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ として計算した. ϕ 依存性を $k = 1$ の場合と, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の場合にグラフを書くと図のようになる. このように, P は ϕ を変えると変化するが, 量子力学と隠れた変数理論で振幅に差があり, これを調べることで世の中がどちらの理論に従っているかが分かることになる.

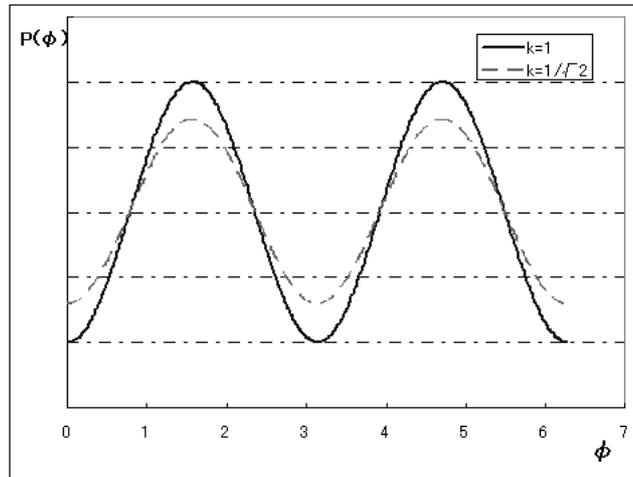


図 2.6: P の ϕ 依存性

第3章 Setting

この章では、実験の setting について述べる。まず実験の概要を説明した後 (3.1 節)、信号処理系の設定について述べ、calibration を示す (3.2 節)。次に角度ぶれとなまし効果について、実験機器の配置について述べる (3.3 節)。最後に、回転対称性を考察する (3.4 節)。

3.1 概論

放射線源 ^{22}Na は β^+ 崩壊により陽電子を発生させ、陽電子は物質中の電子と結びつきポジトロニウムを形成する。ポジトロニウムの崩壊様式には 2γ 崩壊と 3γ 崩壊があるが、実験には 2γ に崩壊したもの (0.511MeV) を用いる (3γ 崩壊は 2γ 崩壊に比べ極めてレートが低いので実験に影響を与えることはない)。散乱体には plastic scintillator を使い、back-to-back に放出された 2 個の γ 線のうち線源の上下に設置した plastic scintillator で Compton 散乱し特定方向に散乱したものを NaI scintillator を検出器として計測する。Plastic, NaI scintillator それぞれに PMT をつけ、その 4 つともが γ 線を検出したカウント数を記録し、またその度にそれぞれが測定したエネルギーも記録した。これを ϕ (散乱面の角度) を $\pi/4$ ずつ変えながら繰り返し、相関を調べた。

Setting 図、外観写真を以下に示す (いずれも $\phi = 0$ の時)。PMT は個体によって特性が違うので、図 3.1 のように NaI-PMT に 1 号, 2 号, plastic-PMT に 3 号, 4 号と名前をつけて区別した。以降この名称を用いる。設置台は最上部の板が (2 号, 4 号, 線源と共に) 回転する仕組みになっている。

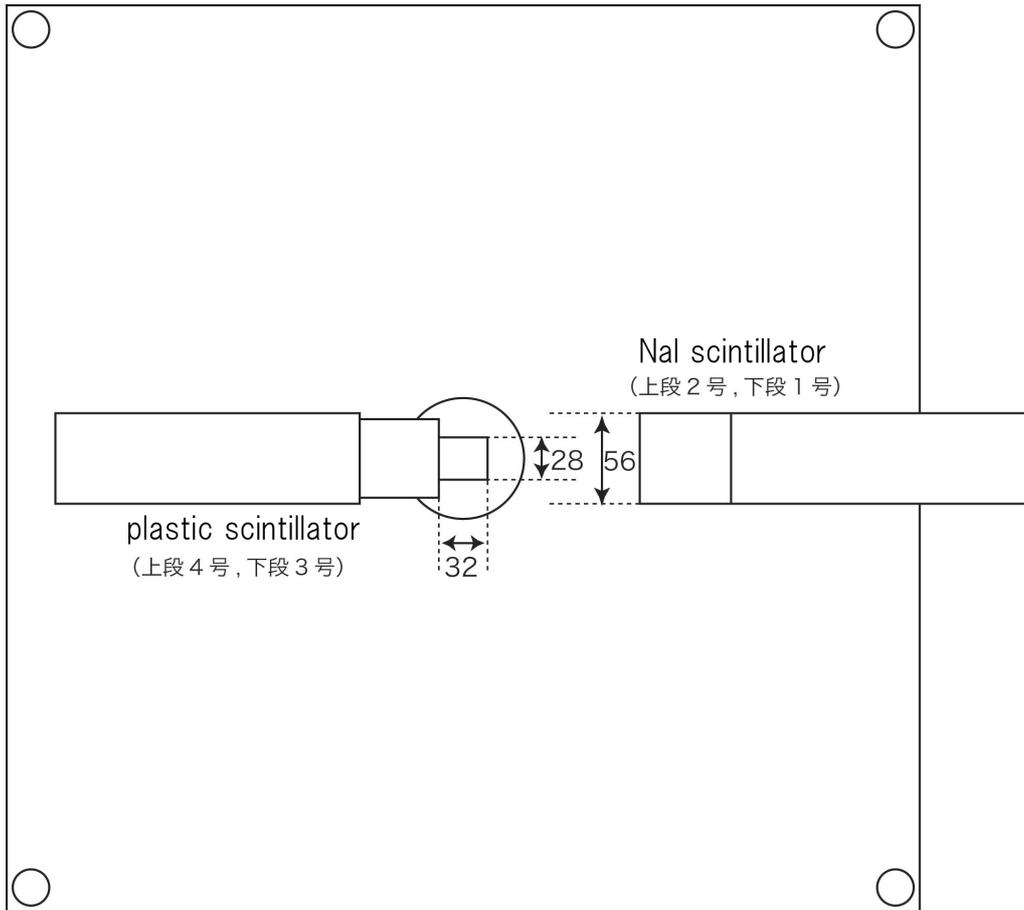


図 3.1: setting 図 (正面図, 単位は mm)

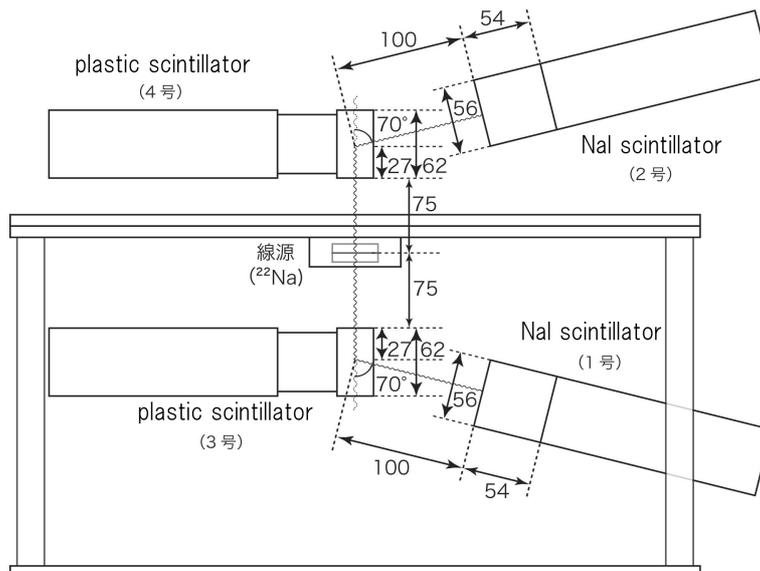


図 3.2: setting 図 (上面図, 単位は mm)

