

Einstein は正しいか？  
～ EPR パラドックスを検証する ～

上田 仁彦   阪上 大地   高橋 翼   長尾 悠人   山本 隆太

2008 年 10 月 6 日

# 目次

第 1 章	理論	2
1.1	EPR パラドックス	2
1.2	量子力学と隠れた変数理論	3
1.3	Bell の不等式	3
1.4	量子力学と Bell の不等式	5
1.5	Bell の不等式を満たすための条件	6
第 2 章	実験方法	7
2.1	実験の原理	7
2.2	実験の概要	10
2.3	実験のセットアップ	10
2.3.1	実験装置	10
2.3.2	鉛による $\gamma$ 線の遮蔽	11
2.3.3	$\beta^+$ 線の遮蔽	11
2.4	測定回路	11
2.4.1	High Voltage	14
2.4.2	Discriminator	14
2.4.3	Amplifier	14
2.4.4	Coincidence	14
2.4.5	VETO	14
2.4.6	Gate Generator (2) における Gate の Width	14
第 3 章	解析	16
3.1	キャリブレーション	16
3.2	有効カウント数の決定	18
3.2.1	有効カウント数の決定手順	18
3.2.2	有効カウント数の $\phi$ 依存性	18
第 4 章	Simulation	21
4.1	動機	21
4.2	Simulation	21
4.2.1	Simulation 方法	21
4.2.2	逆関数法	22
4.2.3	棄却法	22
4.2.4	仮定	23

4.2.5	Simulation で用いたパラメータ . . . . .	23
4.3	Simulation と実験の比較 . . . . .	24
<b>第 5 章</b>	<b>考察</b>	<b>26</b>
5.1	理論とのずれ . . . . .	26
5.2	非対称性の定性的理解 . . . . .	26
5.3	非対称性の補正 . . . . .	28
5.4	角度なまし効果 . . . . .	31
5.5	角度なまし効果の定量的見積もり . . . . .	32
5.6	最終的な補正 . . . . .	34
	反省	37
	謝辞	38

# 第1章 理論

## 1.1 EPR パラドックス

1935年に Einstein, Podolsky, Rosen が EPR パラドックスを提唱し、隠れた変数理論の必要性を主張した。ここでは角運動量 0 の光子対の偏光を二地点で測定するというモデルについて述べる。

まず、パラポジトロニウムについて説明する。パラポジトロニウムは  $^1S_0$  の状態にあり、内部パリティの積はマイナスである。したがって、

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$$

によって生じる 2 つの  $\gamma$  の状態は、

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle|R_2\rangle - |L_1\rangle|L_2\rangle)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} |R_j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_j\rangle + i|y_j\rangle) : \text{右円偏光状態 (RHC)} \\ |L_j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_j\rangle - i|y_j\rangle) : \text{左円偏光状態 (LHC)} \\ |R_1\rangle|R_2\rangle &= \frac{1}{2}(|x_1\rangle|x_2\rangle - |y_1\rangle|y_2\rangle + i|x_1\rangle|y_2\rangle + i|y_1\rangle|x_2\rangle) \\ |L_1\rangle|L_2\rangle &= \frac{1}{2}(|x_1\rangle|x_2\rangle - |y_1\rangle|y_2\rangle - i|x_1\rangle|y_2\rangle - i|y_1\rangle|x_2\rangle). \end{aligned}$$

よって、

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle|R_2\rangle - |L_1\rangle|L_2\rangle) = \frac{i}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle|y_2\rangle + |y_1\rangle|x_2\rangle).$$

この系において次のような思考実験を考える。

1. 測定位置  $\alpha$  で RHC (LHC) を測定すると、 $\beta$  では必ず RHC (LHC) だと予測できる。したがって、 $\beta$  では RHC または LHC のどちらかである。
2.  $\alpha$  で何を測定しても、 $\beta$  での光の性質は変わらない (Einstein の局所性の原理)。したがって、 $\beta$  では RHC または LHC である。  
つまり、 $\beta$  では 50% の確率で  $x$  偏光または  $y$  偏光であるということになる。
3.  $\alpha$  で  $x$  偏光 ( $y$  偏光) を測定すると、 $\beta$  では必ず  $y$  偏光 ( $x$  偏光) だと予測できる。

4. 2では $\alpha$ で何を測定しても何か情報が伝わって $\beta$ での光の性質が変わるということではなく、 $\beta$ での $x, y$ 偏光は50%ずつであると言っているのに、3では $\alpha$ での測定によって $\beta$ での光の性質が変わり、 $\beta$ での $x, y$ 偏光が完全に決定されている。

よって、2と3は矛盾する。

これがEPRパラドックスである。しかし、隠れた変数が存在し、それにより円偏光を測定したときの結果と直線偏光を測定したときの結果がパラポジトロニウムが対消滅した時点で決定論的に決まっているとすると、RHC (LHC) であることと $x$ 偏光 ( $y$ 偏光) であることの両方が正確に予言できることはEinsteinの局所性を仮定しても矛盾しない。これによりパラドックスではなくなり、隠れた変数理論ならうまく説明できるといえる。

## 1.2 量子力学と隠れた変数理論

量子力学では、2つの光子の偏光は、観測するまでは2つの状態の重ね合わせになっており、一方の光子の偏光を観測した瞬間、他方の光子の偏光が決まる(波束の収束)。

一方、隠れた変数理論では、2つの光子の偏光状態はポジトロニウムが崩壊したときから決まっており、今は発見されていない変数(隠れた変数)が偏光状態を支配している、というものである。

## 1.3 Bellの不等式

Bellの不等式は隠れた変数理論が満たすべき偏光の相関の上限を与える式である。後で述べるが、量子力学ではこの上限を破ることができ、量子力学と隠れた変数理論を区別することができる。ここでは、2つの linear polarizer  $\alpha, \beta$ を用意する。この $\alpha, \beta$ では、光子がある方向 $\phi$ に偏光していれば+1、その垂直方向に偏光していれば-1を出力する。 $\alpha$ を $\phi_i$ の方向、 $\beta$ を $\phi_j$ の方向に置き、多数回測定する。 $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ そして、 $\alpha_i\beta_j$ の平均 $\overline{\alpha\beta}$ を計算する。すると、隠れた変数理論では、Bellの不等式

$$| \overline{\alpha_4\beta_2} + \overline{\alpha_4\beta_3} | + | \overline{\alpha_1\beta_2} - \overline{\alpha_1\beta_3} | < 2$$

が成立する。具体的な計算は、 $N_i$ を事象 $i$ が起こる確率とすると、表1.1より、

$$\overline{\alpha_4\beta_2} = -N_1 + N_2 - N_3 + N_4 + N_5 - N_6 + N_7 - N_8 - N_9 + N_{10} - N_{11} + N_{12} + N_{13} - N_{14} + N_{15} - N_{16}$$

$$\overline{\alpha_4\beta_3} = -N_1 + N_2 + N_3 - N_4 - N_5 + N_6 + N_7 - N_8 - N_9 + N_{10} + N_{11} - N_{12} - N_{13} + N_{14} + N_{15} - N_{16}$$

$$\therefore \overline{\alpha_4\beta_2} + \overline{\alpha_4\beta_3} = 2(-N_1 + N_2 + N_7 - N_8 - N_9 + N_{10} + N_{15} - N_{16})$$

$$\overline{\alpha_1\beta_2} = -N_1 - N_2 - N_3 - N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + N_9 + N_{10} + N_{11} + N_{12} - N_{13} - N_{14} - N_{15} - N_{16}$$

$$\overline{\alpha_1\beta_3} = -N_1 - N_2 + N_3 + N_4 - N_5 - N_6 + N_7 + N_8 + N_9 + N_{10} - N_{11} - N_{12} + N_{13} + N_{14} - N_{15} - N_{16}$$

$$\therefore \overline{\alpha_1\beta_2} - \overline{\alpha_1\beta_3} = 2(-N_3 - N_4 + N_5 + N_6 + N_{11} + N_{12} - N_{13} - N_{14})$$

であり、これからBellの不等式が導かれる。

表 1.1: 隠れた変数理論での偏光の組合せ.

確率	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
$N_1$	+	+	+	+	-	-	-	-
$N_2$	+	+	+	-	-	-	-	+
$N_3$	+	+	-	+	-	-	+	-
$N_4$	+	+	-	-	-	-	+	+
$N_5$	+	-	+	+	-	+	-	-
$N_6$	+	-	+	-	-	+	-	+
$N_7$	+	-	-	+	-	+	+	-
$N_8$	+	-	-	-	-	+	+	+
$N_9$	-	+	+	+	+	-	-	-
$N_{10}$	-	+	+	-	+	-	-	+
$N_{11}$	-	+	-	+	+	-	+	-
$N_{12}$	-	+	-	-	+	-	+	+
$N_{13}$	-	-	+	+	+	+	-	-
$N_{14}$	-	-	+	-	+	+	-	+
$N_{15}$	-	-	-	+	+	+	+	-
$N_{16}$	-	-	-	-	+	+	+	+

## 1.4 量子力学と Bell の不等式

量子力学においては Bell の不等式は満たされない場合がある。量子力学においては、パラポジトロニウムから生じた 2 光子状態は

$$|F\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( |x_1\rangle|y_2\rangle + |y_1\rangle|x_2\rangle \right)$$

であり、

- $\alpha$  の方向を  $x$  軸と一致させる
- $x'$  軸は  $x$  軸に比べて  $\phi$  ずれている

とすると (図 1.1),

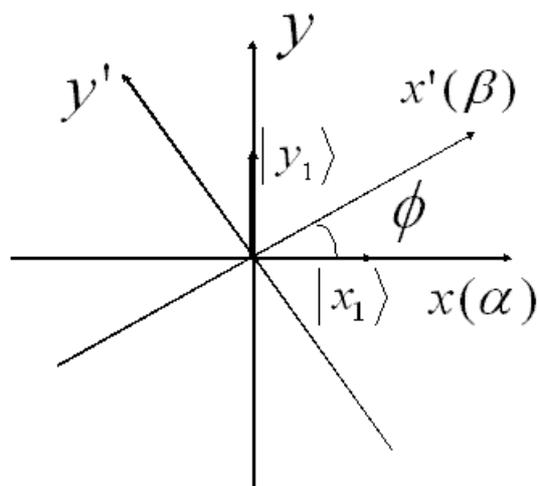


図 1.1:  $\alpha, \beta, \phi$  の取り方.

1.  $\alpha$  で  $x$  偏光を測定したとき ( $\alpha = +1$ )

光子 1 については  $|x_1\rangle$

光子 2 については  $|y_2\rangle = |x'\rangle \sin \phi + |y'\rangle \cos \phi$

の状態である。したがって、

$$\begin{aligned} (\alpha = +1, \beta = +1 \text{ である確率}) &= \frac{1}{2} \sin^2 \phi \\ (\alpha = +1, \beta = -1 \text{ である確率}) &= \frac{1}{2} \cos^2 \phi. \end{aligned}$$

2.  $\alpha$  で  $y$  偏光を測定したとき ( $\alpha = -1$ )

$$\begin{aligned} \text{光子 1 については} & \quad |y_1\rangle \\ \text{光子 2 については} & \quad |x_2\rangle = |x'\rangle \cos \phi + |y'\rangle \sin \phi \end{aligned}$$

の状態である. したがって,

$$\begin{aligned} (\alpha = -1, \beta = +1 \text{ である確率}) &= \frac{1}{2} \cos^2 \phi \\ (\alpha = -1, \beta = -1 \text{ である確率}) &= \frac{1}{2} \sin^2 \phi. \end{aligned}$$

よって, 1, 2 より,

$$\overline{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (+\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) + \frac{1}{2} (-\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = -\cos 2\phi$$

となる. ここで,

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = \frac{3}{8}\pi, \quad \phi_3 = \frac{\pi}{8}, \quad \phi_4 = \frac{\pi}{4}$$

と選ぶと,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_4\beta_2} &= -\cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{8}\pi\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \overline{\alpha_4\beta_3} &= -\cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \overline{\alpha_1\beta_2} &= -\cos 2\left(\frac{3}{8}\pi\right) = -\cos \frac{3}{4}\pi = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \overline{\alpha_1\beta_3} &= -\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

より,

$$\left| \overline{\alpha_4\beta_2} + \overline{\alpha_4\beta_3} \right| + \left| \overline{\alpha_1\beta_2} - \overline{\alpha_1\beta_3} \right| = 2\sqrt{2} > 2$$

となって, Bell の不等式は破られる.

