

オルソポジトロニウムの寿命の測定

稲葉
大西
角南
松本

2015/3/18

目次

1	理論	1
1.1	Overview	1
1.1.1	ポジトロニウムとその特徴	1
1.1.2	スピン状態による分類	1
1.1.3	C 対称性の考察	3
1.1.4	ポジトロニウム (Ps) の寿命計算の発展	4
1.2	QED からの展開	5
1.2.1	はじめに	5
1.2.2	電磁場の量子化	5
1.2.3	Dirac の理論	9
1.2.4	相互作用表示 S 行列	13
1.2.5	断面積と崩壊幅	14
1.2.6	対消滅と S 行列	17
1.2.7	対消滅と M 行列	19
1.2.8	対消滅の断面積	20
1.2.9	p-ポジトロニウムの寿命	22
1.2.10	o-ポジトロニウムの寿命	23
2	実験	24
2.1	実験に使用した装置一覧 (回路部分除く)	24
2.2	実験原理	24
2.3	実験装置の配置	25
2.4	回路の構造と測定原理	26
2.5	実験時のパラメーター	27
3	データ解析	28
3.1	Calibration	29
3.1.1	ADC Calibration	29
3.1.2	ADC 出力と gain の時間変化	31
3.1.3	補足	33
3.1.4	TDC Calibration	35
3.2	TQ 補正	37
3.2.1	TQ 補正とは	37
3.2.2	TQ 補正関数の作成	37
3.2.3	pick-off 補正前の寿命の計算	40
3.3	pick-off 補正	40
3.3.1	pick-off 補正の理論	40
3.3.2	熱化について	41
3.3.3	Accidental イベントの除去	42
3.3.4	Threshold の見積りと低エネルギー領域イベント外挿	42
3.3.5	pick-off rate の時間変化の見積もりの方法	42
3.3.6	pick-off rate の時間変化の計算	43
3.3.7	pick-off を考慮した場合の寿命	44
3.3.8	fitting time による結果の変化	44
3.4	考察	45
3.4.1	誤差の見積もり	45
3.4.2	ADC2 の calibration 関数の時間変化	47

3.4.3	低エネルギー外挿による誤差	47
3.4.4	TDC4 の calibration 関数の誤差	49
3.4.5	誤差のまとめ	49
3.4.6	改善点	49
4	比較実験	50
5	謝辞	63

1 理論

この章では、今回の実験のテーマであるオルソポジトロニウムとその寿命について軽く述べることにする。

1.1 Overview

まず手始めに、実験の対象である「ポジトロニウム」なるものについて理解を深めることを目標にしよう。この節で出てくる表記法などは次の 1.2 節のものに従うが、標準的なものであると (勝手に) 思っている。

1.1.1 ポジトロニウムとその特徴

ポジトロニウムとは電子と陽電子が束縛状態をなしている系のことである。この束縛状態は電子陽電子の電磁相互作用が優位であり、この系には強い相互作用をする粒子は表立って現れない。つまり、強い相互作用、弱い相互作用は (自然界における法則としては) 存在するが、無視することができる。

また、この系の簡単な構造から Schrödinger equation を用いて量子力学で解くことができる。その結果、あらかじめ予想されるように、水素原子と類似性を示し、例えばこの系の大きさは Bohr 半径のおよそ 2 倍であり、同様のエネルギースペクトラムをもつ (1.1.1 節)。

しかしながら、水素原子とはその安定性の面において著しく異なる。つまり、電子・陽電子対消滅が起こりうるので、ある寿命をもって γ 線を発して消滅する。電子・陽電子対消滅とは、図 1 のような diagram で描かれる現象である。

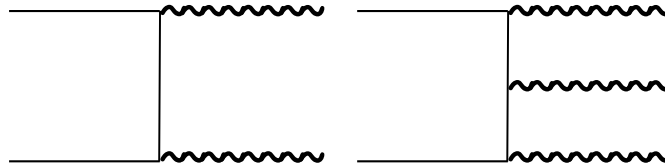


図 1: 対消滅を表す diagram

これらの特徴を総合して考えるとわかるように、その系の簡略さと見通しの良さ、強い相互作用の欠如のために、量子電磁気学 (Quantum-Electrodynamics; QED) の恰好の舞台として研究されている。

1.1.2 スピン状態による分類

電子・陽電子はそれぞれスピンの自由度を持っているので、ポジトロニウムはそのスピン状態によって 1 重項 (singlet) と三重項 (triplet) に分類することができる。

特に、singlet 状態をパラポジトロニウム (para-Positronium; p-Ps)、triplet 状態をオルソポジトロニウム (ortho-Positronium; o-Ps) とよぶ。

これを数式として表現すると、以下のようになる。

$$\psi_{\text{triplet}} = \begin{cases} b^{(\uparrow)\dagger} d^{(\uparrow)\dagger} |0\rangle \\ b^{(\downarrow)\dagger} d^{(\downarrow)\dagger} |0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [b^{(\uparrow)\dagger} d^{(\downarrow)\dagger} + b^{(\downarrow)\dagger} d^{(\uparrow)\dagger}] |0\rangle \end{cases} \quad (1-1-1)$$

$$\psi_{\text{singlet}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [b^{(\uparrow)\dagger} d^{(\downarrow)\dagger} - b^{(\downarrow)\dagger} d^{(\uparrow)\dagger}] |0\rangle \quad (1-1-2)$$

para と ortho では性質が異なる点がある。そのうち決定的なものとして、崩壊の際の光子数と安定性 (つまり崩壊幅、寿命) が挙げられるだろう。前者については次の 1.1.3 節で考え、安定性については寿命の計測自体が今回のメインテーマである。

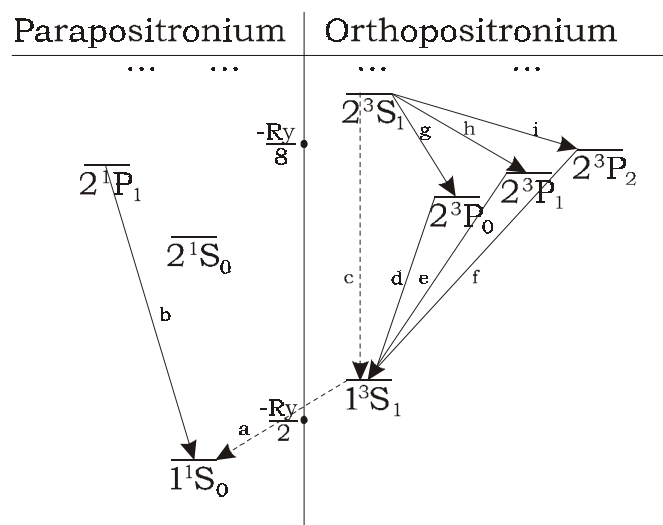


図 2: エネルギー準位と遷移

また、para と ortho にはエネルギー準位にも微妙な差がある。この様子と、その準位間の遷移を図 2 に示す ([3] より拝借)。

ここに各準位は principal quantum number: n 、total spin quantum number: s ($S = 2s + 1$ はスピン状態の数を表す)、orbital angular momentum number: l ($l = 0, 1, 2, \dots$ に対応して L=S,P,D... と書く)、及び total angular momentum number: j を用いて、 $n^S L_j$ という形で書かれている。各 n における縮退が解けているのは (例えば図中 a) 超微細構造 (hyperfine structure) などを考慮したためである。各準位の差の大きさ (GHz) と有名なものについてはその名前を添えて表 1 に示す。

a	204.387	超微細分裂
b(∼c,d,e,f)	1.234×10^6	Lyman α
g	18.2	
h	12.8	
i	8.39	Lamb シフト

表 1: 準位差

図中で遷移を表している矢印は、線になっているものが電気双極遷移 (E1 遷移) と呼ばれる許容遷移、点線になっているものが磁気双極遷移 (M1 遷移) という禁制遷移である。

