

オルソポジトロニウムの寿命測定による QED の実験的検証

課題演習 A2, 2013 年度後期

角田峻太郎 徳宿邦夫 中谷侑司 福島由章 古川雅博

2014 年 4 月 13 日

目次

第 1 章	序論	1
1.1	実験背景	1
1.2	本レポートについて	1
第 2 章	理論	2
2.1	ポジトロニウム	2
2.2	Ps の寿命	5
2.3	補足	12
	参考文献	16
第 3 章	実験	17
3.1	実験原理	17
3.2	実験器具	17
3.3	実験手順	18
第 4 章	真空中でのデータ解析	22
4.1	Calibration	22
4.2	TQ 補正	25
4.3	pick-off 補正	28
第 5 章	考察	34
5.1	真空を引いたデータ・真空を引いていないデータの比較	34
5.2	データ数の妥当性について	36
5.3	誤差の評価	36
	参考文献	44

1

序論

1.1 実験背景

オルソポジトロニウムの寿命測定の世界は、今から約 45 年前の 1968 年にさかのぼる。それ以来、QED(量子電磁力学)を検証する上でその測定の重要度が認知され、研究が行われてきた。しかし、実験で得られた寿命が、理論上での寿命の値よりも大きく下回る結果となるものばかりであった。この問題は「オルソポジトロニウムの寿命問題」と呼ばれ、多くの研究者を悩ませてきた。しかし、1990 年代後半に東京大学で、測定方法を変えることにより、理論値に近い寿命が得られた。本実験ではそのオルソポジトロニウムの寿命を実際に測定し、その値を QED による理論値と比較しその考察を行うことを目的とした。

1.2 本レポートについて

このレポートは、2013 年度後期の物理科学課題演習 A2 の実験に関するものである。教員 1 人と 2 人の TA の下、学部生 5 人で実験を行った。

2

理論

2.1 ポジトロニウム

電子と陽電子が束縛されている状態をポジトロニウム (以下 Ps とする) という.

2.1.1 Ps を記述する場と C 変換

電子と陽電子は Fermion なので Dirac 場で記述される.

Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi$$

に対してゲージ原理により局所ゲージ不変性 ($U(1)$ 対称性) を課すと

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi$$

となる*1. これにゲージ場の運動項をこれもゲージ不変性の要求により加えると

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

となる. ただし $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である.

これで記述される系の量子力学を QED と呼ぶ. $U(1)$ ゲージ場は電磁場と同一視できる*2のでこの相互作用 $eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ は電磁相互作用となる.

Ps の性質を論じるためにこの相互作用の C 変換対称性を利用する.

*1 補足 1 参照

*2 この記述は参考文献 [5] を元になっているが, 電磁場よりも抽象的かつ一般的な場として $U(1)$ ゲージ場というものがあるような印象をうける. 実際 $U(1)$ 対称性を破らず繰り込み可能であるがパリティは破っているような場を論じることもある.

■Dirac 場の C 変換

量子化された Dirac 場の演算子は

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_p^s u^s(p) e^{-ipx} + b_p^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx}) \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_p^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ipx} + b_p^s \bar{v}^s(p) e^{-ipx})\end{aligned}$$

と書かれる。ここで $a_p^{s(\dagger)}$ は運動量 p をもつ Fermion の消滅 (生成) 演算子で $b_p^{s(\dagger)}$ は運動量 p をもつ反 Fermion の消滅 (生成) 演算子である。

Dirac 場における C 変換は、あるスピンを持つ Fermion を同じスピンをもつ反 Fermion に変換するものとして定義される*3：

$$C a_p^s C = b_p^s, \quad C b_p^s C = a_p^s$$

ここで

$$u^s(p) = -i\gamma^2 (v^s(p))^*, \quad v^s(p) = i\gamma^2 (u^s(p))^*$$

という関係式を用いると*4

$$\begin{aligned}C\psi(x)C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s C(a_p^s u^s(p) e^{-ipx} + b_p^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx})C \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (b_p^s (-i\gamma^2 (v^s(p))^*) e^{-ipx} + a_p^{s\dagger} (-i\gamma^2 (u^s(p))^*) e^{ipx}) \\ &= -i\gamma^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_p^{s\dagger} u^s(p)^* e^{ipx} + b_p^s v^s(p)^* e^{-ipx}) \\ &= -i\gamma^2 \psi^* \\ &= -i\gamma^2 (\psi^\dagger)^T \\ &= -i\gamma^2 (\bar{\psi} \gamma^0)^T\end{aligned}$$

これを利用すると

$$\begin{aligned}C\bar{\psi}C &= C\psi^\dagger C \gamma^0 = (C\psi C)^\dagger \gamma^0 \\ &= (-i\gamma^2 (\psi^\dagger)^\dagger)^\dagger \gamma^0 = (i\gamma^{2*} (\psi^\dagger)^\dagger)^T \gamma^0 \\ &= (-i\gamma^2 \psi)^T \gamma^0 = (-i\gamma^0 \gamma^2 \psi)^T\end{aligned}$$

となる。この準備の下 $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ に対する C 変換の作用を計算すると

$$\begin{aligned}C\bar{\psi} \gamma^\mu \psi C &= (C\bar{\psi} C) \gamma^\mu (C\psi C) \\ &= (-i\gamma^0 \gamma^2 \psi)^T \gamma^\mu (-i\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2)^T \\ &= -(\gamma_{ab}^0 \gamma_{bc}^2 \psi_c) \gamma_{ad}^\mu (\bar{\psi}_e \gamma_{ef}^0 \gamma_{fd}^2) \\ &= \bar{\psi}_e \gamma_{ef}^0 \gamma_{fd}^2 \gamma_{ad}^\mu \gamma_{ab}^0 \gamma_{bc}^2 \psi_c\end{aligned}$$

*3 ここでは参考文献 [1] の流儀に従っているが荷電共轭変換をカレントを負にする変換として定義することもある (例えば参考文献 [5] など)。その場合も場の基底を取り直して粒子、反粒子を単純に入れ替わるようにでき、ここでの定義と一致する。その基底は一方を flip させたものに決まる。

*4 補足 2 参照。

ここで γ 行列の転置による振る舞いに注意しながら^{*5} $\mu = 0, 1, 2, 3$ の各々の場合について計算すると

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\psi C = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

を得る.

■電磁場の C 変換

電磁相互作用が C 変換に対して不変であることから電磁場は

$$CA_\mu C = -A_\mu$$

という変換則に従うことになる. 量子化された電磁場は

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=0}^3 (a_{\mathbf{p}}^r \epsilon_\mu^r(p) e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \epsilon_\mu^{r*}(p) e^{ipx})$$

と書ける. ここで $a_{\mathbf{p}}^{r(\dagger)}$ は光子 (電磁場におけるゲージ粒子) の消滅 (生成) 演算子である. 上で述べた C 変換性より

$$a_{\mathbf{p}}^r \longrightarrow -a_{\mathbf{p}}^r, \quad a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \longrightarrow -a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}$$

と変換するはずである. ゆえに偶数 (奇数) 光子を含む系は C 変換に関して固有値は $1(-1)$ ということになる:

$$a_{\mathbf{p}_1}^{r_1\dagger} \dots a_{\mathbf{p}_n}^{r_n\dagger} |0\rangle \longrightarrow (-1)^n a_{\mathbf{p}_1}^{r_1\dagger} \dots a_{\mathbf{p}_n}^{r_n\dagger} |0\rangle$$

2.1.2 Ps の性質

Ps はスピン $\frac{1}{2}$ をもつ二つの粒子の組み合わせであるのでスピン合成を行うとスピン三重項 (オルソポジトロニウム (o-Ps)) またはスピン一重項 (パラポジトロニウム (p-Ps)) のいずれかになる. 粒子の入れ替えに対して前者は対称, 後者は反対称である. C 変換では Fermion と反 Fermion が入れ替わることを思い出すと三重項 (例として $S = 1, S_z = 1$ を扱う) で運動量がゼロの場合は次のように変換する.

$$\begin{aligned} |e^-(\mathbf{k}_- = \mathbf{0}, \uparrow)\rangle |e^+(\mathbf{k}_+ = \mathbf{0}, \uparrow)\rangle &= a_0^{\uparrow\dagger} b_0^{\uparrow\dagger} |0\rangle \xrightarrow{C} b_0^{\uparrow\dagger} a_0^{\uparrow\dagger} |0\rangle \\ &= -a_0^{\uparrow\dagger} b_0^{\uparrow\dagger} |0\rangle \end{aligned}$$

したがって三重項状態の C 変換の固有値は -1 である. 同様にして一重項状態は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e^-(\mathbf{k}_- = \mathbf{0}, \uparrow)\rangle |e^+(\mathbf{k}_+ = \mathbf{0}, \downarrow)\rangle - |e^-(\mathbf{k}_- = \mathbf{0}, \downarrow)\rangle |e^+(\mathbf{k}_+ = \mathbf{0}, \uparrow)\rangle) \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_0^{\uparrow\dagger} b_0^{\downarrow\dagger} - a_0^{\downarrow\dagger} b_0^{\uparrow\dagger}] |0\rangle \xrightarrow{C} \frac{1}{\sqrt{2}} [a_0^{\uparrow\dagger} b_0^{\downarrow\dagger} - a_0^{\downarrow\dagger} b_0^{\uparrow\dagger}] |0\rangle \end{aligned}$$

となり固有値は 1 である^{*6}. 表にまとめると次のようになる.

^{*5} ここでは γ 行列は $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$ として $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$ であるので 0,1,3 成分は転置により符号が反転し 2 成分は反転しない. σ^i はパウリ行列.

^{*6} 運動量が 0 でない場合は補足 6 を参照

C 変換に対する固有値	崩壊前	崩壊後
1	p-Ps(singlet)	偶数光子系
-1	o-Ps(triplet)	奇数光子系

崩壊の前後で C 変換性 (要するに C 変換に対する固有値) が変わらないとすると p-Ps は奇数光子系へ, o-Ps は偶数光子系へ遷移するという結論が得られる.

しかし

- 光子を一個だけ放出して対消滅する過程は運動学的に許されない*7.
- QED の S 行列展開において n 個の光子を含む崩壊過程に寄与する最低次の項は n 次の項であり相互作用の結合定数が微細構造定数*8であるために高次の寄与ほど小さくなる.

という事情により実質上 p-Ps は 2 個, o-Ps は 3 個の光子に崩壊することが分かる.

2.2 Ps の寿命

2.2.1 QED による寿命の導出法

Ps の寿命を計算する準備として基礎事項をまとめておく.

S 行列

始状態 $|i\rangle$ から終状態 $|f\rangle$ に移行する遷移確率 $\langle f|S|i\rangle$ を S 行列と言う*9.

Matrix element

始状態と終状態が異なる場合を扱うことにする*10. いかなる反応においても全エネルギー・運動量 P は保存されるので $\langle f|S|i\rangle$ には $\delta^4(P_f - P_i)$ という因子が含まれる. それを抜き出して

$$\langle f|S|i\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}$$

と書いたとき, \mathcal{M}_{fi} を Matrix element と呼ぶ. 遷移は全時空 $[VT] = \int d^3\mathbf{x} \int dt = \int d^4x$ で行われる. したがってこの表現を用いると確率振幅

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = |(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}|^2$$

の右辺で \mathcal{M}_{fi} を除く部分は

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) &= (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) (2\pi)^4 \delta^4(0) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \int d^4x \quad (\text{Fourier trfm.}) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) [VT] \end{aligned}$$

となる. これより, 終状態が n 個の粒子で各運動量が $(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f + \delta^3\mathbf{p}_f)$ という区間にあるような崩壊

*7 補足 3 参照

*8 約 $\frac{1}{137}$ [無次元]

*9 相互作用描像を採用している.

*10 この仮定により無反応を表す演算子 (恒等演算子) が寄与しなくなり, 反応を記述する演算子のみを扱えることになる.

の、全時空における発生回数は $|f\rangle$ を運動量固有状態にして微小区間の重みをつければよく

$$\begin{aligned} dN &= \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\langle f|S|i\rangle|^2 \\ &= [VT] \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \end{aligned}$$

となる。ただし終状態 $|\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n\rangle$ をそのまま $|f\rangle$ としてある。

Decay width

Decay width は崩壊現象を記述する際に用いられる量で一個の粒子の単位時間当たりの崩壊確率として定義される。始状態を一粒子状態 $P_i = (m, 0, 0, 0)^{*11}$ であるとする。これは全空間に $2P_i^0 V_{\text{全空間}} (= 2mV_{\text{全空間}})$ 個の粒子が存在する状態を表す^{*12}のでこの場合の Differential decay width, つまり、一個の粒子が単位時間当たりに終状態が n 個の粒子で各運動量が $(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f + \delta^3 \mathbf{p}_f)$ という区間にあるような崩壊を起こす確率は

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{dN}{(\text{全空間の粒子の総数}) \cdot (\text{全時間})} = \frac{dN}{2m[VT]} \\ &= \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \end{aligned}$$

で与えられる。これを全ての運動量領域にわたって積分し、可能な全ての終状態について足し上げると Total decay width が得られる。

$$\Gamma = \sum_{\text{全終状態}} \int \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)$$

これは単位時間当たりの崩壊確率なので、平均するとこの逆数の時間で崩壊することを意味する。これにより寿命が求まる。

2.2.2 p-Ps の寿命

p-Ps の寿命を計算する。

■束縛状態の取り扱い

注意すべきは QED において束縛状態をどう扱うかである。現在に至っても確然たる理論は出来上がっていない。ここでは参考文献 [1] の 5 章に倣って非相対論的極限での結果を利用するという方針を取る。非相対論的量子力学において Ps は電子、陽電子の二体中心力束縛問題なので重心座標と相対座標に分離して一体問題に帰着できる。水素原子型なので厳密に解けて、その基底状態 ($n = 1, l = 0, m = 0$) の波動関数^{*13}はボーア半

^{*11} ここでの i はラベルではなく initial を意味する。

^{*12} $\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = \int d^3 \mathbf{x} |\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})|^2$ と表せることからこれは全空間に存在する粒子数と解釈できる。一方で規格化条件は $\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ (補足 4 参照) であるので $\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(0) = 2p^0 \int d^3 \mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} |_{\mathbf{p}=0} = 2p^0 \int d^3 \mathbf{x} = 2p^0 V_{\text{全空間}}$ となることからこの解釈の正当性が分かる

^{*13} 参考文献 [6] 参照

径 a_0 を用いて

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} 2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) = \sqrt{\frac{(\alpha\mu)^3}{\pi}} e^{-\alpha\mu r}$$

と書ける^{*14}. ここで α は微細構造定数, μ は換算質量 ($\mu = m_e^2/(m_e + m_e) = m_e/2$) である. 以下電子 (陽電子) の質量は m で表す.