## 1.5 Bell の不等式を満たすための条件

隠れた変数理論における偏光の相関を

$$\overline{\alpha\beta} = -k \cos 2\phi$$

と仮定する. これを Bell の不等式に代入すると,

$$f \equiv \left| \cos 2(\phi_4 - \phi_2) + \cos 2(\phi_4 - \phi_3) \right| + \left| \cos 2(\phi_1 - \phi_2) - \cos 2(\phi_1 - \phi_3) \right| < \frac{2}{|k|}$$

より,

$$f_{\max} = 2\sqrt{2} < \frac{2}{|k|} \quad \left( \phi_1 = 0, \phi_2 = \frac{3}{8}\pi, \phi_3 = \frac{\pi}{8}, \phi_4 = \frac{\pi}{4} \right).$$

よって,

$$|k| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる. これが隠れた変数理論における相関の上限である.

## 第2章 実験方法

### 2.1 実験の原理

Compton 散乱を用いて偏光を測定することで実験的に  $k$  の値を求めることができる。線源から back-to-back で発生した 2 つの  $\gamma$  線,  $\gamma_1, \gamma_2$  が散乱体において Compton 散乱され, それぞれ検出器  $C_1, C_2$  で検出される (図 2.1)。

このとき 2 つの  $\gamma$  線の散乱面がなす角を  $\phi$  とすると, 散乱されやすい方向は  $\phi$  に依存している (図 2.2)。よって, 2 つの検出器で  $\gamma$  線が同時に観測される確率が  $\phi$  によってどのように変化するかを実験で確かめればよい。

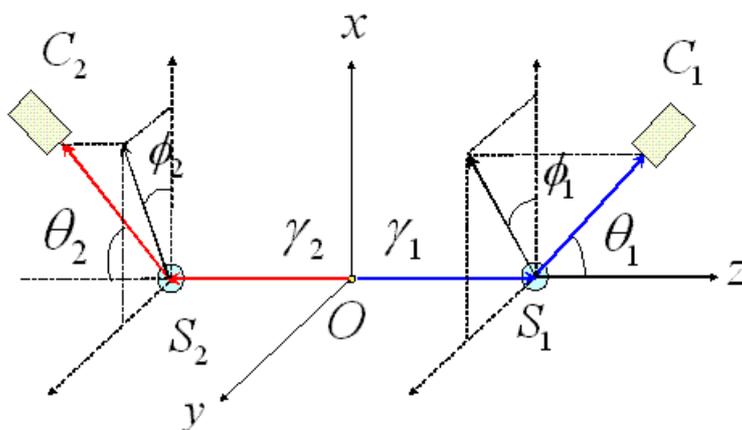


図 2.1: 実験の仕組み。

微分断面積は, Klein-Nishina の式より, 散乱面と偏光面のなす角を  $\eta$  として,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 (\zeta - 2\sin^2\theta\cos^2\eta)$$

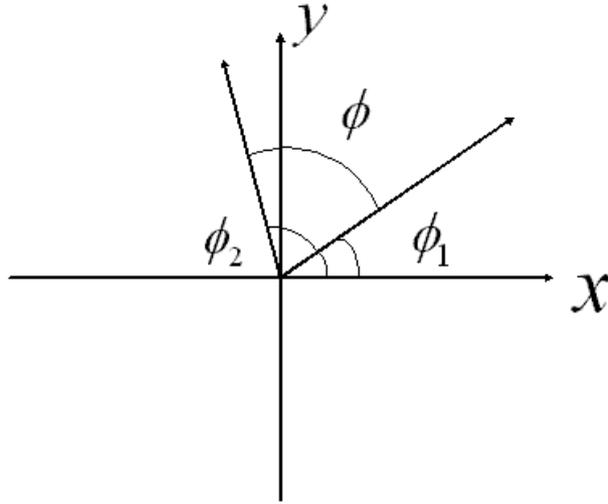


図 2.2: 2つの  $\gamma$  線の散乱面がなす角  $\phi$ .

である. ここで,

$$\zeta = \frac{h\nu'}{h\nu} + \frac{h\nu}{h\nu'}$$

入射  $\gamma$  線のエネルギー :  $h\nu$

散乱  $\gamma$  線のエネルギー :  $h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$

古典電子半径 :  $r_e = \frac{\hbar \alpha}{m_e c}$

微細構造定数 :  $\alpha = \frac{1}{137}$

電子の質量 :  $m_e$

偏光が散乱面に平行 ( $\eta = 0^\circ$ ), 垂直 ( $\eta = 90^\circ$ ) の場合はそれぞれ

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 (\zeta - 2\sin^2 \theta)$$

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \zeta$$

となる. 光子  $\gamma_1, \gamma_2$  の散乱平面を  $\pi_1(OS_1C_1), \pi_2(OS_2C_2)$  とし, またその偏光方向を  $\epsilon_1, \epsilon_2$

とする. 検出器  $C_1$  で  $\gamma_1$  が検出された際,

$$\begin{aligned} (\pi_1 \parallel \epsilon_1 \text{ である確率}) &= \frac{\zeta_1 - 2\sin^2 \theta_1}{2(\zeta_1 - \sin^2 \theta_1)} \\ (\pi_1 \perp \epsilon_1 \text{ である確率}) &= \frac{\zeta_1}{2(\zeta_1 - \sin^2 \theta_1)} \end{aligned}$$

となる.

1.  $\pi_1 \parallel \epsilon_1$  であるとき

$$\overline{\alpha\beta} = -k\cos 2\phi, \quad \alpha = +1$$

であるので,

$$\overline{\beta} = -k\cos 2\phi$$

となる. 検出器  $C_2$  に入った光子について,

$$\begin{aligned} (\pi_2 \parallel \epsilon_2 \text{ である確率}) &= a \\ (\pi_2 \perp \epsilon_2 \text{ である確率}) &= b \end{aligned}$$

とすると, 確率の和が 1 となることより,

$$a + b = 1.$$

また,  $\overline{\beta} = -k\cos 2\phi$  より,

$$a - b = -k\cos 2\phi.$$

これらより,

$$\begin{aligned} (\pi_2 \parallel \epsilon_2 \text{ である確率}) &= a = \frac{1 - k\cos 2\phi}{2} \\ (\pi_2 \perp \epsilon_2 \text{ である確率}) &= b = \frac{1 + k\cos 2\phi}{2} \end{aligned}$$

となる. 以上のことから,  $\pi_1 \parallel \epsilon_1$  のもとで  $C_1, C_2$  で同時に光子を観測する確率は

$$\frac{\zeta_1 - 2\sin^2 \theta_1}{2(\zeta_1 - \sin^2 \theta_1)} \left[ \frac{1 - k\cos 2\phi}{2} \frac{\zeta_2 - 2\sin^2 \theta_2}{2(\zeta_2 - \sin^2 \theta_2)} + \frac{1 + k\cos 2\phi}{2} \frac{\zeta_2}{2(\zeta_2 - \sin^2 \theta_2)} \right]$$

と書ける.

2.  $\pi_1 \perp \epsilon_1$  であるとき

上の場合と同様に計算して,

$$\begin{aligned} (\pi_2 \parallel \epsilon_2 \text{ である確率}) &= a = \frac{1 + k\cos 2\phi}{2} \\ (\pi_2 \perp \epsilon_2 \text{ である確率}) &= b = \frac{1 - k\cos 2\phi}{2} \end{aligned}$$

が得られる. よって,  $\pi_1 \perp \epsilon_1$  のもとで  $C_1, C_2$  で同時に光子を観測する確率は

$$\frac{\zeta_1}{2(\zeta_1 - \sin^2 \theta_1)} \left[ \frac{1 + k \cos 2\phi}{2} \frac{\zeta_2 - 2\sin^2 \theta_2}{2(\zeta_2 - \sin^2 \theta_2)} + \frac{1 - k \cos 2\phi}{2} \frac{\zeta_2}{2(\zeta_2 - \sin^2 \theta_2)} \right]$$

と書ける.

以上を足し合わせると,  $C_1, C_2$  に同時に  $\gamma$  線が検出される相対確率 ( $\phi = 45^\circ$  の場合を基準とした比率) は,

$$R = 1 - k \left( \frac{\sin^2 \theta_1}{\zeta_1 - \sin^2 \theta_1} \right) \left( \frac{\sin^2 \theta_2}{\zeta_2 - \sin^2 \theta_2} \right) \cos 2\phi$$

$$\zeta_j = \frac{1}{2 - \cos \theta_j} + 2 - \cos \theta_j \quad (j = 1, 2)$$

となる. 2つの検出器に同時に  $\gamma$  線が検出されるカウント数を  $f(\phi)$  とすると,  $f(\phi)$  は  $R$  に比例するので,

$$f(\phi) = NR = N \left[ 1 - k \left( \frac{\sin^2 \theta_1}{\zeta_1 - \sin^2 \theta_1} \right) \left( \frac{\sin^2 \theta_2}{\zeta_2 - \sin^2 \theta_2} \right) \cos 2\phi \right]$$

と書ける. よって, 実験結果を  $f(\phi)$  でフィットすることで  $k$  が求められ, 系を支配する法則が量子力学なのか, 隠れた変数理論なのかを決定することができる.

## 2.2 実験の概要

図 2.3 のように線源 ( $^{22}\text{Na}$ ) を置き, 線源から back-to-back に出た 2つの  $\gamma$  線を上下に配置したプラスチックシンチレータ (以下, 図中では CH と略記することがある) によってそれぞれ Compton 散乱させ, 散乱された  $\gamma$  線を NaI シンチレータ (以下, 図中では NaI と略記することがある) にて検出する. プラスチックシンチレータ, NaI シンチレータには光電子増倍管 (PMT) が付けられており, これによって  $\gamma$  線によるシンチレーション発光を観測する. このとき, 上下のプラスチックシンチレータと NaI シンチレータの計 4つのシンチレータが同時に  $\gamma$  線を検出した場合にのみカウントを行うようにした. この測定を, 2つの NaI シンチレータのなす角  $\phi$  を  $0^\circ$  から  $180^\circ$  まで  $45^\circ$  刻みで行った.

## 2.3 実験のセットアップ

実験装置は図 2.3, 図 2.4, 図 2.5, 図 2.6, 図 2.7 のようにした (以下, 簡単に説明する).

### 2.3.1 実験装置

図のような台の上部と下部にシンチレータ・PMT を設置し, その中間に線源を設置した (線源は台の上部に取り付けられている). 線源・プラスチックシンチレータ・NaI シンチレータの成す角が約  $90^\circ$  となるようにした. 上下の NaI シンチレータが鉛直軸まわりに成す角度が  $\phi$  となり, 台の上部を回転させることで  $\phi$  を変えて測定できる.

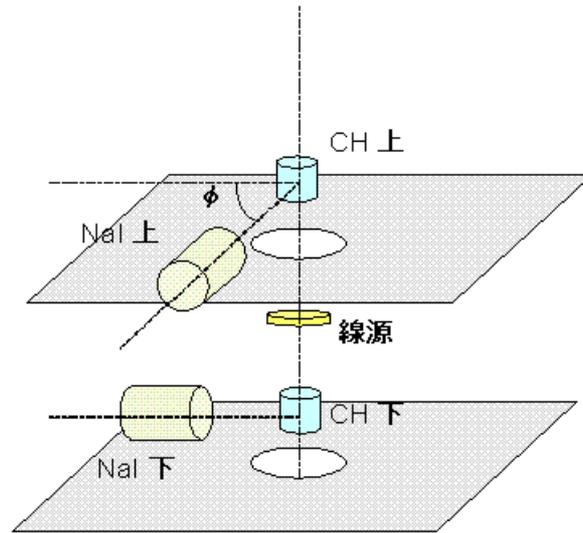


図 2.3: 実験装置の全体図.

### 2.3.2 鉛による $\gamma$ 線の遮蔽

線源から NaI シンチレータに直接  $\gamma$  線が入るのを防ぐために鉛遮蔽を行った. 線源のエネルギーが 511[KeV] の場合の透過率は, 透過距離を  $x$ [cm] として, 鉛の密度  $\rho = 11.3$ [g/cm<sup>3</sup>], 減衰係数  $\eta = 0.161$ [cm<sup>2</sup>/g] より

$$(\text{透過率}) \propto e^{-\rho\eta x} = e^{-1.81x}$$

である. また, 線源のエネルギーが 1275[KeV] の場合の透過率は, 減衰係数  $\eta = 0.0588$ [cm<sup>2</sup>/g] より

$$(\text{透過率}) \propto e^{-0.664x}$$

となる. これにより, 厚さ 5[cm] の鉛によって直接入ってくる 線の大部分 (511[KeV] では 99.9%以上, 1275[KeV] では 96.4%) を抑えることができる.

### 2.3.3 $\beta^+$ 線の遮蔽

$\beta^+$  線を遮蔽するために, 線源上部をアルミホイルで覆った. 線源下部はあらかじめ鉄で  $\beta^+$  線が遮蔽されている.