1.1.3 C 対称性の考察

電荷共役変換 (charge conjugation transformation; C 変換) はパリティ変換 (P 変換)、及びその組み合わせ CP^3 変換と並べて QED において保存されると考えられる変換の一つである。この C 変換に対して、場の生成・消滅演算子は式 (1-1-3),(1-1-4) のように変換する。

$$a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger, a_{\mathbf{k},\alpha} \rightarrow -a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger, -a_{\mathbf{k},\alpha} \quad (1-1-3)$$

$$b^{(s)\dagger}, d^{(s)\dagger} \rightarrow d^{(s)\dagger}, b^{(s)\dagger} \quad (1-1-4)$$

光子の方は偏極を、粒子反粒子の方は性質そのものを考えれば理解出来る。

さて、電荷的に中性で、粒子と反粒子からなる Ps はこの変換の固有状態であるはずだ。ところで、多光子系は C 変換により

$$a_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n,\alpha_n}^\dagger |0\rangle \rightarrow (-1)^n a_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n,\alpha_n}^\dagger |0\rangle \quad (1-1-5)$$

と変わる。一方、反交換関係より、triplet 状態にある Ps は

$$b^{(\uparrow)\dagger} d^{(\uparrow)\dagger} |0\rangle \rightarrow d^{(\uparrow)\dagger} b^{(\uparrow)\dagger} |0\rangle \quad (1-1-6)$$

$$= -b^{(\uparrow)\dagger} d^{(\uparrow)\dagger} |0\rangle \quad (1-1-7)$$

singlet 状態にある Ps は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[b^{(\uparrow)\dagger} d^{(\downarrow)\dagger} - d^{(\downarrow)\dagger} b^{(\uparrow)\dagger} \right] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[d^{(\uparrow)\dagger} b^{(\downarrow)\dagger} - b^{(\downarrow)\dagger} d^{(\uparrow)\dagger} \right] \quad (1-1-8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b^{(\uparrow)\dagger} d^{(\downarrow)\dagger} - d^{(\downarrow)\dagger} b^{(\uparrow)\dagger} \right] \quad (1-1-9)$$

と変換する。C-symmetry が対消滅反応で保存されるとすると、p-Ps は偶数光子 (2,4,6,...)、o-Ps は奇数光子 (3,5,7,...) に分かれることになる。

1.1.2 節においてエネルギー準位と準位間遷移について触れたが、 $j = 0, 1, 2$ までを考えると、p-Ps では (3P_1 を除き) 2 光子、o-Ps では 3 光子に分かれる崩壊が圧倒的に優位である。 $(^3P_1$ に関しては 2 光子分裂が禁止されている (Landau-Pomeranchuk-Yang theorem) ので 4 光子に崩壊する) こう考えてよいのは、分裂光子の数が 1 増えると、その確率は

およそ微細構造定数 $\alpha = 1/137$ 倍されると見積もることができることからわかる。つまり、分裂する光子数を二つ増やすとき、その崩壊の確率は $\alpha^2 \sim 1/10000$ 以下になるのである。

実際は、(E1 遷移による) 準位間遷移の方が高準位状態からの崩壊よりも早いので、 $^3S_1, ^1S_0$ の状態からの $3\gamma, 2\gamma$ への崩壊を考えれば十分であることになる。

1.1.4 ポジトロニウム (Ps) の寿命計算の発展

ポジトロニウムの寿命計算は、現在では非相対論的量子電磁気学 (Nonrelativistic Quantum Electrodynamics; NRQED) を用いて高い精度で理論計算が進んでいる。

これまで、Ps の寿命計算を進めるにあたっては、紫外発散 (ultraviolet divergence; 高エネルギー領域での発散) をしてしまう diagram が数多く存在すること、また、系が束縛状態にあることにより、赤外発散 (infrared divergence; 低エネルギー領域での発散) を示す diagram もあることが挙げられる。このような発散を示す diagram として代表的なものは電子の self-energy loop である。これを図 3 に示す (これは Wikipedia より拝借)。

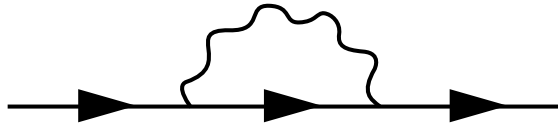


図 3: self-energy loop

一般にこのような loop を含む diagram は上で述べたような発散を示す。

このような問題は NRQED を用いて克服されつつある。NRQED においては、高エネルギー領域は on-shell 散乱過程のような扱いをもって、束縛状態を加味せずに Feynman gauge を使った議論、低エネルギー領域においては束縛状態を扱って、Coulomb gauge を使って Schrödinger 問題に相対論と QED 補正を加えた議論をしている (らしいです)。この両領域を寿命などを求める際に統合することで、高低エネルギー領域での振る舞いを取り入れようというのである。特に o-Ps の寿命をめぐるのは、実験と理論が競合するような歴史があり、これは o-Ps lifetime puzzle とよばれている。以下にその概略を書く。

- (1946 Pirenne, Wheeler が、それぞれポジトロニウムの崩壊幅 (崩壊の確率、寿命の逆数) の計算モデルを作り、p-Ps に適用する。)
- 1949 A.Ore, J.L.Powell が上述のモデルを o-Ps に適用して Lowest Order (LO) の寿命を計算する。
 $\Gamma_{LO}^{\text{theory}} \equiv \Gamma_0 = 7.21 \mu\text{sec}^{-1}$
- 1951 M.Deutsch が実験によって o-Ps の存在が確認され、同年寿命も測られて当時の理論と合致する。
 $\Gamma_{(1951)}^{\text{exp}} = 6.8 \pm 0.7 \equiv 6.8(7) \mu\text{sec}^{-1}$
- 1968 R.H.Beers, V.W.Hughes が、より正確な寿命を測り、より精密な理論が必要になる。
 $\Gamma_{(1968)}^{\text{exp}} = 7.29(3) \mu\text{sec}^{-1}$
- 1976 D.W.Gidley, K.A.Marko らがそれまでの実験結果を大きく変える。
 $\Gamma_{(1976)}^{\text{exp}} = 7.104(6) \mu\text{sec}^{-1}$
- 1977 W.E.Caswell, G.P.Lepage, J.R.Sapirstein によって高次の摂動計算を取り入れた寿命が計算され、ようやく実験値との整合が得られる。
 $\Gamma_{(1977)}^{\text{theory}} = 7.0379(12) \mu\text{sec}^{-1}$
- 1987 Ann Arbor のグループが、当時の最新理論値に合わない実験結果を出す。
 $\Gamma_{(1987)}^{\text{exp}} = 7.0516(13) \mu\text{sec}^{-1}$
- ...

