

A2 課題演習レポート

尾近 洸行・榊 真吾・塩津 博章
四方 悠貴・山中 修也・吉田 将

2014 年 10 月 3 日

目次

第 1 章	はじめに	2
1.1	実験目的	2
1.2	課題演習 A2 として	2
第 2 章	ポジトロニウムとは	3
2.1	ポジトロニウムの分類	3
2.2	ポジトロニウムの崩壊	3
2.3	ポジトロニウムの寿命	4
第 3 章	実験方法	5
3.1	実験方法	5
3.2	セットアップ	5
3.3	回路	5
第 4 章	データ解析	10
4.1	Calibration	10
4.2	TQ 補正	14
4.3	pick-off 補正	18
第 5 章	考察	22
5.1	NaI3 のデータについて	22
5.2	誤差の評価	22
	参考文献	25

第 1 章

はじめに

1.1 実験目的

電子と陽電子の消滅は、QED の検証に用いることの出来る素粒子反応の一つである。今回の実験では、シリカパウダー、プラスチックシンチレーター、NaI シンチレーターを用いて、オルソポジトロニウムの寿命を測定することを目的として行った。実際に解析して得られた寿命と QED による理論値と比較検討し、考察を行った。

1.2 課題演習 A2 として

この実験は、2014 年前期課題演習 A2 において行われたものである。実験を通してシンチレーターや光電子増倍管の使い方、放射線実験の手順などを学んだ。

第 2 章

ポジトロニウムとは

2.1 ポジトロニウムの分類

ポジトロニウムは、電子と陽電子が電磁相互作用により束縛状態を作り対になったものである。対になっている電子と陽電子はそれぞれ $\frac{1}{2}$ のスピンを持っているので、この 2 つの角運動量を合成することにより、以下のように一重項と三重項の 2 つに分類できることがわかる。

$$\psi_{\text{singlet}}(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \quad (2.1)$$

$$\psi_{\text{triplet}}(1, 1) = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \quad (2.2)$$

$$\psi_{\text{triplet}}(1, -1) = |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \quad (2.3)$$

$$\psi_{\text{triplet}}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \quad (2.4)$$

この一重項のものをパラポジトロニウム (p-Ps) といい、三重項のものをオルソポジトロニウム (o-Ps) という。

2.2 ポジトロニウムの崩壊

これらのポジトロニウムは崩壊に際し γ 線を放出する。ここで、 γ 線の数进行讨论するために電磁場の C 変換について考える。

まず、量子化された電磁場は、

$$A_{\mu}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=0}^3 (a_p^r \epsilon_{\mu}^r(p) e^{-ipx} + a_p^{r\dagger} \epsilon_{\mu}^{r*}(p) e^{ipx}) \quad (2.5)$$

と書ける。ここで、 $a_p^{r(\dagger)}$ は光子の消滅 (生成) 演算子である。

電磁相互作用は C 変換により不変であることから、電磁場は C 変換によって

$$CA_{\mu}C = -A_{\mu} \quad (2.6)$$

と変換される。

$a_p^{r(\dagger)}$ は A_{μ} に一次に比例するので、C 変換より

$$a_p^{r(\dagger)} \rightarrow -a_p^{r(\dagger)} \quad (2.7)$$

と変換する。これより偶数 (奇数) 光子を含む系は C 変換に関して固有値は以下のように 1(-1) となる。

$$a_{p_1}^{r_1\dagger} \dots a_{p_n}^{r_n\dagger} |0\rangle \rightarrow (-1)^n a_{p_1}^{r_1\dagger} \dots a_{p_n}^{r_n\dagger} |0\rangle \quad (2.8)$$

ここで、C 変換に対する一重項状態の固有値は 1 で、三重項状態の固有値は-1 であることより p-Ps は偶数光子に、o-Ps は奇数光子に崩壊する。

QED によると相互作用の結合定数は微細構造定数であるために高次の寄与は小さくなる。また、光子を一個だけ放出して対消滅する過程は運動学的に許されない。

よって、p-Ps は二個の光子に、o-Ps は三個の光子に崩壊することがわかる。

2.3 ポジトロニウムの寿命

p-Ps の崩壊率 $\Gamma_{2\gamma}$ は

$$\Gamma_{2\gamma} = \frac{1}{\tau_{2\gamma}} = 4\pi r_e^2 |\psi(0)|^2 \quad (2.9)$$

となる。ここで $r_e = \frac{\alpha}{m}$ は電子古典半径、 $\psi(x)$ は、電子-陽電子の軌道波動関数である。水素原子のシュレディンガー方程式を解くと、微細構造定数 α を用いて

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{(\alpha m)^3} \quad (2.10)$$

となる。以上のことを用いると、

$$\Gamma_{2\gamma} = \frac{1}{2} \alpha^5 m \quad (2.11)$$

となるので、p-Ps の寿命は次のようになる：

$$\tau_{2\gamma} = \frac{2}{\alpha^5 m} \quad (2.12)$$

o-Ps は放出される光子が一つ多いので寿命は $\frac{1}{\alpha}$ ほど長くなると推測される。実際、参考文献 [1] によると寿命の比は

$$\frac{\tau_{2\gamma}}{\tau_{3\gamma}} = \frac{9\pi}{4(\pi^2 - 9)\alpha} \simeq 1115 \quad (2.13)$$

であるので、Ps の寿命の理論値は

$$\tau_{2\gamma} \simeq 0.125\text{ns} \quad (2.14)$$

$$\tau_{3\gamma} \simeq 139\text{ns} \quad (2.15)$$

となる。QED の高次の摂動計算によると、より詳しい値は $\tau_{2\gamma} = 0.123\text{ns}$, $\tau_{3\gamma} = 142.08\text{ns}$ となる。

第 3 章

実験方法

3.1 実験方法

o-Ps の寿命を測定することが目標である。まず ^{22}Na の β^+ 崩壊で出来る e^+ をシリカパウダーに向けて放出させると、シリカパウダー内で p-Ps, o-Ps が生成され、これが崩壊すると γ 線が放出される。そこで、シリカパウダーと ^{22}Na の間にプラスチックシンチレーター (以下 P.S.) を置き、そこを e^+ が通過した時点から、崩壊で出た γ 線を NaI で観測するまでの時間を o-Ps の寿命とした。

3.2 セットアップ

図 3.1, 3.2 のように NaI・鉛・P.S.・シリカパウダー・線源 (^{22}Na) をセットアップした。2つの鉛の真ん中に空いた穴を e^+ の通り道として、線源から P.S. の間に鉛を配置することで線源 ^{22}Na から出る γ 線が直接 NaI に入るのを阻止してある (図 3.3 のように全体的にも遮蔽した)。また、図 3.4 のように光がプラスチックシンチレーターに入らないように全体を黒いシートで覆い遮光した。シリカパウダーは pick-off 反応 (4.3.1 節 参照) を減らすために、中身を十分加熱して水分を飛ばし、中を真空の状態にしておいた。

3.3 回路

図 3.6 のように回路を組んで実験を行った。今回、測りたい寿命は P.S. で e^+ を測定してから NaI で γ 線を測定するまでの時間である。線源から放出された e^+ は、シリカパウダー内で必ず Ps を形成するわけではなく、通り過ぎてしまったりするものも存在する。 e^+ を放出する event よりも、Ps を形成して γ 線に崩壊する event 数の方が圧倒的に少ないことから、余分な event を除くために P.S. と NaI の coincidence を TDC の start にして、P.S. の delay までの時間を計測した。回路で計測された各信号とその関係を図 3.7 にまとめた。

gate2 に veto をかけずにやると各 ADC のベデスタルが 2 つずつ現れた。それが図 3.5 のように gate が 2 つ開いてしまっているのが原因と考えられるため、2 つ目の信号を無視するために、gate2 の out を 32ns の delay につけて veto に挿した。threshold の値は適切な event を切らないように低めに設定した。また、各 HV の値は、511keV のピークが各 ADC で同じ値付近にくるように調節したつもりだったが、後節で見ると (図 4.1) 実際には ADC2 のピークの位置がずれてしまっていた。