## 2.4 測定回路

実験に用いた測定回路は図 2.8 のようにした.

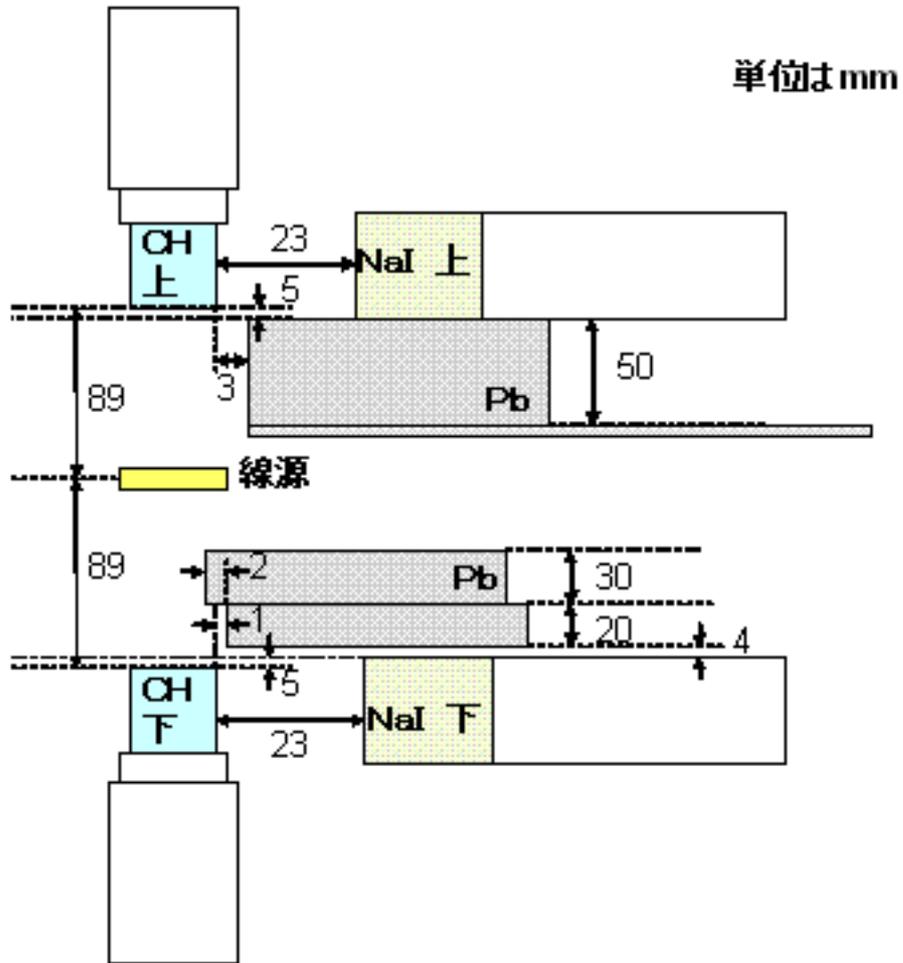


図 2.4: 側面図.

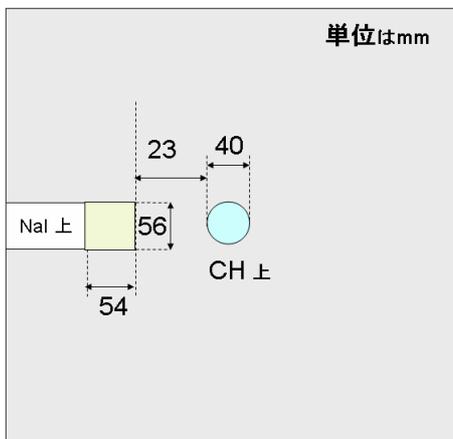


図 2.5: 上面図.

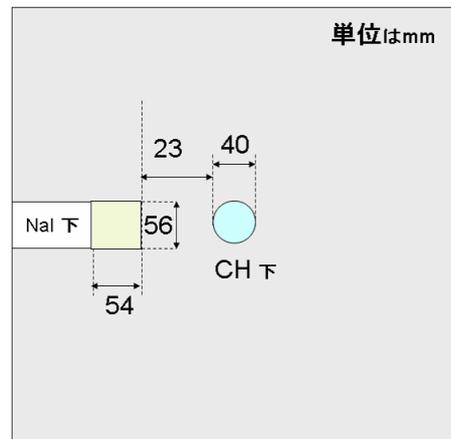


図 2.6: 下面図.



図 2.7: 実際のセットアップ.

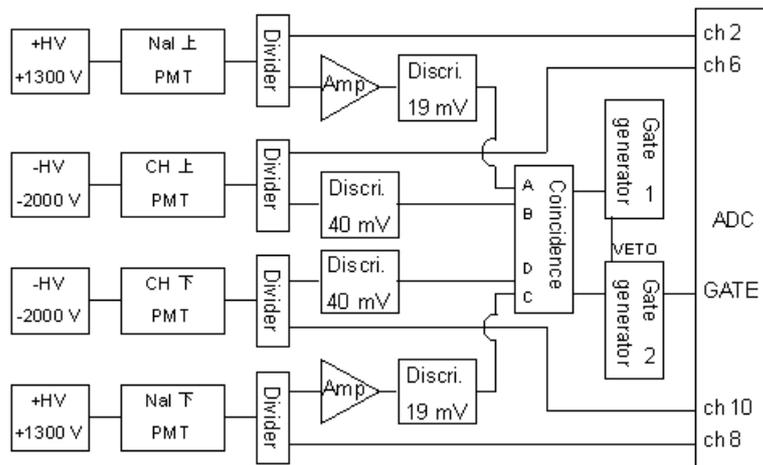


図 2.8: 測定回路.

### 2.4.1 High Voltage

PMT の電源電圧は、測定したいエネルギー領域を見やすくするために、正しく使用できる最大値に設定した (CH:  $-2000[V]$ , NaI:  $+1300[V]$ ).

### 2.4.2 Discriminator

gate へ信号を送るために discriminator を用いた.  $511[KeV]$  の  $\gamma$  線が  $\theta = 90^\circ$  で Compton 散乱されたときの信号 ( $256 [KeV]$ ) を取ることができ、かつ、ノイズを拾わないように Threshold の値を、NaI シンチレータでは最低値の  $19[mV]$ 、プラスチックシンチレータでは  $40[mV]$  に設定した. NaI の Threshold を最低値の  $19[mV]$  まで下げたのは、Compton edge をはっきりと見えるようにするためである. 一方、プラスチックシンチレータの Threshold を最低値より高くしたのは、ノイズによるものと思われる信号を除去するためである.

### 2.4.3 Amplifier

NaI シンチレータの PMT の信号は弱いので Threshold で切られてしまった. そのため、amplifier を用いて coincidence 用の信号を増幅した.

### 2.4.4 Coincidence

プラスチックシンチレータで散乱された  $\gamma$  線のみを NaI シンチレータにおいて検出するために、4つのシンチレータで coincidence を取り、gate generator(1) に送った.

### 2.4.5 VETO

gate generator(1) では coincidence から来た信号に対して gate を出す. その gate 信号を gate generator(2) の VETO に入力し、ここに信号が入っているときは gate generator(2) が信号を出さないようにした. これは、1つの gate が発生している間に別の信号が来ても重ならないようにするためである. VETO の幅は余裕をもって  $30[\mu sec]$  とした.

### 2.4.6 Gate Generator (2) における Gate の Width

width が小さすぎて PMT からの信号を検出しそこなうことがないように、gate の width を  $1[\mu sec]$ <sup>1</sup> とした (図 2.9).

---

<sup>1</sup>ADC の積分範囲の限界である.

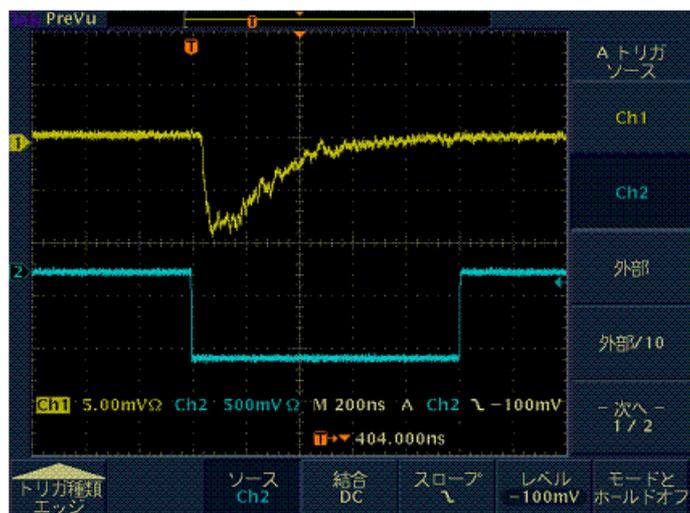


図 2.9: gate の width(オシロスコープ画面).

## 第3章 解析

### 3.1 キャリブレーション

ADC で得られたチャンネル数とエネルギーとの対応を得るために、上下の NaI シンチレータについてキャリブレーションを行った。なお 5 日間のデータ計測の間、チャンネル数とエネルギーの対応が大きく変わっていないことを確認するために、実験開始前と実験終了後の 2 回キャリブレーションを行った。

キャリブレーションには次の 3 つの線源を使用した。

- $^{22}\text{Na}$  (511[KeV], 1275[KeV])
- $^{60}\text{Co}$  (1173[KeV], 1333[KeV])
- $^{137}\text{Cs}$  (662[KeV])

5 つのエネルギーについて光電ピークを Gaussian でフィットし、得られた平均と標準偏差からチャンネル数とエネルギーの関係を一次関数でフィットした。その結果を表 3.1 に示す。ここで、表中の  $A$ ,  $B$  は次式のパラメータである。

$$(\text{エネルギー}) = A \times (\text{チャンネル数}) + B.$$

表 3.1: キャリブレーション結果.

	NaI シンチレータ (上)		NaI シンチレータ (下)	
	実験前	実験後	実験前	実験後
$A$	$0.6779 \pm 0.0189$	$0.6827 \pm 0.0093$	$1.2008 \pm 0.0211$	$1.2221 \pm 0.0137$
$B$	$126.46 \pm 14.26$	$124.64 \pm 6.48$	$127.78 \pm 15.39$	$132.30 \pm 10.25$

表 3.1 を見ればわかるように、実験の前後でキャリブレーション結果に大きな変化は無かった。これより今回のデータ計測は正当なものであったと言える。

そこで、実験前と実験後の計 10 点からチャンネル数とエネルギーの関係を一次関数でフィットした結果を表 3.2、および図 3.1 に示す。

表 3.2: キャリブレーション結果 (10 点でフィット).

	NaI シンチレータ (上)	NaI シンチレータ (下)
$A$	$0.6802 \pm 0.0091$	$1.2153 \pm 0.0171$
$B$	$125.82 \pm 6.57$	$129.71 \pm 12.63$

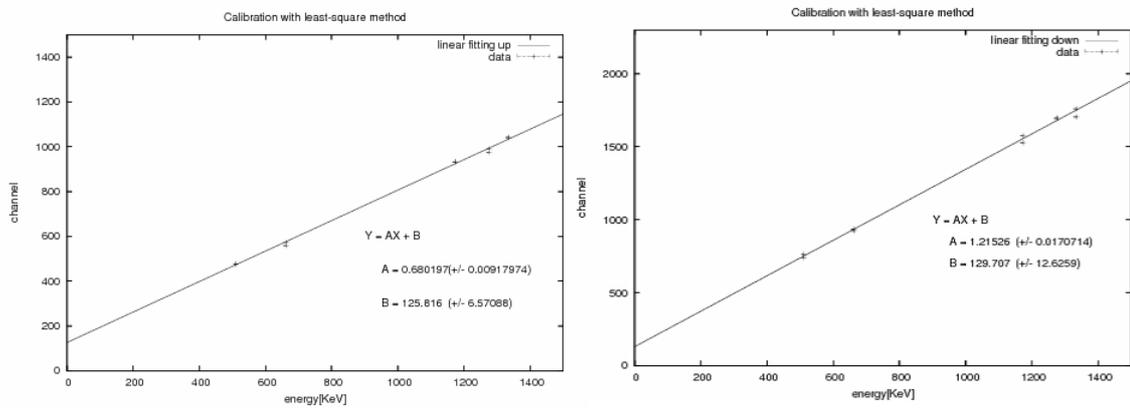


図 3.1: キャリブレーション結果 (10 点でフィット). 左: NaI シンチレータ (上), 右: NaI シンチレータ (下).

また表 3.2 の結果をもとに, NaI シンチレータ上下の ADC 分布にエネルギーの対応を加えたものを図 3.2, 図 3.3 に示す.