1977年までの経緯は $O(\alpha)$ での調整であり、これを特別に 1st o- Ps lifetime puzzle、さらに 1987年からの経緯は $O(\alpha^2)$ での調整であり、前者と区別して 2nd o- Ps lifetime puzzle と呼ぶことがある。現在では、理論と実験の値は高い精度での一致を見せている。

$$\Gamma(\text{Ann Arbor}) = 7.0404(10\text{stat.})(8\text{syst.}) [\mu\text{s}^{-1}] \quad (1-1-10)$$

$$\Gamma(\text{Tokyo}) = 7.0396(12\text{stat.})(11\text{syst.}) [\mu\text{s}^{-1}] \quad (1-1-11)$$

$$\Gamma(\text{theory}) = 7.039979(11) [\mu\text{s}^{-1}] \quad (1-1-12)$$

理論値については以下の計算式による。

$$\Gamma(\text{theory}) = \Gamma_0 \left[1 + A \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{3} \ln \alpha + B \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 - \frac{3\alpha^3}{2\pi} \ln^2 \alpha + C \frac{\alpha^3}{\pi} \ln \alpha \right] \quad (1-1-13)$$

係数は

$$A = -10.286606(10), B = 45.06(26), C = -5.51702455(23) \quad (1-1-14)$$

ここに Γ_0 が先述の LO である。

$$\Gamma_0 = \frac{4\alpha(\pi^2 - 9)}{9\pi} \frac{\alpha^5 m}{2} \quad (1-1-15)$$

1.2 QED からの展開

1.2.1 はじめに

式 (1-1-13) から分かるように $O(\alpha^2)$ 以上の補正は当然ながら $O(\alpha)$ の補正さえも難しそうである。(実際、現在でもこの係数値を修正するような論文が度々提出されている。)

でも、LO くらいは手が届くんじゃないか... というのが春休み献上の発端であった。文献を漁ってみたところ、この計算は示されているものの場の量子論を習いたての僕には(実のところ僕は量子力学の単位もろくにもっていない...) さっぱりわからなかった。というわけで、本稿を書くにあたってはまず基礎的な部分から始まった。

あとあと使えるかもしれないしメモ書き程度に... と思って書き始めたこれらの TeX ファイルであったが、まとめる時分になって、せっかくだからもう全部載せちゃおう! と決を下し、この節の半分(以上)は半期の復習になってしまった。ただ結果として、1.2.9 節によく登場する Ps 寿命の数値計算まで、場の量子論の notation に慣れていない僕にとっては見渡しやすくなったので、まあよかったんじゃないかなと開き直っている。以上のような経緯があるので、(多くの)不備については容赦願いたいし、実際、理解するにはあまりに時間が少なかったのも、その辺りの足りない分は次年度の理論担当の人にゆずりたいと思う。

要は、ある程度のところまでは書いたけど、時間切れになったということが言いたい。

長い前置きは終わりにして、メモ書きから早速場の量子論を復習する。

1.2.2 電磁場の量子化

場の古典論の世界で注目される物理量はポテンシャル A^μ と場のテンソル $F^{\mu\nu}$ であり、

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1-2-16)$$

である。

Lorentz 条件下の共変形式での Maxwell 方程式を考える。

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (1-2-17)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1-2-18)$$

Lorentz 条件 (1-2-18) 下でも A_μ は一意的でないことには注意する。実際、

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (1-2-19)$$

$$\partial^\nu \partial_\nu \Lambda = 0 \quad (1-2-20)$$

という変換が可能である。さて、 $j^\mu = 0$ とする。次の Gauge 変換

$$\begin{cases} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \\ A^0 \rightarrow A^{0'} = A^0 + \partial^0 \Lambda \end{cases} \quad (1-2-21)$$

において、式 (1-2-18) の下で、

$$\partial^0 \Lambda = A^0 \quad (1-2-22)$$

を満たすような A^μ を取ることが可能である。このとき、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1-2-23)$$

となる。これを横波の条件と呼ぶ。系が相互作用をしている電子系を含むような、 $j^\mu \neq 0$ のときは式 (1-2-18) と (1-2-23) は両立しない。ここでは横波の電磁場を量子化する。ところが、電磁場はベクトル場であり、ベクトル場の扱いは少し複雑なので、簡単な 1 成分のみのスカラー場を量子化してみる。具体的には、これは Boson を表す。

電磁ポテンシャル A^μ を想定して、スカラー場 ϕ は

$$\partial^\nu \partial_\nu \phi = 0 \quad (1-2-24)$$

という運動方程式を満たすとす。この場合の対応する Lagrangian density は

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) \quad (1-2-25)$$

である。これから、一般化運動量 $\pi(x)$ も

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \mathcal{L}(x) = \dot{\phi}(x) \quad (1-2-26)$$

となる。方程式 (1-2-24) の解を Fourier 展開から求める。

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} q(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (1-2-27)$$

$k^0 = |\mathbf{k}|$ である。これを (1-2-24) に代入すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} q(\mathbf{k}, t) + \mathbf{k}^2 q(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (1-2-28)$$

という式が各 \mathbf{k} ごとに得られる。これは調和振動子の方程式と同じ形なので、一般解は

$$q(\mathbf{k}, t) = q_1(\mathbf{k}) e^{-ik^0 t} + q_2(\mathbf{k}) e^{ik^0 t} \quad (1-2-29)$$

これより、

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} (q_1(\mathbf{k}) e^{-ik^0 t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + q_2(\mathbf{k}) e^{ik^0 t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) \quad (1-2-30)$$

となるが、 $\phi(x)$ は実スカラーであることを明示するために、右辺に複素共役を加えておく。

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} \left[q_1(\mathbf{k}) e^{-i(k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + q_2(\mathbf{k}) e^{i(k^0 t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + q_1^*(\mathbf{k}) e^{i(k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + q_2^*(\mathbf{k}) e^{-i(k^0 t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \quad (1-2-31)$$

ここで右辺の第 2 項と第 4 項で積分変数を $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ と変えて

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} [(q_1(\mathbf{k}) + q_2(-\mathbf{k}))e^{-ik \cdot x} + (q_1^*(\mathbf{k}) + q_2^*(-\mathbf{k}))e^{ik \cdot x}] \quad (1-2-32)$$

最後に、 $a(\mathbf{k}) = [q_1(\mathbf{k}) + q_2^*(\mathbf{k})]$ と置いて

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} [a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^*(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}] \quad (1-2-33)$$

を得る。ここに

$$k^2 = 0, \text{ i.e. } k^0 = |\mathbf{k}| \quad (1-2-34)$$

も条件として加わっている。これより一般化運動量も

$$\pi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} [-ik^0 a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + ik^0 a^*(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}] \quad (1-2-35)$$

と求まる。交換関係

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1-2-36)$$

$$[\pi(x), \pi(x')] = [\phi(x), \phi(x')] = 0 \quad (1-2-37)$$

を用いてこれを量子化する。 $a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k})$ を演算子とみなして置き換えられる、 $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ は次の条件を満たさなければならない。

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1-2-38)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (1-2-39)$$

ハミルトニアン H を $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ で表すと、

$$H = \int d^3\mathbf{x} [\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}] = \dots = \int d^3k k^0 \frac{1}{2} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})] \quad (1-2-40)$$

$$= \int d^3k k^0 \left[n + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(\mathbf{0}) \right] \quad (1-2-41)$$

となる。ここに、数演算子 n を

$$n = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \quad (1-2-42)$$

これは空間の体積に比例して発散してしまうので、真空のエネルギーが 0 になるようにハミルトニアンを定義し直す。

$$H = \int d^3k k^0 a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \quad (1-2-43)$$

$a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k})$ を生成消滅演算子として、調和振動子の時と同様の議論が成り立つ。

ここでのハミルトニアンの再定義の操作は、形式的には、式 (1-2-40) において生成演算子を消滅演算子より左に配置し直したことに等しい。これを一般化する。演算子の積があるときに、生成演算子を消滅演算子の左側に並べるように順序を指定するという操作で作られる積を正規積と呼び、積の両側にコロン : をつけて表す。

$$: a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) := a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \quad (1-2-44)$$