Ps の全体の運動量がゼロ^{*15}かつ singlet である状態 (この状態を $|\text{Ps}\rangle$ と書くことにする) は

$$|\mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|e^-(\mathbf{k}, \uparrow)\rangle \otimes |e^+(-\mathbf{k}, \downarrow)\rangle - |e^-(\mathbf{k}, \downarrow)\rangle \otimes |e^+(-\mathbf{k}, \uparrow)\rangle)$$

という状態を定義して次のように展開される^{*16}.

$$\begin{aligned} |\text{Ps}\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} {}_{\text{NR}}\langle \mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0 | \text{Ps}\rangle |\mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0\rangle_{\text{NR}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{2M} {}_{\text{NR}}\langle \mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0 | \text{Ps}\rangle_{\text{NR}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} |\mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0\rangle \right) \\ &= \sqrt{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} |\mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0\rangle \end{aligned} \quad (*)$$

ここで非相対論的規格化がされた状態ベクトルには NR という添字を付けた^{*17}. $M (= 2m)$ は Ps の質量である. また $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ は上の波動関数の運動量表示, つまり

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \int dx^3 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \psi(\mathbf{r}) \quad , \quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2 = 1$$

を満たす函数である.

(*) 式の 2 行目から 3 行目で行なったことを整理すると「全体の運動量がゼロでありかつ singlet であるような Ps の状態のそれを構成する電子が運動量 \mathbf{k} をもつ確率振幅 ${}_{\text{NR}}\langle \mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0 | \text{Ps}\rangle_{\text{NR}}$ を非相対論的量子力学で電子と陽電子の束縛状態として解いた電子の運動量確率振幅 ($\tilde{\psi}(\mathbf{k})$) に置き換えた」ということになる.

これより

$$\begin{aligned} \langle 2\gamma | S | \text{Ps}\rangle &= \sqrt{2M} \frac{1}{2m} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \langle 2\gamma | S | \mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{m}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) [i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}(e^-(\mathbf{k})e^+(-\mathbf{k}) \rightarrow 2\gamma)] \\ &= i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}(\text{Ps} \rightarrow 2\gamma) \end{aligned}$$

^{*14} 自然単位系において Bohr 半径は $a_0 = \frac{1}{\mu\alpha}$ と書ける

^{*15} 重心系で考えていることを意味する

^{*16} Ps は今 singlet であると仮定しているので重心系において Ps の状態空間はこの完全系で張られる

^{*17} 相対論的規格化は補足 4 を参照. ここでは

$$\begin{aligned} |\text{Ps}\rangle &= \sqrt{2M} |\text{Ps}\rangle_{\text{NR}} \\ |\mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2m} |e^-(\mathbf{k}, \uparrow)\rangle_{\text{NR}} \otimes \sqrt{2m} |e^+(-\mathbf{k}, \downarrow)\rangle_{\text{NR}} \\ &\quad - \sqrt{2m} |e^-(\mathbf{k}, \downarrow)\rangle_{\text{NR}} \otimes \sqrt{2m} |e^+(-\mathbf{k}, \uparrow)\rangle_{\text{NR}}) \\ &= \sqrt{2m}\sqrt{2m} |\mathbf{k}; \mathbf{K} = \mathbf{0}, S = 0\rangle_{\text{NR}} \end{aligned}$$

という関係がある. 電子, 陽電子の状態ベクトルに対する相対論的規格化因子は本来 $\sqrt{2E_{\pm\mathbf{k}}}$ であるが今は $\|\mathbf{k}\| \ll m$ という極限を考えていることに注意.

ただし $\mathcal{M}(e^-(\mathbf{k})e^+(-\mathbf{k}) \rightarrow 2\gamma) = \tilde{\mathcal{M}}$ とおいて

$$\mathcal{M}(\text{Ps} \rightarrow 2\gamma) = \frac{1}{\sqrt{m}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{M}}$$

である*18.

■Matrix element の計算

上で得られた matrix element $\tilde{\mathcal{M}}$ は通常の (つまり束縛状態を加味しない)QED で計算できる.

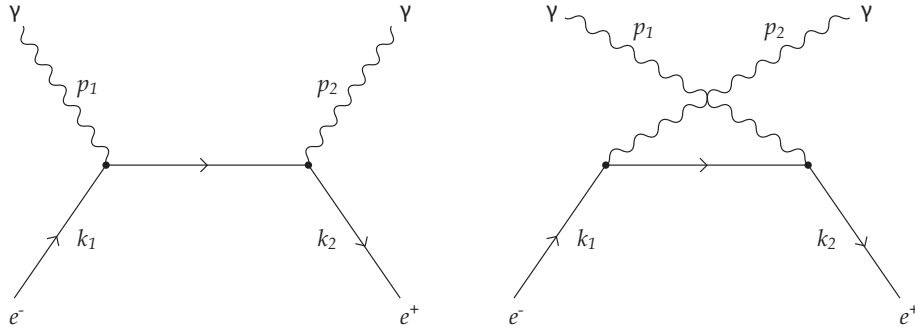


図 2.1 p-Ps の Feynman diagram

Feynman diagram によって次のように書ける.

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{M}} &= (-ie\gamma^\mu)(-ie\gamma^\nu)\bar{v}(k_2)\epsilon_\mu^*(p_1)S_F(k_1-p_1)\epsilon_\nu^*(p_2)u(k_1) \\ &\quad + (-ie\gamma^\mu)(-ie\gamma^\nu)\bar{v}(k_2)\epsilon_\mu^*(p_2)S_F(k_1-p_2)\epsilon_\nu^*(p_1)u(k_1) \\ &= (-ie)^2\epsilon_\mu^*(p_1)\epsilon_\nu^*(p_2) \\ &\quad \times \bar{v}(k_2) \left[\gamma^\nu \frac{i(\gamma^\alpha(k_{1\alpha}-p_{1\alpha})+m)}{(k_1-p_1)^2-m^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{i(\gamma^\beta(k_{1\beta}-p_{2\beta})+m)}{(k_1-p_2)^2-m^2} \gamma^\nu \right] u(k_1) \end{aligned}$$

あらわな表式*19

$$u(k_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{k_1 \cdot \sigma \xi} \\ \sqrt{k_1 \cdot \bar{\sigma} \xi} \end{pmatrix}, \quad v(k_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{k_2 \cdot \sigma \eta} \\ -\sqrt{k_2 \cdot \bar{\sigma} \eta} \end{pmatrix}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} (\text{第一項}) &= -ie^2\epsilon_\mu^*(p_1)\epsilon_\nu^*(p_2) \frac{1}{(k_1-p_1)^2-m^2} (\sqrt{k_2 \cdot \sigma \eta}^\dagger \quad -\sqrt{k_2 \cdot \bar{\sigma} \eta}^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\alpha \\ \bar{\sigma}^\alpha & 0 \end{pmatrix} (k_1-p_1)_\alpha + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{k_1 \cdot \sigma \xi} \\ \sqrt{k_1 \cdot \bar{\sigma} \xi} \end{pmatrix} \\ &= -ie^2\epsilon_\mu^*(p_1)\epsilon_\nu^*(p_2) \frac{1}{(k_1-p_1)^2-m^2} \eta^\dagger \left[m \left(\sqrt{k_2 \cdot \sigma \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \sqrt{k_1 \cdot \bar{\sigma}} - \sqrt{k_2 \cdot \bar{\sigma} \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \sqrt{k_1 \cdot \sigma}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (k_1-p_1)_\alpha \left(\sqrt{k_2 \cdot \sigma \bar{\sigma}^\nu \sigma^\alpha \bar{\sigma}^\mu \sqrt{k_1 \cdot \sigma} - \sqrt{k_2 \cdot \bar{\sigma} \sigma^\nu \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\mu \sqrt{k_1 \cdot \bar{\sigma}}} \right) \right] \xi \end{aligned}$$

*18 singlet であるという情報はスピノルに対して課す.

*19 補足 2 参照

第二項も同様に計算すると Matrix element は

$$i\tilde{\mathcal{M}} = -ie^2 \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \eta^\dagger \left[\frac{A^{\mu\nu}}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} + \frac{B^{\mu\nu}}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \right] \xi$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu} &= m \left(\sqrt{k_2 \cdot \sigma} \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \sqrt{k_1 \cdot \bar{\sigma}} - \sqrt{k_2 \cdot \bar{\sigma}} \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \sqrt{k_1 \cdot \sigma} \right) \\ &\quad + (k_1 - p_1)_\alpha \left(\sqrt{k_2 \cdot \sigma} \bar{\sigma}^\nu \sigma^\alpha \bar{\sigma}^\mu \sqrt{k_1 \cdot \sigma} - \sqrt{k_2 \cdot \bar{\sigma}} \sigma^\nu \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\mu \sqrt{k_1 \cdot \bar{\sigma}} \right) \\ B^{\mu\nu} &= m \left(\sqrt{k_2 \cdot \sigma} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \sqrt{k_1 \cdot \bar{\sigma}} - \sqrt{k_2 \cdot \bar{\sigma}} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sqrt{k_1 \cdot \sigma} \right) \\ &\quad + (k_1 - p_1)_\alpha \left(\sqrt{k_2 \cdot \sigma} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\alpha \bar{\sigma}^\nu \sqrt{k_1 \cdot \sigma} - \sqrt{k_2 \cdot \bar{\sigma}} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\alpha \sigma^\nu \sqrt{k_1 \cdot \bar{\sigma}} \right) \end{aligned}$$

非相対論的極限として初期状態の Ps が静止している場合を考える：

$$k_1^\mu = k_2^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

光子の重心系においてエネルギー・運動量保存, On-shell 条件, また光子が massless であることを考慮すると

$$p_1^\mu = (m, 0, 0, m), \quad p_2^\mu = (m, 0, 0, -m)$$

であることがわかる。また最終状態における光子の偏極ベクトルとして円偏光

$$\epsilon_\pm^\mu(p_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0), \quad \epsilon_\pm^\mu(p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, \pm i, 0)$$

を取ることになると, これらと縮約をとっている $\bar{\sigma}^\mu$ の第 0 成分は寄与しなくなる。したがって計算上 $\bar{\sigma}^\mu \rightarrow -\sigma^\mu$ と置き直すことができる。このことと $\sqrt{k_i \cdot \sigma} = \sqrt{k_i \cdot \bar{\sigma}} = \sqrt{m}$ に注意すると

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu} &= m^2(-\sigma^\nu \sigma^\mu - \sigma^\nu \sigma^\mu) + m(\sigma^\nu \sigma^\alpha \sigma^\mu + \sigma^\nu \sigma^\alpha \sigma^\mu)(k_1 - p_1)_\alpha \\ &= 2m\sigma^\nu \sigma^\alpha \sigma^\mu (k_1 - p_1)_\alpha \\ &= 2m\sigma^\mu \sigma^3 \sigma^\mu (-m) \\ &= -2m^2 \sigma^\nu \sigma^3 \sigma^\mu \end{aligned}$$

同様に

$$B^{\mu\nu} = 2m^2 \sigma^\mu \sigma^3 \sigma^\nu$$

よって $(k_1 - p_1)^2 = (k_1 - p_2)^2 = -m^2$ であることから

$$i\tilde{\mathcal{M}} = -ie^2 \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2) \eta^\dagger (\sigma^\nu \sigma^3 \sigma^\mu - \sigma^\mu \sigma^3 \sigma^\nu) \xi$$

最終状態の光子の各々の偏極状態について計算する。その際 Spinor を束縛状態のスピン波動関数に対応させなければならない。

ξ^s を標準基底

$$\xi^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

にとる。反粒子は flip を考慮して^{*20} $\eta^s = \xi^{-s} = -i\sigma^s(\xi^s)$ ，つまり

$$\eta^\uparrow = \xi^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta^\downarrow = -\xi^\uparrow = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。今は singlet を考えているので

$$\begin{aligned} \xi\eta^\dagger &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^\uparrow\eta^{\downarrow\dagger} - \xi^\downarrow\eta^{\uparrow\dagger}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と置き換える。この準備の下計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathcal{M}}_{++} &= ie^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \eta^\dagger ((-\sigma^1 + i\sigma^2)\sigma^3(\sigma^1 + i\sigma^2) - (\sigma^1 + i\sigma^2)\sigma^3(-\sigma^1 + i\sigma^2))\xi \\ &= ie^2 \frac{1}{2} \eta^\dagger \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right) \xi \\ &= ie^2 \frac{1}{2} \eta^\dagger \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xi \\ &= ie^2 \frac{1}{2} Tr \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xi\eta^\dagger \right) \\ &= ie^2 \frac{1}{2} Tr \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= -i2\sqrt{2}e^2 \end{aligned}$$

ここで

$$\eta^\dagger \Gamma \xi = \eta_a^* \Gamma_{ab} \xi_b = \Gamma_{ab} \xi_b \eta_a^* = Tr[\Gamma \xi \eta^\dagger]$$

を用いた。

同様にして

$$i\tilde{\mathcal{M}}_{--} = i2\sqrt{2}e^2, \quad i\tilde{\mathcal{M}}_{+-} = i\tilde{\mathcal{M}}_{-+} = 0$$

を得る。

■ Decay width の計算

Matrix element が求められたので Decay width を計算することができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pm\pm}(Ps \rightarrow 2\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{m}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{M}}_{\pm\pm} \\ &= \frac{\psi(\mathbf{x}=\mathbf{0})}{\sqrt{m}} \tilde{\mathcal{M}}_{\pm\pm} \quad \text{with} \quad \psi(\mathbf{0}) = \sqrt{\frac{(m\alpha/2)^3}{\pi}} \end{aligned}$$

^{*20} 補足 2 参照

であったので*21

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{++}|^2 + |\mathcal{M}_{--}|^2 &= \frac{m^3 \alpha^3}{8\pi} \cdot \frac{1}{m} (8e^4 + 8e^4) \\
&= \frac{m^3 \alpha^3}{8\pi m} \cdot 16(4\pi\alpha)^2 \quad (\because \text{自然単位系では } \alpha = e^2/4\pi) \\
&= 32\pi\alpha^5 m^2
\end{aligned}$$