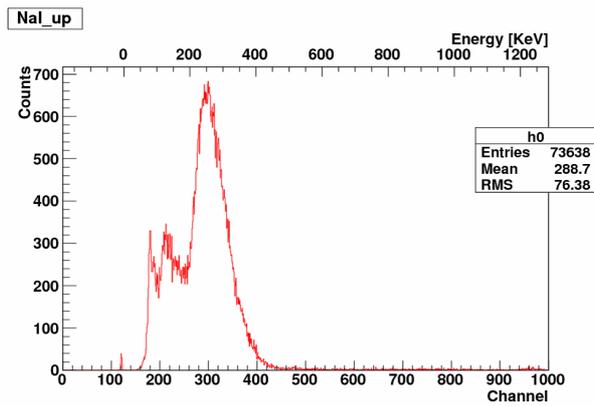


図 3.2: NaI シンチレータ (上) の ADC 分布. 下の横軸はチャンネル数, 上の横軸はエネルギー [KeV], 縦軸はカウント数. 光電ピークが 260[KeV] 付近に来ていることがわかる.

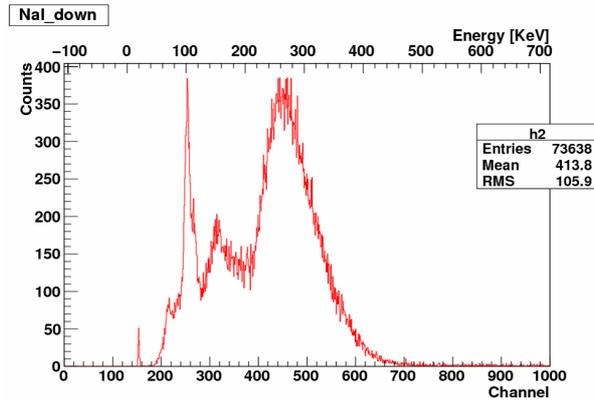


図 3.3: NaI シンチレータ (下) の ADC 分布. 下の横軸はチャンネル数, 上の横軸はエネルギー [KeV], 縦軸はカウント数. 光電ピークが 270[KeV] 付近に来ていることがわかる.

## 3.2 有効カウント数の決定

本実験ではカウント数の  $\phi$  依存性を調べる. そのため Threshold のゆらぎによるカウント数の変化や, バックグラウンドの影響を排除したい.

そこで各  $\phi$  ごとに, 次のようにして有効カウント数を決定し, その有効カウント数の  $\phi$  依存性を調べることにした.

### 3.2.1 有効カウント数の決定手順

1. NaI シンチレータの光電ピークおよびプラスチックシンチレータのピークを Gaussian でフィットする.
2. 上下の NaI シンチレータおよび上下のプラスチックシンチレータ全てで, [ピークの平均値  $\pm\sigma$ ] の範囲に入るデータのみを数え, 有効カウント数とした.

例として, NaI シンチレータ (上) およびプラスチックシンチレータ (上) を Gaussian でフィットした様子を図 3.4, 図 3.5 に示す.

### 3.2.2 有効カウント数の $\phi$ 依存性

以上の方法で有効カウント数を決定したところ, 表 3.3 のようになった.

表 3.3 の有効カウント数をプロットし, 次式でフィットしたものを図 3.6 に示す.

$$f(\phi) = N \left[ 1 - k \left( \frac{\sin^2 \theta_1}{\zeta_1 - \sin^2 \theta_1} \right) \left( \frac{\sin^2 \theta_2}{\zeta_2 - \sin^2 \theta_2} \right) \cos 2\phi \right].$$

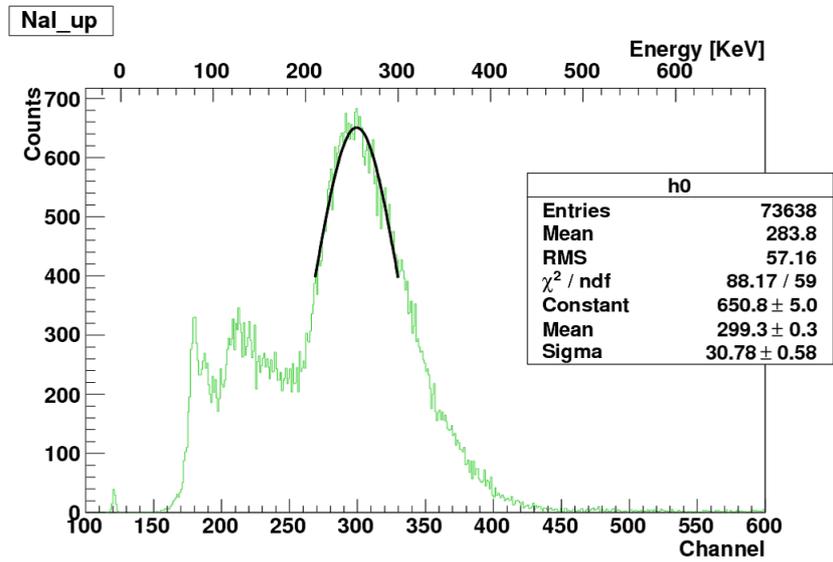


図 3.4: NaI シンチレータ (上) の光電ピークを Gaussian でフィットした様子.

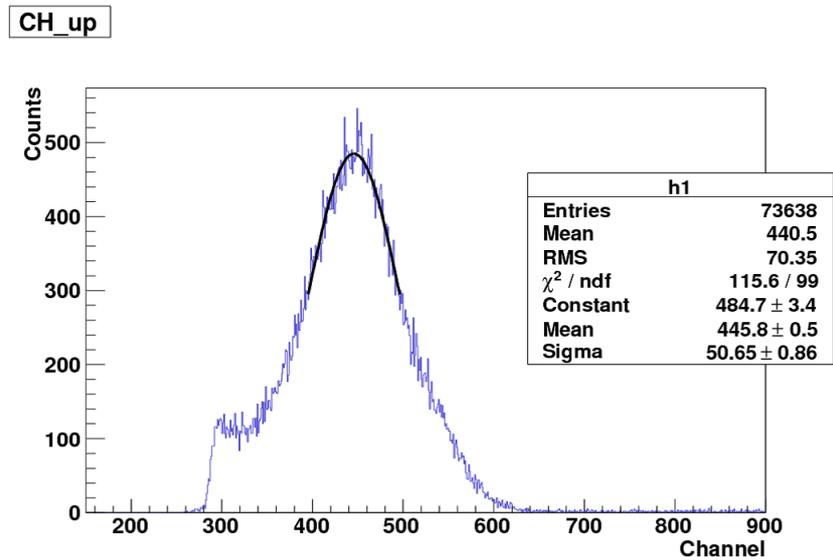


図 3.5: プラスチックシンチレータ (上) のピークを Gaussian でフィットした様子.

表 3.3: カウント数の  $\phi$  依存性.

$\phi$	有効カウント数	総カウント数
0°	9611 ± 98	73638
45°	11824 ± 109	85721
90°	15751 ± 126	103601
135°	15064 ± 123	98969
180°	12102 ± 110	83031

なお図 3.6 の p0 は上式の  $N$  に対応し, p1 は  $k$  に対応している. また  $\theta_1, \theta_2$  は, NaI シンチレータの光電ピークのエネルギーから次式を使って求めたところ,  $\theta_1 = 89^\circ, \theta_2 = 84^\circ$  となった.

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}.$$

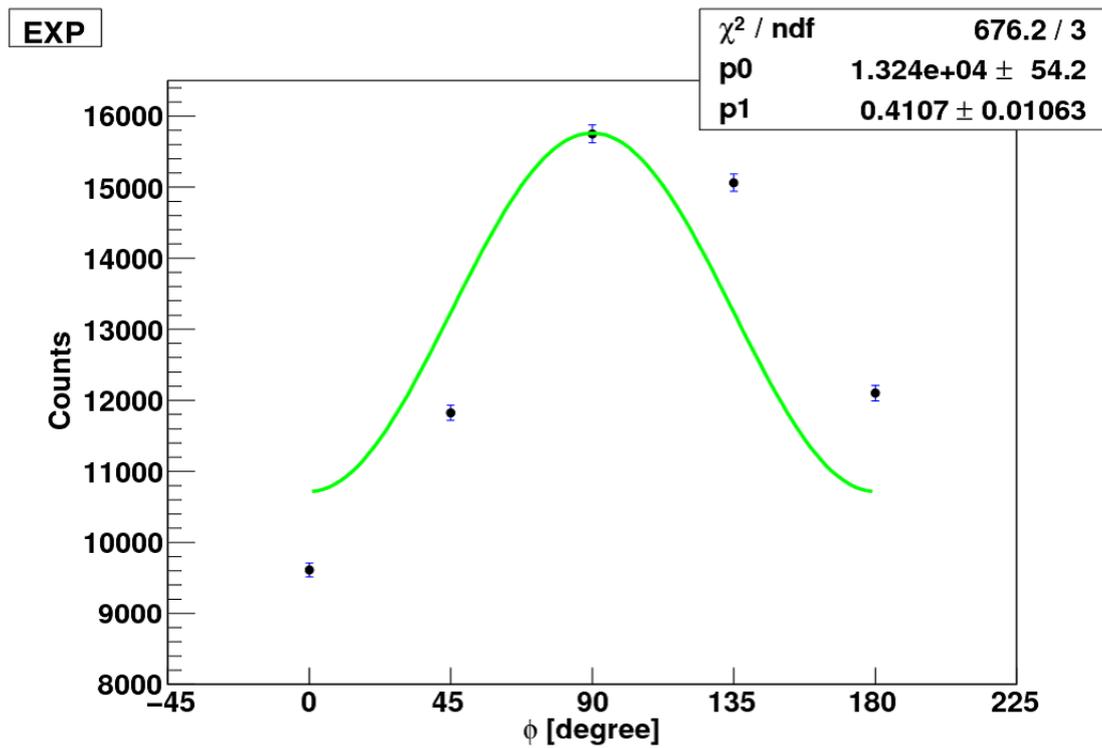


図 3.6: 有効カウント数の  $\phi$  依存性.

## 第4章 Simulation

### 4.1 動機

図 3.3 を見ると, 実験データは  $f(\phi)$  でうまくフィットできていない. これは, 実際のセットアップには, 理論と違い, 機器の大きさがあるためだと考えられる (詳しくは次章で述べる). そこで, 実験結果を理論と直接比較するために, 実際のセットアップに近い状況の下で, 量子力学, 隠れた変数理論それぞれについて simulation を行った.

### 4.2 Simulation

#### 4.2.1 Simulation 方法

モンテカルロ法で以下のように試行する.

1.  $2\gamma$  の光子の発生位置を特定, および速度方向を決定する.
2. 光子がプラスチックシンチレータに入るか判定し, 入らなければ破棄する.
3. 光子がプラスチックシンチレータ内で Compton 散乱を起こすか判定し, 散乱を起こさなければ破棄する.
4. 光子がプラスチックシンチレータ内で 2 回目, および 3 回目の Compton 散乱を起こすか判定し, 3 回目の Compton 散乱を起こした場合は破棄する.
5. 光子が NaI シンチレータに入るか判定し, 入らなければ破棄する.
6. 光子が NaI シンチレータで光電効果, および Compton 散乱を起こすか判定し, 起こさなければ破棄する.
7. 光子がプラスチックシンチレータで検出されるエネルギー (Compton 散乱による), および NaI シンチレータで検出されるエネルギーをファイルに出力する.

このとき, Compton 散乱の散乱位置は逆関数法を, Compton 散乱の散乱方向は棄却法を用いて求めた. また, 以下に  $\phi = 90^\circ$  での simulation 結果の一例を図示する. この図からもわかるように, NaI シンチレータで実験同様に光電ピーク, および Compton 散乱部分が見える. そのため, 実験と同様にして有効カウント数を決定する.