これは座標表示では負振動成分 $\phi^{(+)}(x)$ を正振動成分 $\phi^{(-)}(x)$ の左側に並べるという操作に他ならない。

$$\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}} a(\mathbf{k}) \quad (1-2-45)$$

$$\phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k e^{ip \cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}} a^\dagger(\mathbf{k}) \quad (1-2-46)$$

$$\begin{aligned} : \phi(x)\phi(y) : &= : (\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)) : \\ &= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) \end{aligned} \quad (1-2-47)$$

この差は単なる数にしか過ぎないので、交換関係には影響がなく、運動方程式などは変わらない。
真空状態を

$$H|0\rangle = 0 \quad (1-2-48)$$

によって定義すると、

$$a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \quad (1-2-49)$$

は運動量 \mathbf{k} をもつ粒子がある一粒子状態を表す。

演算子の積で、未来の演算子を左に、過去の演算子を右に、時間的順序で並べたものを T 積と呼んで、

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) \quad (1-2-50)$$

で表す。空間的に隔たった 2 点の場の演算子は交換するので、T 積は任意の慣性系で同じ形を与える。式 (1-2-50) の真空期待値を Feynmann Propagator といい、

$$i\Delta_F(x, y) = \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle \quad (1-2-51)$$

で定義する。場の演算子の生成消滅演算子での表示 (1-2-33) を用いて、

$$\begin{aligned} \Delta_F &= -i \int \frac{d^3k_x}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_x^0}} \int \frac{d^3k_y}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_y^0}} \\ &\quad \times [\langle 0|\theta(x^0 - y^0)a(\mathbf{k}_x)e^{-ik_x \cdot x}a^\dagger(\mathbf{k}_y)e^{ik_y \cdot y} + \theta(y^0 - x^0)a(\mathbf{k}_y)e^{-ik_y \cdot y}a^\dagger(\mathbf{k}_x)e^{ik_x \cdot x}|0\rangle] \\ &= -i \int \frac{d^3k_x}{(2\pi)^3 2k_x^0} \{ \theta(x^0 - y^0)e^{-ik_x \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0)e^{ik_x^0 \cdot (x-y)} \} \end{aligned} \quad (1-2-52)$$

となる。ここに $\theta(x)$ は Heaviside の step function であり

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-2-53)$$

である。複素積分表示すると、

$$\theta(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha + i\epsilon} \quad (1-2-54)$$

である。これを用いて、式 (1-2-52) は Lorentz 不変な形に表せる。

$$\Delta_F(x) = -i\langle 0|T(\phi(x)\phi(0))|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1-2-55)$$

電磁場にこれを適用することを考えると、いま考えているのが横波なので、偏極ベクトル $\epsilon^{(\alpha)}$ を導入して、各方向 α について和をとるようにする。

$$A^\mu(x) = \sum_\alpha \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \left[a^{(\alpha)}(\mathbf{k})\epsilon^{(\alpha)\mu} e^{-ik \cdot x} + a^{(\alpha)\dagger}(\mathbf{k})\epsilon^{(\alpha)\mu} e^{ik \cdot x} \right] \quad (1-2-56)$$

偏極ベクトルは $(\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ が右手系を構成する基底ベクトルの組みになるように選び、大きさは 1 と規格化する。 $\epsilon^{(\alpha)}$ は伝播方向 \mathbf{k} と直交しているので、横波条件を保証する。 $\epsilon^{(0)}$ は 0 と取る。

1.2.3 Dirac の理論

スピン 1/2 の粒子を表す波動関数は Dirac 方程式を満たし、Dirac 粒子と呼ばれる。具体的にはこれは Fermion を表す。これについて簡単にまとめる。

まず次の関係を満たす行列の組:ガンマ行列 γ_μ を定義する。

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}_{(4)} \quad (1-2-57)$$

ここに $\mathbf{1}_{(4)}$ は 4 行 4 列の恒等行列である。従って、時間成分 γ^0 は Hermite で、空間成分 γ^j は反 Hermite である。

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \quad (1-2-58)$$

このガンマ行列を用いて Dirac 方程式は

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (1-2-59)$$

とかける。ここに $\psi(t, \mathbf{x})$ は Dirac 波動関数で、4 成分とする。

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \mathbf{x}) \\ \psi_2(t, \mathbf{x}) \\ \psi_3(t, \mathbf{x}) \\ \psi_4(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (1-2-60)$$

この波動関数のことをスピノルと呼ぶことがある。反交換関係、式 (1-2-57) を満たす 4 行 4 列の行列としては、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{(2)} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{(2)} \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (1-2-61)$$

がある。ここに、 $\mathbf{1}_{(2)}$ は 2 行 2 列の恒等行列、また σ^j は 2 行 2 列の Pauli 行列であり、

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1-2-62)$$

である。解 (1-2-61) は Dirac-Pauli 表示と呼ばれる。この解を一般のガンマ行列と区別して、添え字 DP を付けて表すと、一般のガンマ行列は、あるユニタリー変換 U を用いて、

$$\gamma^\mu = U^\dagger \gamma_{\text{DP}}^\mu U \quad (1-2-63)$$

と表せる。以下では主にこの DP 表示を使う。

Dirac 波動関数に Lorentz 共変性を求める。 i 軸まわりの角度 ϕ の回転変換は

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\phi)\psi(x) \quad (1-2-64)$$

$$S(\phi) = \exp\left(i\frac{\sigma^i}{2}\phi\right) = \cos\frac{\phi}{2} + i\sigma^i \sin\frac{\phi}{2} \quad (1-2-65)$$

で与えられる。この行列 $S(\phi)$ は Unitary。

一般に、 x^μ, x^ν 平面内の Lorentz-Boost の無限小変換の行列はガンマ行列の反対称積

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1-2-66)$$

で与えられる。Lorentz-Boost は、変換

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\chi)\psi(x) \quad (1-2-67)$$

$$S(\chi) = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\chi\right) = \cosh\frac{\chi}{2} - i\sigma^{\mu\nu}\sinh\frac{\chi}{2} \quad (1-2-68)$$

で表される。式 (1-2-66) が Hermite でないので、変換行列 (1-2-68) は Unitary でない。ここで共役スピノル $\bar{\psi}$ を定義する。

$$\bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)\gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*) \quad (1-2-69)$$

つまり、複素共役をとって転置し、さらに右から γ^0 をかけている。このように定義すると、Lorentz-Boost のもとでも空間回転でも、 ψ に対する変換行列 S の逆行列で $\bar{\psi}$ は変換される。

$$\psi'(x) = S\psi(x) \Leftrightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1} \quad (1-2-70)$$

$\bar{\psi}$ の右側から ψ をかけて作る不変な量は Lorentz-Boost に不変になる。

静止系 (x^μ) に対して速度 $-v$ で動く慣性系 (x'^μ) で見ると、静止系の Dirac 波動関数 $\psi(x)$ から、速度 v で動いている波動関数 $\psi'(x')$ が得られる。

$$\psi'(x') = S(\chi(-v))\psi(x), \quad p_\mu x'^\mu = mt \quad (1-2-71)$$

波動方程式が 4 成分なので、3 次元空間運動量 \mathbf{p} の固有状態として 4 つの独立な解がある。そのうち 2 つは正エネルギー解、残りの二つが負エネルギー解になる。正のエネルギーを次式で定義する。

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (1-2-72)$$

波動関数として、スピンの成分が s 正エネルギー解は

$$\psi(t, \mathbf{x}) = u(p, s) \exp[-i(\omega_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})] \quad (1-2-73)$$