となるので Decay width は

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{1}{2} \int \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \sum_{spin} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2M_P} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4m} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6 2E_1 2E_2} (|\mathcal{M}_{++}|^2 + |\mathcal{M}_{--}|^2) (2\pi)^4 \delta^4(p_{Ps} - p_1 - p_2) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4m} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^2 2m 2m} \cdot 32\pi\alpha^5 m^2 \delta^4(p_{Ps} - p_1 - p_2) \\
&= \frac{\alpha^5}{4\pi m} \int d^3 p_1 d^3 p_2 \delta^4(p_{Ps} - p_1 - p_2)
\end{aligned}$$

終状態の光子二つが同種粒子であることに注意*22. 最後の積分は Lorentz scalar なので*23まず p_2 について積分を実行し, 次に光子の重心系 ($p_1^0 = p_2^0$) において残りの積分を行う. 光子が massless であることと On-shell 条件により

$$d^3 p_1 = \|\mathbf{p}_1\|^2 d\|\mathbf{p}_1\| d\Omega = (p_1^0)^2 dp_0 d\Omega$$

となることに気をつけると

$$\begin{aligned}
\int d^3 p_1 d^3 p_2 \delta^4(p_{Ps} - p_1 - p_2) &= \int d^3 p_1 \delta(2(m - p_1^0)) = \frac{1}{2} \int d^3 p_1 \delta(m - p_1^0) \\
&= \frac{1}{2} \int (p_1^0)^2 dp_0 d\Omega \delta(m - p_1^0) \\
&= 2\pi m^2
\end{aligned}$$

となる. したがって

$$\Gamma = \frac{\alpha^5}{4\pi m} \cdot 2\pi m^2 = \frac{\alpha^5 m}{2}$$

を得る. これより p-Ps の寿命は次元を復活させると

$$\tau_{2\gamma} = \frac{1}{\Gamma} = \frac{2}{\alpha^5 m} \frac{\hbar}{c^2} \approx 1.25 \times 10^{-10} \text{ sec}$$

*21 ここで原点における波動関数のみが寄与するということから電子と陽電子がぶつかる確率が対消滅による崩壊を論じる上で効いてくることが分かり直感とも矛盾しない

*22 終状態が n_1 個, n_2 個... の同種粒子の場合 $n_1!n_2!\dots$ で割らねばならない. 今の場合終状態の二つの光子それぞれの運動量を原理的に区別できない (不可分別性) のでその両方について全ての積分領域で積分を実行すると同じ状態を二回数えることになってしまう.

*23 補足 5 参照

2.2.3 o-Ps の寿命

Feynman diagram に vertex が 1 つ増えるので寿命は 2γ 崩壊よりも結合定数 α の逆数程度長くなるだろうと予想できる*24. 上と同様に計算すれば出るので参考文献 [2] に記載されている結果だけ記す.

$$\tau_{3\gamma} = 1.39 \times 10^{-7} \text{sec}$$

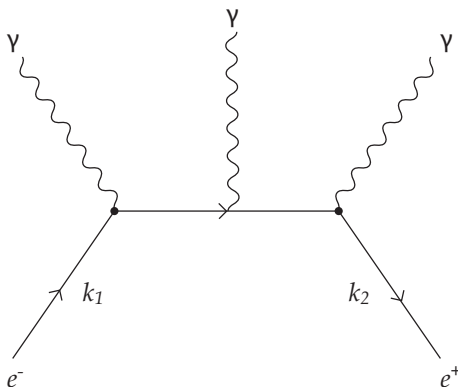


図 2.2 o-Ps の Feynman diagram

2.3 補足

1. 実際に $U(1)$ 対称性があるか確認
ゲージ変換は物質場に対しては

$$\psi'(x) = e^{i\theta(x)} \psi(x)$$

ゲージ場に対しては

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x)$$

と定義されるので

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(x) [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA'_\mu(x)) - m] \psi'(x) \\ &= e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ie(A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x)) - m) e^{i\theta(x)} \psi(x) \\ &= e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu (i(\partial_\mu \theta(x)) e^{i\theta(x)} \psi(x) + e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi(x) \\ &\quad - i(eA_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)) e^{i\theta(x)} \psi(x)) - m e^{i\theta(x)} \psi(x)] \\ &= \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu(x)) - m] \psi(x) = \mathcal{L} \end{aligned}$$

2. Dirac 方程式の平面波解
概略を説明する*25.

*24 実際の計算結果は $\tau_{3\gamma}/\tau_{2\gamma} = 9\pi/4(\pi^2 - 9)\alpha \cong 1115$ となる.

*25 詳しくは参考文献 [1] を参照

Dirac 方程式に On-shell 条件を課した平面波 $\psi(x) = u(p)e^{-ipx}$ を代入すると

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$$

を得る。静止系を考えるとこの方程式は

$$(\gamma^0 p_0 - m)u(p_0) = m(\gamma^0 - I)u(p_0) = 0$$

となり、この解は ξ を 2 成分 Spinor として

$$u(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

となる。一般の p に対する解を得るため z 方向への boost を考える。準備として 4 元運動量について考える。無限小 Lorentz 変換が

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \left[1 + \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書けることから有限変換では

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} &= \exp \left[\eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m \cosh \eta \\ m \sinh \eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

次に Spinor について boost を考える。Lorentz 群の Spinor 表現 $\Lambda_{1/2} = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu})$ *26 を用いて $\omega_{03} = \eta$ とおくと上の関係式を用いて

$$\begin{aligned} u(p) &= \exp \left[-\frac{i}{2}\eta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\eta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \right] \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E+p_3} \begin{pmatrix} 1-\sigma^3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{E-p_3} \begin{pmatrix} 1+\sigma^3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \xi \\ \left[\sqrt{E+p_3} \begin{pmatrix} 1+\sigma^3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{E-p_3} \begin{pmatrix} 1-\sigma^3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算される*27。方程式の rank は 2 なので二つの線型独立解

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \quad (s = 1, 2)$$

*26 $S^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ は Lorentz 群の生成子

*27

$$p \cdot \sigma = p_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} E - p_3 & 0 \\ 0 & E + p_3 \end{pmatrix}$$

より $p \cdot \sigma$ の固有値は $E - p_3$ と $E + p_3$ である一方で

$$\frac{1 - \sigma^3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1 + \sigma^3}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので $\sqrt{E+p_3} \begin{pmatrix} 1-\sigma^3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{E-p_3} \begin{pmatrix} 1+\sigma^3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\sqrt{p \cdot \sigma}$ のスペクトル分解になっている。

となる. 同様に $\psi(x) = v(p)e^{ipx}$ を代入して得られる $v(p)$ についての方程式を解くと

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix} \quad (s = 1, 2)$$

となる*28. この Spinor として

$$\xi^{-s} = -i\sigma^2(\xi^s)^*$$

を採用し

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^{-s} \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^{-s} \end{pmatrix}$$

としたとき

$$\begin{aligned} (v^s(p))^* &= \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^{-s} \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^{-s} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} (-i\sigma^2(\xi^s)^*) \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} (-i\sigma^2(\xi^s)^*) \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} (\xi^s)^* \\ i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \sigma} (\xi^s)^* \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより

$$u^s(p) = -i\gamma^2(v^s(p))^*, v^s(p) = i\gamma^2(u^s(p))^*$$

となることがわかる.

3. $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ が許されないことを示す.

電子, 陽電子, 光子の 4 元運動量を各々 (E_e, \mathbf{p}_e) , (E_p, \mathbf{p}_p) , $(E_\gamma, \mathbf{p}_\gamma)$ とする.

4 元運動量の保存則

$$E_\gamma = E_e + E_p, \quad \mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_p$$

と, 電子, 陽電子に関する 4 元運動量の関係式

$$E_e^2 = |\mathbf{p}_e|^2 + m_e^2, \quad E_p^2 = |\mathbf{p}_p|^2 + m_p^2$$

を用いると

$$\begin{aligned} E_\gamma^2 &= (E_e + E_p)^2 = |\mathbf{p}_e|^2 + |\mathbf{p}_p|^2 + 2(E_e E_p + m_e^2) \\ &= |\mathbf{p}_\gamma|^2 + 2(E_e E_p + m_e^2 - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_p) \end{aligned}$$

となるが最後の括弧内の量は 0 ではないので光子に関する 4 元運動量の関係式 $E_\gamma^2 = |\mathbf{p}_\gamma|^2$ が成り立たない

4. Lorentz 不変な規格化

z 方向への boost を考えると 4 元運動量は

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E + \gamma\beta p_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ \gamma\beta E + \gamma p_3 \end{pmatrix}$$

*28 s としては helicity $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})/|\mathbf{p}|$ の固有値 $1, -1$ をとることが多い.

これと δ 関数の公式 $\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|}$ (x_n は $g(x)$ の零点) より $\delta(f(x)-f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x-x_0)$ であることを用いると

$$\begin{aligned}\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \frac{dp_3}{dp'_3} \\ &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left[\gamma \left(1 + \beta \frac{dE}{dp_3} \right) \right]^{-1} \\ &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left[\gamma \left(1 + \beta \frac{p_3}{E} \right) \right]^{-1} \\ &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left[\frac{1}{E} (\gamma E + \gamma \beta p_3) \right]^{-1} \\ &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \frac{E}{E'}\end{aligned}$$

2 行目から 3 行目は On-shell 条件 $E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{m^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ を用いた。これより $E_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ は Lorentz 不変であることがわかる。Hilbert 空間の内積を Lorentz 不変にするために

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$$

と定義する。

5. Lorentz 不変な積分

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0}$$

と書けるので

- デルタ関数の引数は Lorentz scalar なので自明に不変
- 積分測度は Jacobian が^s proper orthochronous な Lorentz 変換 (L_+^\uparrow)^{*29} では 1 なので不変

よってこの形の積分は Lorentz 不変である。

(上式の証明)

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta((p^0 + \sqrt{\mathbf{p} + m^2})(p^0 - \sqrt{\mathbf{p} + m^2})) \Big|_{p^0 > 0} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} dp^0 \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p} + m^2}} [\delta(p^0 + \sqrt{\mathbf{p} + m^2}) + \delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p} + m^2})] \Big|_{p^0 > 0} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p} + m^2}} \\ &= (\text{左辺})\end{aligned}$$

より従う^{*30}。

6. より詳しい C-parity の議論

運動量が 0 でない場合の取り扱いも述べておく (詳しくは参考文献 [7] 参照)。Ps は electron と

^{*29} Lorentz 群 $SO(1,3)$ で単位元と繋がった連結成分

^{*30} 積分領域が無限領域だと問題ないが有限領域だと Lorentz 変換で積分領域が変化してしまうので注意

positron の束縛状態なので次のように表現してみる.

$$|Ps\rangle = \sum_{s,s'} \int d^3p f(|\mathbf{p}|; s, s') a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{s'\dagger} |0\rangle$$

s, s' は electron と positron の可能な spin 状態である. f が \mathbf{p} の方向によらないのは基底状態であることが効いている. もし角運動量があるならば球面調和関数分の角度依存性が出る. また spin の入れ替えに関しては

$$f(|\mathbf{p}|; s, s') = \epsilon f(|\mathbf{p}|; s', s)$$

ただし triplet ならば $\epsilon = 1$, singlet ならば $\epsilon = -1$ である. このとき

$$\begin{aligned} C|Ps; \epsilon\rangle &= \sum_{s,s'} \int d^3p f(|\mathbf{p}|; s, s') b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{-\mathbf{p}}^{s'\dagger} |0\rangle \\ &= \sum_{s,s'} \int d^3p f(|\mathbf{p}|; s', s) b_{-\mathbf{p}}^{s'\dagger} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle \\ &= -\epsilon |Ps; \epsilon\rangle \end{aligned}$$

となる. 二行目では $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, $s \leftrightarrow s'$ と置き直した.

参考文献

- [1] M. Peskin, D. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. New York, Addison Wesley, 1995.
- [2] A. Ore and J. L. Powell. *Three-Photon Annihilation of an Electron-Positron Pair*. The American Physical Society, 1949.
- [3] 日置善郎『場の量子論 - 摂動計算の基礎 -』吉岡書店
- [4] J.J.Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics*. NewYork, Addison Weysey, 1967.
- [5] 九後汰一郎『ゲージ場の量子論 1』培風館
- [6] 猪木川合『量子力学 1』講談社
- [7] Franz Gross. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. John Wiley & Sons, 1999.