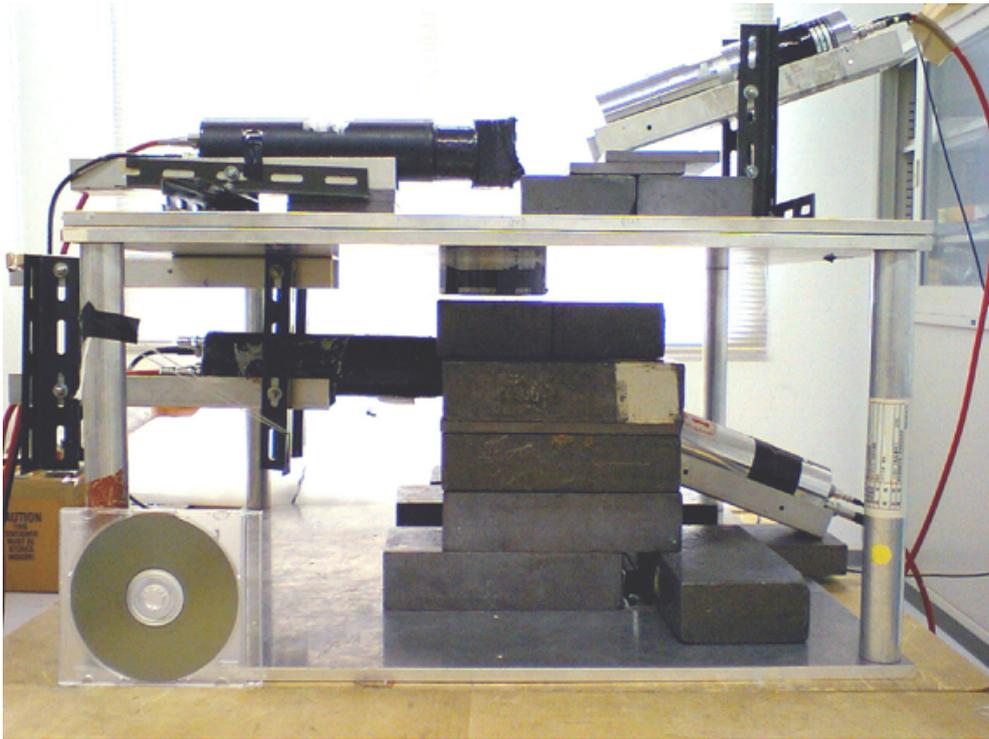


图 3.3: 外觀 (正面圖)

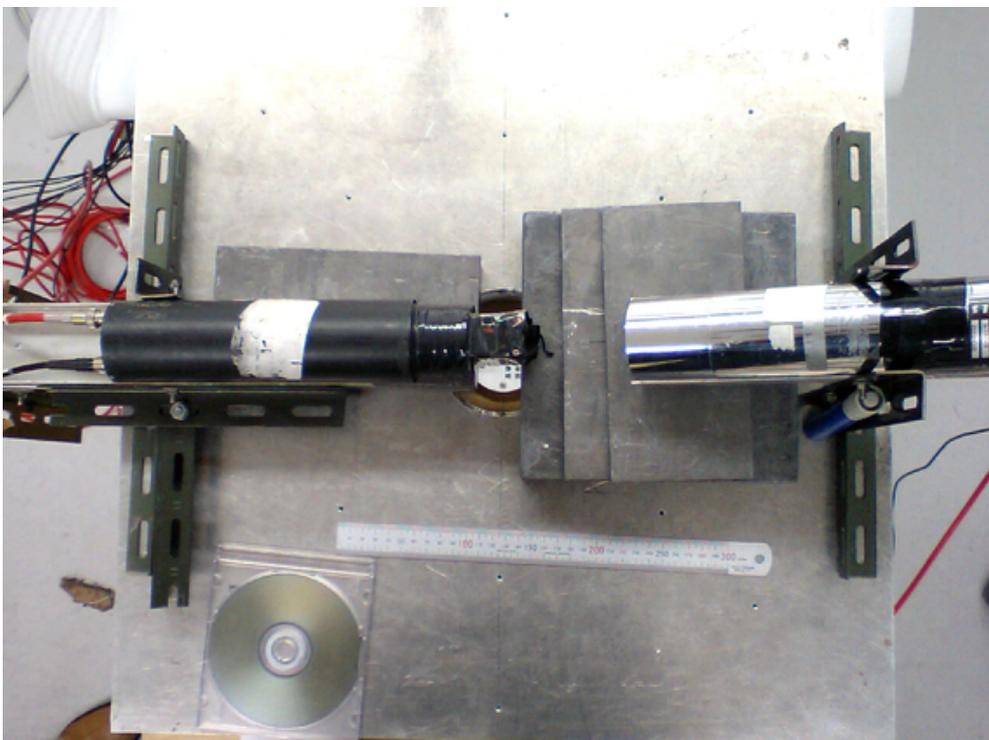


图 3.4: 外觀 (上面圖)

3.2 信号処理系

各々の装置は図 3.5 のように配線した. 4 つの PMT から得た信号の 4-coincidence をとり, 同時に全ての PMT で信号を観測した時に ADC で各々の波形の積分値を取得している. 各装置の設定の詳細を説明し, 最後に実験前後の calibration 結果を示す.

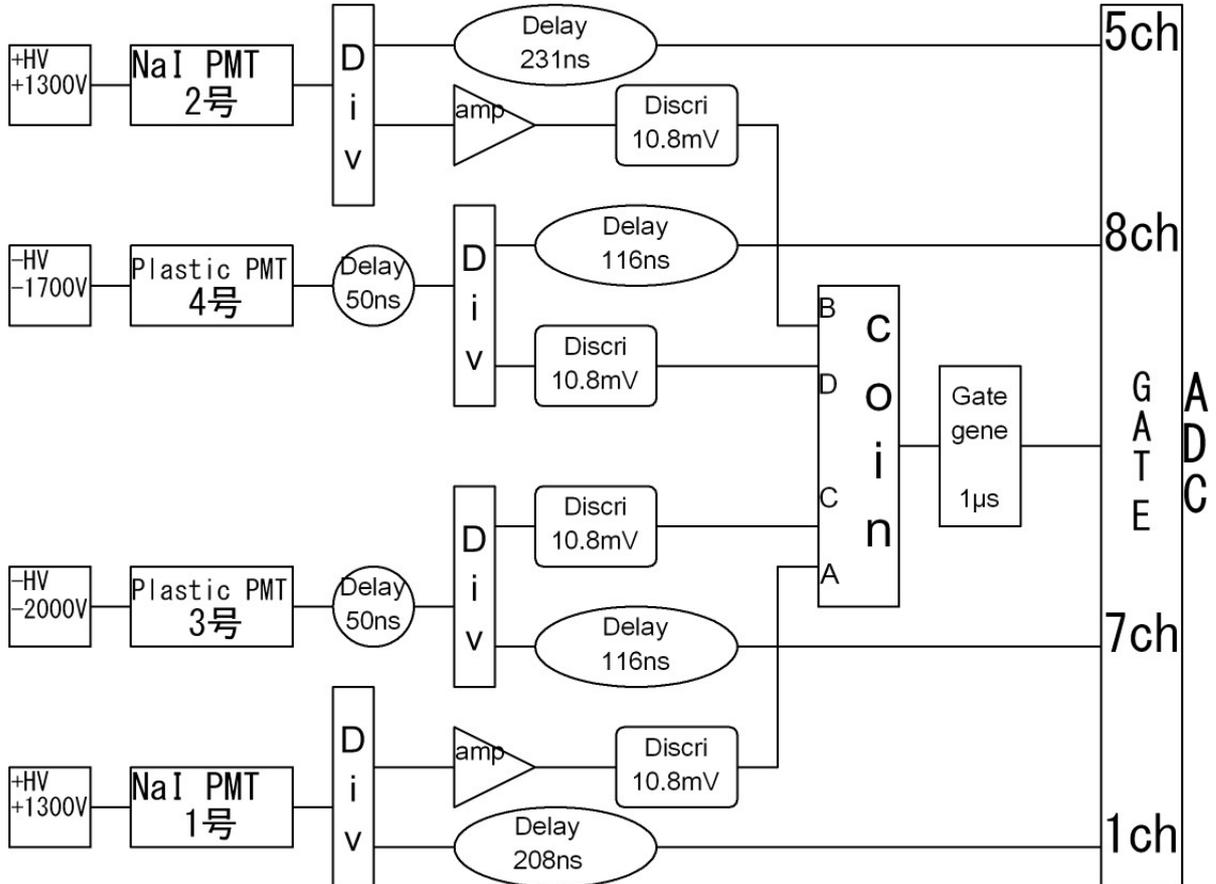


図 3.5: 配線図

3.2.1 amp

NaI-scintillator(1, 2号)の信号は, divider で gate 用と ADC 用に分けた後, gate 側に amp をかけた. これは amp で増幅しないと discriminator の threshold を最低値にしても測定すべき信号がそれを上回らなかったためである. ADC 側については high voltage を上げる事で十分な gain が得られた事, amp をつけることで波形が不安定になる事や pedestal が 0 になる等, 不都合が起きる事から amp はつけなかった.

3.2.2 coincidence

前述の通り, 1,2,3,4号の 4-coincidence をとった. 1,2号の 2-coincidence でも必要なデータを得る事は可能だが, 鉛遮蔽 (3.3.4 節参照) を通り抜けて直接 1,2号に入ってくる γ 線や宇宙線等との accidental coincidence が多く紛れ込んでしまう. 3,4号でも Compton 散乱時のシンチレーション光を観測し, 4-coincidence をとることでこれらのノイズはほとんどが除去できる.