となり、4 成分の波動関数 $u(p, s)$ は具体的に Dirac 方程式を解くことによって与えられる。静止系での解は特に簡単で、正エネルギー解は

$$u(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s = +) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s = -) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-2-74)$$

となる。波動関数として、スピン成分が s の負エネルギー解は

$$\psi(t, \mathbf{x}) = v(p, s) \exp[i(\omega_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})] \quad (1-2-75)$$

であり、静止系での負エネルギー解は

$$v(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s = -) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s = +) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1-2-76)$$

となる。負エネルギー解は反粒子の波動関数と解釈される。直交性と規格化は

$$\bar{u}(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s)u(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s') = 2m\delta_{ss'}, \quad \bar{v}(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s)v(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s') = -2m\delta_{ss'} \quad (1-2-77)$$

$$\bar{v}(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s)u(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s') = \bar{u}(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s)v(\mathbf{p} = \mathbf{0}, s') = 0 \quad (1-2-78)$$

である。

波動関数が粒子を表す時、

$$\psi'(x') = u(p, s) \exp(-ip_\mu x'^\mu) \quad (1-2-79)$$

であり、反粒子であるときは、

$$\psi'(x') = v(p, s) \exp(ip_\mu x'^\mu) \quad (1-2-80)$$

である。

得られた波動関数は Dirac 方程式を満たすので、

$$(p_\mu \gamma^\mu - m)u(p, s) = 0, \quad \bar{u}(p, s)(p_\mu \gamma^\mu - m) = 0 \quad (1-2-81)$$

$$(p_\mu \gamma^\mu + m)v(p, s) = 0, \quad \bar{v}(p, s)(p_\mu \gamma^\mu + m) = 0 \quad (1-2-82)$$

となる。波動関数の規格化は Lorentz-Boost のもとで不変な内積をとれば静止系で求めたものと同じになるので、

$$\bar{u}(p, s)u(p, s') = 2m\delta_{ss'}, \quad \bar{v}(p, s)v(p, s') = -2m\delta_{ss'} \quad (1-2-83)$$

$$\bar{v}(p, s)u(p, s') = \bar{u}(p, s)v(p, s') = 0 \quad (1-2-84)$$

となる。また、4元運動量 p^μ を与えた時に Dirac 方程式の解は4個独立なので、上で与えた解は完全系をなす。Dirac 方程式を満たす4元運動量 p^μ の粒子の波動関数に対して、正負のエネルギー状態への射影演算子 $\Lambda_\pm(\mathbf{p})$ は

$$\Lambda_\pm(\mathbf{p}) = \frac{\pm\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} \quad (1-2-85)$$

である。正負のエネルギーについてスピン状態について和をとると、正負エネルギー解の空間への射影に比例する。

$$\sum_{s=+,-} u(p, s)\bar{u}(p, s) = p_\mu \gamma^\mu + m \quad (1-2-86)$$

$$\sum_{s=+,-} v(p, s)\bar{v}(p, s) = p_\mu \gamma^\mu - m \quad (1-2-87)$$

この Dirac 場を量子化する。相対論的に不変な自由 Dirac 場の Lagrangian 密度 \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \quad (1-2-88)$$

である。共役運動量 $\pi(x)$ は、

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(x)} = i\psi^\dagger(x) \quad (1-2-89)$$

となる。Hamiltonian 密度 \mathcal{H} は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \pi(x)\dot{\psi}(x) - \mathcal{L} \\ &= -\psi^\dagger(x)\gamma^0(i\gamma^j \partial_j - m)\psi(x) \end{aligned} \quad (1-2-90)$$

となり、Heisenberg の運動方程式は Dirac 方程式 (1-2-59) になる。

Dirac 場はスピン 1/2 の粒子を表すので、交換関係ではなく、反交換関係を用いて量子化する。

$$\{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), i\psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{y})\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1-2-91)$$

$$\{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta(t, \mathbf{x})\} = 0, \quad \{i\psi_\alpha^\dagger(t, \mathbf{x}), i\psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{y})\} = 0 \quad (1-2-92)$$

これまでの議論で得ている u, v に関する関係式は、式 (1-2-81),(1-2-83),(1-2-84),(1-2-86),(1-2-87) である。
 $\psi, \bar{\psi}$ を平面波解で展開すると、生成消滅演算子を得ることができる。

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} \sum_{s=+,-} \{b_s(\mathbf{p})u(\mathbf{p}, s)e^{-ipx} + d_s^\dagger(\mathbf{p})v(\mathbf{p}, s)e^{ipx}\} \quad (1-2-93)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} \sum_{s=+,-} \{b_s^\dagger(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p}, s)e^{ipx} + d_s(\mathbf{p})\bar{v}(\mathbf{p}, s)e^{-ipx}\} \quad (1-2-94)$$

こうすると、場の演算子の反交換関係 (1-2-91),(1-2-92) は $b, d, b^\dagger, d^\dagger$ の反交換関係になる。

$$\{b_s(\mathbf{p}), b_r^\dagger(\mathbf{q})\} = \delta_{r,s}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (1-2-95)$$

$$\{d_s(\mathbf{p}), d_r^\dagger(\mathbf{q})\} = \delta_{r,s}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (1-2-96)$$

$$\{b_s(\mathbf{p}), b_r(\mathbf{q})\} = \{d_s(\mathbf{p}), d_r(\mathbf{q})\} = \{b_s^\dagger(\mathbf{p}), b_r^\dagger(\mathbf{q})\} = \{d_s^\dagger(\mathbf{p}), d_r^\dagger(\mathbf{q})\} = 0 \quad (1-2-97)$$

b^\dagger は粒子の、 d^\dagger は反粒子の生成演算子、 b, d はそれぞれの消滅演算子である。

スカラー場の時と同様に、場の演算子を正負の振動成分でわけて書く記法も導入しておく。

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 sk^0}} \sum_{s=+,-} d_s^\dagger(\mathbf{k})v(\mathbf{k}, s)e^{ik \cdot x} \quad (1-2-98)$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 sk^0}} \sum_{s=+,-} b_s(\mathbf{k})u(\mathbf{k}, s)e^{-ik \cdot x} \quad (1-2-99)$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 sk^0}} \sum_{s=+,-} b_s^\dagger(\mathbf{k})\bar{u}(\mathbf{k}, s)e^{ik \cdot x} \quad (1-2-100)$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 sk^0}} \sum_{s=+,-} d_s(\mathbf{k})\bar{v}(\mathbf{k}, s)e^{-ik \cdot x} \quad (1-2-101)$$

また、正規積も同様に定義する。ただこの際、1回の入れ替えごとに符号を変えることに決める。

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}\psi : &= : (\bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)})(\psi^{(+)} + \psi^{(-)}) : \\ &= (\bar{\psi}^{(+)}\psi^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)}\psi^{(+)} - \psi^{(-)}\bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)}\psi^{-}) \end{aligned} \quad (1-2-102)$$

Dirac 粒子の Feynman Propagator は

$$\begin{aligned} iS_F(x-y)_{\alpha\beta} &= \langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))|0\rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle - \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle \end{aligned} \quad (1-2-103)$$

となる。これに場の演算子を生成消滅演算子で表した式 (1-2-93),(1-2-94)、および θ 関数の複素表示 (1-2-54) を代入すると、

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= (i\gamma^\mu \partial_\mu^x + m)\Delta_F(x-y) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{\gamma^\mu k_\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{1}{\gamma^\mu k_\mu + i\epsilon} \end{aligned} \quad (1-2-104)$$