3 実験

3.1 実験原理

本実験では、放射線源 (^{22}Na) の β^+ 崩壊を利用して、その崩壊によって放射された陽電子がシリカパウダー (主成分: SiO_2) 内で電子対消滅をし、そこで生成したポジトロニウムが崩壊するまでの過程を観測することをねらいとする。

3.2 実験器具

ここでは、今回の実験で用いた主な実験器具および測定器具について述べる。

放射線源 (^{22}Na) 陽電子を放射させる線源として ^{22}Na を採用した。

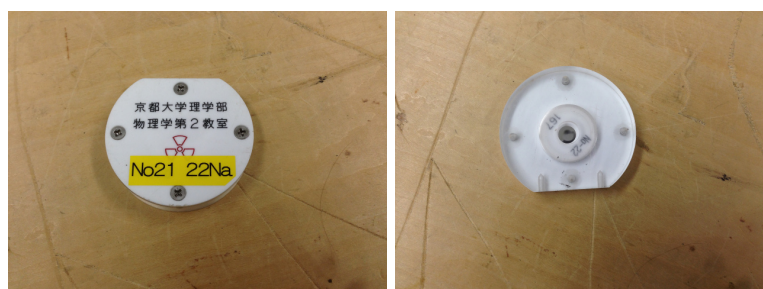


図 3.1 実験に用いた放射線源

鉛板 放射線を遮蔽するために用いた。

プラスチックシンチレーター (以後 P.S. と略記) 有機シンチレーターの 1 つ。P.S. は特にコンプトン散乱後の電子および陽電子に対して感度がよく、発光も高速であるため同時計測も行いやすい。ただ、外部からの光に反応すると壊れてしまうので、シートで遮光する必要がある。

NaI シンチレーター 無機シンチレーターの1つ。有機シンチレーターよりも発光は遅いが、阻止能が高く、原子番号も高いためガンマ線検出効率に優れている。以上の理由で本実験にて検出器として用いた。

シリカパウダー SiO_2 を粉末状にしたもの。入射してくる β^+ と反応させてポジトロニウムを生成させるために用いる。酸素原子が実験に悪影響を及ぼすとされることから、本実験の際にはオーブントースターで焼いて水分を飛ばした。



図 3.2 鉛板とプラスチックシンチレータ (左), NaI シンチレーター (中), シリカパウダー (右)

オシロスコープ スコープ内の電圧変化を、一定時間ごとに波形として表示する機器。本実験では、どのような信号が来ているのかを波形によって見たり、正常に波形が表示されるかを確認することで、回路が正しく組まれているかを確認したり、また、信号の届く時間の見積もりを行ったりするためなどに用いた。

電圧計 ある2点間の電圧を簡易に確かめることのできる機器。本実験では主に discrimination における Threshold の大きさを確認するために用いた。

真空ポンプ 上で述べたように酸素原子が実験に悪影響を及ぼす^{*1}ので、シリカパウダーを入れた容器内に空気が入らないようにするために用いた。



図 3.3 オシロスコープ (左), 電圧計 (中), 真空ポンプ (右)

3.3 実験手順

3.3.1 実験のセッティング

β^+ 線源 (^{22}Na) を用意し、その線源から放射された陽電子が外部に漏れることなく P.S. を通過するように鉛板および P.S. を設置した。P.S. を通過したあと、陽電子がシリカパウダーに到達するように、鉛板および

^{*1} 実際に影響を及ぼしていることは 5.1 節で見る。

シリカパウダーを設置した。そして、シリカパウダーを囲むように NaI シンチレーターを置いた。真空ポンプを利用して、シリカパウダーの容器内には常に空気が入らないようにしておいた*2。本実験では、NaI シンチレーターに入射する外部の放射線を鉛板でできる限り遮蔽することを心掛けた。実際に行ったセットアップは図 3.4、図 3.5 の通りである (図において物体間の距離の単位は (mm) である)。

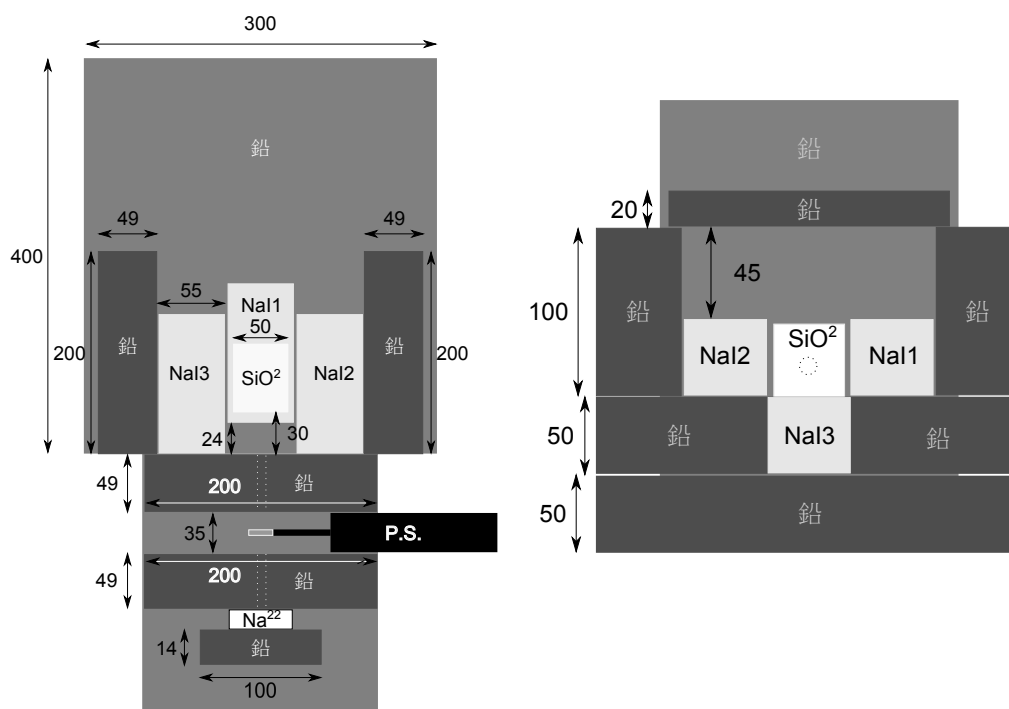


図 3.4 真上および正面から見た配置の断面図



図 3.5 実際の配置の様子

*2 実際には、真空ポンプを使わない状態でのデータも測定した。真空を引いた状態と引かない状態の比較については 5.1 節を参照。

3.3.2 回路

次に、回路を組む。本実験では図 3.6 のように回路を組んだ。回路が正しく組み立てられているか、適宜オシロスコープで信号を確認しつつ実験を行った。

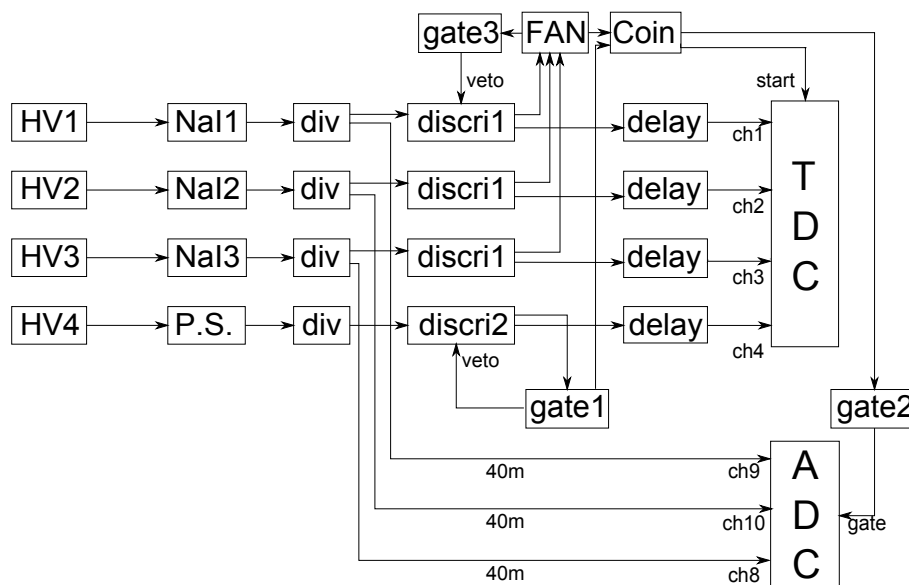


図 3.6 回路の概略図

上の回路図における記号 (モジュール) に関する説明を以下に示す。

- HV** Negative High Voltage のこと。光電子増倍管に負の電圧を印加する。
- div** divider のこと。入力信号を 2 つに分断する。
- discri** discriminator のこと。信号が Threshold (閾値) を越えたときに NIM 信号を出力する。
- Gate** Gate Generator のこと。信号が入力されると一定の時間幅の NIM 信号を出す。
- FAN** 入力端子のいずれかに信号が入ると信号を出力する。
- Coin** Coincidence のこと。2 つ同時に信号が入ると信号を出力する。
- delay** 入力信号を一定時間遅らせて出力させる。
- ADC** Analog to Digital Converter のこと。Gate からの信号が入力されている間に入ってくる信号の積分値を出力する。
- TDC** Time to Digital Converter のこと。start に信号が入力されてから stop に信号が入力されるまでの時間に比例する値を出力する。

これらのモジュールの実際の様子は図 3.7 のようになっていた。なお P.S. が壊れないよう、電圧をかける前に黒のビニールシートで図 3.8 のように遮光した。

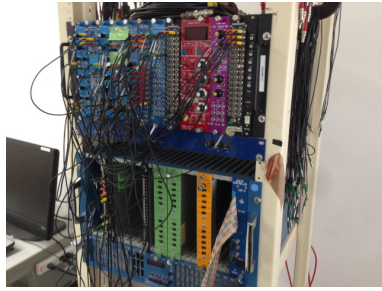


図 3.7 モジュールの様子



図 3.8 実験装置の遮光

3.3.3 各種数値

本実験で設定した以下の値を表に示しておく。

- 表 3.1：各シンチレーターに印加した HV
- 表 3.2：discriminator1,2 に設定した Threshold の値 (discriminator1 は NaI シンチレーターに, discriminator2 は P.S. に対応)
- 表 3.3：各 gate generator で設定した width の値

表 3.1 各シンチの HV

	HV[mV]
NaI1	1200
NaI2	1330
NaI3	1470
P.S.	1800

表 3.2 discriminator の閾値

	Threshold[mV]
discriminator1	10.6
discriminator2	10.2

表 3.3 g.g. のゲート幅

	width[ns]
gate1	1200
gate2	700
gate3	1.5×10^5

4

真空中でのデータ解析

4.1 Calibration

4.1.1 ADC calibration

ADC から得られる値は 0 から 4095 までの整数である。これらの値は入力された信号の波高の積分値に対応しており、実際のエネルギー値ではない。そこで、実際のエネルギーとの対応を知る必要がある。γ 線のエネルギー値と ADC の出力値は a, b を定数として、

$$(\text{energy}[\text{keV}]) = a \times (\text{ADC の出力値}) + b$$

というような線形関係があるとし、各 NaI シンチレータごとに a, b を求めればよい。

この a, b の値は実際のエネルギーがわかっている γ 線を NaI シンチレータで検出し、ADC の出力値との対応を見ればよい。今回の実験では ^{22}Na からでる 511keV の γ 線とペDESTAL の位置の 0keV を利用する。ペDESTAL と 511keV のエネルギーに対応する位置を見つけ、511keV の部分は gaussian で fit する事により正確なピークを求める。こうして得られた値が 0keV と 511keV のエネルギーに対応する ADC の出力値であるから、これらを用いて a, b の値を決定できる。ADC の出力値とエネルギー値の関係は表 4.1 の通りである。

表 4.1 ADC の出力値とエネルギー値の関係

	0 keV	511 keV
ADC1	163	1344
ADC2	180	1371
ADC3	155	1407

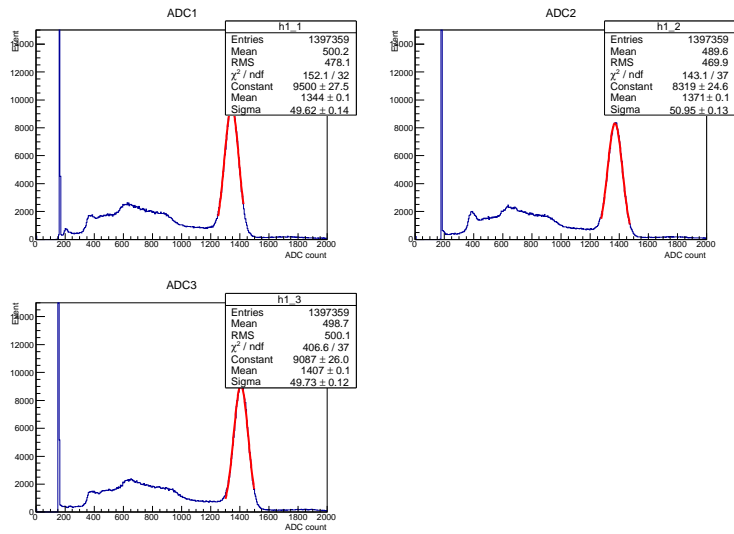


図 4.1 ADC の生データ

キャリブレーションの結果、以下の式が得られる。

$$(\text{energy}[\text{keV}]) = 0.4327(\text{ADC1} - 163)$$

$$(\text{energy}[\text{keV}]) = 0.4291(\text{ADC2} - 180)$$

$$(\text{energy}[\text{keV}]) = 0.4881(\text{ADC3} - 155)$$

キャリブレーション後のグラフは図 4.2 のようになる (511keV 付近以外のデータ数が分かりやすいように縦軸を対数にとった)。

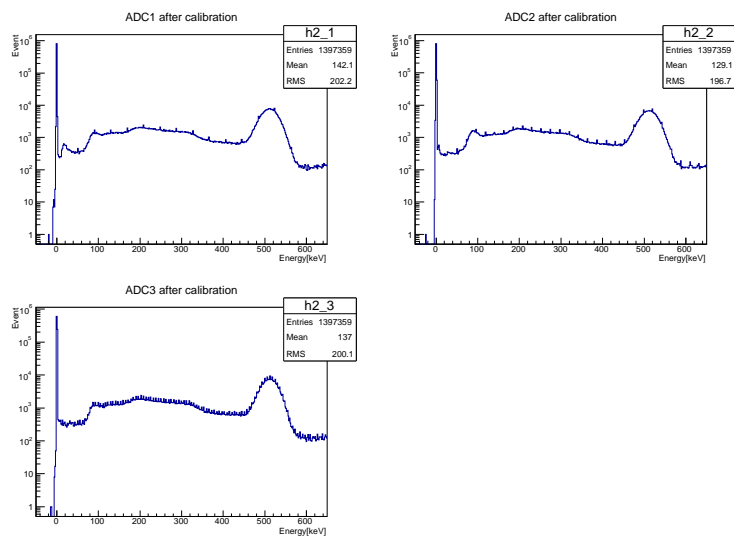


図 4.2 ADC の calibration 後のグラフ

4.1.2 TDC calibration

TDC から得られる値は 0 から 4095 までの整数である。これらの値は実際の時間に対応はしているが、等しいわけではなく、そのままでは使えない。そこで、実際の時間との対応を知る必要がある。時間と TDC の出力値は a, b を定数として、

$$(\text{time}[\text{ns}]) = a \times (\text{TDC の出力値}) + b$$

というような線形関係があるとし、プラスチックシンチレータにおける a, b を求めればよい。今回は TDC4 しか必要でないので、TDC4 のキャリブレーションのみを行う。