また正しく coincidence がとれている事を, discriminator から得たそれぞれの NIM 信号のタイミングが合っている様子をオシロスコープで見て確認した.

3.2.3 discriminator

それぞれの PMT に信号が入ったことを判断するために discriminator を用いた. 測定の対象とする波形を切ってしまうことのないようその敷居値である threshold は全て 11mV(最低値) にし, またその様子をオシロスコープで確認した. threshold が低いと dark current が多く紛れ込むようになる点が心配されるが, 4-coincidence をとることでそのほとんどが排除され, 必要なデータに比べ問題ない程度の数に収まった.

3.2.4 high voltage

各 PMT にかける電圧は以下のように設定した.

- 1号 (NaI-PMT):1300V
- 2号 (NaI-PMT):1300V
- 3号 (plastic-PMT):-2000V
- 4号 (plastic-PMT):-1700V

基本的に正しく calibration ができる最大値に設定した. これは測定したいエネルギー領域を出来るだけ分解能良く得るためである.

3.2.5 gate generator

それぞれの PMT からの波形が切れずに gate に入るように width を調節した.

3.2.6 calibration

実験前後の calibration 図を以下に示す. 尚, NaI scintillator には ^{137}Cs (0.662MeV), ^{22}Na (0.511MeV,1.275MeV), ^{57}Co (1.173MeV,1.333MeV) 線源の γ 線による光電吸収ピーク, plastic scintillator には ^{137}Cs , ^{22}Na 線源の γ 線による Compton edge を用いた.

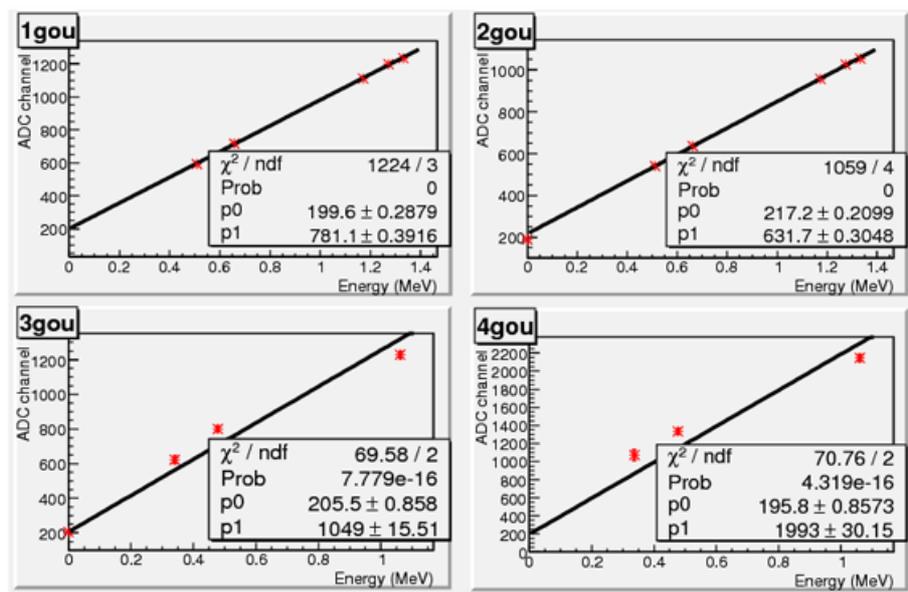


図 3.6: calibration(実験前)

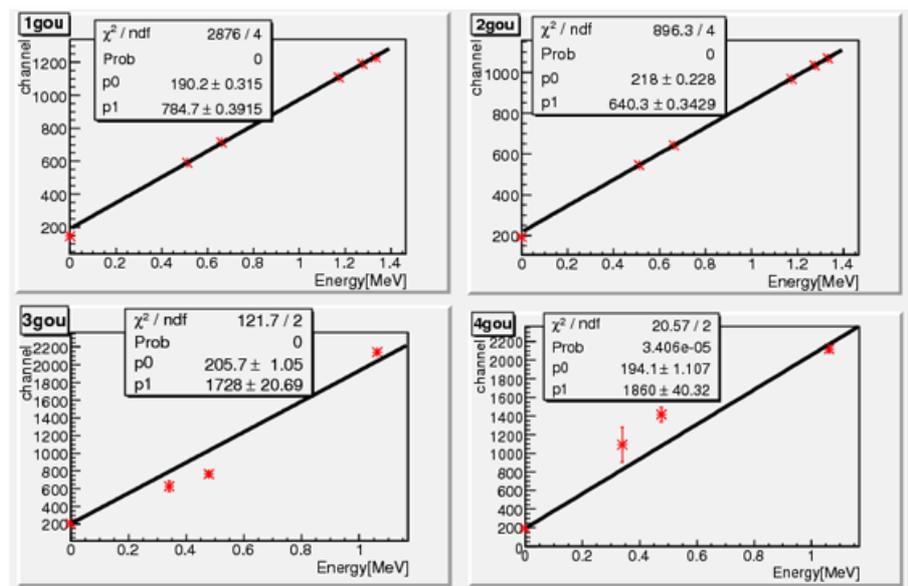


図 3.7: calibration(実験後)

3.3 実験機器の配置

実験で測定したいのはカウント数 (のレート) が散乱面のなす角 ϕ に依存してどう変化するかなので, setting の設置距離 (線源と plastic scintillator 間, plastic scintillator と NaI scintillator 間) や散乱角 (θ) は自由に決められる.

3.3.1 角度ぶれとなまし効果

Setting の都合上, 必ず角度ぶれは生じる. つまりある散乱角 (ϕ, θ) へ散乱した γ 線のデータが得られたとしても, それはその角度とその近傍の角度のデータの平均を見ている事になる. よって角度ぶれが大きい程, 極大点の値は周り平均されて低くなり, 極小点の値は周り平均されて高くなり, データ自体の高低が見えにくくなる. 以後これをなまし効果と呼ぶ. 実験機器の配置決定においても, 角度ぶれが少ないほどなまし効果は小さくなるが得られるデータ数は減り統計的エラーが増える, 逆に角度ぶれが大きくてもデータ数が増えれば統計的エラーは減るがなまし効果が大きくなるという二者の板挟みであった. そこで私達は simulation を用い, なまし効果も計算に含めた上での理論値を出して比べながら, 量子力学と隠れた変数理論の差を見るのに最適な setting を求めた.

3.3.2 設置距離

Simulation より近ければ近いほど良いという結果が得られた. これはなまし効果が大きくなっても統計エラーを減らす方が有効だという結論である. しかし (3.3.4 節) で示す通り線源から直接 NaI-PMT に入る γ 線は防ぎたいので, 遮蔽可能な最短距離として

- 線源-plastic 間 75mm
- plastic-NaI 間 100mm

に設定した.

3.3.3 散乱角

同様に simulation より 70° , 75° , 80° が良いという結果が得られたが, この三者は誤差範囲でありこれだけではどれが最適かは決定できなかった. よって実際の setting における鉛遮蔽の都合を考え, 70° に決定した.

3.3.4 鉛遮蔽

不必要な γ 線を遮るのに鉛 (Pb) ブロックを用いた. 最低でも 50mm (一部 40mm) の鉛遮蔽を設けるように設定した. 以前行った実験によると鉛遮蔽 40mm で γ 線の 9 割以上を落とす事ができるので, 実験に支障ない程度のレートに落とすことができたと思われる. 他の実験結果からも問題は無かった.

3.4 回転対称性の考察

Setting 上部を回転させた時のカウント数の ϕ 依存性を計測したいので, setting 自身の回転対称性は非常に重要である.

3.4.1 方法

Setting を組んだ状態で, setting の上部を $\pi/4$ ずつ回しながら 1-3 号 coincidence で 1 号の一定時間のカウント数を測定し, 一様とみなして χ^2 乗検定を行った. 調整は線源の位置を微調整して行った.

3.4.2 結果

表 3.1: 回転対称性

ϕ	N	ΔN
0	2755	52.49
45	2748	52.42
90	2783	52.75
135	2760	52.54
180	2776	52.69
225	2935	54.18
225	2713	52.09
270	2817	53.08
315	2711	52.07
315	2824	53.14

[N :カウント数, M :平均, ΔN :カウント数と平均の差]

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(N_i - M)^2}{\Delta N_i^2} = 13.5$$
$$\frac{\chi^2}{ndf} = 1.50 \quad (3.1)$$

式 3.1 より一様と言える.