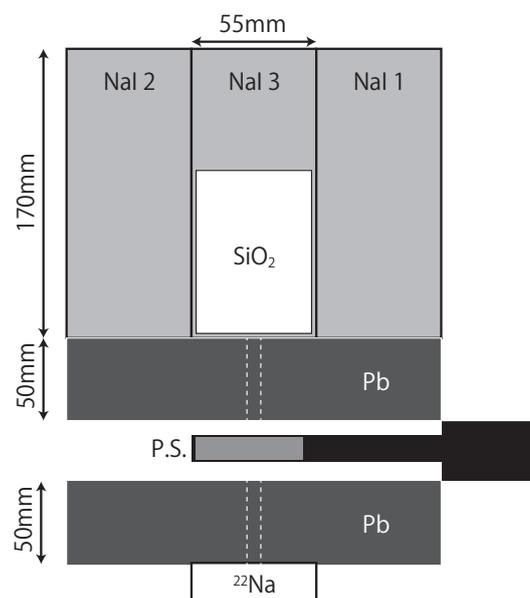


図 3.1 セットアップ模式図

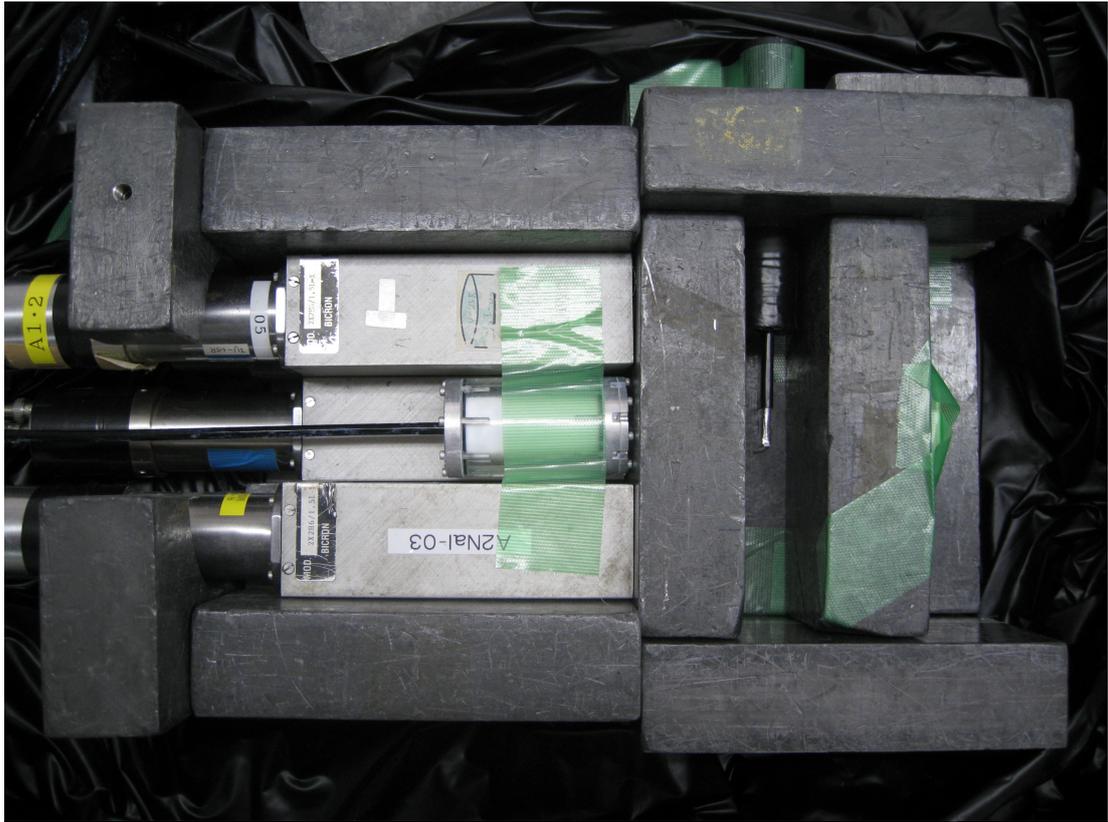


図 3.2 セットアップ(上から)



図 3.3 遮蔽の様子



図 3.4 遮光の様子

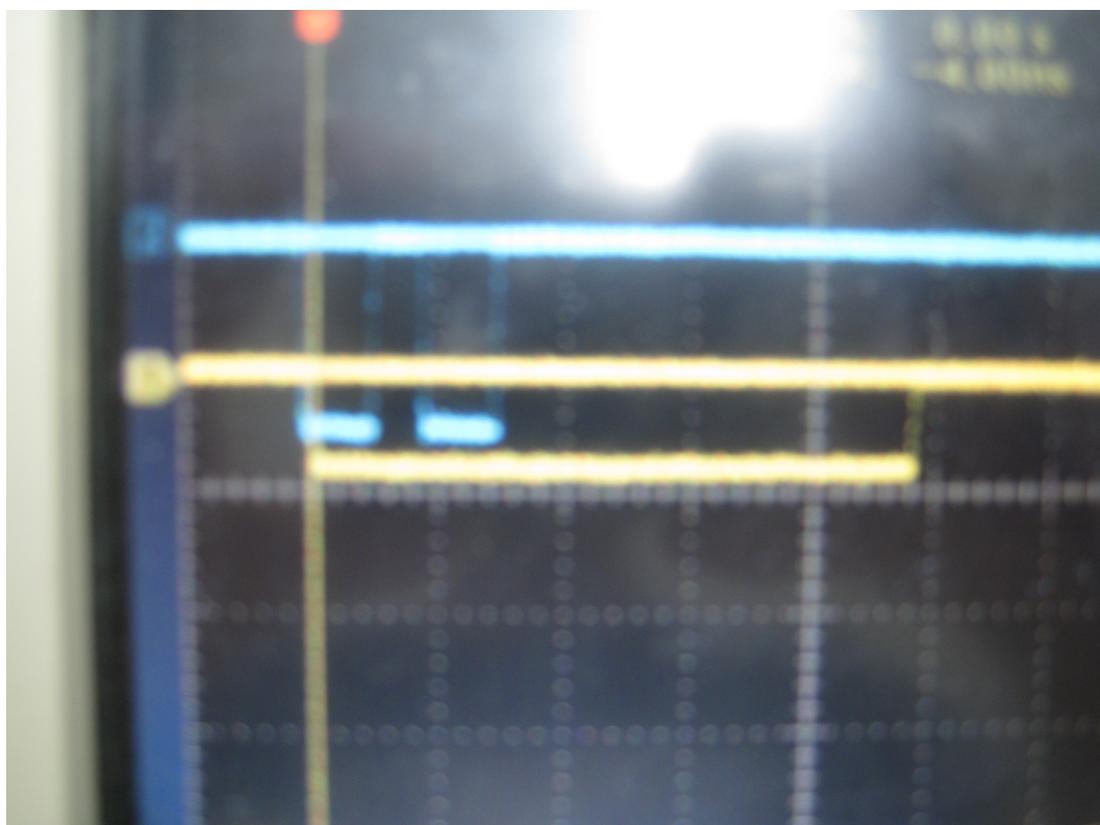


図 3.5 2つの NIM 信号

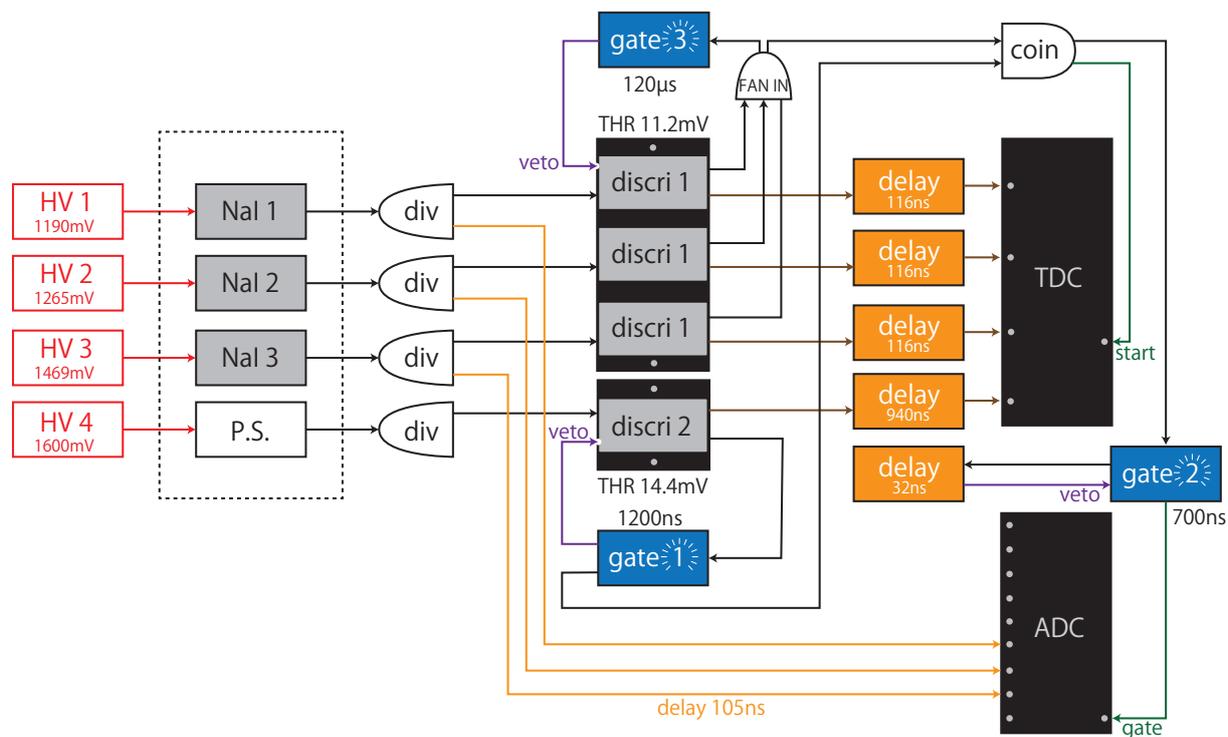


図 3.6 回路模式図

図の記号

HV : negative high voltage. 光電子増倍管に印加する負の電圧。

NaI : NaI シンチレーター。γ線を測定する。

P.S. : プラスチックシンチレーター。e⁺を測定する。

div : divider. 入力した信号を2つに分ける。

discri : discriminator. 入力信号が threshold 以上の時、NIM 信号を出力する。

delay : fixed delay. 入力された信号を設定した時間分遅らせて出力する。

gate : gate generator. 信号が入力された時に設定した幅の NIM 信号を出力する。

FAN : 入力端子のいずれかに信号が入力されると信号を出力する。

coin : coincidence. 全ての入力端子に信号が入力されたとき、信号を出力する。

TDC : time to digital converter. start に信号が入力されてから stop に信号が入力されるまでの時間に比例した値を出力する。

ADC : analog to digital converter. gate が入力されている間に入力された電荷に比例する値を出力する。ケーブルを用いて 105ns の delay をかけた。