となる。

1.2.4 相互作用表示 S 行列

さて、話を相互作用表示での摂動論に移す。Schrödinger 表示でのハミルトニアン $H^{(S)}$ を自由場のハミルトニアン $H_0^{(S)}$ と相互作用ハミルトニアン $H_1^{(S)}$ に分ける。ここでは $H_1^{(S)}$ を摂動ハミルトニアンとして扱う。Schrödinger 表示の状態ベクトル $\Phi^{(S)}(t)$ の時間発展は以下の Schrödinger 方程式に従う。

$$i \frac{\partial \Phi^{(S)}}{\partial t} = H^{(S)} \Phi^{(S)} \quad (1-2-105)$$

ここで相互作用表示へ変更する。相互作用表示の量は添え字をつけないで表すことにする。

$$\Phi(t) = e^{iH_0^{(S)}t} \Phi^{(S)} \quad (1-2-106)$$

$$O(t) = e^{iH_0^{(S)}t} O^{(S)} e^{-iH_0^{(S)}t} \quad (1-2-107)$$

ここに $O^{(S)}$ は Schrödinger 表示の演算子である。 $\Phi(t)$ の時間発展は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= i \left[iH_0^{(S)} e^{iH_0^{(S)}t} \Phi^{(S)} + e^{iH_0^{(S)}t} \frac{\partial \Phi^{(S)}}{\partial t} \right] \\ &= -H_0^{(S)} e^{iH_0^{(S)}t} \Phi^{(S)} + e^{iH_0^{(S)}t} \left(H_0^{(S)} + H_1^{(S)} \right) e^{-iH_0^{(S)}t} e^{iH_0^{(S)}t} \Phi^{(S)} \\ &= H_1 \Phi \end{aligned} \quad (1-2-108)$$

また、相互作用表示の演算子 O の時間発展は

$$\dot{O} = i[H_0^{(S)}, O] = i[H_0, O] \quad (1-2-109)$$

ここで H_0 と $H_0^{(S)}$ は等しいことに注意する。時間発展 (1-2-108) の解を求める。時間発展の演算子 $U(t, t_0)$ を定義する。

$$\Phi(t) = U(t, t_0) \Phi(t_0) \quad (1-2-110)$$

自明な式

$$U(t_0, t_0) = 1 \quad (1-2-111)$$

が成り立つ。式 (1-2-108) は U を用いた次と等価。

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1 U(t, t_0) \quad (1-2-112)$$

式 (1-2-111), (1-2-112) から次の積分方程式が立つ。

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt H_1(t) U(t, t_0) \quad (1-2-113)$$

式 (1-2-113) を繰り返し代入していくと、次のようになる。

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_1(t_1) \left[1 - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_2) U(t_2, t_0) \right] \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_1(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1) H_1(t_2) + \cdots \\ &\quad + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_1) H_1(t_2) \cdots H_1(t_n) + \cdots \end{aligned} \quad (1-2-114)$$

さて、系が時刻 t_0 において状態 i にあって、時刻 $t > t_0$ において系が状態 f にあることが見出される確率は

$$|\langle \Phi_f | U(t, t_0) \Phi_i \rangle|^2 = |U_{fi}(t, t_0)|^2 \quad (1-2-115)$$

と与えられる。 $i \rightarrow f$ の単位時間当たりの遷移確率 (頻度) は

$$w = \frac{1}{t - t_0} |U_{fi}(t, t_0) - \delta_{fi}|^2 \quad (1-2-116)$$

である。式 (1-2-114) 中の "1" は相互作用がなくても存在する非遷移成分なので、式 (1-2-116) ではこれに相当する δ_{fi} の減算を施している。ここで S 行列を次で定義する。

$$S = U(\infty, -\infty) \quad (1-2-117)$$

式 (1-2-110) に従って、 S 行列は相互作用表示における無限の未来と無限の過去を関係付ける。すなわち、

$$\Phi(\infty) = S\Phi(-\infty) \quad (1-2-118)$$

また、 S 行列の具体的な形は、式 (1-2-114) から容易に得られる。

$$\begin{aligned} S &= S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots \\ &= 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \dots \\ &\quad + (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (1-2-119)$$

式 (1-2-119) が有用になりうるかどうかは相互作用の強さに依存するが、量子電磁気学において相互作用の強さ $\alpha (\ll 1)$ は小さく、 S 行列は速く収束する。よって、最初の幾つかの項を考慮するだけで、いい近似を得ることができる。 S 行列の性質としてユニタリー性がある。

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1 \quad (1-2-120)$$

また、恒等式

$$S^{(2)} = (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \quad (1-2-121)$$

$$= (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1) \quad (1-2-122)$$

が成り立つ。式 (1-2-121) を第一形式、式 (1-2-122) を第二形式と呼ぶ。

1.2.5 断面積と崩壊幅

ここで反応の起こる確率について考える。

まず、衝突反応の断面積について定義する。この断面積とは、単位体積および単位時間当たりの反応回数を、衝突する粒子 1, 2 の個数密度と両者の相対速度で割った量である。両粒子の個数密度を ρ_1, ρ_2 、相対速度の大きさを v_{rel} とし、衝突が体積 V の空間内で時間 T の間に N 回起こったとすると、断面積 σ とは

$$\sigma = N / (VT\rho_1\rho_2v_{\text{rel}}) \quad (1-2-123)$$

と与えられる。また、入射粒子 (粒子 1) が、ある条件; 例えば入射角度に対して角度 $\theta \sim \theta + d\theta$ の間に散乱される状態のみに着目するときは、 $N \rightarrow dN$, $\sigma \rightarrow d\sigma$ と書き改めて、

$$d\sigma = dN / (VT\rho_1\rho_2v_{\text{rel}}) \quad (1-2-124)$$

として、この $d\sigma$ または $d\sigma/d\theta$ を微分断面積と呼ぶ。

断面積は、その名の通り、通常単位系では面積の次元を持ち、一個の Target (粒子 2) に対してそれを含む面に垂直に単位面積当たり 1 個の粒子が入射した時に衝突が起こる確率を表す。

この断面積を、質量・運動量が $(M_1, \mathbf{q}_1) \cdots (M_n, \mathbf{q}_n)$ の粒子からなる終状態に対して、S 行列および実際に測定されるエネルギー・運動量で表現する。まず、 v_{rel} は、重心系および Target が静止している実験室系においては、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は (反) 平行となるので、

$$v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{p}_1/p_1^0 - \mathbf{p}_2/p_2^0| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 / (p_1^0 p_2^0)} \quad (1-2-125)$$

を得る。

次に、始状態の表現に必要な個数密度 ρ について考える。

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = \int d^3 x \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \int d^3 x |\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})|^2 \quad (1-2-126)$$

であるから、全空間内に存在する粒子の総数を考えるから、 $|\mathbf{k}\rangle$ で記述される状態においては、

$$V = \int d^3 x \quad (1-2-127)$$

と書いて、

$$\rho = \langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle / V \quad (1-2-128)$$

である。ここで、規格化

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = (2\pi)^3 2k^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1-2-129)$$

をおもいだすと

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 2k^0 \delta^{(3)}(0) = 2k^0 \int d^3 x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} = 2k^0 \int d^3 x = 2k^0 V \quad (1-2-130)$$

となり、最終的に

$$\rho = 2k^0 \quad (1-2-131)$$

を得る。

他方で、終状態の表現のためには一般の他粒子状態について考察する必要がある。完全性の条件は

$$\sum_n \int \prod_i^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k^0} |\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n\rangle \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n| = 1 \quad (1-2-132)$$