第4章 結果 考察

4.1 データ解析

今回の実験では、パラ-ポジトロニウムの崩壊によって互いに逆向きに放出される2つの γ 線を plastic-PMT で散乱させ、その散乱 γ 線を NaI-PMT で検出し、この4つの PMT の coincidence 回数を計測した。このとき、2つの NaI-PMT のなす角 ϕ を0から $7\pi/4$ まで $\pi/4$ おきに変えて、計8箇所を計測した。この4つの PMT の coincidence を取って得られた Energy-count ヒストグラム ($\phi = \pi/2$) を図 4.1 に示した。

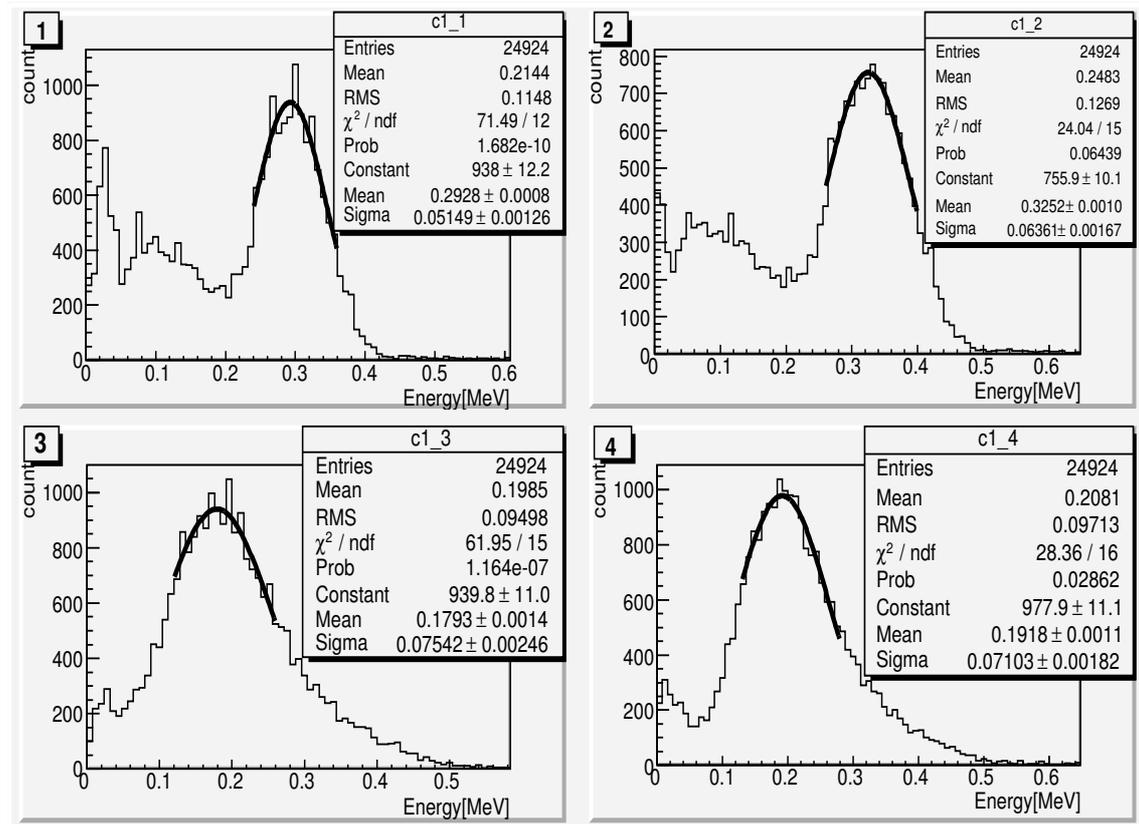


図 4.1: Energy-count ヒストグラム ($\phi = \pi/2$)

このグラフを用いて、dark currentなどを除いた有効カウント数を抜き出した。具体的にはグラフをガウス分布で fitting して mean と σ を求め、NaI-PMT の光電吸収のピークから 2σ 、plastic-PMT の 70° Compton 散乱のピークから 1.5σ の範囲にエネルギーを落としたものを有効なカウントとした。ここで、NaI-PMT と plastic-PMT で範囲の取り方を変えたのは、それぞれについてで

きるだけ多くの有効カウントを取り出すためである．また，NaI-PMT における Compton 散乱によるカウントは，threshold によって数が変わったり，低いエネルギーの部分に dark current が混じっていたりして不安定なため取り除いた．

確認として，ADC 分布でピークとなるエネルギーが理論と一致するかを見た．0.511MeV の γ 線が散乱角 $\theta = 70^\circ$ で Compton 散乱する際，散乱後の γ 線のエネルギーは 0.308MeV となる．この値を NaI-PMT の ADC 分布のピークにあたるエネルギーと見比べると，ほぼ一致する．同様に plastic-PMT に落とされるエネルギーは 0.203MeV で，plastic-PMT の ADC 分布のピークにあたるエネルギーと一致することが分かる．

このようにして得られたデータを表 4.1 に示した．

表 4.1: 角度ごとの有効カウント数

ϕ [rad]	カウント数	測定時間[s]	有効カウント数	誤差
0	18064	85440	4574	67.63
$\pi/4$	21434	84980	5922	76.95
$\pi/2$	24924	80382	7271	85.27
$3\pi/4$	17826	69824	5024	70.88
π	19139	86038	4774	69.09
$5\pi/4$	22324	85122	6285	79.27
$3\pi/2$	25462	84940	7654	87.48
$7\pi/4$	19791	81602	5130	71.62

単位時間当たりの有効カウント数の，角度ごとのグラフを図 4.2 に示した．ここで，カウント数 $N \propto 1 - k \left(\frac{\sin^2 \theta}{\gamma - \sin^2 \theta} \right)^2 \cos 2\phi$ より，カウント数のグラフは理想的には \cos 型で fitting できる．ただ

し、実際には scintillator に大きさがあるので散乱角がぶれて、なまし効果により測定値は理論値からずれる．そのため \cos 型の fitting は厳密には正しくない．しかしこの節では見易さのため近似的に \cos 型の fitting をおこない、より正確な定量的考察は後の節ですることにする．fitting の具体的な式は p_0, p_1 をパラメータとして $f(\phi) = p_1 \cos 2\phi + p_0$ である．