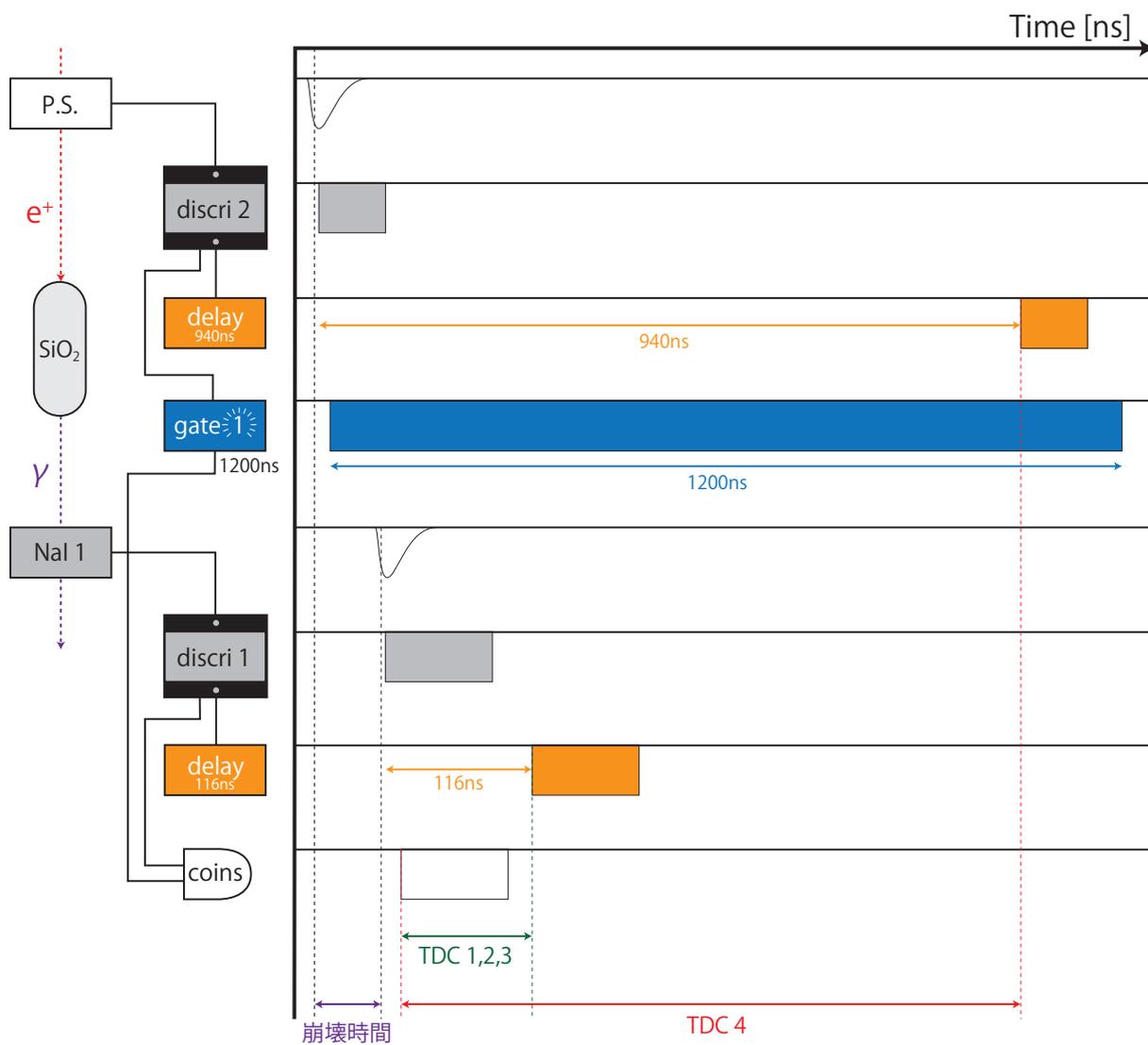


图 3.7 信号概念图

第 4 章

データ解析

2014 年 9 月 4 日の夕方～18 日の昼までの約 14 日間データを取り続けた。合計 1839443event 得られ、トリガーレートは約 1.5Hz だった。

4.1 Calibration

4.1.1 ADC Calibration

ADC によって、入力された信号の面積に対応する 0～4095 までの整数値が得られる。したがって、実際のエネルギー値が得られるわけではないので、実際のエネルギーと ADC の出力値の対応関係を知る必要がある。そこで γ 線のエネルギー値と ADC の出力値との間に線形関係があると仮定して、定数 a, b を用いて

$$(\gamma\text{線のエネルギー値 [keV]}) = a \times (\text{ADC の出力値}) + b$$

とし、各 NaI シンチレーターごとの対応関係を求めればよい。本実験では Ps の崩壊時に放出される 511keV の γ 線とペDESTAL を用いて対応関係を求めた。ADC の生データを図 4.1 に、ADC の出力値とエネルギー値の関係を表 4.1 に示した。