で与えられる。ここで左辺は関与する全ての物理的粒子状態に関わる和とその運動量についての積分を表すが、 $n=0$ の場合は、左辺= $|0\rangle\langle 0|$ とする。また、状態の中に m 個の同種粒子がある場合は、積分において同じ状態を重複して数えないよう対応する項全体を $m!$ で割るものとする。

この完全条件により、任意の状態 Ψ を

$$|\Psi\rangle = \sum_n \int \prod_i^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k^0} |\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n\rangle \langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | \Psi \rangle \quad (1-2-133)$$

と展開され、ノルムは、

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_n \int \prod_i^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k^0} |\langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | \Psi \rangle|^2 \quad (1-2-134)$$

と表される。一般の状態において、 $\langle \Psi | \Psi \rangle$ が $|\Psi\rangle$ が記述する状態の総数を与えることに注意すると、各粒子の運動量がそれぞれ $\mathbf{k}_i \sim \mathbf{k}_i + d\mathbf{k}_i$ の間に入っているような n 粒子の状態の数が、

$$\prod_i^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^2 2k^0} |\langle \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n | \Psi \rangle|^2 \quad (1-2-135)$$

であることを意味する。よって、この Ψ として始状態 $|\alpha\rangle$ の時間発展した形 $S|\alpha\rangle$ を取り、想定している終状態 $|\beta\rangle$ とを組み合わせれば、断面積の定義 (1-2-124) における反応回数 dN は、

$$dN = \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \quad (1-2-136)$$

であることがわかる。

S 行列の中には無反応を表す項も含まれているが、 $\alpha \neq \beta$ であれば、これは関与しないことに気をつけて話を進める。さて、どんな反応の前後でも全エネルギーを運動量は保存されるから、 $\langle\beta|\alpha\rangle$ には $\delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha)$ という因子が含まれている。これを抜き出して、

$$\langle\beta|S|\alpha\rangle = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) \mathcal{M}_{\beta\alpha} \quad (1-2-137)$$

と表す。この $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ を不変散乱振幅、M 行列とよぶ。この $\langle\beta|\alpha\rangle$ で記述される繊維の舞台は全時空で、全体積は

$$VT = \int d^3 x \int dt = \int d^4 x \quad (1-2-138)$$

で与えられる。この表現を用いると

$$|\langle\beta|S|\alpha\rangle|^2 = |(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) \mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (1-2-139)$$

の右辺で $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ を除く部分は

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) \int d^4 x \\ &= VT (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) \end{aligned} \quad (1-2-140)$$

となり、

$$dN = VT \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (1-2-141)$$

が得られる。式 (1-2-125), (1-2-131), (1-2-144) を式 (1-2-124) に代入することで、最終的には

$$d\sigma = \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) \quad (1-2-142)$$

を得る。また、これを積分することで、

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) \quad (1-2-143)$$

が得られる。

素粒子の崩壊現象を記述するときは、衝突過程の断面積と対応して、崩壊幅という量を用いる。これは、一個の粒子の単位時間当たりの崩壊確率を表す。初期状態 $|\alpha\rangle$ として、通常は崩壊する粒子の静止状態を考え、その質量を m とすると、終状態が n 個の粒子で、各運動量が $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i + d\mathbf{k}_i$ という区間にあるような崩壊の、全時間・空間における発生回数は、式 (1-2-144) と同じく、

$$dN = VT \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (1-2-144)$$

となる。ただし、ここでは $k_\alpha = (m, 0, 0, 0)$ である。始状態 (1 粒子状態) は全空間に $2k_\alpha^0 V = 2mV$ 個の粒子が存在する状態を表していたので、結局、この場合の微分崩壊幅は、

$$d\Gamma = \frac{dN}{2mVT} = \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) \quad (1-2-145)$$

ということになる。終状態が2体の場合には、

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{k}|}{32\pi^2 m^2} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (1-2-146)$$

と簡単になる。また、 $d\Gamma$ をすべての運動量領域によって積分し、さらに、すべての可能な終状態について足し上げた量は、全崩壊幅と呼ばれ、

$$\Gamma = \sum_{\text{tot}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_\beta - k_\alpha) \quad (1-2-147)$$

と書き表される。単位時間当たりの崩壊確率が Γ ということは、この粒子は平均すれば $\tau = 1/\Gamma$ の時間で崩壊することを意味し、この τ を崩壊粒子の平均寿命とよぶ。終状態を特定の状態(f)に限ったものを Γ_f として、さらに Γ との比 $B_f = \Gamma_f/\Gamma$ は、それぞれ終状態fへの部分崩壊幅および分岐比と名付けられている。

1.2.6 対消滅とS行列

前節で導いた $S^{(2)}$ 行列の二つの形式をもとに議論を進める。第一形式は

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ &= (-i)^2 \int d^4 x_1 \int_{t_2 < t_1} d^4 x_2 \mathcal{H}_{\text{int}}(x_1) \mathcal{H}_{\text{int}}(x_2) \end{aligned} \quad (1-2-148)$$

のように x_2 に関する4次元積分が $t_2 < t_1$ の領域に限定されるのに対して、第二形式は

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1) \\ &= (-i)^2 \int d^4 x_1 \int_{t_2 > t_1} d^4 x_2 \mathcal{H}_{\text{int}}(x_2) \mathcal{H}_{\text{int}}(x_1) \end{aligned} \quad (1-2-149)$$

のように t_2 が t_1 よりも後になる。2光子を放出する e^+e^- 対消滅は次のような過程である。

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma \quad (1-2-150)$$

始状態と終状態は次のように書かれる。

$$\Phi_i = |e^- e^+\rangle = b^{(s_-)\dagger}(\mathbf{p}_-) b^{(s_+)\dagger}(\mathbf{p}_+) |0\rangle \quad (1-2-151)$$

$$\Phi_f = |2\gamma\rangle = a_{\mathbf{k}_1 \alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2 \alpha_2}^\dagger |0\rangle \quad (1-2-152)$$

量子電磁気学の相互作用のLagrangianは

$$\mathcal{L} = -e : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) : A^\mu(x) \quad (1-2-153)$$

である。

$S^{(0)}$ と $S^{(1)}$ は寄与をもたない。したがって S が $S^{(2)}$ によって近似できると仮定して、 S_{fi} を第一形式で次のように書く。

$$S_{fi} = (-e)^2 \int d^4 x_1 \int_{t_2 < t_1} d^4 x_2 \langle 2\gamma | : \bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) A^\mu(x_1) :: \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) A^\nu(x_2) : | e^- e^+ \rangle \quad (1-2-154)$$

この問題では実光子だけを考えればよいので、 A_μ を量子化された横波の電磁場とみなせる。式 (1-2-154) を次のように書き直す。

$$S_{fi} = (-e)^2 \int d^4x_1 \int_{t_2 < t_1} d^4x_2 \langle 0 | \bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) :: \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) : | e^- e^+ \rangle \times \langle 2\gamma | A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) | 0 \rangle \quad (1-2-155)$$

$\langle 2\gamma | A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) | 0 \rangle$ について考えると、演算子 $A^\mu(x_1)$ は時空点 x_1 において光子 1 もしくは 2 を生成できるということで、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \langle 2\gamma | A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) | 0 \rangle \\ &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}} \epsilon^{(\alpha_1)\mu} e^{-ik_1 \cdot x_1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}} \epsilon^{(\alpha_2)\nu} e^{-ik_2 \cdot x_2} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}} \epsilon^{(\alpha_2)\mu} e^{-ik_2 \cdot x_1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}} \epsilon^{(\alpha_1)\nu} e^{-ik_1 \cdot x_2} \right) \right] \quad (1-2-156) \end{aligned}$$