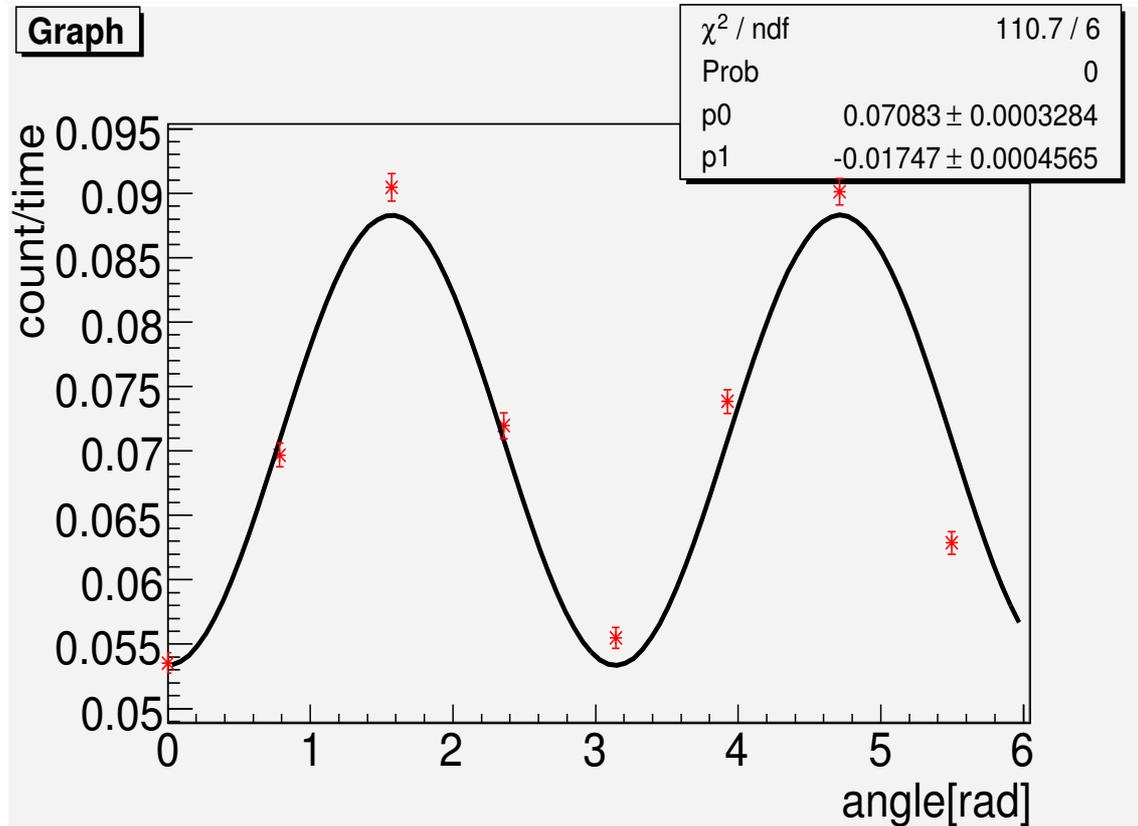


図 4.2: 単位時間当たりの有効カウント数

次節では、このグラフと simulation で得られたグラフを用いて考察を進める．

4.2 考察

まず、simulation から得られたグラフと比較するためには、図 4.2 に補正を加えなければならない．実験では、setting において下側につけた NaI-PMT と plastic-PMT は固定し、上側にセットした NaI-PMT と plastic-PMT を一緒に回転させて ϕ ごとのカウントを取った．これに対し simulation では上側の NaI-PMT だけを回転させた．このため図 4.3 に示すように、back-to-back に飛ぶ 2 つの γ 線が上下の直方体の plastic-PMT に入る範囲は角度 ϕ ごとに変化する．

そのため、 $\phi = 0, \pi$ に比べて $\phi = \pi/2$ などその他の角度では 2 つの plastic scintillator に同時に入る γ 線の数が少なくなり、見かけ上線源の強さが弱まったようになる．よって 2 つの plastic scintillator に同時に入る γ 線の数には図 4.3 に示すように 2 つの plastic scintillator が重なって見える部分の面積に比例するとして実験値に補正を加えた．

補正を加えたグラフを、図 4.4 に示した．

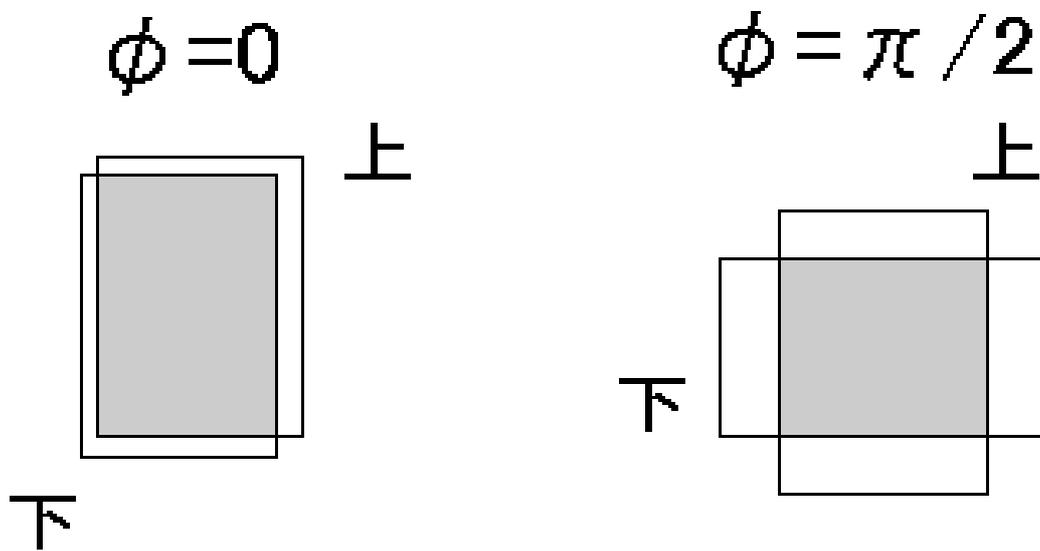


図 4.3: plastic-PMT の立体角の違い

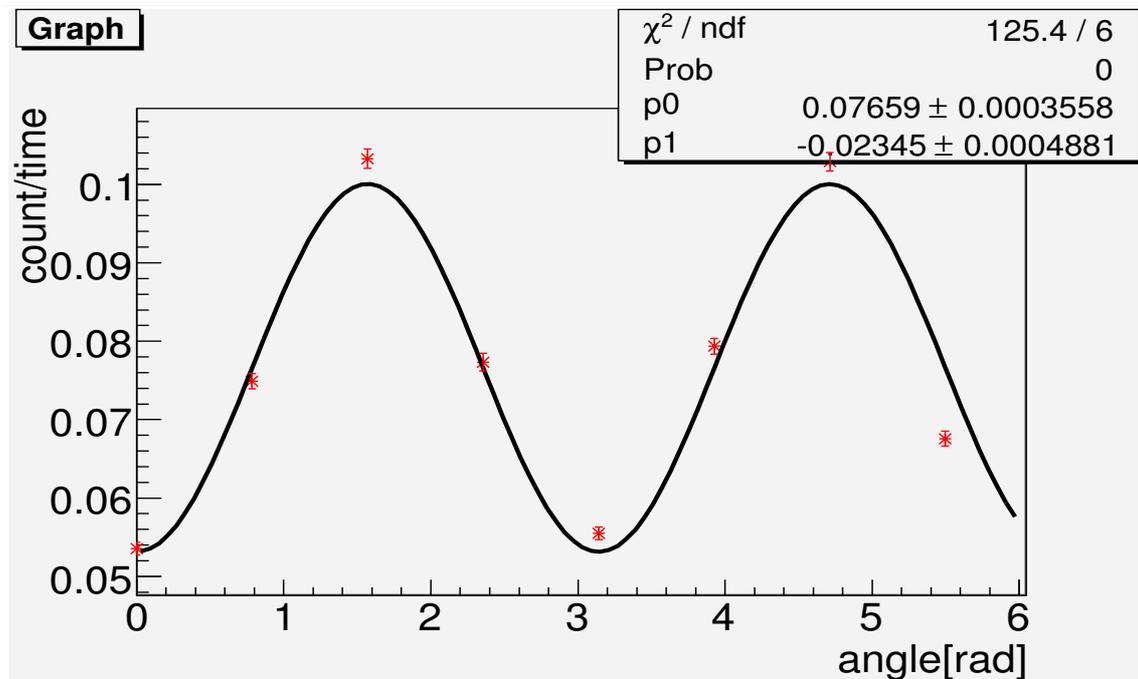


図 4.4: 補正を加えた単位時間当たりの有効カウント数

図 4.4 のグラフと simulation のグラフを，fitting の際に用いたパラメータ p_0 でそれぞれ規格化し，その 3 つのグラフを重ねて比べたグラフを図 4.5 に示した．(simulation で得られたカウント数はこの章の最後の表 4.2 に示した．)

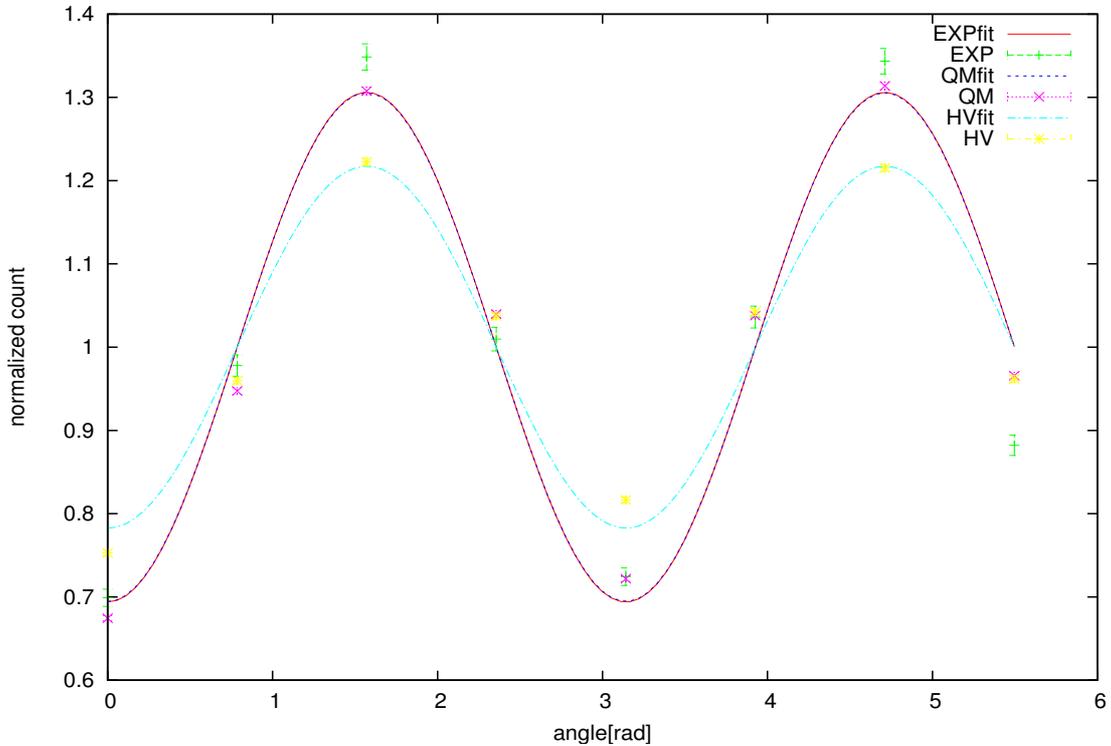


図 4.5: 実験と simulation の比較 (統計誤差のみ)