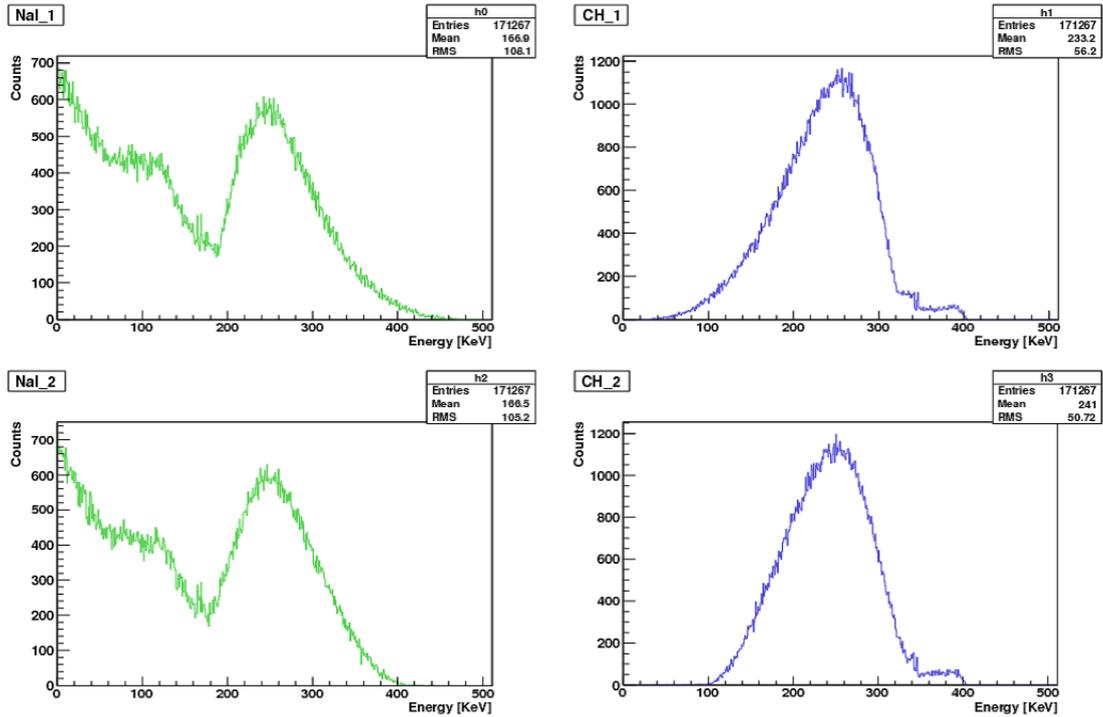


図 4.1: Simulation 結果のエネルギー分布.

#### 4.2.2 逆関数法

Compton 散乱の散乱位置は確率分布  $f(x) \propto e^{-\frac{x}{\lambda}}$  (図 4.2) に従う ( $\lambda$  は減衰長). この  $f(x)$  を積分した累積分布関数  $y = F(x) = \int_0^x f(t)dt$  (図 4.3) において  $y \in [0, F(\infty)]$  で乱数をふり, 逆関数  $x = F^{-1}(y)$  で散乱位置を求める.

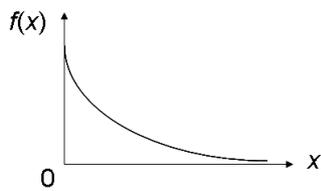


図 4.2: 確率分布  $f(x)$ .

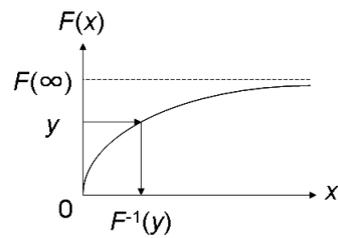


図 4.3: 累積分布関数  $F(x)$ .

#### 4.2.3 棄却法

2 回乱数をふり, これを点  $P(u, v)$  とする. この点  $P$  が図 4.4 のように確率分布  $f(x)$  内に入れば採用し, そうでなければ棄却する. ただし, 実際の simulation では, 2 変数ではなく

3変数の棄却法である.

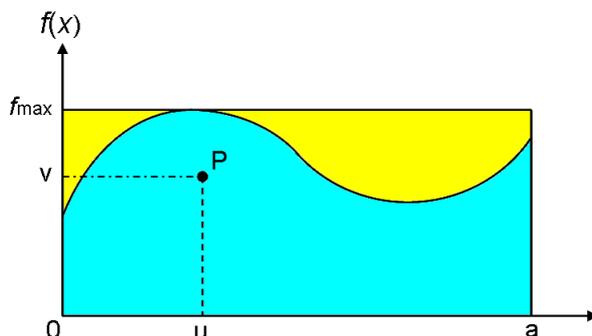


図 4.4: 棄却法.

#### 4.2.4 仮定

simulation を行う上で, 以下のことを仮定した.

1. 2 回目の Compton 散乱は, 偏光依存がなく, 散乱角  $\phi$  は一様であったとする.
2. プラスチックシンチレータ, および NaI シンチレータの減衰長は 1.0[KeV] 毎に変わるものとし, そのデータは NIST<sup>1</sup> から引用した.
3. NaI シンチレータ内で起こる Compton 散乱も偏光依存がなく, 散乱角  $\phi$  は一様であったとする.
4. プラスチックシンチレータで 2 回目の Compton 散乱が起きたとき, プラスチックシンチレータで落としたエネルギーは 1 回目と 2 回目の Compton 散乱で検出されるエネルギーの和とする.
5. NaI シンチレータで検出されるエネルギーは, 光電効果が起きた場合は, 光子の持っていたエネルギーに, Compton 散乱が起きた場合は, 散乱された電子の持つエネルギーとする.

#### 4.2.5 Simulation で用いたパラメータ

- 線源とプラスチックシンチレータとの距離: 8.9[cm]
- プラスチックシンチレータと NaI シンチレータとの距離: 2.3[cm]
- 線源の大きさ: 半径 0.10[cm] の球
- プラスチックシンチレータの大きさ: 半径 2.0[cm], 奥行き 4.0[cm]

<sup>1</sup>National Institute of Standards and Technology (<http://physics.nist.gov/PhysRefData/contents.html>)

- NaI シンチレータの大きさ: 半径 2.8[cm], 奥行き 5.4[cm]
  - プラスチックシンチレータの奥行き中央からの NaI シンチレータの中央のずれ: 0.30[cm]
- ただし, 距離のとり方については, 図 2.4 を参照.

### 4.3 Simulation と実験の比較

以下に, simulation 結果, および実験結果を示す (表 4.1). ここで, 表中の QM は量子力学に基づく simulation 結果を, HV は隠れた変数理論に基づく simulation 結果を示す.

表 4.1: simulation 結果 (有効カウント数).

$\phi$	実験値	QM	HV
0°	9611 ± 98	9322 ± 97	9852 ± 99
45°	11824 ± 109	11552 ± 107	11432 ± 107
90°	15751 ± 126	15500 ± 124	14470 ± 120
135°	15064 ± 123	14806 ± 122	14691 ± 121
180°	12102 ± 110	12295 ± 111	13167 ± 115

また,  $\phi = 90^\circ$  の有効カウント数でそれぞれ規格化したものを表 4.2, および図 4.5 に示す.

表 4.2: simulation 結果 ( $\phi = 90^\circ$  の有効カウント数で規格化した値).

$\phi$	実験値	QM	HV
0°	0.6102	0.6014	0.6809
45°	0.7507	0.7453	0.7900
90°	1.0000	1.0000	1.0000
135°	0.9564	0.9552	1.0153
180°	0.7683	0.7932	0.9100

表 4.2 の実験値と simulation 値を用いて,  $\chi^2$  を求める. ここで,  $\chi^2$  は以下の式から求める.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(N_i^E - N_i^S)^2}{\sigma_{N_i^E}^2 + \sigma_{N_i^S}^2}.$$

ただし,  $N_i^E =$  (規格化した実験値),  $N_i^S =$  (規格化した simulation 値)

$\sigma_{N_i^E} =$  (規格化した実験値の誤差),  $\sigma_{N_i^S} =$  (規格化した simulation 値の誤差).

誤差については, 誤差伝播の式に従って求めた. また, 自由度  $ndf = 5 - 1 = 4$  であることから, 量子力学 (QM) では  $\chi^2/ndf = 0.874$  (上側累積確率: 0.48), 隠れた変数理論 (HV) では  $\chi^2/ndf = 31.38$  (上側累積確率:  $3.5 \times 10^{-26}$ ) となった. このことから, 量子力学は実験結果と有意な差はなく, 一方で隠れた変数理論はほぼ 100% の確率で棄却される.

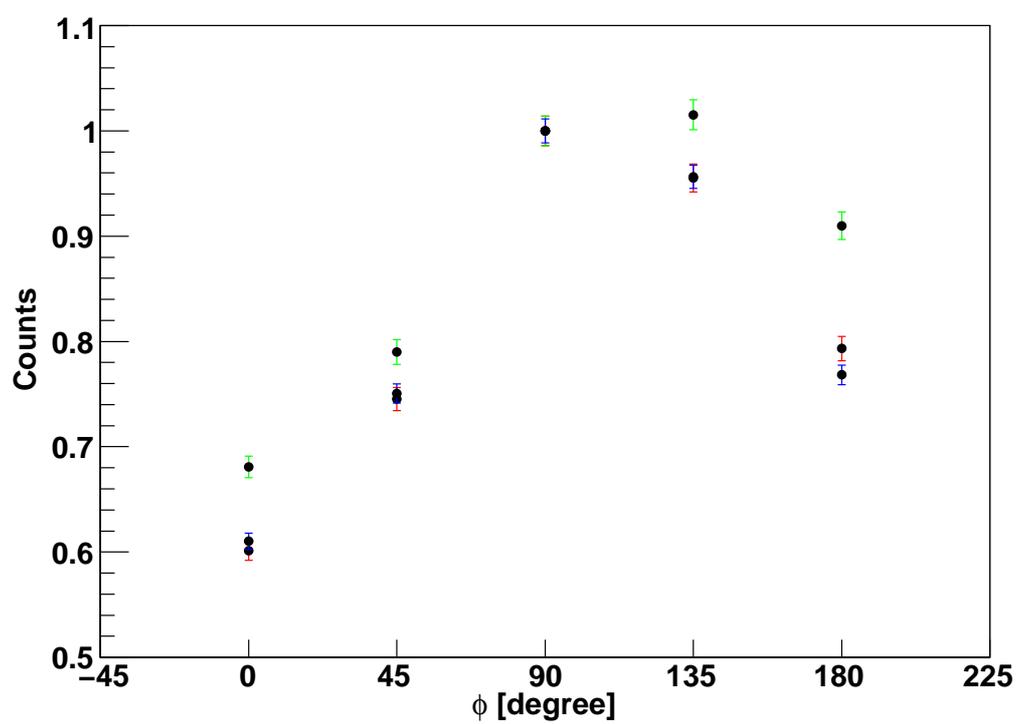


図 4.5: simulation と実験の比較 (青: 実験, 赤: QM, 緑: HV). なお, 縦軸の”Counts”は相対値である.

## 第5章 考察

### 5.1 理論とのずれ

4.1 で述べたように, 実験データ (図 3.6) は

$$f(\phi) = N \left[ 1 - k \left( \frac{\sin^2 \theta_1}{\zeta_1 - \sin^2 \theta_1} \right) \left( \frac{\sin^2 \theta_2}{\zeta_2 - \sin^2 \theta_2} \right) \cos 2\phi \right]$$

でうまくフィットできるような,  $\phi = 90^\circ$  に関して対称な形にはなっていない ( $N(0^\circ) < N(180^\circ)$ ,  $N(45^\circ) < N(135^\circ)$  となっている). この非対称性について以下考察する.

### 5.2 非対称性の定性的理解

前節で述べた非対称性は, プラスチックシンチレータに大きさがあることによるものと考えたと説明できることを以下に示す.

例として,  $\phi = 0^\circ$  と  $\phi = 180^\circ$  の場合を比較する. 図 5.1 のように, 散乱点がプラスチックシンチレータの中心からずれた (下側の散乱点が下側の NaI シンチレータに近い) 場合, 散乱点が NaI シンチレータを見込む立体角は, 散乱点がプラスチックシンチレータの中心である場合と比べて, 下側では大きくなる (このときの立体角を  $\Omega_{\text{大}}$  とおく). 一方, 上側では, 立体角は  $\phi = 0^\circ$  の場合は小さく (このときの立体角を  $\Omega_{\text{小}}$  とおく),  $\phi = 180^\circ$  の場合は立体角は  $\Omega_{\text{大}}$  となる. カウント数は上下の立体角の積に比例するので,  $\phi = 0^\circ$  の場合に比べ,  $\phi = 180^\circ$  の場合の方がカウント数が多くなる.

図 5.2 のように, 散乱点が図 5.1 とは反対方向にずれた場合は, 立体角は下側では  $\Omega_{\text{小}}$  となり, 上側では,  $\phi = 0^\circ$  の場合は  $\Omega_{\text{大}}$ ,  $\phi = 180^\circ$  の場合は  $\Omega_{\text{小}}$  となるため,  $\phi = 0^\circ$  の場合に比べ,  $\phi = 180^\circ$  の場合の方がカウント数が少なくなる.

以上をまとめると表 5.1 のようになる.

表 5.1: 非対称性の影響.