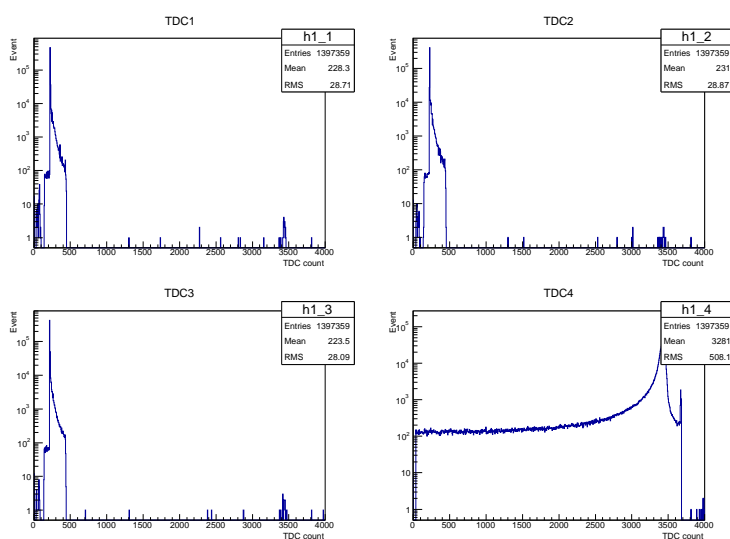


図 4.3 TDC の生データ

この a, b の値は、1 つのスタート信号とそれに対して 2 種類以上の実際の時間間隔がわかっている信号 (fixed delay) を用意し、その時間間隔と TDC の出力を対応させればよい。実際の時間間隔はオシロスコープで測定する。今回の実験では時間間隔として 940ns, 586ns, 117ns を使った。これを用いて各チャンネルごとの a, b の値を決める。fixed delay と TDC の出力値の関係は表 4.2 の通りである。

表 4.2 TDC4 の出力値と fixed delay の関係

delay[ns]	TDC4
117	531
586	2397
940	3797

最小二乗法で fitting した結果、以下の式が得られる。

$$\text{time}[\text{ns}] = (\text{TDC4} - 58.37)/3.984$$

キャリブレーションをし、900ns からそれを引いたグラフを図 4.4 に示す。

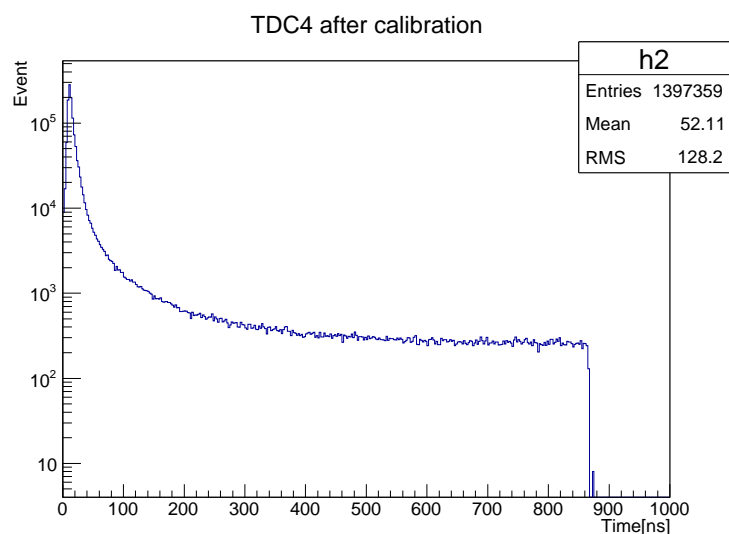


図 4.4 calibration 後の TDC4 のグラフ

4.2 TQ 補正

4.2.1 TQ 補正の概略

NaI からの信号は実際には図 4.5 に示すように threshold を超えるまで時間を要する。またその時間は γ 線のエネルギーに依存すると考えられる。実際図 4.6 に示した実際のデータからも寿命とエネルギーの相関は無いにも関わらず低エネルギーの γ 線を観測した時に寿命がのびているように見えることがわかる。この真の寿命との差 ΔT をエネルギーの関数として求める事が TQ 補正である。

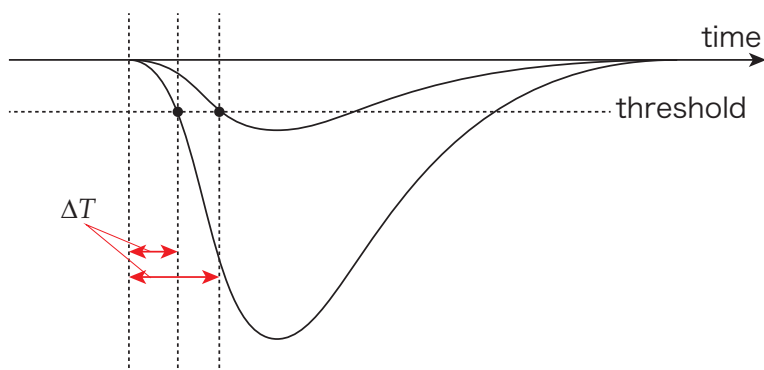


図 4.5 NaI からの信号の概略図：threshold を超えるまでの時間がエネルギーによって異なる。

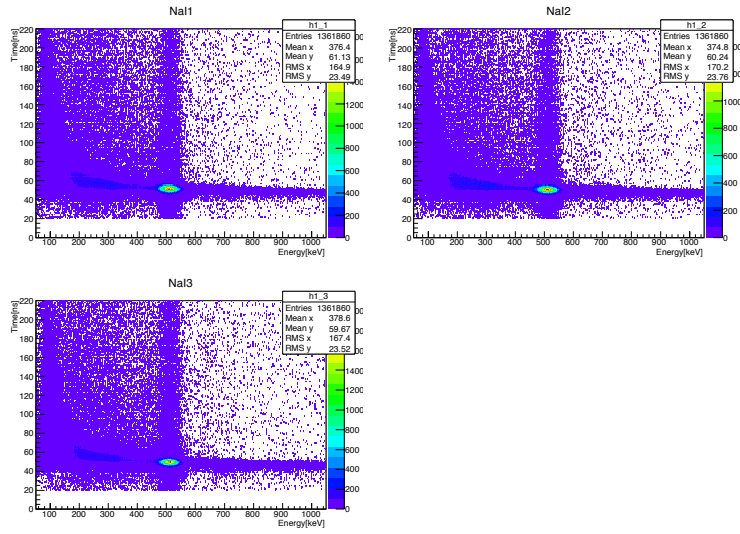


図 4.6 TQ 補正前のエネルギー対時間分布

4.2.2 TQ 補正関数の作成

まず一次近似として ΔT を信号を三角形とみなして近似をする (図 4.7). またこのとき

- ピークの位置 t_0 はエネルギーに依存しない.
- 三角形の底辺の長さはエネルギーに依存しない.

という仮定をおくことにより三角形の面積は高さに比例し $y_{\max} \propto E$ となる. threshold の位置を y_0 とおくと

$$\Delta T(E) = \frac{y_0 t_0}{y_{\max}} \propto \frac{1}{E}$$

となることがわかる.

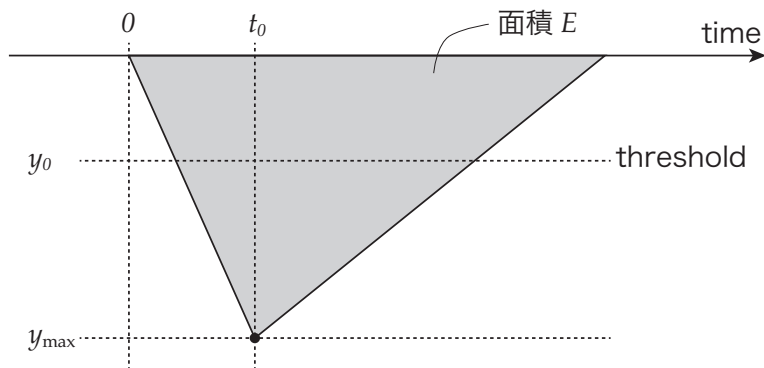


図 4.7 NaI からの信号を三角形で近似

以上の議論をふまえて

$$\Delta T(E) = \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} + p_3$$

の形を試行関数として用いることにより精密な補正が期待される。上で図 4.6 に示したエネルギー対時間のグラフのうち、データ点が多い p-Ps による現象の部分 (time = 45ns 付近) を取り出して fitting した。p-Ps の寿命は 0.13ns と極めて短いので、この時刻が Ps 生成時刻とみなせる。この関数で fitting して補正した結果を図 4.8 及び表 4.3 に示す。

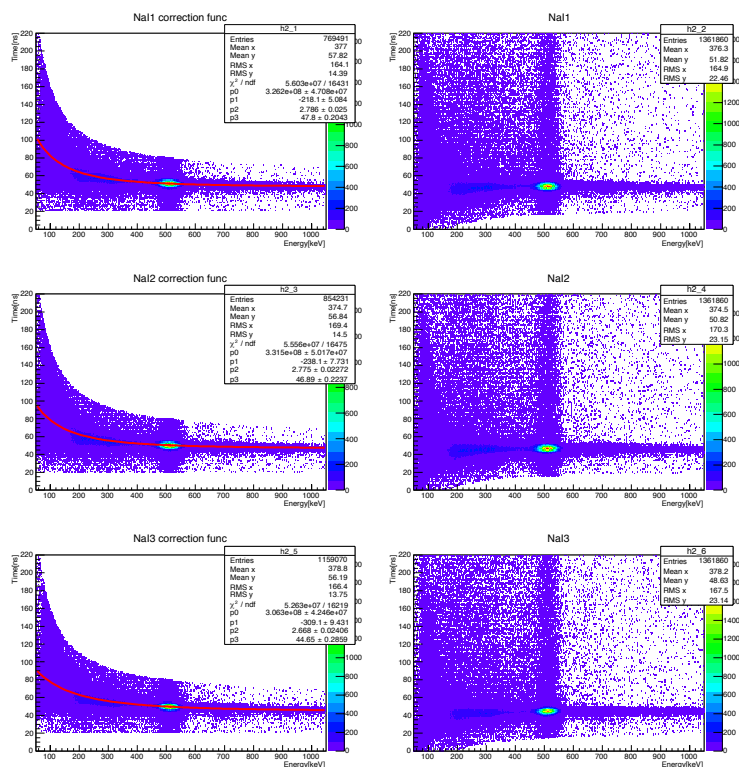


図 4.8 TQ 補正関数と補正後のエネルギー対時間分布

表 4.3 fitting によって求めた TQ 補正関数のパラメータ

	p_0	p_1	p_2	p_3
NaI1	3.262×10^8	-218.0	2.785	47.79
NaI2	3.314×10^8	-238.1	2.774	46.88
NaI3	3.063×10^8	-309.1	2.667	44.64

4.2.3 TQ 補正後の寿命

4.3 節で述べる pick-off 補正はまだ行っていないが、この時点で一度 o-Ps の寿命を求めてみた。fitting 関数を

$$\text{count} = p_0 \exp\left(-\frac{\text{Time}}{p_1}\right) + p_2$$

とし、TDC4 のグラフを 225-700ns の範囲で fitting した。パラメータ p_1 が寿命を表している。fitting の結果を図 4.9 及び表 4.4 に示す。

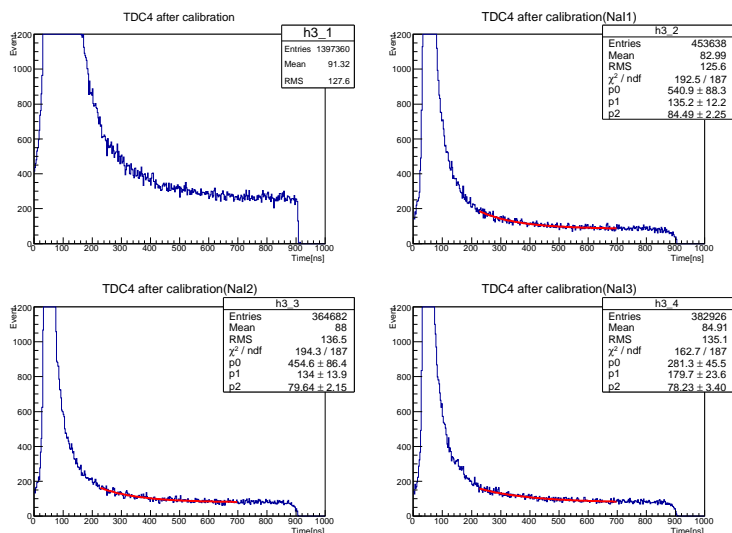


図 4.9 TQ 補正後 (pick-off 補正前) の寿命の fitting

表 4.4 fitting によって求めた寿命を表す関数のパラメータ (pick-off 補正前)

	p_0	p_1	p_2
NaI1	540.9	135.2	84.49
NaI2	454.6	134.0	79.64
NaI3	281.3	179.7	78.23

よって、検出器ごとに算出した o-Ps の寿命は

- NaI1 : 135.2ns
- NaI2 : 134.0ns
- NaI3 : 179.7ns

となった。pick-off 反応を考慮していないため、理論値よりも小さい値となっている*1。

4.3 pick-off 補正

4.3.1 pick-off 補正の概略

得られたスペクトルは o-Ps が p-Ps がかわり崩壊したり結合状態の陽電子が周囲の電子と対消滅を起こすなど o-Ps の崩壊以外の反応も競合している。これらをまとめて pick-off 反応と呼び実際に観測できる崩壊幅

*1 4.3 節で見ると、pick-off 補正をしない状態では o-Ps の寿命よりもずっと短い時間の反応も含めてしまうことになるので、実際の寿命よりも短い値が出る傾向がある。

Γ_{obs} との間に

$$\Gamma_{\text{obs}} = \Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}}$$

の関係がある. この pick-off 反応による崩壊幅 $\Gamma_{\text{pick-off}}(t)$ の関数形を求め純粋な o-Ps の崩壊のみを取り出すのが pick-off 補正である.

4.3.2 pick-off 補正関数の作成

p-Ps の寿命は 100ps 程度であることが知られているので 47ns 付近でのスペクトルは殆どが pick-off 反応のものである. p-Ps は 2γ 反応, o-Ps は 3γ 反応であるため以降の時間による 511keV のピークも全て pick-off 反応によるものとする. pick-off 反応によるスペクトルの形はどの時刻においても相似であるとし 47ns 付近でのデータを全て pick-off 反応のものとして補正を行った.