	0keV	511keV
ADC1	164.4	1207
ADC2	187.4	1036
ADC3	166.6	1184

表 4.1 ADC の出力値とエネルギー値の関係

各 ADC の Calibration の結果から以下の式が得られた。

$$E_1[\text{keV}] = 0.4900 \times (\text{ADC 1} - 164.4) \tag{4.1}$$

$$E_2[\text{keV}] = 0.6030 \times (\text{ADC 2} - 187.4) \tag{4.2}$$

$$E_3[\text{keV}] = 0.5021 \times (\text{ADC 3} - 166.6) \tag{4.3}$$

Calibration 後のグラフを図 4.2 に示した。

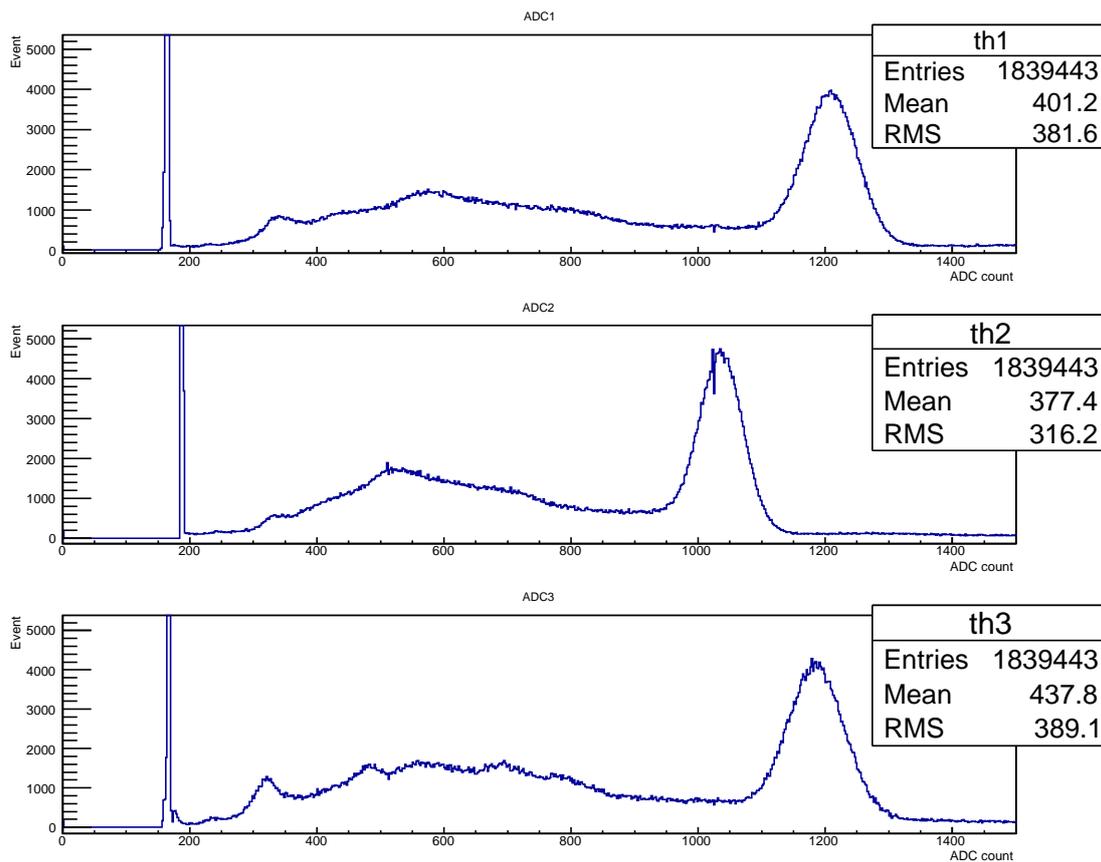


図 4.1 ADC の生データ

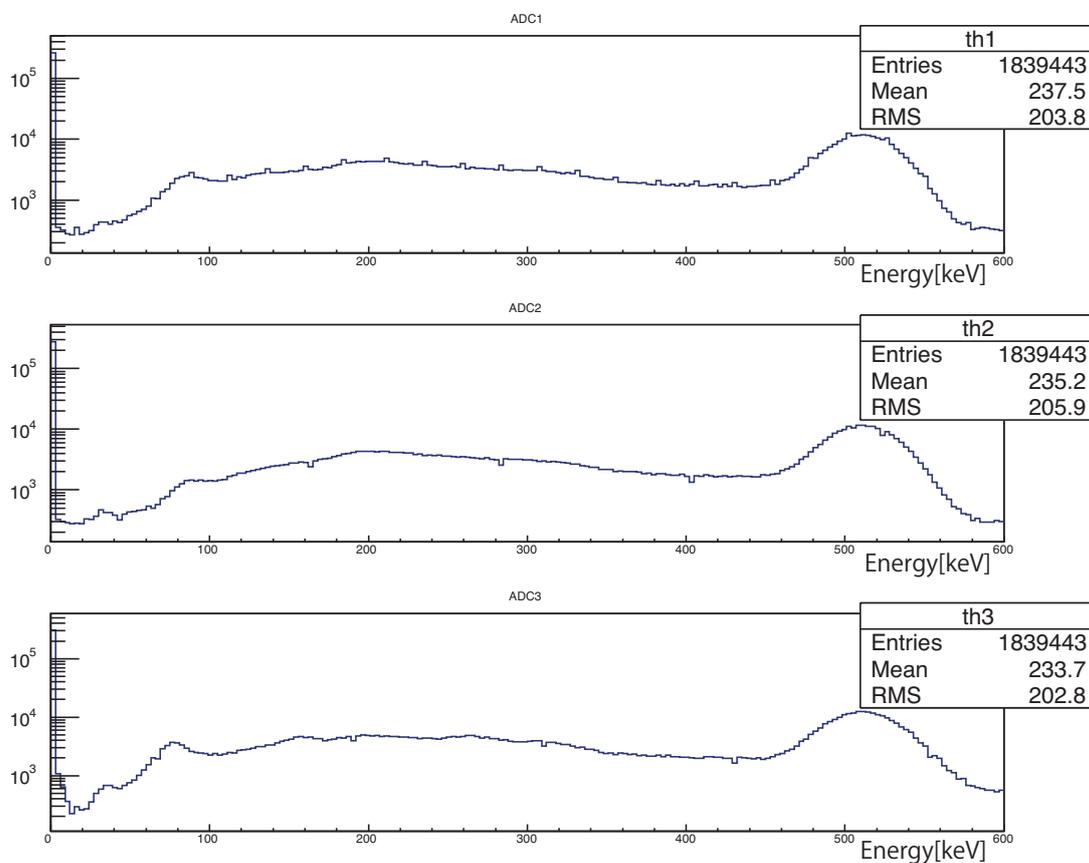


図 4.2 ADC Calibration 後のグラフ
(縦軸は対数)

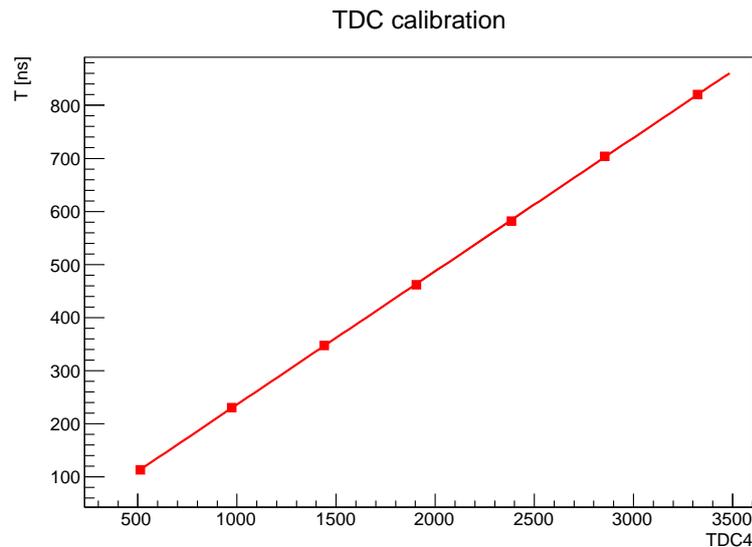


図 4.3 TDC Calibration

4.1.2 TDC Calibration

TDC は 0~4095 までの整数値が得られる。これは実際の時間と対応関係はあるが、時間そのものの値ではない。実際の時間が知りたいので TDC の値と実際の時間の対応関係を知る必要がある。そこで、実際の時間と TDC の出力値との間に線形関係があると仮定して、定数 a, b を用いて

$$(\text{時間 [ns]}) = a \times (\text{TDC の出力値}) + b$$

とし、今回寿命を計っているのはプラスチックシンチレータにおける値、つまり TDC4 なので、時間と TDC4 の出力値の対応関係を求めれば良い。そこで、本実験では 1つのスタート信号と、異なる時間間隔の fixed delay を用意して、実際の fixed delay の時間間隔と TDC の出力値を対応させた。ここで実際の時間間隔はオシロスコープを用いて測定した。fixed delay の時間間隔と TDC の出力値の関係を次の表 4.2 に示した

delay[ns]	TDC4
113.2	512.2
230.4	974.0
347.4	1440
462	1905
582	2385
704	2855
820	3323