	$\phi = 0^\circ$	$\phi = 180^\circ$
図 5.1	$\Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{大}}$	$\Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{大}}$
図 5.2	$\Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{小}}$	$\Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{小}}$
合計	$\Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{大}} + \Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{小}}$	$\Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{大}} + \Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{小}}$

図 5.1 と図 5.2 の二つの場合を合わせると, カウント数は,  $\phi = 0^\circ$  では  $\Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{大}} + \Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{小}}$ ,  $\phi = 180^\circ$  では  $\Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{大}} + \Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{小}}$  に比例する. 自明な不等式から,

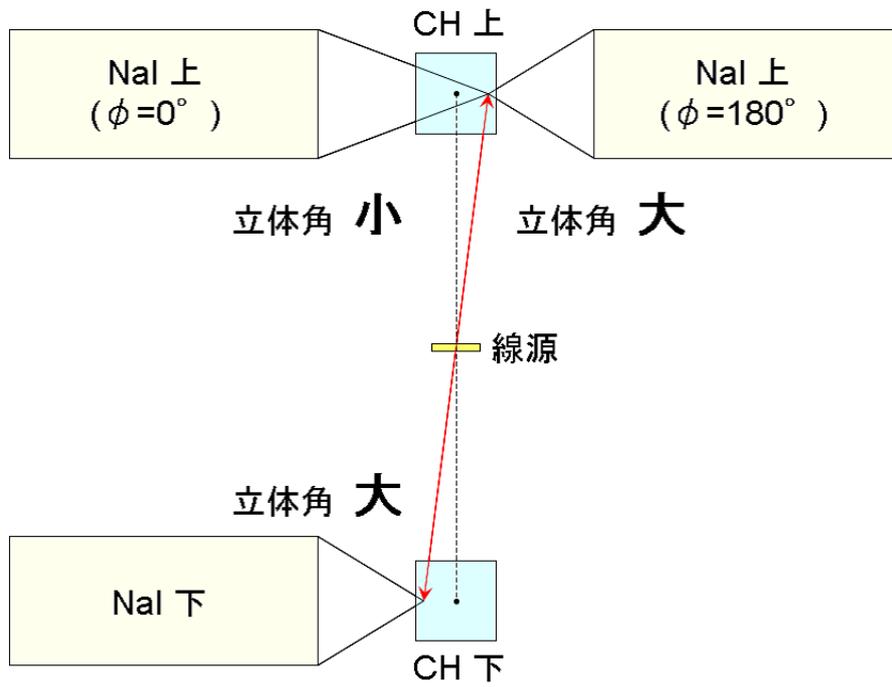


図 5.1: 散乱点が中心からずれた場合 (1).

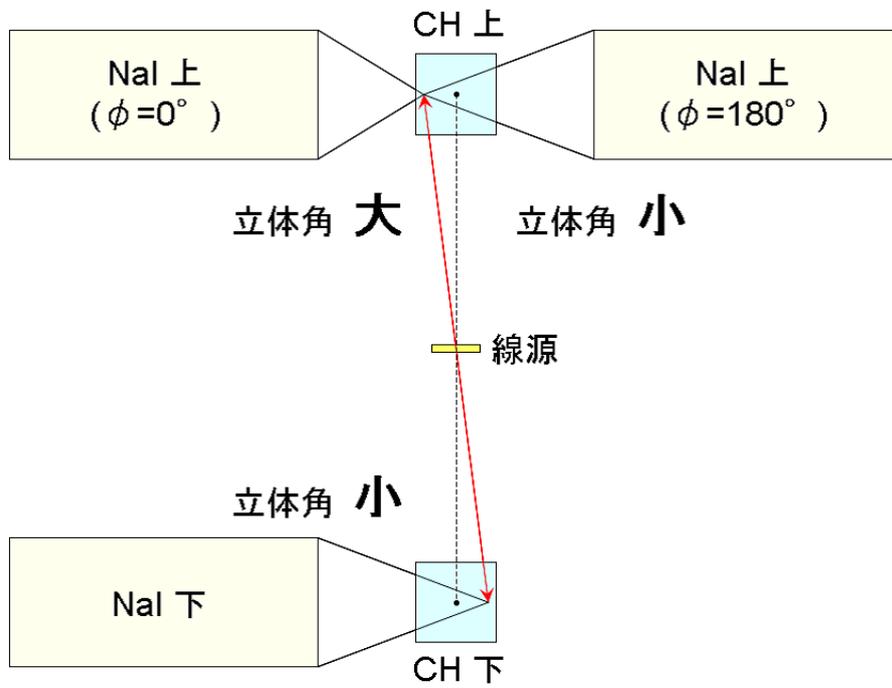


図 5.2: 散乱点が中心からずれた場合 (2).

$$\begin{aligned}
& (\Omega_{\text{大}} - \Omega_{\text{小}})^2 > 0 \\
\Leftrightarrow & \Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{大}} - \Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{小}} - \Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{大}} + \Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{小}} > 0 \\
\Leftrightarrow & \Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{大}} + \Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{小}} > \Omega_{\text{大}} \times \Omega_{\text{小}} + \Omega_{\text{小}} \times \Omega_{\text{大}} \\
\Leftrightarrow & N(180^\circ) > N(0^\circ)
\end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $\phi = 0^\circ$  の場合に比べ、 $\phi = 180^\circ$  の場合の方がカウント数が多くなることがわかる。 $\phi = 45^\circ$  と  $\phi = 135^\circ$  の場合も全く同様にして、 $N(45^\circ) < N(135^\circ)$  であることがわかる。

### 5.3 非対称性の補正

前節で、非対称性を定性的に理解できたが、次に、これを定量的に見積もることを考える。前節では、散乱点がプラスチックシンチレータの中心からずれた場合のうち、図 5.1 と図 5.2 の二つの場合のみを考えた。今度は、プラスチックシンチレータ内の他の散乱点についても考えたい。

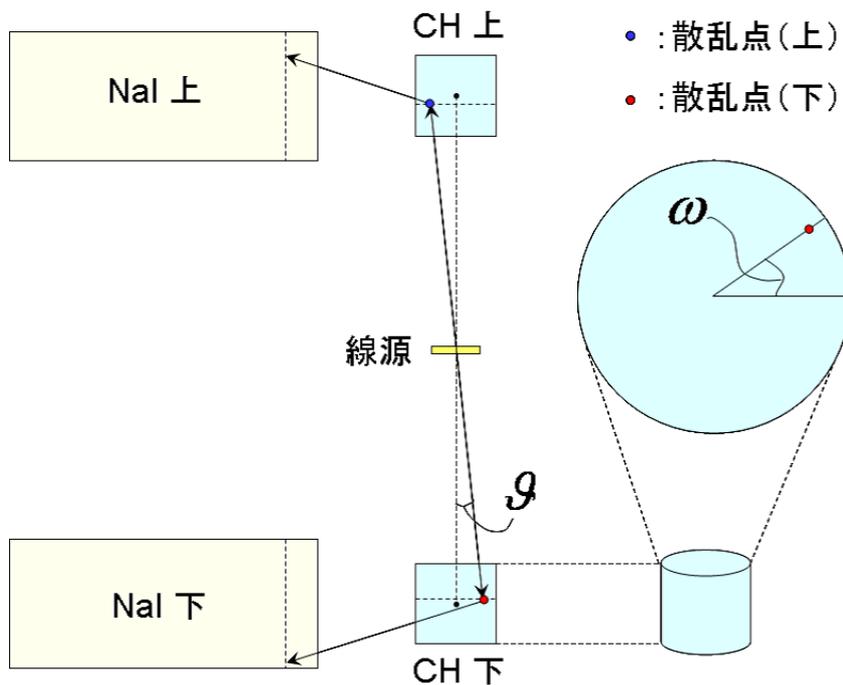


図 5.3:  $\gamma$  線対の発生方向  $\vartheta$ ,  $\omega$ .

まず、 $\gamma$  線対の発生点には広がりがあるが、簡単のために、線源の中心で発生するものとし、その発生方向を図 5.3 のように、 $\vartheta$ ,  $\omega$  とおく。さらに、散乱はプラスチックシンチレー

タの奥行き (線源に近いほうから測って) 1.9[cm] の面で起こると近似する<sup>1</sup>. これ以上下の  $\gamma$  線の散乱点が決まる.

同様に, 散乱された  $\gamma$  線は, NaI シンチレータの奥行き (プラスチックシンチレータに近いほうから測って) 1.2[cm] の面 (以下, 検出面と呼ぶ) で検出されると近似する (255.5[KeV] の光子が厚さ 5.4[cm] の NaI シンチレータで反応したときの平均反応点が 1.2[cm] であることに基づく). 上 (下) 側のプラスチックシンチレータの散乱点から上 (下) 側の NaI シンチレータの検出面までの距離を  $l_{\uparrow}$  ( $l_{\downarrow}$ ) とおく. また, 上側と下側の NaI シンチレータがなす角 (正確には, 上 (下) 側について, プラスチックシンチレータの中心軸と NaI シンチレータの中心軸を含む平面 (二つの軸は同一平面上にあるとする) を  $\alpha_{\uparrow}$  ( $\alpha_{\downarrow}$ ) とおくと,  $\alpha_{\uparrow}$  と  $\alpha_{\downarrow}$  がなす角) を  $\phi_0$  ( $= 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ ) とおく. ここで, 簡単のため,  $l_{\uparrow}$  ( $l_{\downarrow}$ ) が等しい任意の散乱点は, NaI シンチレータを見込む立体角が等しいと近似する (図 5.4). 具体的には, 散乱点から NaI シンチレータの中心軸に下ろした垂線の足から見た立体角を用いる. つまり, 上 (下) 側の立体角  $\Omega_{\uparrow}$  ( $\Omega_{\downarrow}$ ) は,

<sup>1</sup>これは, 511[KeV] の  $\gamma$  線が厚さ 4.0[cm] のプラスチックシンチレータで散乱されたときの平均散乱点が 1.9[cm] であることに基づいている. すなわち, 散乱体に  $N_0$  個の  $\gamma$  線が入射したとき, 距離  $x$  でまだ散乱されずに残っている  $\gamma$  線が  $N(x)$  個あったとすると, 減衰長を  $\lambda$  とし,

$$\frac{dN(x)}{dx} = -\frac{1}{\lambda}N(x), \quad N(0) = N_0 \quad \Leftrightarrow \quad N(x) = N_0e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

が成り立つ. よって,  $\gamma$  線が距離  $x \sim x + dx$  で散乱される確率は,

$$-\frac{dN(x)}{dx} \frac{dx}{N_0} = -\left(-\frac{1}{\lambda}N_0e^{-\frac{x}{\lambda}}\right) \frac{dx}{N_0} = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$

となる. したがって,  $\gamma$  線が厚さ  $d$  の散乱体中で散乱される確率は,

$$\int_0^d \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx = \left[-e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_0^d = 1 - e^{-\frac{d}{\lambda}}$$

となる. ゆえに,  $\gamma$  線が厚さ  $d$  の散乱体中で散乱されたときに, その散乱が距離  $x \sim x + dx$  で起こっていた確率は,

$$\frac{\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx}{1 - e^{-\frac{d}{\lambda}}}$$

である. よって, 散乱点の期待値は,

$$\int_0^d \frac{x \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}}{1 - e^{-\frac{d}{\lambda}}}dx = \left[\frac{-xe^{-\frac{x}{\lambda}}}{1 - e^{-\frac{d}{\lambda}}}\right]_0^d + \int_0^d \frac{e^{-\frac{x}{\lambda}}}{1 - e^{-\frac{d}{\lambda}}}dx = \lambda - \frac{de^{-\frac{d}{\lambda}}}{1 - e^{-\frac{d}{\lambda}}}$$

となる. これに, プラスチックシンチレータの厚さ  $d = 4.0$ [cm], プラスチックシンチレータ中での 511[KeV] の  $\gamma$  線の減衰長  $\lambda = 10.76$ [cm] を代入すると,

$$\lambda - \frac{de^{-\frac{d}{\lambda}}}{1 - e^{-\frac{d}{\lambda}}} = 1.88[\text{cm}] \cong 1.9[\text{cm}]$$

となる.