実験データをある時間幅 Δt 毎に区切る. 511keV のピークが各時刻 t におけるそれと同じ高さになるように 47ns 付近のスペクトルをスケール変換したものがその時刻の pick-off 反応によるスペクトルであると考えられる. また元のスペクトルとの差分が純粋な o-Ps の崩壊によるスペクトルである. t でのそれぞれの総検出数を $\Delta N_{\text{pick-off}}, \Delta N_{\text{ortho}}$ とおくことにより崩壊幅の比

$$f(t) \equiv \frac{\Gamma_{\text{pick-off}}}{\Gamma_{\text{ortho}}} = \frac{\Delta N_{\text{pick-off}}(t)}{\Delta N_{\text{ortho}}(t)}$$

を求める (図 4.10 を参照).

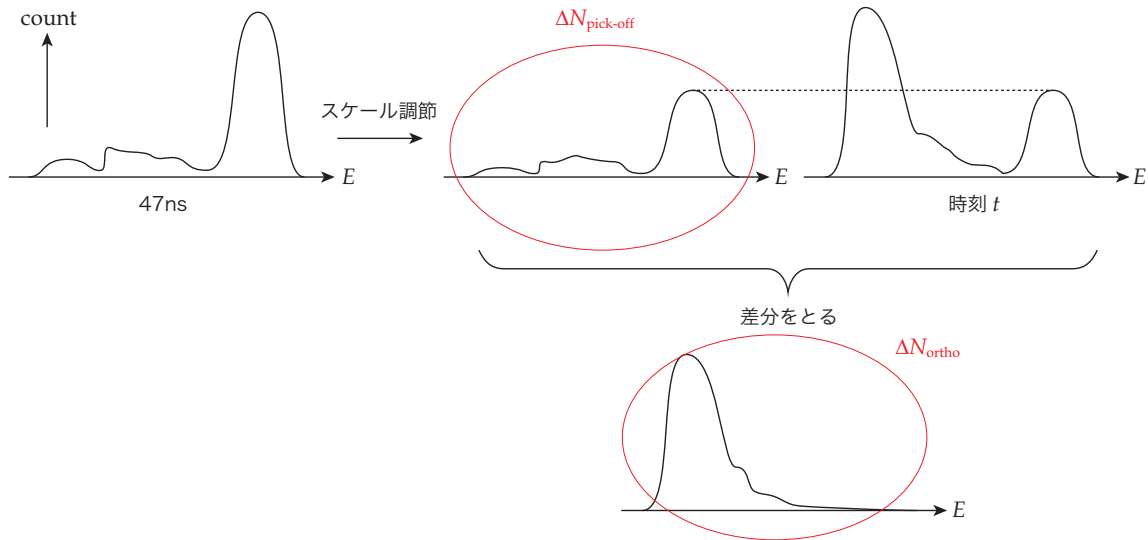


図 4.10 pick-off 補正の方法：グラフの差分から o-Ps のスペクトルを抽出.

今回は Δt の幅を 50ns とし, pick-off 反応のスペクトルは 47ns の前後 4ns(45-49ns) のデータを用いた. 実際のスペクトルの様子を図 4.11 に, 求めた崩壊幅の比を表 4.5 に示す.

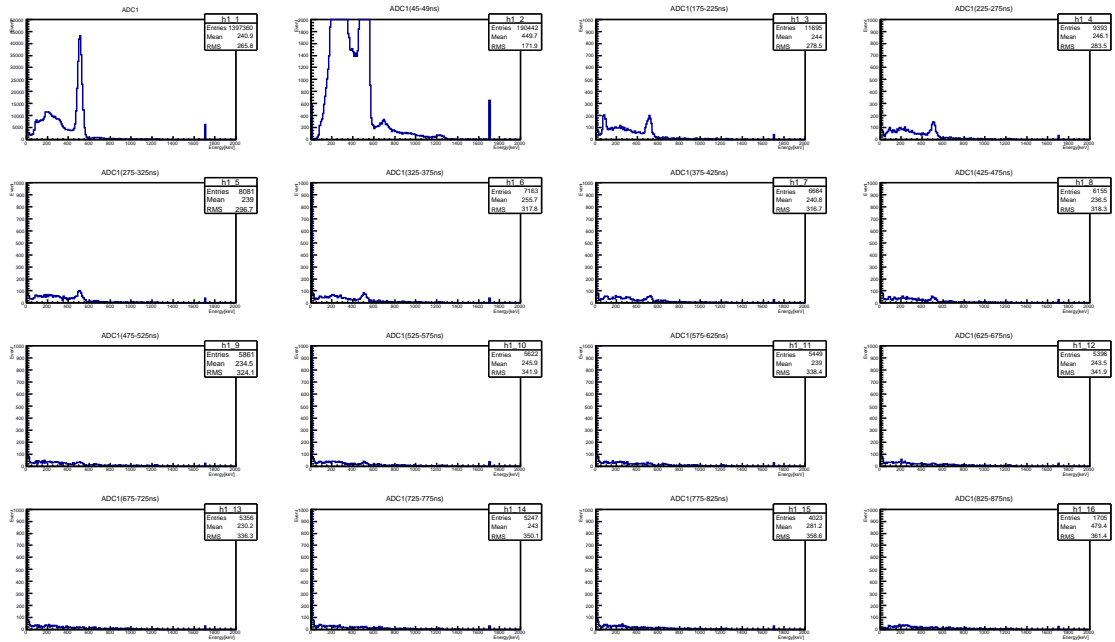


図 4.11 各時刻のスペクトル (この図は NaI1 での様子)

表 4.5 $\Gamma_{\text{pick-off}}/\Gamma_{\text{ortho}}$ の比

	NaI1	NaI2	NaI3
time[ns]	$\Gamma_{\text{pick-off}}/\Gamma_{\text{ortho}}$		
200	0.512937	0.531824	0.547643
250	0.459944	0.461986	0.482808
300	0.427410	0.475000	0.460790
350	0.356794	0.405614	0.359526
400	0.316852	0.336105	0.305914
450	0.284007	0.275136	0.313631
500	0.209046	0.236527	0.229653
550	0.216195	0.215334	0.156368
600	0.168875	0.180971	0.198525
650	0.147184	0.181241	0.146800
700	0.130877	0.167771	0.128424
750	0.148221	0.161068	0.171739
800	0.103037	0.137497	0.131836
850	0.133939	0.163454	0.119996

o-Ps がスピン交換により p-Ps になる確率が時間に対し一定であるとする $f(t)$ は定数関数になることが期待される。これは時刻 t から $t + \Delta t$ に崩壊する o-Ps と p-Ps の数をそれぞれ $\Delta N_{\text{ortho}}(t) = \frac{N(t)}{a} \Delta t$,

$$\Delta N_{\text{pick-off}}(t) = \frac{N(t)}{b} \Delta t \text{ とおくと}$$

$$f(t) = \frac{\Delta N_{\text{pick-off}}(t)}{\Delta N_{\text{ortho}}(t)} = \frac{a}{b} = \text{const}$$

となるためである。ここで a, b はそれぞれ単位時間に o-Ps と p-Ps が崩壊する割合である。またここで p-Ps は寿命が早いため pick-off した瞬間に崩壊すると見なせることを使った。

ところが実際には図 4.12 のように pick-off 補正関数 $f(t)$ は 200ns 付近で極大を迎え以降減少するような関数である。

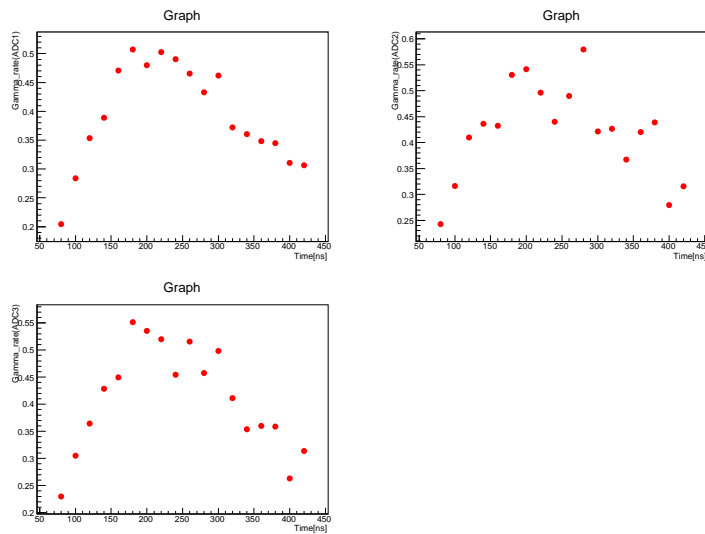


図 4.12 pick-off 補正関数 (時刻を早めにとった場合)

このように $f(t)$ が極値をもつ理由はわからず、今回は 200ns 以降のデータに対してのみ 50ns 毎に区切って fitting を行った。その際

$$f(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2$$

となる関数を持ってきて fitting した。結果を図 4.13 及び表 4.6 に示す。

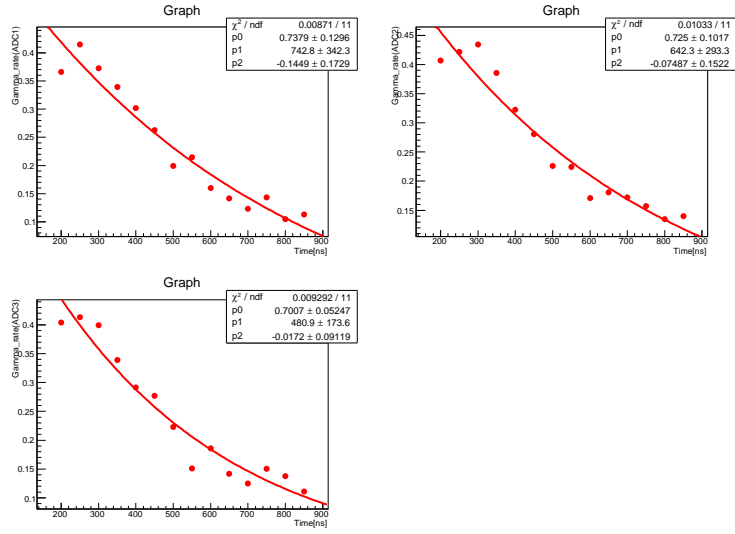


図 4.13 pick-off 補正関数

表 4.6 fitting によって求めた pick-off 補正関数のパラメータ

	p_0	p_1	p_2
NaI1	0.8970	338.8	0.03222
NaI2	0.9053	320.3	0.06804
NaI3	1.0041	293.4	0.05894

4.3.3 pick-off 補正後の寿命

今上記で求めた崩壊幅の比 $f(t)$ を用いて

$$\begin{aligned}
 -\frac{dN}{dt}(t) &= N_0(\Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}}(t)) \exp\left(-\int_0^t dt'(\Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}}(t'))\right) \\
 &= N_0(\Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}}(t)) \exp\left(-\frac{1}{\tau_{\text{ortho}}} \int_0^t dt'(1 + f(t'))\right)
 \end{aligned}$$

とかける。ここで崩壊幅はその定義より寿命の逆数であることを用いた。よって

$$\text{count} = p_0(1 + f(t)) \exp\left(-\frac{1}{p_1} \int_0^t dt'(1 + f(t'))\right) + p_2$$

で fitting を行った。ここで p_1 が o- P_s の寿命となる。fitting の範囲を 225-700ns で行った結果を図 4.14 及び表 4.7 に示す。

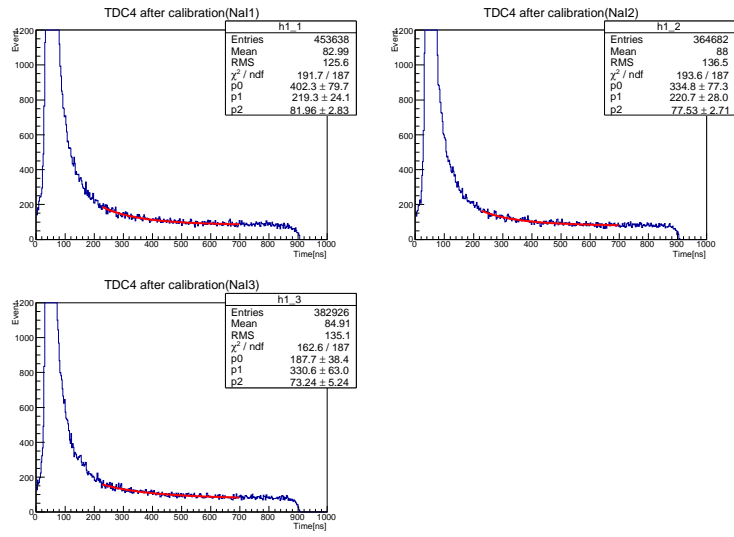


図 4.14 pick-off 補正後の寿命の fitting

表 4.7 fitting によって求めた寿命を表す関数のパラメータ

	p_0	p_1	p_2
NaI1	402.3	219.3	81.96
NaI2	334.8	220.7	77.53
NaI3	187.7	330.6	73.24

よって，検出器ごとに算出した o- P_s の寿命は

- NaI1 : 219.3ns
- NaI2 : 220.7ns
- NaI3 : 330.6ns

となった。

5

考察

5.1 真空を引いたデータ・真空を引いていないデータの比較

3章で述べたように、今回の実験においては酸素原子の存在が悪影響を及ぼすとされている。具体的には酸素原子の存在によって pick-off 反応の数が増え、o-Ps として崩壊する数が減るようである。そこで3章の脚注*2でも述べたように、実際には真空を引いていない状態のデータも測定したので、4章の結果と比較して生データや求めた寿命に違いが見られるかを見ることにする。

5.1.1 ADC calibration

ADC calibration を行った結果、図 5.1 のような結果が得られた。以下、簡単のため真空を引いた状態を v 状態、真空を引いていない状態を nv 状態と表すことにする。

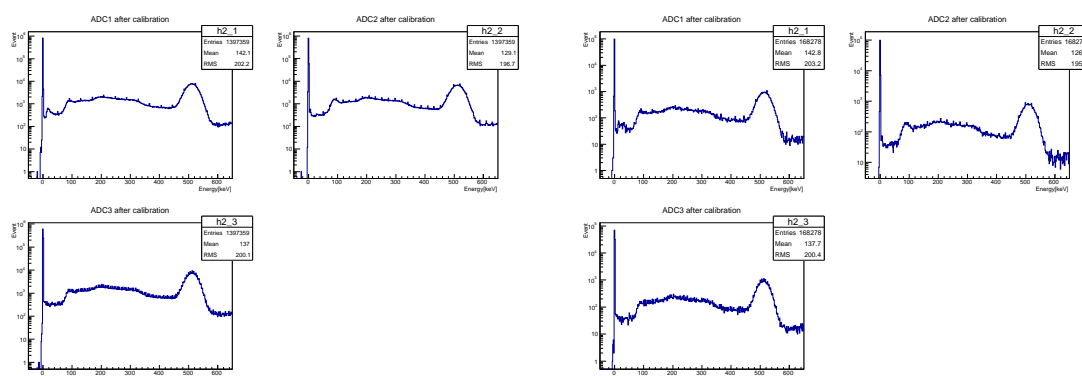


図 5.1 ADC calibration の比較 (左：v 状態，右：nv 状態)