表 4.2 TDC の出力値と時間の関係

この関係をもとに、線形関係を仮定したので、最小二乗法で fitting した結果 (図 4.3)、以下の式が得られた。

$$\text{Time[ns]} = 0.251 \times \text{TDC4} - 15.28 \quad (4.4)$$

TDC の生データを図 4.4 に、Calibration 後のグラフを図 4.5 に示した。

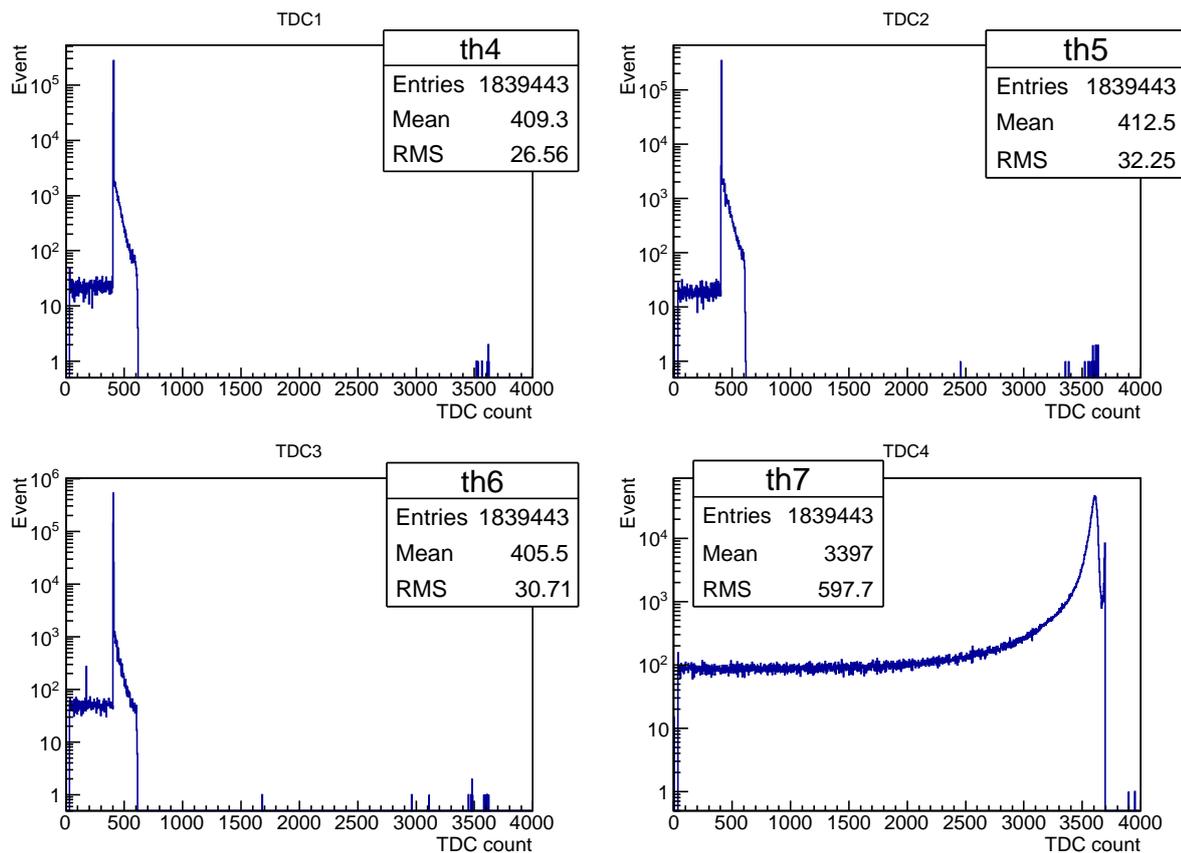


図 4.4 TDC の生データ

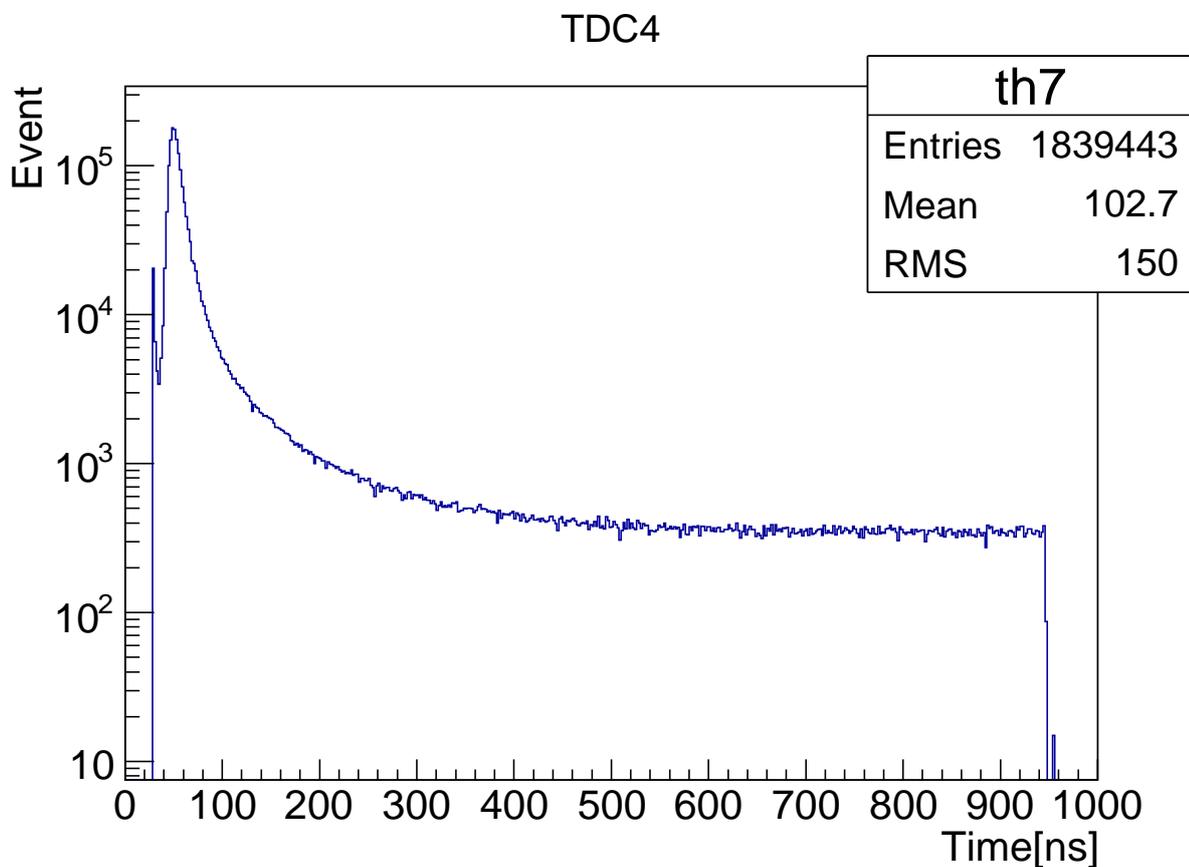


図 4.5 TDC Calibration 後のグラフ

4.2 TQ 補正

4.2.1 TQ 補正とは？

図 4.6 のように NaI から発せられる信号は実際には立ち上がるのに時間を要する。そのため、信号が threshold を超える時刻は、真に信号を受け始めた時刻より遅れ、その分だけ実際より TDC4 の値は小さくなり、測定される寿命ものびてしまう。この超えるまでの時間というのは、図 4.6 のように信号の大きさ、つまり γ 線のエネルギーの大きさに依存することを考慮すると、観測された寿命と真の寿命との差 ΔT をエネルギーの関数として求めることができる。この関数を用いて実際の値との誤差を補正することが TQ 補正である。

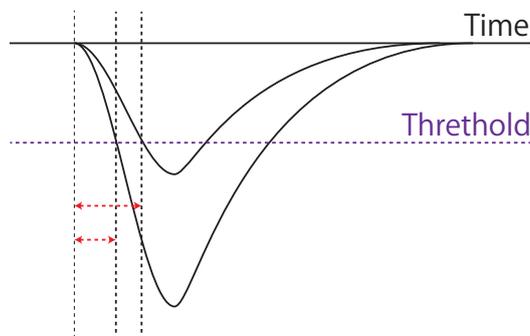


図 4.6 NaI からの信号の概略図

4.2.2 TQ 補正関数の作成

TQ 補正関数は、 ΔT をエネルギーの関数として表したものである。具体的には ΔT の関数形を以下のように近似した。まず、 ΔT の信号を三角形とみなして近似する (図 4.7 参照)。この時、

- ・ピークの位置 t_0 は、エネルギーの値に依らない。
- ・三角形の底辺の長さは、エネルギーの大きさに依らない。

ことを仮定すると、三角形の高さ y_{\max} は三角形の面積に比例し $y_{\max} \propto E$ となる。threshold の値を y_0 とおくと、

$$\Delta T(E) = \frac{y_0 t_0}{y_{\max}} \propto \frac{1}{E} \tag{4.5}$$

と書ける。(図 4.7 参照)

実際には信号の形が三角形でないこと (第一項分) と、回路の遅れ及び descri1,2 の信号を作る速さの違い (第二項分) を考慮して、fitting 関数を

$$\Delta T(E) = \frac{p_0}{(\text{Energy} - p_1)^{p_2}} + p_3 \tag{4.6}$$

とした。fitting に用いたデータは、p-Ps の崩壊現象が最も良く見える Time=45ns 付近を採用した。p-Ps の寿命は 0.13ns と非常に短い値であるので、この時刻を Ps の発生時刻とみなすことが出来る。以下、TQ 補正前のエネルギー対時間のグラフと、fitting に用いたデータと fitting の様子を次頁に示す (図 4.8,4.9)。また、その時の fitting パラメーターの値を、次の表 4.3 に示す。なお、

NaI3 のデータに関しては他とは異なる分布が見られ (図 4.10)、不適切だと判断したため、このデータを棄却して以降の解析をすすめた。なお、TQ 補正後のエネルギー対時間の図 4.11 を載せておく。

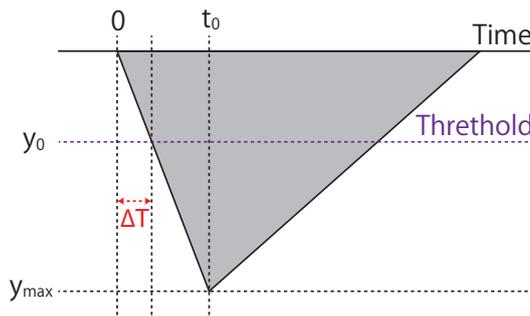


図 4.7 TQ 補正の概念図

	p_0	p_1	p_2	p_3
NaI1	$1.884 \times 10^9 \pm 1.3 \times 10^8$	-138.7 ± 1.9	3.169 ± 0.013	46.61 ± 0.15
NaI2	$1.929 \times 10^9 \pm 1.9 \times 10^8$	-157.0 ± 2.6	3.088 ± 0.017	46.68 ± 0.17