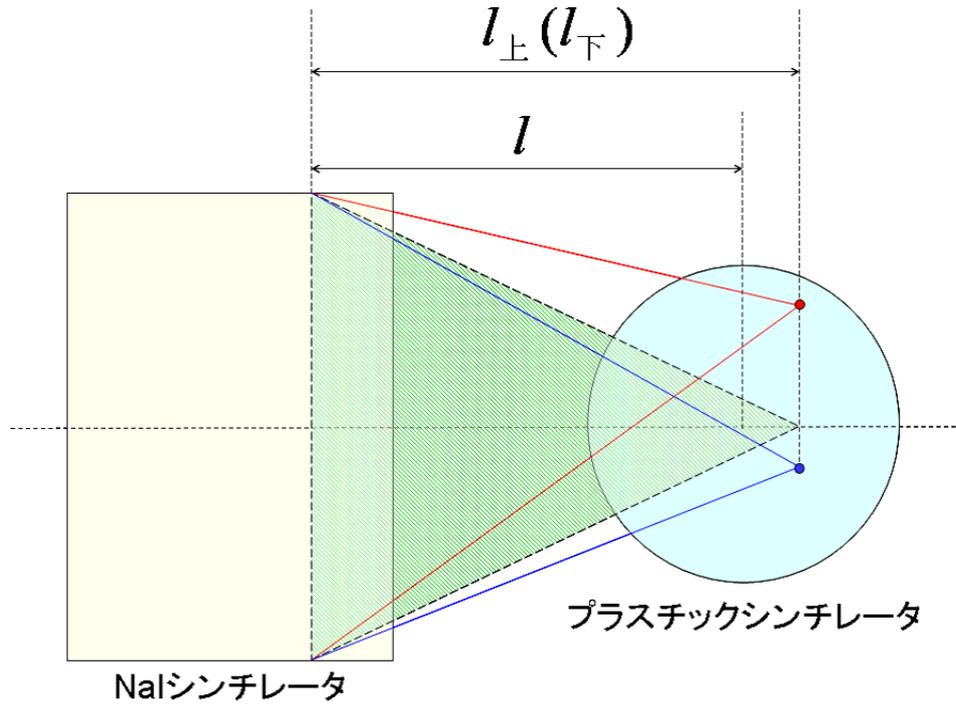


図 5.4: 散乱点が見込む NaI シンチレータの立体角.

$$\Omega_{\text{上}} = \frac{\pi r_{\text{NaI}}^2}{l_{\text{上}}^2} \quad \left( \Omega_{\text{下}} = \frac{\pi r_{\text{NaI}}^2}{l_{\text{下}}^2} \right)$$

となる. ここで,  $r_{\text{NaI}} = 2.8[\text{cm}]$  は NaI シンチレータの半径であり, 上下で共通である. 以上より, 上下の立体角の積を全ての散乱点で積分した値を  $I(\phi_0)$  とすると,

$$\begin{aligned} I(\phi_0) &= \int_0^{\vartheta_{\text{max}}} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \Omega_{\text{上}} \Omega_{\text{下}} \\ \vartheta_{\text{max}} &= \arctan \left( \frac{r_{\text{CH}}}{L} \right) \\ l_{\text{上}} &= l - L \tan \vartheta \cos(\phi_0 - \omega) \\ l_{\text{下}} &= l + L \tan \vartheta \cos \omega \end{aligned}$$

となる. ここで,  $r_{\text{CH}} = 2.0[\text{cm}]$  はプラスチックシンチレータの半径,  $L = 8.9 + 1.9 = 10.8[\text{cm}]$  は線源の中心からプラスチックシンチレータの奥行き  $1.9[\text{cm}]$  の面までの距離,  $l = r_{\text{CH}} + 2.3 + 1.2 = 5.5[\text{cm}]$  はプラスチックシンチレータの中心から NaI シンチレータの検出面までの距離であり, 上下で共通である (図 2.4 を参照).

この積分値  $I(\phi_0)$  は, シンチレータに大きさがあることにより, 各  $\phi_0$  に対してカウント数が理想の場合 (シンチレータに大きさがない場合) に比べてどう変化するかを相対的

に表したものである。よって、実験データのカウント数を  $I(\phi_0)$  で割れば、理想的な場合のように

$$f(\phi) = N \left[ 1 - k \left( \frac{\sin^2 \theta_1}{\zeta_1 - \sin^2 \theta_1} \right) \left( \frac{\sin^2 \theta_2}{\zeta_2 - \sin^2 \theta_2} \right) \cos 2\phi \right]$$

でうまくフィットできると期待する。すなわち、実験データ  $N(\phi_0)$  を補正した値 (相対値)  $N'(\phi_0)$  は

$$N'(\phi_0) = \frac{N(\phi_0)}{I(\phi_0)}$$

となる。ただし、 $I'(\phi_0)$  とは  $I(\phi_0)$  の相対値であり、

$$I'(\phi_0) = \left( \frac{l^2}{\pi r_{\text{NaI}}^2} \right)^2 I(\phi_0) \times 10$$

で表される。補正值に  $I(\phi_0)$  ではなく  $I'(\phi_0)$  を用いたのは便宜上である。

補正前と補正後の実験データを図 5.5 に示す。なお、 $I'(\phi_0)$  の値の計算には計算機を用いた。ここで、実験データ  $N(\phi_0)$  の誤差は  $\sqrt{N(\phi_0)}$  であり、補正した値  $N'(\phi_0)$  の誤差は  $\sqrt{N(\phi_0)} / I'(\phi_0)$  である (本当は  $I'(\phi_0)$  の誤差も考慮すべきであるが、それを見積もることができなかったために、 $I'(\phi_0)$  を (誤差のない) 定数とみなした)。

図 5.5 を見ると、 $\phi = 90^\circ$  に関してほぼ対称な形になっており、 $f(\phi)$  でうまくフィットできていることがわかる。

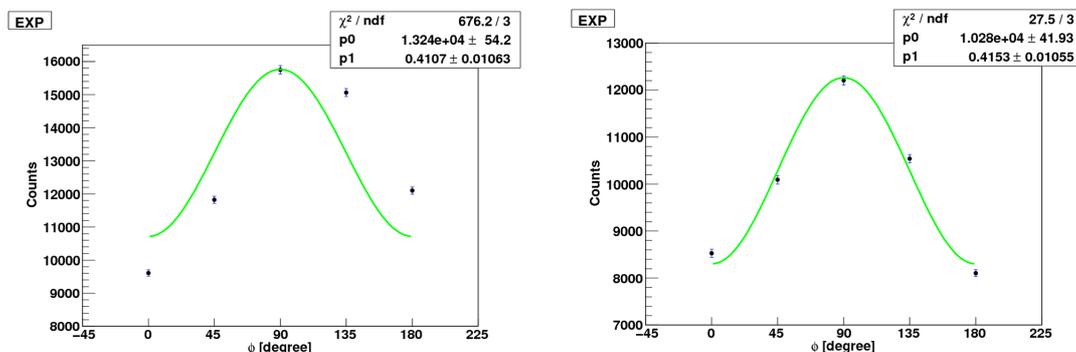


図 5.5: 非対称性の影響. (左図: 補正前, 右図: 補正後)

## 5.4 角度なまし効果

以上で、プラスチックシンチレータが点とみなせるほど小さければ、カウント数と  $\phi$  の関係は、 $f(\phi)$  でうまくフィットできることがわかった。しかし、フィットにより計算される  $k$  (図 5.5 の  $p1$ ) の値は、理想的な場合 (プラスチックシンチレータ, NaI シンチレータがともに点とみなせるほど小さい場合) の量子力学での値 ( $k = 1$ ) よりもかなり小さい。この

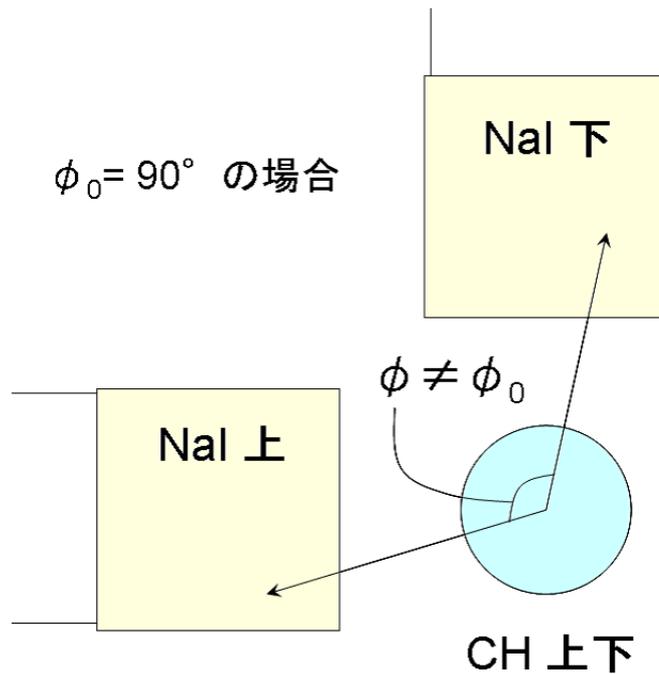


図 5.6:  $\phi = 90^\circ$  以外の散乱.

ことは、以下に述べるように、NaI シンチレータに大きさがあることによるものと考えたと説明できる。

例として、 $\phi = 90^\circ$  の場合を考える。NaI シンチレータに大きさがあるため、図 5.6 のように、実際には上下の  $\gamma$  線の散乱面のなす角が  $90^\circ$  からずれているものも  $\phi = 90^\circ$  としてカウントされる。よって、カウント数が理想的には  $f(\phi)$  のようになるとき、実際のカウント数は、図 5.7 のように  $f(\phi)$  を  $\phi = 90^\circ$  の近傍で平均した値になる。この平均値は理想的な値より小さくなるため、計算される  $k$  の値は理論値よりも小さくなる。これを角度なまし効果と呼ぶ。

## 5.5 角度なまし効果の定量的見積もり

5.4 で、 $f(\phi)$  を  $\phi = 90^\circ$  の近傍で平均した値を実験的に期待される値としたが、実際には、シンチレータの大きさや形状などのため、各々の  $\phi$  での検出されやすさは一様でない。そこで、 $f(\phi)$  を各  $\phi$  での検出されやすさで重み付けした平均値を、実験的に期待される値と考える。

まず、 $\gamma$  線対は線源の中心で発生し、各々プラスチックシンチレータの中心軸と NaI シンチレータの中心軸の交点で散乱する場合を考える。

5.3 と同様に、散乱された  $\gamma$  線は、NaI シンチレータの検出面 (プラスチックシンチレータに近いほうから測って奥行き 1.2[cm] の面) で検出されるとする。また、上下の  $\gamma$  線の散乱面のなす角を  $\phi$  とおき、 $\varphi = \phi - \phi_0$  で  $\varphi$  を定義する。さらに、上側の  $\gamma$  線の散乱面が平面  $\alpha_{\perp}$  (プラスチックシンチレータの中心軸と NaI シンチレータの中心軸を含む平面) と

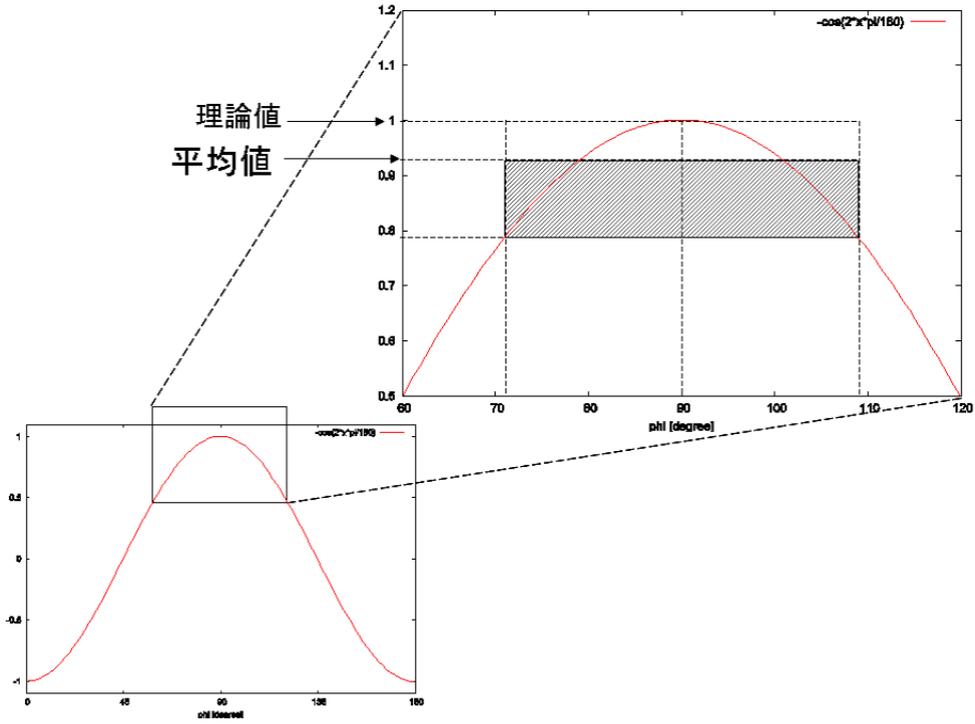


図 5.7: 角度なまし効果.

なす角を  $\xi$  とする (図 5.8). 散乱角がまだ決まっていないとすると, これで  $\gamma$  線対が上下の NaI シンチレータの検出面上のどの線対で検出されるかが決まる.