グラフにさほど差異が見られなかったため、横軸 (エネルギー) を大きく 2 つに分けて

- 511keV 付近：491～531keV
- それ以外：100～400keV

とし、この間に含まれるカウント数をそれぞれのデータで比較した。結果を表 5.1 に示す。

表 5.1 エネルギーを分けたときのカウント数の比較 (左：v 状態, 右：nv 状態)

	511keV 付近	それ以外	両者の比		511keV 付近	それ以外	両者の比
NaI1	159081	247739	0.642131	NaI1	19387	29796	0.650658
NaI2	141429	225024	0.628506	NaI2	16800	26404	0.636267
NaI3	159237	237436	0.670652	NaI3	19219	28733	0.668882

このように、数値で見ても特に大きな差異が見られる訳ではなかった。pick-off 反応の数が増えれば 511keV 付近のカウント数が増えそうだが、実際にはそうならないようである。

5.1.2 TDC calibration

TDC calibration を行った結果、図 5.2 のような結果が得られた。

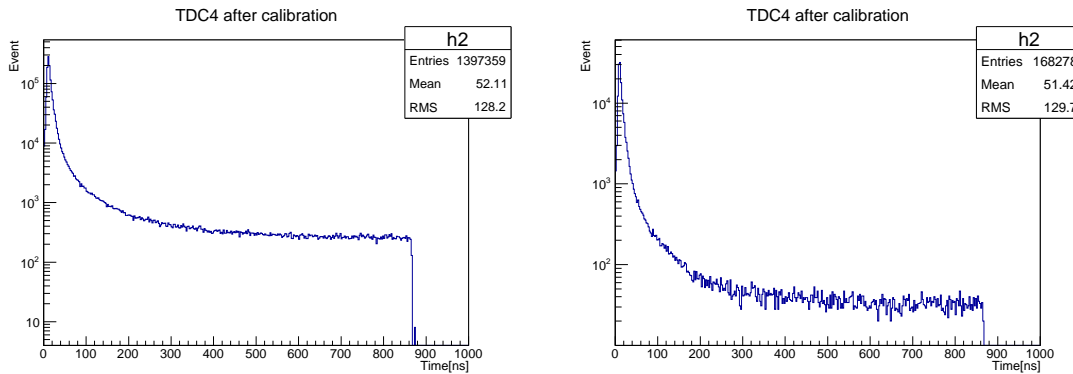


図 5.2 TDC calibration の比較 (左：真空を引いた状態, 右：真空を引いていない状態)

この結果については、次節で TQ 補正をして寿命を求める際に用いる。

5.1.3 寿命を求める (TQ 補正後)

nv 状態のデータについて、4.2 節で述べたのと同様の手順で TQ 補正を行い、その後 o-¹⁶O の寿命を求めた*1。

*1 真空を引いていない状態で取ったデータ数が、4 章で扱ったデータ数の $\frac{1}{10}$ 程度と少なめであったため pick-off 補正がうまくできず、TQ 補正のみ考慮して寿命を比較した

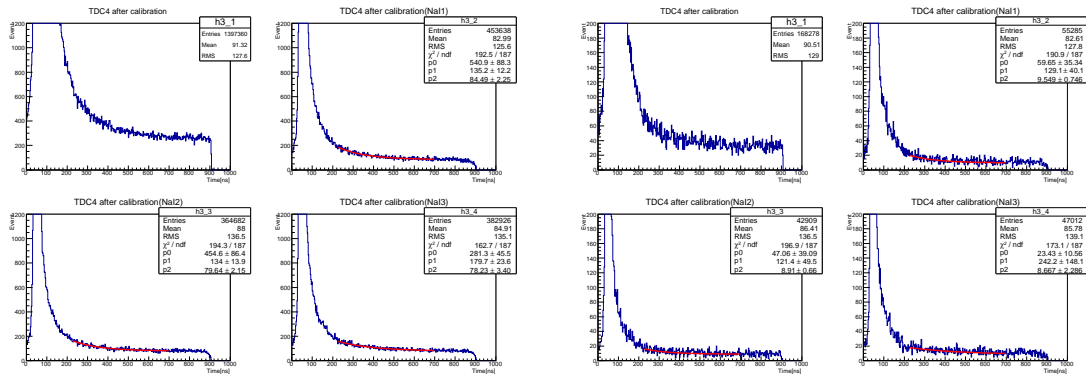


図 5.3 寿命を求める関数を fit したときの比較 (左: v 状態, 右: nv 状態)

求まった寿命は表 5.2 のようになった。

表 5.2 v 状態と nv 状態の寿命の差異 (単位は ns)

	v 状態	nv 状態
NaI1	135.2	129.1
NaI2	134.0	121.4
NaI3	179.7	242.2

NaI1 と NaI2 については nv 状態の方が寿命が短くなり, pick-off 反応が増えるという仮説に合致していた。しかし NaI3 については nv 状態の方が寿命が長くなるという結果になった。

5.2 データ数の妥当性について

pick-off 補正を考える際により多くのデータが必要となる。これは純粹の o-Ps 反応をとりだすため使えるデータ数が大幅に減るためである。また本来 o-Ps 反応の分岐比が時間依存性をもっているので pick-off 補正の際の時間幅 Δt は可能な限り小さくするのが理想であるが主に反応が少なくなる後半のためこれ以上細かくすることは解析上困難であった。データの区切り方でまだ pick-off 補正のパラメータが変動することは大いに考えられる。実際に上記の事は TQ 補正に比べ pick-off 補正のパラメータに大きな誤差が出ていることに現れている。このことよりさらにデータ数を多くすることにより大きく精度を高められることが期待される。

5.3 誤差の評価

5.3.1 TDC4 の calibration 関数の誤差の評価

TDC4 の calibration 関数は, o-Ps の寿命の fitting の際に TDC の値を時間に対応させる。よってこの calibration 関数の傾きに誤差があれば, o-Ps の寿命にも影響すると考えられる。ここではその calibration 関数の傾きの誤差を考える。

誤差を含めると、TDC4 の calibration 関数は次のように表せる。

$$\text{time [ns]} = (3.984 \pm 0.009)\text{TDC4} + (58.37 \pm 5.80)$$

よって、傾きの誤差は 0.22% となり、o-PS の寿命にも **% の誤差が生じると考えられる。

5.3.2 TQ 補正関数の誤差の評価

TQ 補正関数のパラメータは fitting により求まるが、一定の幅の誤差をもつ。よってこのパラメータの誤差によって求まる o-PS 寿命にも誤差が生じると考えられる。そこで TQ 補正関数の誤差を、誤差の伝搬を用いて考えていく。

変数 x_1, \dots, x_n の測定誤差が $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ であるとき、測定値を用いて関数 $q(x_1, \dots, x_n)$ の値を計算すると、 x_1, \dots, x_n の誤差が互いに独立かつランダムであるとすれば、 q の誤差は

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial x_n} \delta x_n\right)^2}$$

で与えられる。この伝搬の公式を用いて、TQ 補正関数の誤差を求める。TQ 補正関数の各パラメータは互いに独立にふるまうとする。 E は定数と考えて計算を行う。

TQ 補正関数のパラメータ p_0, p_1, p_2 の誤差をそれぞれ $\delta p_0, \delta p_1, \delta p_2$ として、各値を表 5.3 に示す。ただしパラメータ p_3 は定数項より寿命には直接影響しないとしてここでは考えないことにする。

表 5.3 fitting によって求めた TQ 補正関数のパラメータおよびその誤差

	p_0	δp_0	p_1	δp_1	p_2	δp_2
NaI1	3.262×10^8	4.708×10^7	-218.0	5.084	2.785	0.025
NaI2	3.314×10^8	5.016×10^7	-238.1	7.730	2.774	0.022
NaI3	3.063×10^8	4.246×10^7	-309.1	9.430	2.667	0.024

次の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta T}{\partial p_0} &= \frac{1}{(E - p_1)^{p_2}} \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial p_1} &= \frac{p_0 p_2}{(E - p_1)^{p_2+1}} \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial p_2} &= \frac{-p_0 \ln(E - p_1)}{(E - p_1)^{p_2}} \end{aligned}$$

を用いて、TQ 補正関数の誤差を求めると

$$\begin{aligned} \delta \Delta T(E) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_0} \delta p_0\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_1} \delta p_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_2} \delta p_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left\{\frac{1}{(E - p_1)^{p_2}} \delta p_0\right\}^2 + \left\{\frac{p_0 p_2}{(E - p_1)^{p_2+1}} \delta p_1\right\}^2 + \left\{\frac{-p_0 \ln(E - p_1)}{(E - p_1)^{p_2}} \delta p_2\right\}^2} \\ &= \frac{1}{(E - p_1)^{p_2}} \sqrt{\delta p_0^2 + \left(\frac{p_0 p_2}{E - p_1} \delta p_1\right)^2 + (p_0 \ln(E - p_1) \delta p_2)^2} \end{aligned}$$

したがって、TQ 補正関数は誤差を含めると、 $\Delta T(E) \pm \delta\Delta T(E)$ で与えられると考えられる。以上より、TQ 補正関数が $\Delta T(E) + \delta\Delta T(E)$ 、 $\Delta T(E) - \delta\Delta T(E)$ の 2 通りで表せるとして、それぞれの場合において o-Ps の寿命を求めていく。

4.2.3 節と同様に、pick-off 補正を行わずに o-Ps の寿命を求めていく。fitting 関数を

$$\text{count} = p_0 \exp\left(-\frac{\text{Time}}{p_1}\right) + p_2$$

とし、TDC4 のグラフを 225-700ns の範囲で fitting した。パラメータ p_1 が寿命を表している。

TQ 補正関数が $\Delta T(E) + \delta\Delta T(E)$ の形であるとき、fitting の結果を図 5.4 および表 5.4 に示す。

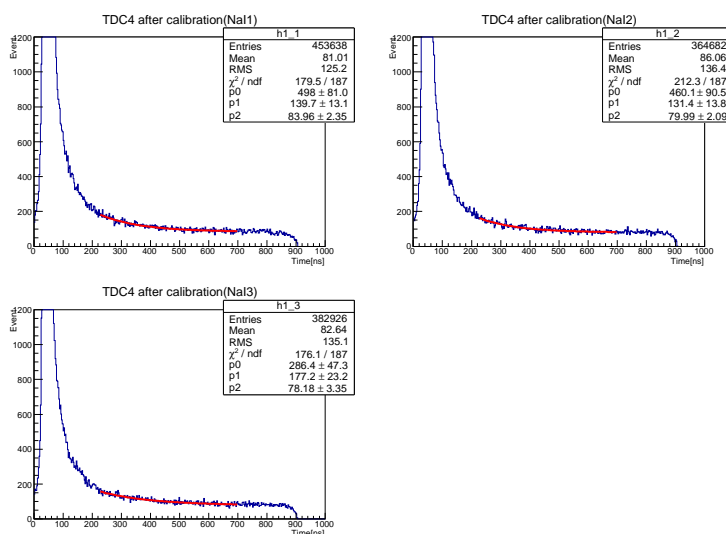


図 5.4 TQ 補正関数が $\Delta T(E) + \delta\Delta T(E)$ で与えられる TQ 補正後 (pick-off 補正前) の o-Ps の寿命の fitting

表 5.4 TQ 補正関数が $\Delta T(E) + \delta\Delta T(E)$ で与えられる TQ 補正後 (pick-off 補正前) における fitting 関数の各パラメータ (誤差付き)

	p_0	p_1	p_2
NaI1	498.0 ± 81.03	139.6 ± 13.06	83.96 ± 2.35
NaI2	460.0 ± 90.51	131.3 ± 13.83	79.98 ± 2.09
NaI3	286.4 ± 47.26	177.1 ± 23.24	78.18 ± 3.34

次に、TQ 補正関数が $\Delta T(E) - \delta\Delta T(E)$ の形であるとき、fitting の結果を図 5.5 および表 5.5 に示す。

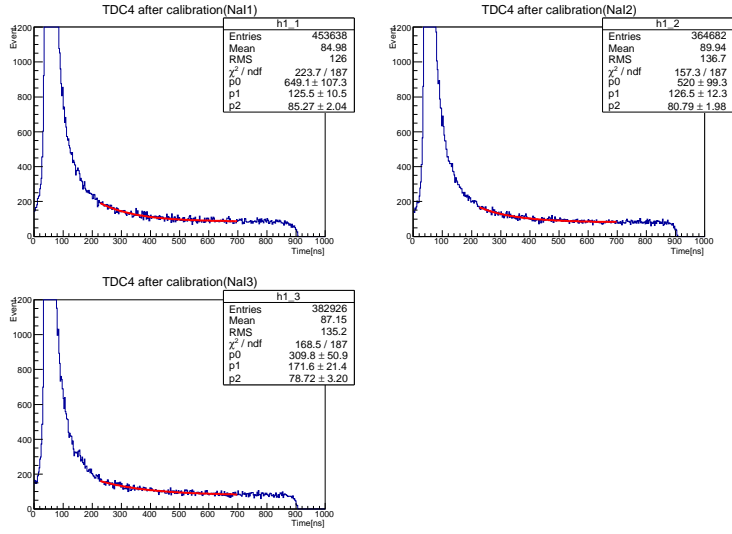


図 5.5 TQ 補正関数が $\Delta T(E) - \delta\Delta T(E)$ で与えられる TQ 補正後 (pick-off 補正前) の o-Ps の寿命の fitting

表 5.5 TQ 補正関数が $\Delta T(E) - \delta\Delta T(E)$ で与えられる TQ 補正後 (pick-off 補正前) における fitting 関数の各パラメータ (誤差付き)

	p_0	p_1	p_2
NaI1	649.0 ± 107.3	125.4 ± 10.46	85.27 ± 2.04
NaI2	519.9 ± 99.25	126.5 ± 12.34	80.78 ± 1.98
NaI3	309.8 ± 50.89	171.5 ± 21.37	78.72 ± 3.19