図 4.5 を見ると，実験値のグラフは量子力学に従う simulation とほぼ重なっていることがわかる．

4.3 定量的な考察

前節で述べたようにグラフの \cos 型 fitting は厳密には正しくない．そこで，実験と simulation の測定値を直接比べることを考えた．この際，実験値や simulation 値の誤差がより重要となる．特に今回の実験では統計誤差を非常に小さくしたので，setting における系統誤差が無視できなくなる．よって，実験値の統計誤差に系統誤差を加えることを考える．ただし，すべての系統誤差の効果を加えることは困難なので，比較的考えやすい，2 つの NaI-PMT のなす角 ϕ と，線源と plastic-PMT 間の距離 L の系統誤差だけを考えることにした．

2 つの NaI-PMT のなす角 ϕ の系統誤差 $\Delta\phi$ によって生じる単位時間当たりの有効カウント数 N の誤差 ΔN_ϕ は N が ϕ にどのように依存するかによって異なる．ここで，なまし効果を含めたカウント数の厳密な式を扱うのは難しいので，近似的に \cos 型 fitting の式を用いて $N(\phi) = p_1 \cos 2\phi + p_0$ とすると， $\Delta N_\phi = |p_1(\cos 2(\phi \pm \Delta\phi) - \cos 2\phi)|$ となる．setting において ϕ には， $\pm 1^\circ$ ほどの誤差があったと思われるので， $\phi = 0, \phi/2, \pi, 3\pi/2$ については $\Delta N_\phi/N \simeq 0.0002$ ， $\phi = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ については $\Delta N_\phi/N \simeq 0.0105$ となった．

また、線源と plastic-PMT との距離 L の系統誤差 ΔL によって生じる単位時間当たりの有効カウント数 N の誤差 ΔN_L は、およそ $N \propto L^2$ より $\Delta N_L = 2N\Delta L/L$ であらわされる。 ΔL は 1mm ほどなので、 $L=75\text{mm}$ より $\Delta N_L/N = 0.0266$ となった。

よって、これらの系統誤差は今回の実験における統計誤差と同じ程度の大きさになった。

これより、(カウント数の誤差)² = (統計誤差)² + ΔN_ϕ^2 + ΔN_L^2 として誤差に補正を加えた。系統誤差を加えたグラフを図 4.6 に示した。

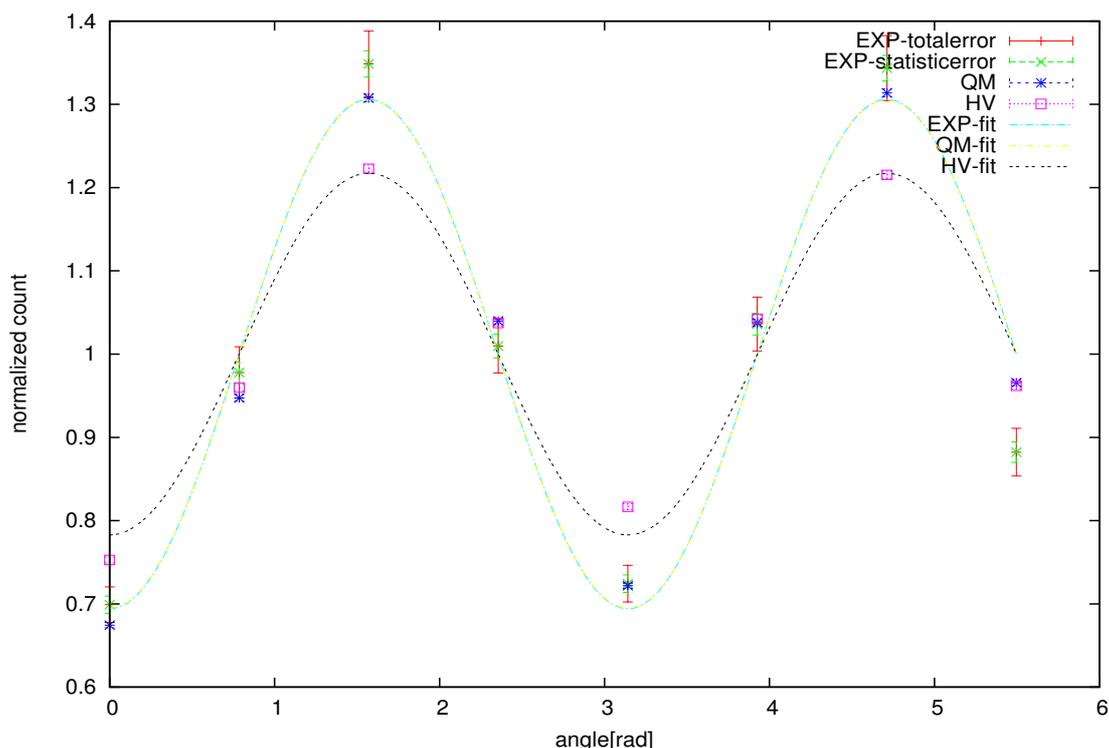


図 4.6: 実験と simulation の比較 (系統誤差含む)

このようにして得た誤差を用いて χ^2 乗検定をおこなう ($ndf=8$)。具体的にはパラメータを a として、実験で得た (単位時間当たりの有効カウント数 $\times a$) と (simulation のカウント数) で χ^2 乗検定を行い、 χ^2 乗の最小値を求めた (ただし $ndf = 8$)。

$$\chi_{QM}^2 = 13.377 \quad (4.1)$$

$$\chi_{HV}^2 = 51.317 \quad (4.2)$$

となり、量子力学の棄却率は 90 % 強となるので 5 % 程度正しく、また、隠れた変数理論は 99.9 % 以上で棄却された (ここで、 χ_{QM}^2 は量子力学、 χ_{HV}^2 は隠れた変数理論の χ^2 乗検定)。

また、 $\phi = 7\pi/4$ の実験値が量子力学に従う simulation 値と特に大きく外れていたため、それを除いて $ndf = 7$ の χ^2 乗検定をすると、

$$\chi_{QM}^2 = 3.505 \quad (4.3)$$

$$\chi_{HV}^2 = 45.752 \quad (4.4)$$

となり, 量子力学の棄却率は 10 % 強なので 80 % ほど正しく, 隠れた変数理論の棄却率は 99 % 以上となった .

しかし, setting の変化などの, $\phi = 7\pi/4$ のカウント数だけがうまく計れなくなるような要因は見当たらなかったので, $\phi = 7\pi/4$ の測定値を取り除くのは適当でないとし, 最終的な結果としては量子力学は 5 % 程度正しく, 隠れた変数理論は 99 % 以上で棄却できるという結果を採用した .

ただし, その他の系統誤差や, simulation 自体が不完全で実験を再現しきれていない可能性も考慮すると, 系統誤差はさらに大きくなる . そうすると量子力学の採択率はもう少し良くなり, 隠れた変数理論の棄却率は悪くなる .

4.4 補足

4.4.1 ADC 分布の fitting について

図 4.1 において, ヒストグラムのガウス分布 fitting にできるだけ系統誤差が入らないように工夫をしたので, その方法を述べる . まず, 適当なガウス分布 fitting によってある σ を求め, NaI-PMT については 1.5σ , plastic-PMT については 2σ の範囲をピークから抜き出す . そうして得られた山型のグラフの RMS を用いて, ピークから NaI-PMT については $\text{RMS} \times 1.5$, plastic-PMT については $\text{RMS} \times 1.0$ の範囲で, あらためてガウス分布 fitting をして, 最終的な mean と σ を求めた . このようにして, できるだけ客観的な値をもとにして fitting をおこなった .