表 4.3

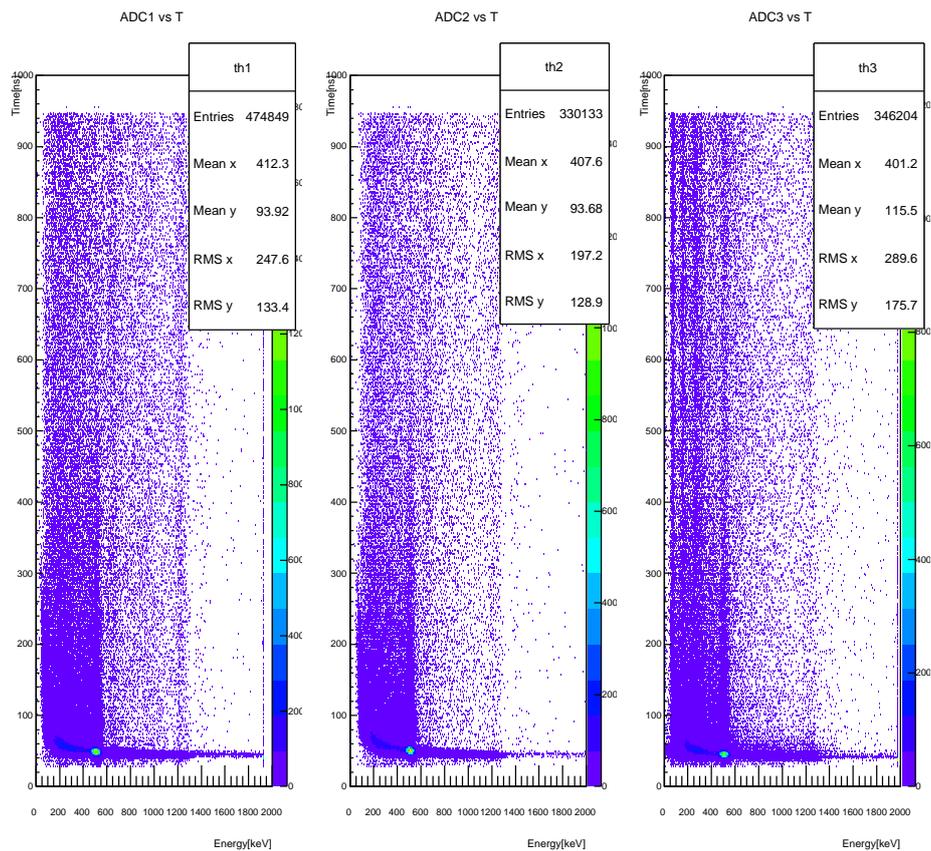


図 4.8 TQ 補正前の Energy vs Time

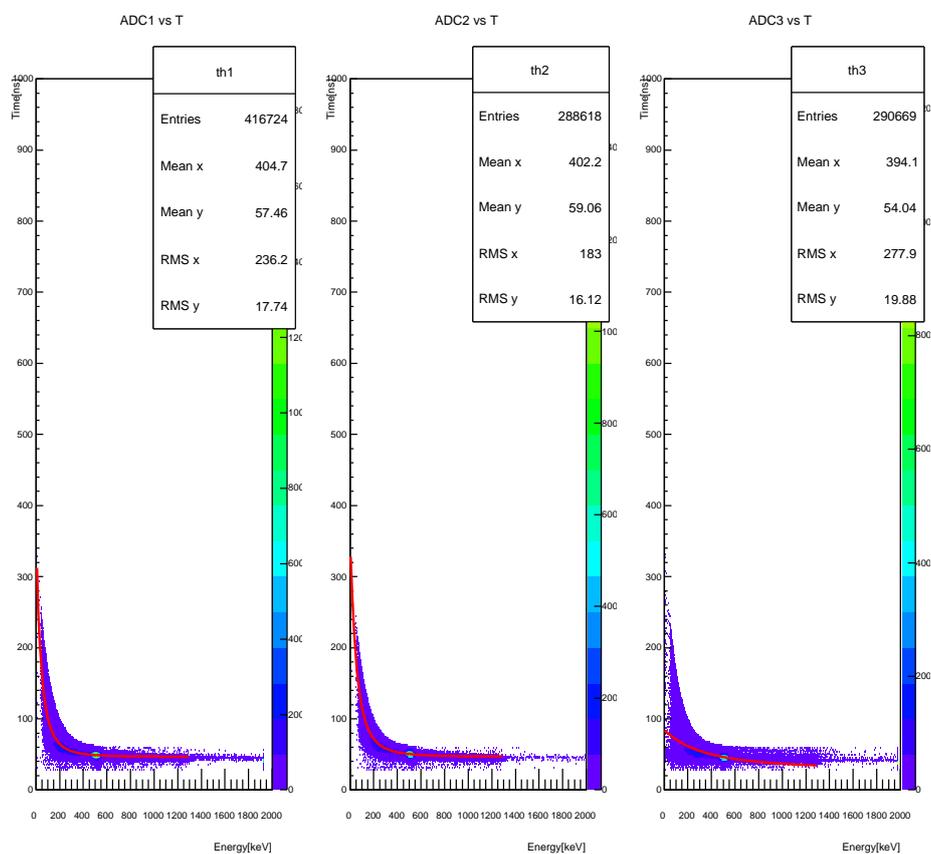


図 4.9 TQ 補正関数の fitting の様子

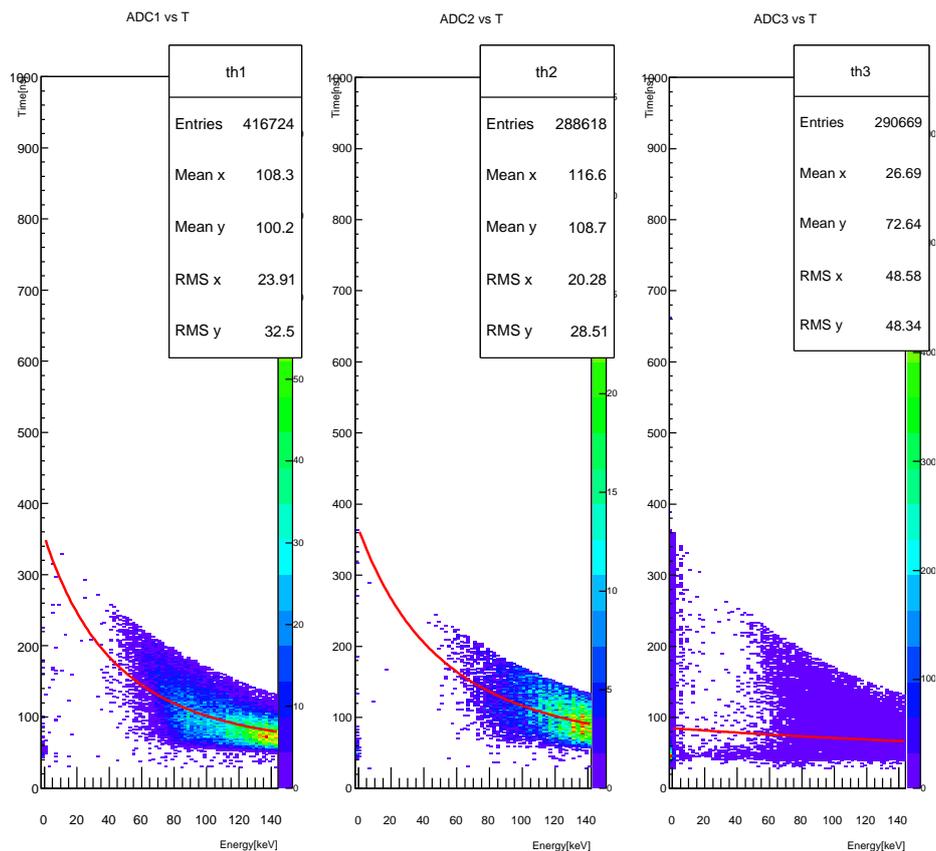


図 4.10 問題となるデータの分布

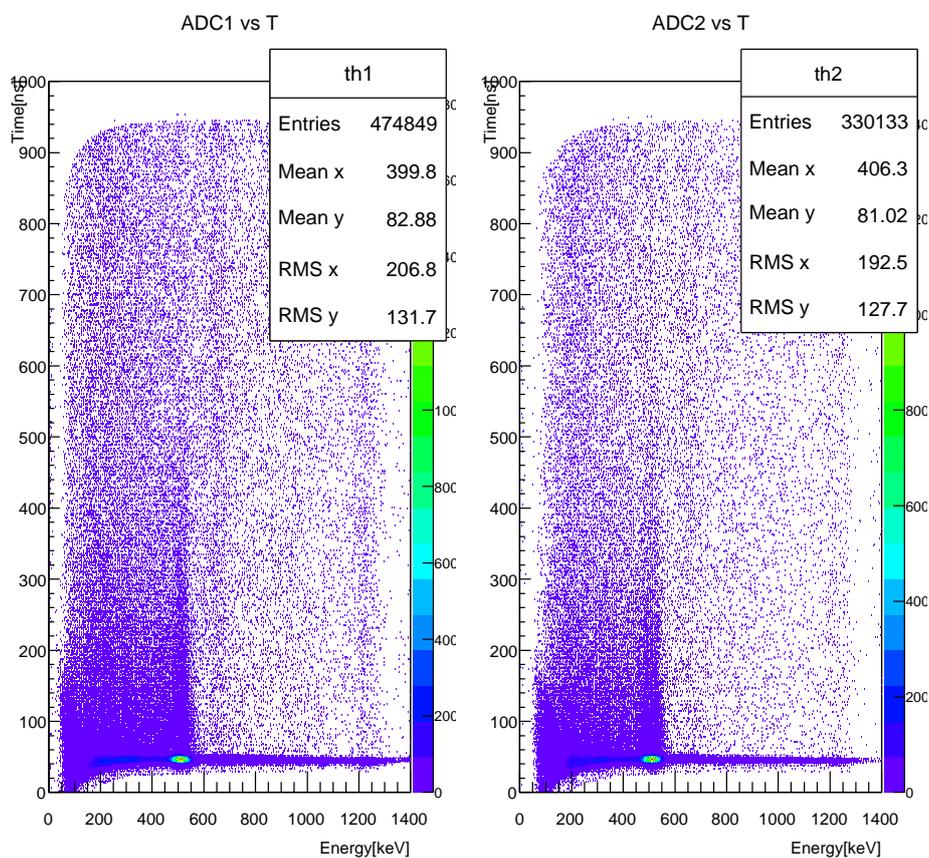


図 4.11 TQ 補正後の Energy vs Time

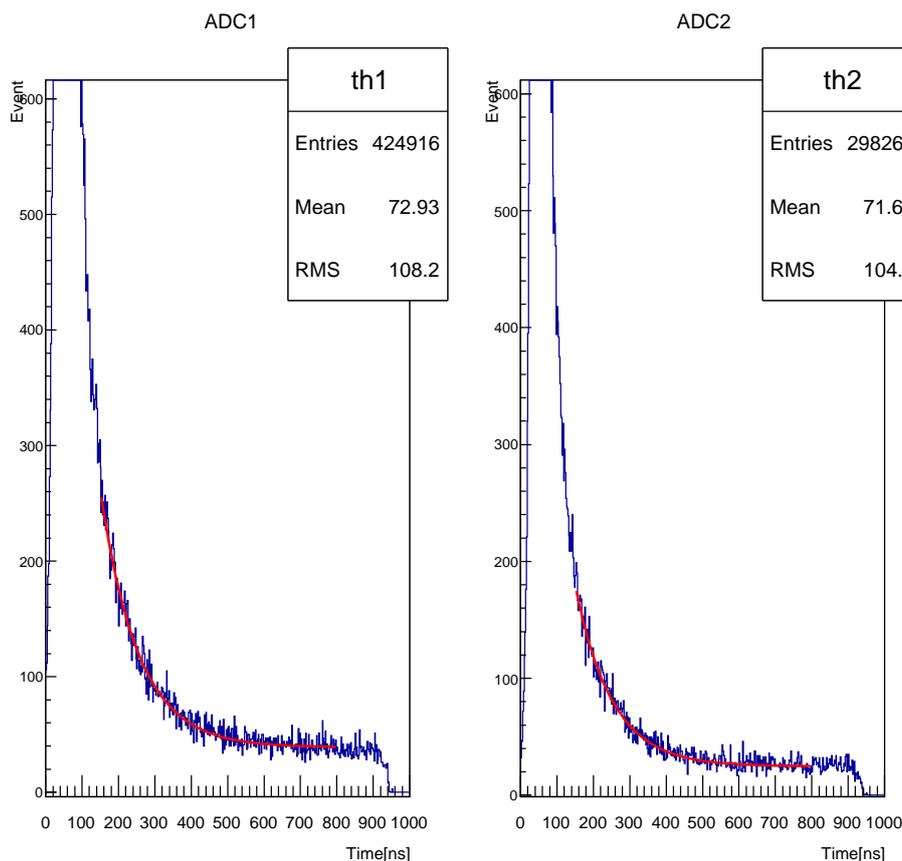


図 4.12 TQ 補正後の寿命の fitting

4.2.3 TQ 補正後の寿命

これまでに得られた補正後のデータを用いて一度 α -Ps の寿命を求めてみた。補正後の図の 0~550keV、150~800ns の範囲で fitting を行い、fitting 関数は

$$\text{count} = p_0 \exp\left(-\frac{\text{Time}}{p_1}\right) + p_2$$

とした。ここで p_1 が求める寿命 t_{ortho} である。fitting の様子 (上図 4.12) と fitting 結果 (下の表 4.4) を掲載する。

	p_0	p_1	p_2
NaI1	945.7 ± 45	103.9 ± 2.5	38.98 ± 0.63
NaI2	688.9 ± 40	100.5 ± 2.8	24.77 ± 0.49