ここで, 簡単のため, 微分散乱断面積は考えている散乱角の範囲で一定と近似すると, 上下の  $\gamma$  線が各々の NaI シンチレータにともに検出される確率は, 散乱面と NaI シンチレータの検出面との交線の長さを散乱点が見込む角度  $\Theta_{上}$ ,  $\Theta_{下}$  の積に比例する. この積を  $\xi$  について積分することにより, 各々の  $\varphi$  での検出されやすさが求まる. それに  $f(\phi)$  をかけて  $\varphi$  で積分 (して規格化) すると, 重み付けされた平均値  $M(\phi_0)$  が求まる. すなわち,

$$\begin{aligned}
 M(\phi_0) &= \frac{J(\phi_0)}{J_0(\phi_0)} \\
 J(\phi_0) &= \int_0^{2\Delta\varphi} d\varphi f(\phi_0 + \varphi) \int_{-\Delta\varphi + \varphi}^{\Delta\varphi} d\xi \Theta_{上} \Theta_{下} \\
 J_0(\phi_0) &= \int_0^{2\Delta\varphi} d\varphi \int_{-\Delta\varphi + \varphi}^{\Delta\varphi} d\xi \Theta_{上} \Theta_{下} \\
 \Theta_{上} &= \arcsin \sqrt{\frac{r_{\text{NaI}}^2 - l^2 \tan^2 \xi}{r_{\text{NaI}}^2 + l^2}} \\
 \Theta_{下} &= \arcsin \sqrt{\frac{r_{\text{NaI}}^2 - l^2 \tan^2(\xi - \varphi)}{r_{\text{NaI}}^2 + l^2}} \\
 \Delta\varphi &= \arctan \left( \frac{r_{\text{NaI}}}{l} \right)
 \end{aligned}$$

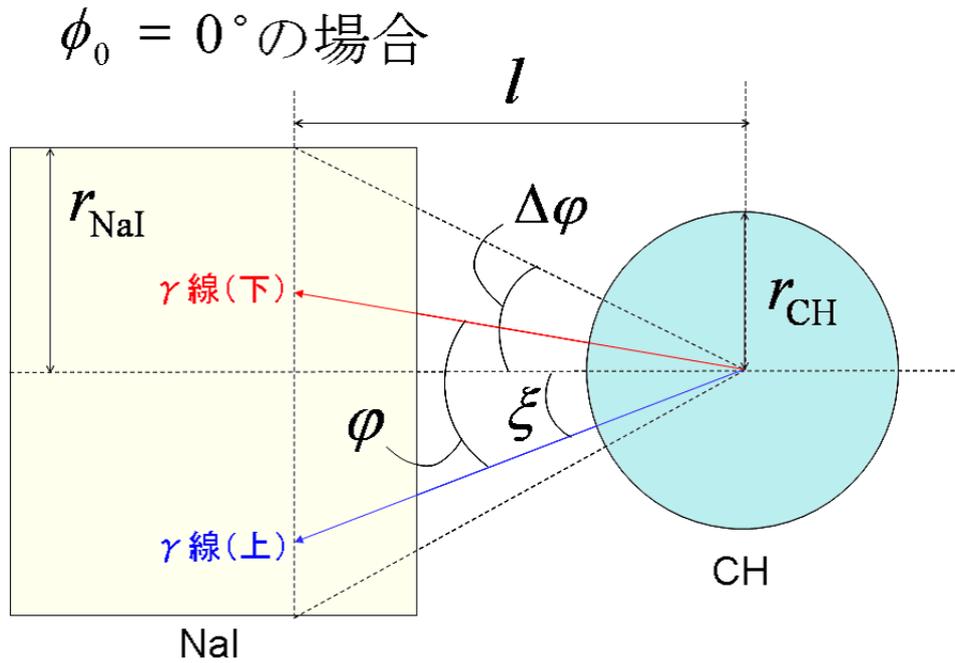


図 5.8:  $\phi$ ,  $\varphi$ ,  $\xi$  の定義.

となる. ここで, 各々の  $\varphi$  での検出されやすさの分布 (重み付け関数) は  $\varphi$  に関して対称なので, 積分 ( $I(\phi_0)$  および  $I_0(\phi_0)$ ) は  $\varphi > 0$  の範囲で行った.

## 5.6 最終的な補正

5.5 で, 散乱がプラスチックシンチレータの中心軸上のある一点で起こる場合について, 角度なまし効果を定量的に見積もることができた. 次に, 散乱点がプラスチックシンチレータの中心からずれた場合について考察する.

5.3 と同様に, 線源の中心から  $(\vartheta, \omega)$  の方向に発生した  $\gamma$  線対が, プラスチックシンチレータの奥行き (線源に近いほうから測って) 1.9[cm] の面で散乱され, NaI シンチレータの検出面 (プラスチックシンチレータに近いほうから測って奥行き 1.2[cm] の面) で検出されるとする. また, 上下の  $\gamma$  線の散乱面は, 簡単のためにプラスチックシンチレータの中心軸 (上下で同一だとする) と平行だとみなす.

5.5 と同様に, 微分散乱断面積は考えている散乱角の範囲で一定と近似すると, 上下の  $\gamma$  線が各々の NaI シンチレータとともに検出される確率は, 散乱面と NaI シンチレータの検出面との交線の長さを散乱点が見込む角度  $\theta_{上}$ ,  $\theta_{下}$  の積に比例する (簡単のために, 散乱点から NaI シンチレータの中心軸に下ろした垂線の足が見込む角度で近似する). この積を,  $\xi$ ,  $\omega$ ,  $\vartheta$  について積分することにより, 各々の  $\varphi$  での検出されやすさが求まる. それに  $f(\phi)$  をかけて  $\varphi$  で積分 (して規格化) すると, 重み付けされた平均値  $M(\phi_0)$  が求まる. すなわち,

$$\begin{aligned}
M(\phi_0) &= \frac{J(\phi_0)}{J_0(\phi_0)} \\
J(\phi_0) &= \int_{\Phi} d\varphi f(\phi_0 + \varphi) \int_0^{\vartheta_{\max}} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} d\xi \Theta_{\uparrow} \Theta_{\downarrow} \\
J_0(\phi_0) &= \int_{\Phi} d\varphi \int_0^{\vartheta_{\max}} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} d\xi \Theta_{\uparrow} \Theta_{\downarrow} \\
\Theta_{\uparrow} &= \arcsin \sqrt{\frac{r_{\text{NaI}}^2 - l_{\uparrow}^2 \tan^2 \xi}{r_{\text{NaI}}^2 + l_{\uparrow}^2}} \\
\Theta_{\downarrow} &= \arcsin \sqrt{\frac{r_{\text{NaI}}^2 - l_{\downarrow}^2 \tan^2(\xi - \varphi)}{r_{\text{NaI}}^2 + l_{\downarrow}^2}} \\
l_{\uparrow} &= l - L \tan \vartheta \cos(\phi_0 - \omega) \\
l_{\downarrow} &= l + L \tan \vartheta \cos \omega \\
\Phi &= \{\varphi \in [-\pi, \pi] \mid \xi_{\min} < \xi_{\max}\} \\
\vartheta_{\max} &= \arctan\left(\frac{r_{\text{CH}}}{L}\right) \\
\xi_{\max} &= \min(\Delta\varphi_{\uparrow}, \varphi + \Delta\varphi_{\downarrow}) \\
\xi_{\min} &= \max(-\Delta\varphi_{\uparrow}, \varphi - \Delta\varphi_{\downarrow}) \\
\Delta\varphi_{\uparrow} &= \arctan\left(\frac{r_{\text{NaI}}}{l_{\uparrow}}\right) \\
\Delta\varphi_{\downarrow} &= \arctan\left(\frac{r_{\text{NaI}}}{l_{\downarrow}}\right)
\end{aligned}$$

となる。

この平均値を用いて、実験値を補正する<sup>2</sup>。理想的な場合（プラスチックシンチレータ、NaIシンチレータがともに点とみなせるほど小さい場合）には、カウント数は  $f(\phi_0)$  に比例するが、シンチレータに大きさがあることで、実際には平均値  $M(\phi_0)$  のようになっているとすると、実験データ  $N(\phi_0)$  を

$$N'(\phi_0) = N(\phi_0) \times \frac{f(\phi_0)}{M(\phi_0)}$$

と補正することで、理想的な場合のカウント数のようになると期待する。なお、 $f(\phi_0)$  や  $M(\phi_0)$  にはパラメータ  $k$  が含まれているが、4.3 で隠れた変数理論を否定し量子力学を肯定したに基づき、 $k = 1$  として補正する。

補正後の結果を図 5.9 に示す<sup>3</sup>。なお、 $M(\phi_0)$  の値の計算には計算機を用いた。

図 5.9 を見ると、補正した値は  $\phi = 90^\circ$  に関してほぼ対称な形になっており、

<sup>2</sup>この補正は、非対称性と角度なまし効果（この二つは互いに絡み合っている）を同時に考慮したものになっている。

<sup>3</sup>5.3 で述べたときと同様に、 $M(\phi_0)$  の誤差を見積もることができなかったため、補正した値  $N'(\phi_0)$  の誤差は単純に  $\sqrt{N(\phi_0)} \times f(\phi_0) / M(\phi_0)$  とした。

$$f(\phi) = N \left[ 1 - k \left( \frac{\sin^2 \theta_1}{\zeta_1 - \sin^2 \theta_1} \right) \left( \frac{\sin^2 \theta_2}{\zeta_2 - \sin^2 \theta_2} \right) \cos 2\phi \right]$$

うまくフィットできている。また、フィットにより計算される  $k$  (図 5.9 の p1) の値は、理想的な場合の量子力学での値 ( $k = 1$ ) にかなり近い。この  $k$  の値が 1 から多少ずれているのは、平均値  $M(\phi_0)$  の誤差によるものと推定する (実際、 $M(\phi_0)$  の導出には多くの近似を用いた)。

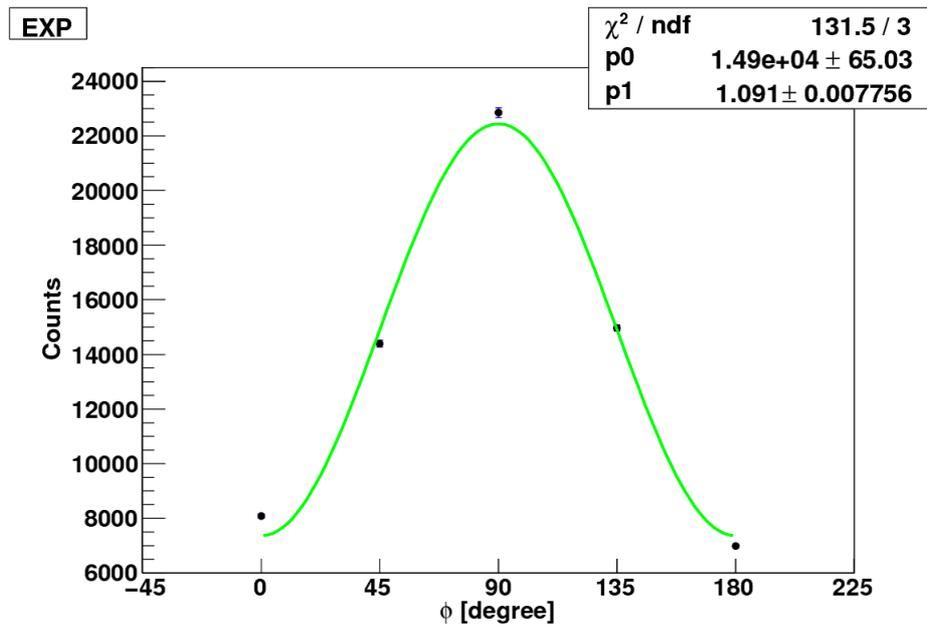


図 5.9: 最終的な補正後の実験データ。

## 反省

上下のNaIシンチレータについて、実験結果では光電ピークのエネルギー値(上:  $\sim 260$ [KeV], 下:  $\sim 270$ [KeV])がずれており、simulation結果では、光電ピークは合っていた( $\sim 250$ [KeV])が、全体のエネルギー分布が若干異なっていた。また、上で示したように、光電ピークのエネルギー値について実験結果とsimulation結果で違いが見られた。しかし、これらについて十分な考察ができなかった。

また、非対称性の考察のところ、線源の位置がずれると非対称性が生じることについて考慮していなかった。この影響は、実験のセットアップの状態(下側のプラスチックシンチレータとNaIシンチレータの2つのみ coincidenceを取って)各 $\phi_0$ について下側のNaIシンチレータのカウント数を計測することで見積もることができたはずである。

## 謝辞

南條先生, TA の村上さん, そして笹尾先生には半年の間本当にお世話になりました. A2  
メンバー一同, 心から感謝しています. ありがとうございました.