4.4.2 simulation の妥当性について

Simulation では $\phi = 3\pi/4, \pi, 5\pi/4$ でのカウント数がそれぞれ同じ値になるはずの $\phi = 7\pi/4, 0, \pi/4$ でのカウント数より誤差の範囲を超えて多くなっている . 実験値ではこの傾向は見られなかったものの, その原因を考えると, 放出される γ 線が back-to-back であり, Compton 散乱は前方散乱が多いための必然であると推測される .

2 つの NaI-PMT が向き合う形になる $\phi = 3\pi/4, \pi, 5\pi/4$ において入射 γ 線が鉛直方向から傾いて plastic scintillator に入ってくると, Compton 散乱をする際に上下ともに前方散乱して NaI-PMT に検出されやすくなる . (図 4.7 参照) ただし, 入射 γ 線の傾き方によっては上下ともに後方散乱して NaI-PMT に検出されにくくなる . (図 4.8 参照) よって, 前方散乱する確率を σ_f , 後方散乱する確率を σ_b とすると, $\phi = 3\pi/4, \pi, 5\pi/4$ におけるカウント数は大雑把に $\sigma_f \times \sigma_f + \sigma_b \times \sigma_b$ に比例する . 逆に, $\phi = 0, \pi/4, 7\pi/4$ でのカウント数は $\sigma_f \times \sigma_b + \sigma_b \times \sigma_f$ に比例する .

この 2 式を比べると $\sigma_f > \sigma_b$ より, $\sigma_f \times \sigma_f + \sigma_b \times \sigma_b > \sigma_f \times \sigma_b + \sigma_b \times \sigma_f$ となり, $\phi = 3\pi/4, \pi, 5\pi/4$ でのカウント数が比較的多くなる . よってカウント数のずれは理論的に正しく simulation は正しいと考えられる .

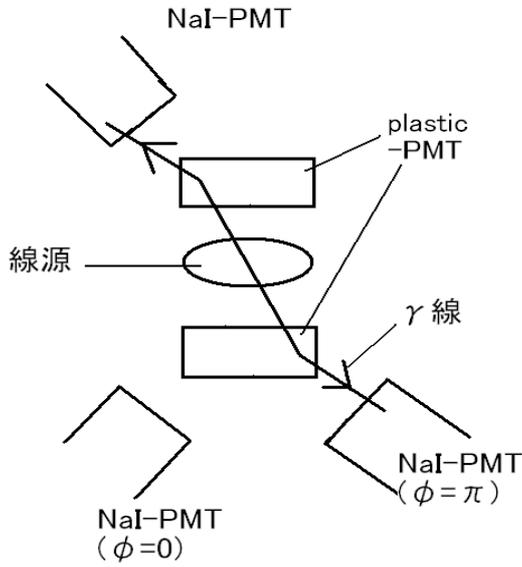


図 4.7: $\phi = \pi$ のときの前方散乱

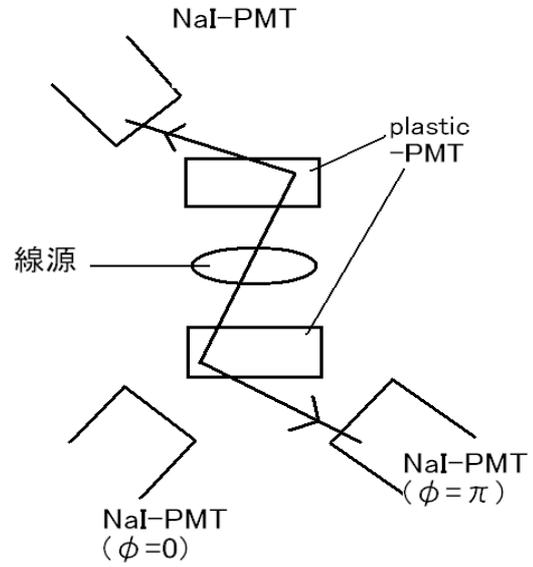


図 4.8: $\phi = \pi$ のときの後方散乱

表 4.2: simulation で得られたカウント数

ϕ [rad]	量子力学に従う simulation	誤差(量子力学)	隠れた変数理論に従う simulation	誤差(隠れた変数理論)
0	41093	202.71	46281	215.13
$\pi/4$	57725	240.26	59007	242.91
$\pi/2$	79678	282.27	75172	274.15
$3\pi/4$	63349	251.69	63783	252.55
π	43980	209.71	50207	224.06
$5\pi/4$	63244	251.48	64092	253.16
$3\pi/2$	80046	282.92	74717	273.34
$7\pi/4$	58845	242.57	59142	243.19

第5章 Simulation

私たちが setting を決めるためにもっとも参考としたデータは simulation の結果である。この章では、どのようにして simulation を行っていったのかを説明したいと思う。

5.1 simulation の手法

Simulation を行ううえで必要となったのは、一様乱数をどのようにしてある確率分布 $f(x)$ に従うように変換するかということである。私たちはこのために 2 つの手法を用いた。その手法を以下に説明したいと思う。ここで乱数 P は 0 から 1 までの一様乱数を用いることにし、考える領域を V とする。

5.1.1 逆関数法

まずは、確率分布に対して逆関数を求めるのが比較的容易な場合を考える。(たとえば、 $y = \alpha x$, α : constant) ここでの考え方は次のようなものである。

図 5.1 より、確率分布のグラフを短冊状に切って、縦に並べていきこれを集めたものを 1 に規格化し、これに対して、乱数を振っていき、このときのもともとの x の値を求めていくという方法である。

実際の手順としては、まず

$$\int_V f(x) \quad (5.1)$$

を計算して、その最大値を 1 に規格化する。これを $F(x)$ とする。次に乱数 P を用いて

$$x = F^{-1}(P) \quad (5.2)$$

を求める。以上のような方法で、確率分布 $f(x)$ に従うように乱数を振ることが出来る。

5.1.2 棄却法

次に、Klein-Nishina formula のような、複雑で逆関数を求めるのが困難な分布に従うように乱数を振っていく方法を説明したいと思う。ここでの考え方は、図 5.2 のように、まず長方形の領域 V に一様に乱数 P を振っていき、その後、乱数が確率分布のグラフの下側 (図の黒い部分) に振られた場合は採用、上側に振られた場合は不採用とする方法である。

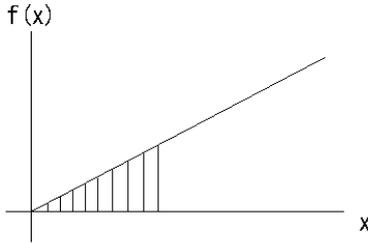


図 5.1: 逆関数法

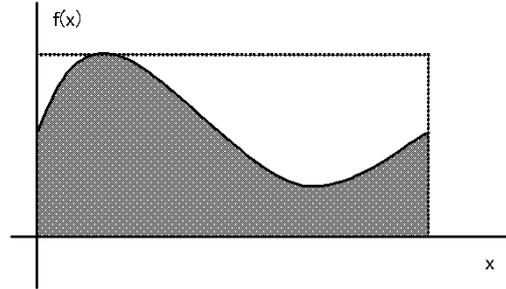


図 5.2: 棄却法

5.2 simulation の手順

次に、どのような順番で simulation のプログラムを書いていったのかを説明していきたいと思う。

1. 線源上で back-to-back の 線が放出される位置

円形の線源から均一に 線が放出されるように乱数を振りたいので、線源の中心からの距離 r については、確率分布 $f(r) = ar$ (a :定数) に従うように逆関数法を用いて、

$$r = R\sqrt{P} \quad (5.3)$$

と振った。ここで、 R :線源の半径、 P :一様乱数である。また角度 θ については 0 から 2π まで一様に振った。つまり、

$$\theta = 2\pi P \quad (5.4)$$

とした。

2. back-to-back の 線が放出される方向

Back-to-back の 線は球面一様に放射されるようにした。つまり、立体角の積分のときと同様の考えで $\cos \theta$ 、 ϕ について一様に乱数を振った。

3. 線の plastic scintillator 内での反応距離 L

反応確率は $\exp(-L/r)$ (但し、plastic に対しては、 $r = 103\text{mm}$) に比例するという事実を用いて、逆関数法より

$$L = 1 - r \times \log(1 - P) \quad (5.5)$$

で一様乱数を振った。

4. Compton 散乱が plastic scintillator 内でおきる条件

線の出る位置の座標と、その方向を Cartesian 座標系であらわし、その座標が plastic scintillator 内部に入っているかどうかを確認した。つまり、散乱する点の座標を (x,y,z) , plastic scintillator のサイズを CHw, CHl, CHh とすると、

$$|x| < CHw \quad (5.6)$$

$$|y| < CHl \quad (5.7)$$

$$|z| < CHh \quad (5.8)$$

という条件を与えた。

これから後は、plastic scintillator 内で Compton 散乱をしたとして、散乱角 θ, ϕ を球面一様に乱数を振ることによって決めた。ただし、実際には θ は一様ではなく、Klein-Nishina formula に従った分布をするので、棄却法により θ を決定する。