表 4.4

したがって、検出器ごとに算出した α -Ps の寿命は以下ようになる。これらの値は、pick-off 反応を考慮していないため理論値と比べて小さい値となっている。

NaI1 : 103.9ns

NaI2 : 100.5ns

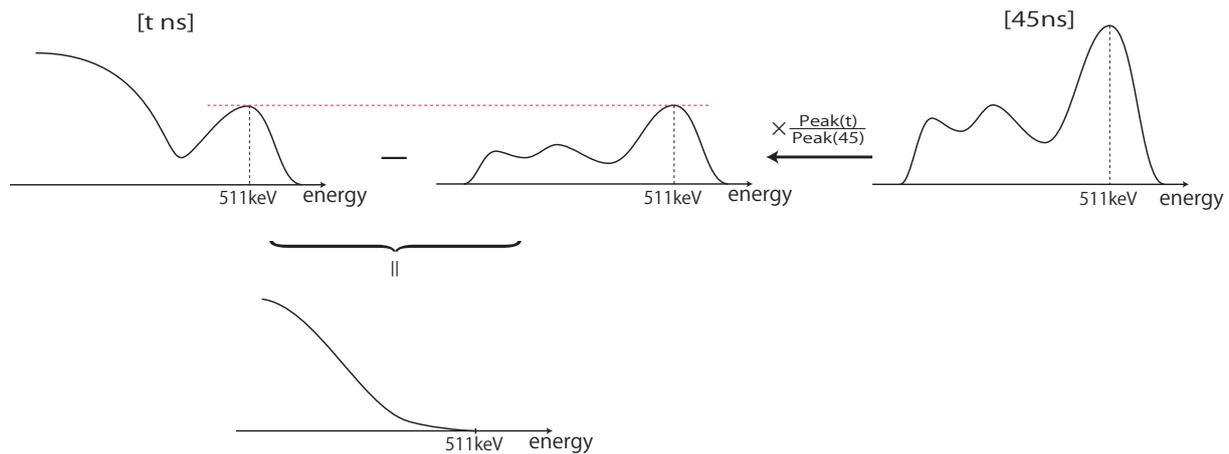


図 4.13 pick-off 補正の概念図

4.3 pick-off 補正

4.3.1 pick-off 補正

物質中では、Ps は生成後物質と相互反応を起こして崩壊する。相互反応には 3 種類あり

- ・ pick-off 反応…o-Ps が生成された後、o-Ps の陽電子が、周囲の物質の電子と相互作用を起こし対消滅を起こしてしまう反応
- ・ スピン交換反応…生成した o-Ps が、不対電子を持つ酸素分子とスピン交換反応を起こし、p-Ps に変化してしまう反応。
- ・ 化学反応…Ps は構造が水素と近いので化学反応を起こす。例えば酸化反応の場合、Ps が酸化され、裸の陽電子となる反応。その後、陽電子は自由な状態となって消滅する。

がある。これらの相互作用による崩壊と o-Ps の崩壊が競合するので、崩壊幅は以下のように書ける

$$\Gamma_{\text{obs}} = \Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}}$$

ここで Γ_{obs} は実験で測定することの出来る値である。今回の実験では、具体的な関数形をデータの分析から予想し解析を行った。

4.3.2 pick-off 補正関数の作成

511keV ピークのうち、45ns 付近に見られるものは p-Ps の崩壊もので、それより遅いものは o-Ps の崩壊、および上記の反応による崩壊であると考えられる。また、およそ 150ns 以降のデータで 500keV 以下に見られるデータは pick-off 反応の崩壊の compton 散乱と o-Ps の崩壊である。今回の解析では、511keV の γ 線のピークと compton 散乱のスペクトル形が各時刻でそれぞれ相似であると考え、o-Ps の反応を取り出した。

具体的には、45ns のデータの 511keV のピークを、解析したい任意の時刻でのデータの 511keV のピークの高さに調節し、スケール変換後の 45ns のスペクトルを、解析したい任意の時刻のデータから引くことで、その差分が o-Ps の崩壊スペクトルとなる。(図 4.13 参照)

任意の時刻 t での上の三つ反応による崩壊と o-Ps の崩壊の検出数を、 $\Delta N_{\text{pick-off}}$ 、 ΔN_{ortho} とすると、時刻 t での崩壊幅の比は

$$f(t) = \frac{\Gamma_{\text{pick-off}}}{\Gamma_{\text{ortho}}} = \frac{\Delta N_{\text{pick-off}}(t)}{\Delta N_{\text{ortho}}(t)} \tag{4.7}$$

と書ける。ここで、この $f(t)$ が pick-off 補正関数である。

崩壊幅 $f(t)$ の値は、175ns から 825ns までの範囲を 50ns ごとに区切って調べた。取り出したデータの時間幅は、

45ns の pick-off 反応の雛形：前後 5ns
 解析に用いた各時刻の時間幅：前後 25ns

である。こうして得られた各時間ごとの崩壊幅 $f(t)$ の値を次式で fitting し、pick-off 補正関数とした。

$$f(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 \tag{4.8}$$

以下に、得られた値 (表 4.5)、補正関数 (図 4.14, 表 4.6) を示す。

	NaI ₁	NaI ₂
200	0.4799	0.5822
250	0.4201	0.4930
300	0.3684	0.3640
350	0.2908	0.3268
400	0.2465	0.2870
450	0.2166	0.2533
500	0.1989	0.2628
550	0.1359	0.1977
600	誤差大で棄却	0.1697
650	0.1279	0.1459
700	0.1408	0.1380
750	0.1328	0.2384
800	0.1337	0.1958

表 4.5

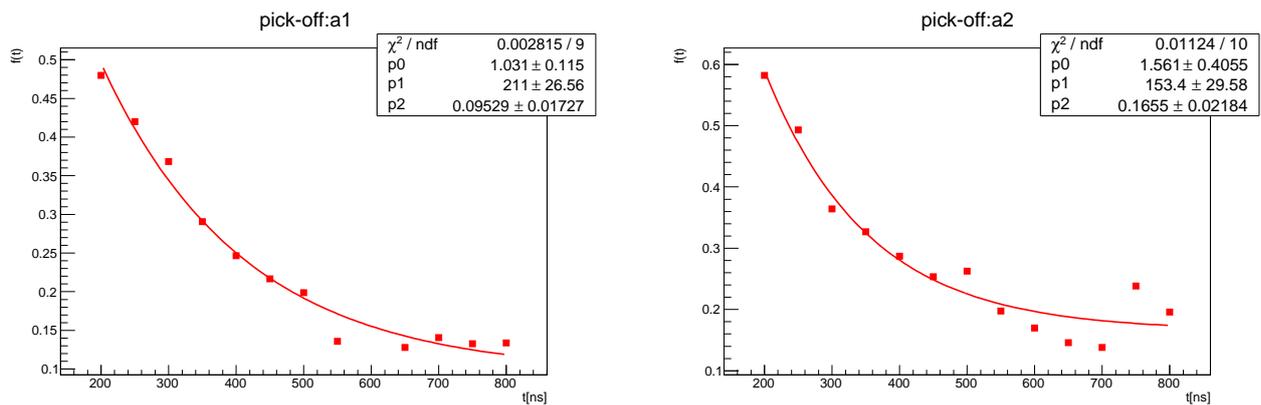


図 4.14 pick-off 補正関数

	p_0	p_1	p_2
NaI1	1.031 ± 0.12	211.0 ± 27	0.09529 ± 0.097
NaI2	1.561 ± 0.41	153.4 ± 30	0.1655 ± 0.022