TQ 補正関数が ΔT で与えられる際に得られる o-Ps の寿命を $\tau_{\Delta T}[\text{ns}]$ のようにおくと、各検出器ごとに算出した o-Ps の寿命は誤差を含めた形で表 5.6 ようになる。

表 5.6 TQ 補正関数の形別の o-Ps の寿命

	$\tau_{\Delta T}[\text{ns}]$	$\tau_{\Delta T + \delta\Delta T}[\text{ns}]$	$\tau_{\Delta T - \delta\Delta T}[\text{ns}]$
NaI1	135.1 ± 12.18	139.6 ± 13.06	125.4 ± 10.46
NaI2	133.9 ± 13.94	131.3 ± 13.83	126.5 ± 12.34
NaI3	179.7 ± 22.99	177.1 ± 23.24	171.5 ± 21.37

5.3.3 pick-off 補正関数の誤差の評価

pick-off 補正関数における p_0, p_1, p_2 のパラメータに誤差が存在する事で、求まる o-Ps の寿命に誤差が生じる。pick-off 補正関数も用いた次の fitting 関数

$$g(p_0, p_1, p_2) \equiv \text{count} = q_0(1 + f(t)) \exp\left(-\frac{1}{q_1} \int_0^t dt(1 + f(t))\right) + q_2$$

を, $f(t)$ のパラメータ p_0, p_1, p_2 に関して誤差の伝搬の考えよりその fitting 関数の誤差を考える.

$$\begin{aligned} g(p_0, p_1, p_2) &= q_0 \left(1 + p_0 e^{-\frac{t}{p_1}} + p_2\right) \exp\left(-\frac{1}{q_1} \int_0^t dt \left(1 + p_0 e^{-\frac{t}{p_1}} + p_2\right)\right) + q_2 \\ &= q_0 \left(1 + p_0 e^{-\frac{t}{p_1}} + p_2\right) \exp\left\{-\frac{1}{q_1} \left((1 + p_2)t + p_0 p_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{p_1}}\right)\right)\right\} + q_2 \end{aligned}$$

pick-off 補正関数のパラメータ p_0, p_1, p_2 の誤差を $\delta p_0, \delta p_1, \delta p_2$ として, 各値を表 5.7 に示す.

表 5.7 fitting によって求めた TQ 補正関数のパラメータおよびその誤差

	p_0	δp_0	p_1	δp_1	p_2	δp_2
NaI1	0.897	0.054	338.8	53.88	0.032	0.035
NaI2	0.905	0.079	320.2	64.29	0.068	0.041
NaI3	1.004	0.106	293.3	58.98	0.057	0.041

fitting 関数 $g(p_0, p_1, p_2)$ を各パラメータ p_0, p_1, p_2 それぞれで偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial p_0} &= q_0 \left\{ e^{-\frac{t}{p_1}} - \frac{p_1}{q_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{p_1}}\right) \left(1 + p_0 e^{-\frac{t}{p_1}} + p_2\right) \right\} \exp\left\{-\frac{1}{q_1} \left((1 + p_2)t + p_0 p_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{p_1}}\right)\right)\right\} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} &= q_0 p_0 \left\{ \frac{t}{p_1^2} e^{-\frac{t}{p_1}} - \frac{1}{q_1} \left(1 + p_0 e^{-\frac{t}{p_1}} + p_2\right) \left(1 + \left(\frac{t}{p_1} - 1\right) e^{-\frac{t}{p_1}}\right) \right\} \exp\left\{-\frac{1}{q_1} \left((1 + p_2)t + p_0 p_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{p_1}}\right)\right)\right\} \\ \frac{\partial g}{\partial p_2} &= q_0 \left\{ 1 - \frac{t}{q_1} \left(1 + p_0 e^{-\frac{t}{p_1}} + p_2\right) \right\} \exp\left\{-\frac{1}{q_1} \left((1 + p_2)t + p_0 p_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{p_1}}\right)\right)\right\} \end{aligned}$$

となるので, fitting 関数の誤差を δg とすると

$$\begin{aligned} \delta g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial p_0} \delta p_0\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial p_1} \delta p_1\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial p_2} \delta p_2\right)^2} \\ &= q_0 \exp\left\{-\frac{1}{q_1} \left((1 + p_2)t + p_0 p_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{p_1}}\right)\right)\right\} \left[\left(\left\{ e^{-\frac{t}{p_1}} - \frac{p_1}{q_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{p_1}}\right) \left(1 + p_0 e^{-\frac{t}{p_1}} + p_2\right) \right\} \delta p_0\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(p_0 \left\{ \frac{t}{p_1^2} e^{-\frac{t}{p_1}} - \frac{1}{q_1} \left(1 + p_0 e^{-\frac{t}{p_1}} + p_2\right) \left(1 + \left(\frac{t}{p_1} - 1\right) e^{-\frac{t}{p_1}}\right) \right\} \delta p_1\right)^2 + \left(\left\{ 1 - \frac{t}{q_1} \left(1 + p_0 e^{-\frac{t}{p_1}} + p_2\right) \right\} \delta p_2\right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

となる. したがって, fitting 関数は誤差を含めると, $g(t) \pm \delta g(t)$ で与えられると考えられる. 以上より, fitting 関数が $g(t) + \delta g(t)$, $g(t) - \delta g(t)$ の 2 通りで表せるとして, それぞれの場合において pick-off 補正を行わずに o-Ps の寿命を求めていく. ここで TDC4 のグラフを 225-700ns の範囲で fitting した. パラメータ q_1 が寿命を表している.

まず fitting 関数が $g(t) + \delta g(t)$ の形であるとき, fitting の結果を図 5.6 および表 5.8 に示す.

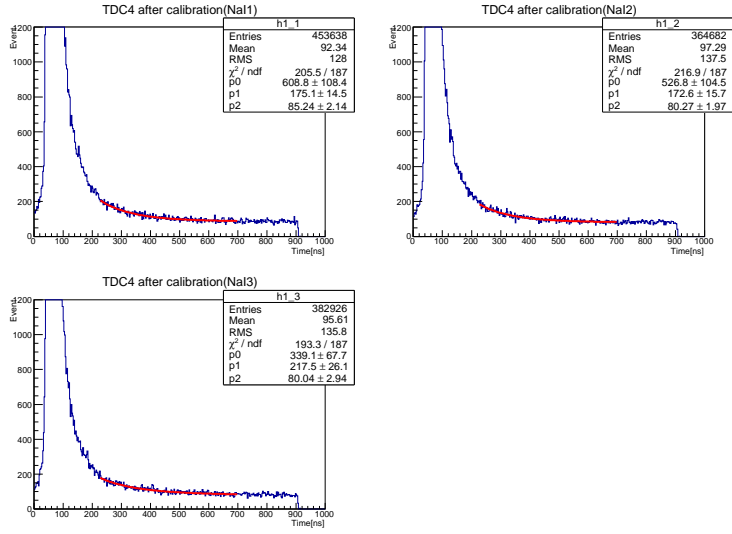


図 5.6 fitting 関数が $g(t) + \delta g(t)$ で与えられる pick-off 補正後 (TQ 補正前) の o-Ps の寿命の fitting

表 5.8 fitting 関数が $g(t) + \delta g(t)$ で与えられる pick-off 補正後 (TQ 補正前) における fitting 関数の各パラメータ (誤差付き)

	q_0	q_1	q_2
NaI1	608.7 ± 108.3	175.0 ± 14.53	85.23 ± 2.13
NaI2	526.8 ± 104.5	172.5 ± 15.68	80.26 ± 1.97
NaI3	339.0 ± 67.72	217.5 ± 26.06	80.03 ± 2.93

次に fitting 関数が $g(t) - \delta g(t)$ の形であるとき, fitting の結果を図 5.7 および表 5.9 に示す.

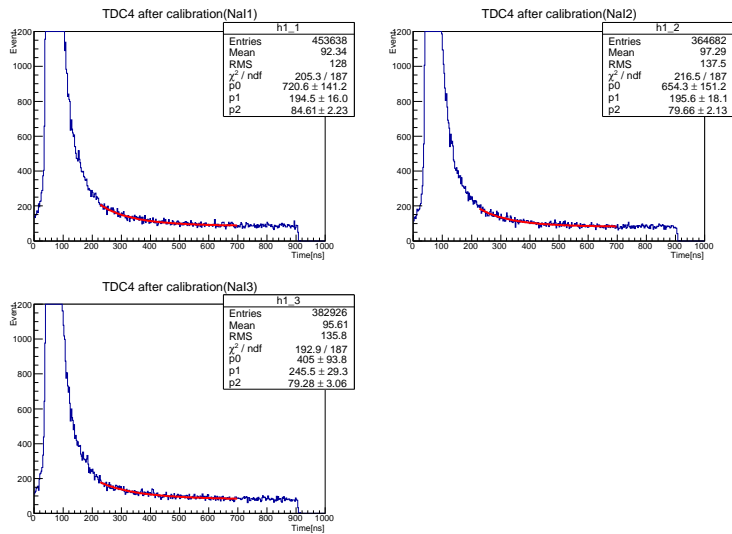


図 5.7 fitting 関数が $g(t) - \delta g(t)$ で与えられる pick-off 補正後 (TQ 補正前) の o-Ps の寿命の fitting

表 5.9 fitting 関数が $g(t) - \delta g(t)$ で与えられる pick-off 補正後 (TQ 補正前) における fitting 関数の各パラメータ (誤差付き)

	q_0	q_1	q_2
NaI1	720.6 ± 141.2	194.4 ± 16.01	84.61 ± 2.22
NaI2	654.3 ± 151.1	195.6 ± 18.14	79.65 ± 2.12
NaI3	404.9 ± 93.77	245.4 ± 29.28	79.27 ± 3.06

fitting 関数が $g(t)$ で与えられる際に得られる o-Ps の寿命を $\tau_g[\text{ns}]$ のようにおくと, 各検出器ごとに算出した o-Ps の寿命は誤差を含めた形で表 5.10 のようになる.

表 5.10 fitting 関数の形別の o-Ps の寿命

	$\tau_g[\text{ns}]$	$\tau_{g+\delta g}[\text{ns}]$	$\tau_{g-\delta g}[\text{ns}]$
NaI1	182.8 ± 15.34	175.0 ± 14.53	194.4 ± 16.01
NaI2	181.2 ± 17.28	172.5 ± 15.68	195.6 ± 18.14
NaI3	228.7 ± 27.89	217.5 ± 26.06	245.4 ± 29.28

5.3.4 寿命の誤差の評価

各々の誤差についての評価は, 他の誤差については考慮せずに行ってきた. しかし, 誤差の評価ではすべての誤差を考慮して寿命を求めるべきである. TQ 補正関数, pick-off 補正関数, fitting すべての誤差を考慮した寿命を求めるべきで, その誤差 σ は,

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_{\text{TQ}})^2 + (\sigma_{\text{pick-off}})^2 + (\sigma_{\text{fitting}})^2}$$

ただし

$$\sigma_{\text{TQ}} = (\text{TQ 補正関数の誤差のみを考慮した場合の寿命の誤差})$$

$$\sigma_{\text{pick-off}} = (\text{pick-off 補正関数の誤差のみを考慮した場合の寿命の誤差})$$

$$\sigma_{\text{fitting}} = (\text{fitting による寿命の誤差})$$

となる. ここで, fitting による寿命の誤差は

- NaI1 : 24.08ns
- NaI2 : 27.97ns
- NaI3 : 62.97ns

となる. よって σ が最大となる $\sigma_{\text{TQ}}, \sigma_{\text{pick-off}}, \sigma_{\text{fitting}}$ は表 5.11 のようになる.

表 5.11 各 NaI の σ_{TQ} , $\sigma_{\text{pick-off}}$, σ_{fitting}

	$\sigma_{\text{TQ}}[\text{ns}]$	$\sigma_{\text{pick-off}}[\text{ns}]$	$\sigma_{\text{fitting}}[\text{ns}]$
NaI1	9.7	11.6	24.08
NaI2	7.4	14.4	27.97
NaI3	8.2	16.7	62.97

となり, そのときの寿命の誤差 σ は表 5.12 のようになる.

表 5.12 寿命の誤差

	$\sigma[\text{ns}]$
NaI1	28.4
NaI2	32.3
NaI3	65.6

したがって, 各検出器で算出される α -Ps の寿命は表 5.13 のようになる.

表 5.13 それぞれの NaI における寿命

	寿命 [ns]
NaI1	219.2 ± 28.4
NaI2	220.6 ± 32.3
NaI3	330.5 ± 65.6

5.3.5 寿命を求める fitting の際の誤差

4.3.3 節において, 寿命を求める関数を fitting してそのパラメータの値から寿命を求めたが, その fitting の範囲を変えた際の誤差について考察する.

pick-off 補正をしているので, 本来は TDC のグラフのどこを fitting してもあまり寿命の値は変わらないはずである. しかし, 実際に fitting の範囲を

- 始端は 100ns から 250ns まで 25ns 刻みで変更 (本実験では 225ns であった)
- 終端は 700ns で固定

のように徐々に変化させていくと, 求まった寿命には表 5.14 示すような変化が見られた.

表 5.14 fitting の範囲を変更したときの寿命の値 (単位は ns)

	100-700	125-700	150-700	175-700	200-700	225-700	250-700
NaI1	132.9	151.2	166.9	188.6	204.4	219.3	224.6
NaI2	136.3	150.7	172.3	180.8	194.3	220.7	257.5
NaI3	137.7	157.7	163.3	210.6	252.1	330.6	317.3

この結果を見ると、寿命の値の変化は fitting の範囲のとり方に対応していて、早い時刻から fitting を始めると寿命は短く出る傾向にあることが分かる。この原因としては、(pick-off 補正をしたものの)pick-off 反応が完全に除去しきれていないことが考えられる。

参考文献

- [1] John R.Taylor 『計測における誤差解析入門』東京化学同人

謝辞

今回の実験を進めるにあたり、半年間丁寧に指導やアドバイス等をして頂いた石野雅也准教授と隅田土詞助教に感謝致します。また、実験にお付き合い頂き、いつも手助けして頂いた TA の家城佳氏と中桐洸太氏に感謝致します。