5. 偏光の決定方法

Klein-Nishina formula を用いるには、まず、散乱面と偏光方向のなす角 η を決めねばならない。偏光上で散乱した線に対しては、 $\eta_a = 0$ or $\pi/2$ かは、下での散乱を無視して考えることができ、それぞれの確率が $1/2$ となる。次に、下で散乱した線に対しては、

$\eta_a = 0$ のとき、

$$\eta_b = 0(\text{probability: } \frac{1}{2}(1 - k \cos 2\phi))$$

$$\eta_b = \pi/2(\text{probability: } \frac{1}{2}(1 + k \cos 2\phi))$$

また、 $\eta_a = \pi/2$ のとき、

$$\eta_b = 0(\text{probability: } \frac{1}{2}(1 + k \cos 2\phi))$$

$$\eta_b = \pi/2(\text{probability: } \frac{1}{2}(1 - k \cos 2\phi))$$

となるように乱数を振る。

6. 散乱するかどうかの判定

散乱方向は既に乱数を振ることによって決定しているが、すべての方向に等確率に飛んでいくわけではない。どの方向にどれだけの確率で散乱するかを決めているのが Klein-Nishina formula で、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \eta \right) \quad (5.9)$$

で与えられる。これは、偏光に依存しているので、5 で決めた η を用いて、棄却法で散乱したかどうかを判定した。もし、この条件で reject された場合は、最初からやり直しになる。

7. 線が NaI scintillator に入るかどうかの判定

6 までで Compton 散乱が行われたので、最後に線が NaI scintillator に入ったかどうかを座標変換を行った後に判定した。ここで、plastic scintillator のときと同様に反応距離 (このときは、 $r=27\text{mm}$) を考えた。

以上のような手順で simulation のプログラムを作り、setting の決定に用いた。

第6章 Summary

下図に示した通り，量子論を支持する結果が得られ，ベルの不等式が破られた．したがって，实在論を捨てなければ，このような現象を記述できない．

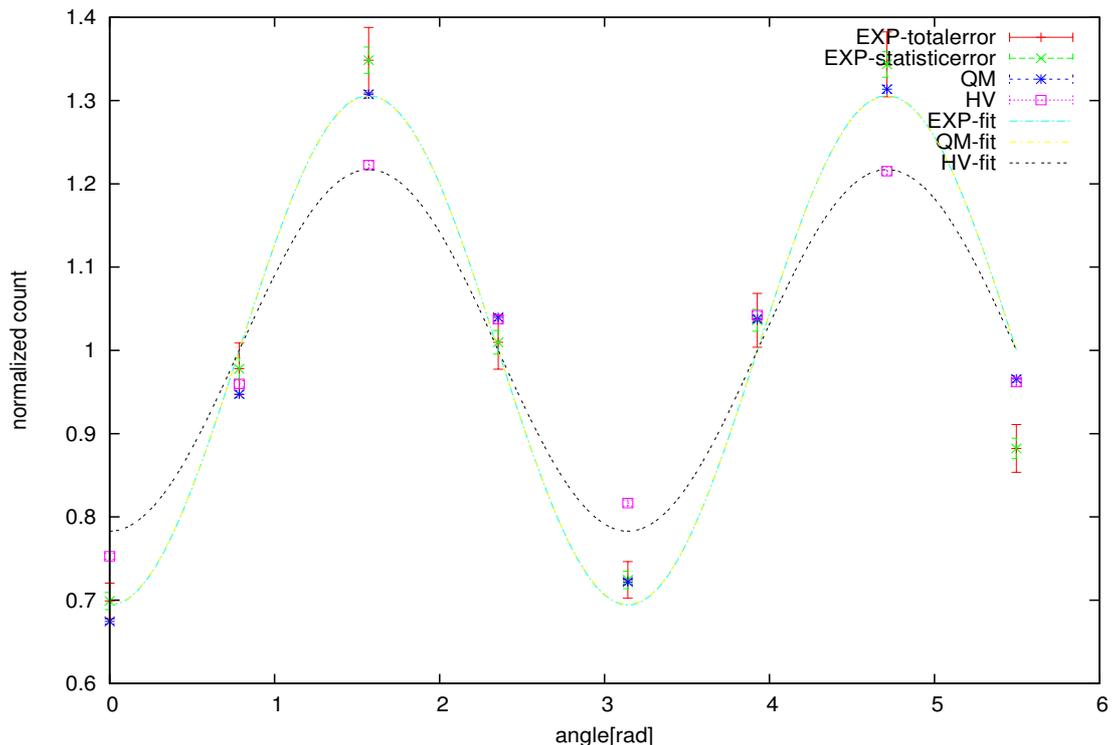


図 6.1: 実験結果

6.1 反省

今回の実験では，結果としては良いものが得られたが，反省すべき点が2つあるのでここで述べておきたいと思う．

まず，第一に線源，plastic scintillator，NaI scintillator の距離を近づけて，同じ時間でとれるサンプル数を多くして誤差を小さくしたものの，simulation では一緒の結果になって欲しいところのデータ ($\pi/4, 7\pi/4$) がぶれてしまったということである．この原因としては，距離を近づけたことにより，角度なましが大きくなり，NaI scintillator の 70° 散乱の光電吸収の山の中に，Compton 散乱の山が入ってしまい，無駄なデータを有効データとしてしまったためだと思われる．

第二に，plastic scintillator の calibration の結果が実験前後で多少変化してしまったことである．この原因としては，Compton edge に対して fitting する際に，fitting のやりかたによって，その場所が変化してしまうためだと考えられる．

6.2 今後の展望

最後に，今後，どのようにしたらよりよい結果が得られるかについて，いくつか考察しておきたいと思う．

まず，結果を評価するときに必要な誤差を減らすための方法について考察したい．この実験では，統計誤差より系統誤差が大きくなってしまったので，系統誤差を減らすことを考えなければならない．この対策としてまず思い浮かぶのは，今回の実験で使った道具では 1mm 単位で設置するのが限界なので，より精密に設置できる装置を使うという方法が考えられる．それでも，系統誤差が統計誤差と比べて小さくしきれない場合は，系統誤差を例えば，simulation で評価してやる必要がある（長さに 1mm の誤差を加えた simulation を作る）．

また，前節で述べたようなデータのぶれを改善するには，単純に，もう少し距離を離すという方法も考えられる．これを詳しく調べるためには，今回の simulation では，考慮されていない，Compton 散乱の山と，光電吸収の山のオーバーラップまで考えた simulation を作れば，この問題も克服できるものとする．

その他の案として，今回は散乱体に plastic scintillator を用いたが，NaI scintillator を用いるという考えもある．なぜなら，もし NaI scintillator のほうが光電吸収の効果を差し引いても plastic scintillator より Compton 散乱を起こしやすければ，カウント数を減らさずに散乱体の体積を小さく出来，角度のプレを小さく出来るからである．これについて考えてみると，NaI scintillator は反応距離を求める際の r が plastic scintillator に比べて小さいので二回以上散乱した場合についても考慮する必要がある．ここで，一回のみ散乱した欲しいデータから二回以上散乱した無駄なデータを取り除けるかどうかをみてみると，すべてを取り除くのは不可能なので，NaI scintillator を使う場合，一回散乱に比べて二回散乱が無視できるほどに小さくなっていないなければならない．これを計算してみると実際の NaI scintillator のサイズでは一回のみの散乱より二回以上の散乱の確率が多いので NaI scintillator は散乱体としては使えないという結論が得られる．ちなみに，もし 3mm のサイズの NaI scintillator が作れたとすると，二回以上の散乱は十分無視できるほど減少する．また，二回以上の散乱が完全に取り除ける場合を考えても，一回のみ散乱する確率を比較すると，plastic scintillator の方が有利であることがわかる．よって，この実験で plastic scintillator を使ったのは正しい判断であったという結論が導かれる．

それから，今回は $\pi/4$ おきに 8 点測定したが， χ^2 乗検定は測定点の数にはよらないから，(相関が得られる限界の)2 点のみを測定してもよかった．この場合，fitting による定性的な議論は説得力を失うが，こまめに回転台を回しにこななくてよいし，回転対称性の確認も少なくともすむので，圧倒的に実験が楽になる．

謝辞

最後に，半年間この実験を支えてくださった南條さん，TA の永井さん，そして笹尾さんに心から感謝いたします．