表 4.6

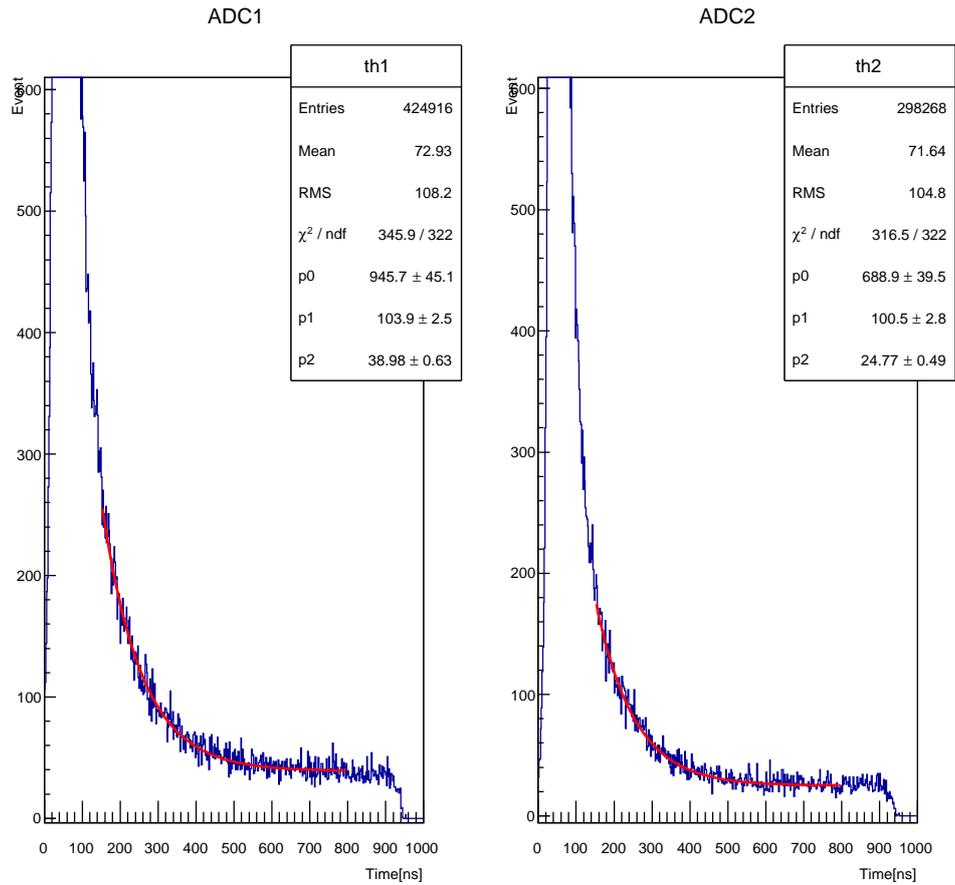


図 4.15 pick-off 補正後の寿命の fitting

4.3.3 pick-off 補正後の寿命

上で得られた補正関数を用いて、再度寿命を評価した。我々が実際に検出しているものは o-Ps と p-Ps の崩壊である事に注意して、寿命を求める fitting 関数は

$$\begin{aligned}
 -\frac{dN}{dt}(t) &= N_0(\Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}})\exp\left(-\int^t dt(\Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}}(t))\right) \\
 &= N_0(\Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}})\exp\left(-\frac{1}{t_{\text{ortho}}}\int^t dt(1 + f(t))\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

という形で書ける。実際には、

$$p_0(1 + f(t))\exp\left(-\frac{1}{p_1}\int dt(1 + f(t))\right) + p_2
 \tag{4.10}$$

という形で解析を行った。fitting の結果は以下に記す (表 4.7)。

	p_0	p_1	p_2
NaI1	205.6 ± 4.9	168.9 ± 4.5	36.88 ± 0.73
NaI2	152.6 ± 4.9	177.5 ± 5.6	23.03 ± 0.59

表 4.7

したがって、検出器ごとに算出した o-Ps の寿命は、

NaI1 : 168.9ns

NaI2 : 177.5ns

となる。

第 5 章

考察

5.1 NaI3 のデータについて

NaI3 のエネルギー対時間のヒストグラムには、他の NaI のヒストグラムでは見られないデータ分布が存在していて、NaI3 の TQ 補正関数の fitting が適切な位置からずれてしまったことから、このデータ分布は不適切だと考えられる。

このようなデータが生じてしまった原因について考える。これらのデータの分布は、E=0 付近で幅広い T の値に分布している部分と、T=40ns 付近で E の値が 60keV 未満の部分の 2 種類に概ね分類することができる。

まず、E=0 付近に分布しているデータに着目する。これらのデータは時間に関係なく分布していることから、ポジトリウム核の反応には関係ないと推察できる。また、E=0 であることから幅が極端にせまく、discriminator の threshold を超えるような信号が、PMT から出力されているのではないかと考えることができる (図 5.1)。こういった考えから、NaI3 から

出力される信号をオシロスコープで見てみたところ、実際にそういった信号が確認できた。また、他の NaI についても同様の観察を行ったところ、そのような信号は同じように確認できたが、NaI3 とは異なり、それらの信号は discriminator の threshold を超えるほどの強さではなかった。すべての NaI について同様の信号が確認できたことから、この信号は PMT 内部の放電等から生じてしまう一種のバックグラウンドであると言える。しかし、その強さは NaI 毎に異なり、threshold を超えていたのは NaI3 のみであった。信号の強さは PMT に印加している HV によるので、印加している HV が他の NaI に比べて高い NaI3 の信号だけが threshold を超えてしまったものと考えられる。

また、T=40ns、E が 60keV 未満の範囲に分布しているデータについては、特にはっきりとした説明をつけることはできなかった。

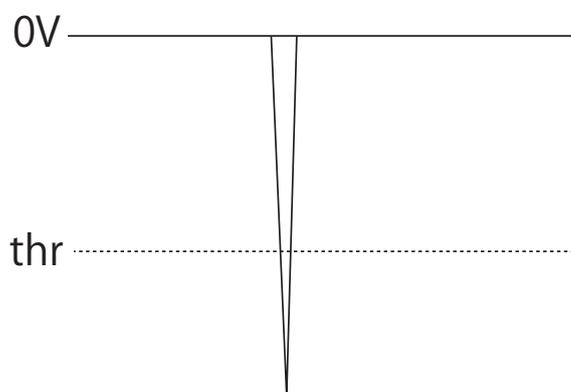


図 5.1

5.2 誤差の評価

解析を行う過程で生じる統計的な誤差について、誤差伝播の公式

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial q}{\partial x_n} \delta x_n\right)^2} \quad \text{where } q = q(x_1, \dots, x_n) \quad (5.1)$$

を用いて評価する。

5.2.1 TQ 補正関数の誤差

TQ 補正関数に対して誤差伝播の公式を用いると、

$$\Delta T = \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \delta \Delta T &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_0} \delta p_0\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_1} \delta p_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_2} \delta p_2\right)^2} \\ &= \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} \sqrt{\left(\frac{\delta p_0}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{E - p_1} \delta p_1\right)^2 + (\log(E - p_1) \delta p_2)^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

この誤差を考慮した TQ 補正関数 $\Delta T + \delta \Delta T, \Delta T - \delta \Delta T$ で TQ 補正して、TQ 補正後の寿命をそれぞれ求めた結果、次のようになった。

$$\begin{aligned} &\Delta T + \delta \Delta T \\ &\text{NaI1 : } 105.2 \pm 2.5\text{ns} \\ &\text{NaI2 : } 102.3 \pm 2.9\text{ns} \\ &\Delta T - \delta \Delta T \\ &\text{NaI1 : } 101.7 \pm 2.4\text{ns} \\ &\text{NaI2 : } 98.58 \pm 2.6\text{ns} \end{aligned}$$

したがって、TQ 補正における寿命の誤差 σ_{TQ} は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\text{NaI1 : } 2.137\text{ns} \\ &\text{NaI2 : } 1.884\text{ns} \end{aligned}$$

5.2.2 pick-off 補正関数の誤差

pick-off 補正関数に対して誤差伝播の公式を用いると、

$$g = p_0(1 + f(t))\exp\left(-\frac{1}{p_1} \int dt(1 + f(t))\right) + p_2 \quad (5.4)$$

$$f(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) + q_2 \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \delta g &= p_0 \exp\left[-\frac{1}{p_1} \left(t(1 + q_2) - q_0 q_1 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right)\right)\right] \\ &\times \left[\left\{ \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) \left(1 + \frac{q_1}{p_1} \left(1 + q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) + q_2\right)\right) \delta q_0 \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) \left(\frac{t}{q_2} + \frac{1}{p_1} \left(1 + \frac{t}{q_1}\right) \left(1 + q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) + q_2\right)\right) \delta q_1 \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(1 - \frac{t}{p_1} \left(1 + q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) + q_2\right)\right) \delta q_2 \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

この誤差を考慮した pick-off 補正関数 $g + \delta g, g - \delta g$ で fitting して、寿命をそれぞれ求めた結果、次のようになった。

$$\begin{aligned} &g + \delta g \\ &\text{NaI1 : } 175.4 \pm 4.7\text{ns} \\ &\text{NaI2 : } 194.5 \pm 6.5\text{ns} \\ &g - \delta g \\ &\text{NaI1 : } 159.9 \pm 4.2\text{ns} \end{aligned}$$

NaI2 : 150.6 ± 4.8ns

したがって、pick-off 補正における寿命の誤差 $\sigma_{\text{pick-off}}$ は次のようになる。

NaI1 : 8.985ns

NaI2 : 26.87ns

5.2.3 誤差の評価

以上と、寿命を求める際の fitting による誤差 σ_{fitting} を考慮した、統計誤差は、

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_{\text{TQ}})^2 + (\sigma_{\text{pick-off}})^2 + (\sigma_{\text{fitting}})^2} \quad (5.7)$$

で、求めることができる。したがって、次のようになる。

NaI1 : 10.26ns

NaI2 : 27.52ns

謝辞

今回実験を進めるにあたって、半年間懇切丁寧に指導、助言等して頂いた石野雅也さんと、隅田土詞さんに感謝いたします。また、実験にお付き合いいただき手助けをしていただいた TA の黄 坤賢さんと、篠原 智史さんに感謝いたします。

参考文献

- [1] J.J.Sakurai, "サクライ上級量子力学 (1, 2 巻)"
- [2] M.Peskin, D.Schroeder, "An Introduction to Quantum Mechanics"
- [3] 2013 年度前期 A2 課題演習レポート
<http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/research/ATLAS/dokuwiki/doku.php?id=education:kuphysa2wiki>