ここで $\epsilon^{(\alpha_1)\mu}$ は

$$\epsilon^{(\alpha_1)\mu} = (0, \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}) \quad (1-2-157)$$

を表す。 $\boldsymbol{\epsilon}^{\alpha_1}$ は \mathbf{k}_1 に対して垂直な単位ベクトルである。ここでは実光子を扱うので $|\mathbf{k}_1| = \omega_1$ である。

次に電子場の演算子に関する行列要素を考察する。 $:\bar{\psi}\gamma\psi:$ を展開すると

$$\begin{aligned} :\bar{\psi}\gamma_\mu\psi: &= :(\bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)})_\alpha (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} (\psi^{(+)} + \psi^{(-)})_\beta : \\ &= (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} (\bar{\psi}_\alpha^{(+)} \psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\beta^{(+)} - \psi_\beta^{(-)} \bar{\psi}_\alpha^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)} \psi_\beta^{(-)}) \quad (1-2-158) \end{aligned}$$

となることに注意して、式 (1-2-155) において式 (1-2-158) を代入する。こうして 16 個の項が出てくるが、電子陽電子対の消滅過程を対象とするときは、始状態は二つだけ粒子を含み、終状態は粒子を含まないので、4 つの演算子を用いて、このような状態を作るためには、1 つの生成演算子と 3 つの消滅演算子の組み合わせを選ばなければならない。さらに、 $\psi_{\alpha,\beta}^{(+)}(x_1)$ を $\langle 0 |$ 右から作用させても 0 になることから、のちの時刻 t_1 における演算子の組 $\bar{\psi}_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_1)$ を $\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\beta^{(-)}(x_1)$ と置き換えることができる。こうして残るのはつぎの二つの項だけになる。

$$(\gamma_\mu)^{\alpha\beta} (\gamma_\nu)^{\gamma\delta} \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2) \psi_\delta^{(+)}(x_2) \quad (1-2-159)$$

$$-(\gamma_\mu)^{\alpha\beta} (\gamma_\nu)^{\gamma\delta} \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\delta^{(-)}(x_2) \psi_\gamma^{(+)}(x_2) \quad (1-2-160)$$

式 (1-2-159) に関しては先頭の陽電子消滅演算子 $\bar{\psi}_\alpha^{(+)}$ を後ろに回して消滅演算子の組 $\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\delta^{(+)}(x_2)$ が始状態の電子陽電子対を直接消滅させるようにする。

$$\begin{aligned} & (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} (\gamma_\nu)^{\gamma\delta} \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2) \psi_\delta^{(+)}(x_2) \\ &= (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} (\gamma_\nu)^{\gamma\delta} \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2) \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\delta^{(+)}(x_2) \quad (1-2-161) \end{aligned}$$

式 (1-2-160) に関しては x_1, x_2 を交換して、添え字も $\mu \rightleftharpoons \nu, \alpha\beta \rightleftharpoons \gamma\delta$ の入れ替えを行って体裁を式 (1-2-161) と同じにしてやる。

$$\begin{aligned} & -(\gamma_\mu)^{\alpha\beta} (\gamma_\nu)^{\gamma\delta} \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\delta^{(-)}(x_2) \psi_\gamma^{(+)}(x_2) \\ &= -(\gamma_\mu)^{\alpha\beta} (\gamma_\nu)^{\gamma\delta} \bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2) \psi_\beta^{(-)}(x_1) \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\delta^{(+)}(x_2) \quad (1-2-162) \end{aligned}$$

このような入れ替えをすることによって、 t_2 が t_1 の後に来なければならないことがわかる。よってこれに対しては第二形式で書いてやる。よって、次の式を得る。

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= (-e)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle 2\gamma | A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) | 0 \rangle (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} (\gamma_\nu)^{\gamma\delta} \\
&\quad \times \left[\langle 0 | \psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2) \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\delta^{(+)}(x_2) | e^- e^+ \rangle \theta(t_1 - t_2) \right. \\
&\quad \left. - \langle 0 | \bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2) \psi_\beta^{(-)}(x_1) \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\delta^{(+)}(x_2) | e^- e^+ \rangle \theta(t_2 - t_1) \right] \quad (1-2-163)
\end{aligned}$$

電子場の行列要素を簡単にすることができる。つまり $\psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2), \bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2) \psi_\beta^{(+)}(x_1)$ と $\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\delta^{(+)}(x_2)$ の間に中間状態として完全系 $\sum_n |n\rangle \langle n|$ を挿入する。しかし寄与を生じるのは真空のみ。

$$\begin{aligned}
&\langle 0 | \psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2) \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\delta^{(+)}(x_2) | e^+ e^- \rangle \\
&= \langle 0 | \psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \psi_\delta^{(+)}(x_2) | e^+ e^- \rangle \\
&= \langle 0 | \psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2) | 0 \rangle \times \left[\sqrt{\frac{m}{E_+ V}} \bar{v}_\alpha^{(s_+)}(\mathbf{p}_+) e^{ip_+ \cdot x_1} \right] \left[\sqrt{\frac{m}{E_- V}} u_\delta^{(s_-)}(\mathbf{p}_-) e^{ip_- \cdot x_2} \right] \quad (1-2-164)
\end{aligned}$$

第二項についても同様に簡約化を行うことができ、結局 S 行列は次のようになる。

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= (-e)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}} \epsilon^{(\alpha_1)\mu} e^{-ik_1 \cdot x_1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}} \epsilon^{(\alpha_2)\nu} e^{-ik_2 \cdot x_2} \right) + \{k_1 \leftrightarrow k_2, \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2\} \right] \\
&\quad \times \left[\sqrt{\frac{m}{E_+ V}} \bar{v}_\alpha^{(s_+)}(\mathbf{p}_+) e^{ip_+ \cdot x_1} \right] (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} \\
&\quad \times \left[\langle 0 | \psi_\beta^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2) | 0 \rangle \theta(t_1 - t_2) - \langle 0 | \bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2) \psi_\beta^{(-)}(x_1) | 0 \rangle \theta(t_2 - t_1) \right] \\
&\quad \times (\gamma_\nu)^{\gamma\delta} \left[\sqrt{\frac{m}{E_- V}} u_\delta^{(s_-)}(\mathbf{p}_-) e^{-ip_- \cdot x_2} \right] \quad (1-2-165)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-e)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}} \epsilon^{(\alpha_1)\mu} e^{-ik_1 \cdot x_1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}} \epsilon^{(\alpha_2)\nu} e^{-ik_2 \cdot x_2} \right) \\
&\quad \times \left(\sqrt{\frac{m}{E_+ V}} \bar{v}_\alpha^{(s_+)}(\mathbf{p}_+) e^{ip_+ \cdot x_1} \right) (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} \langle 0 | T(\psi_\beta(x_1) \bar{\psi}_\gamma(x_2)) | 0 \rangle (\gamma_\nu)^{\gamma\delta} \left(\sqrt{\frac{m}{E_- V}} u_\delta^{(s_-)}(\mathbf{p}_-) e^{-ip_- \cdot x_2} \right) \\
&\quad + \{k_1 \leftrightarrow k_2, \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2\} \quad (1-2-166)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-e)^2 \sqrt{\left(\frac{m}{E_V} \right) \left(\frac{m}{E_+ V} \right) \left(\frac{1}{2\omega_1 V} \right) \left(\frac{1}{2\omega_2 V} \right)} \\
&\quad \times \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{-ik_1 \cdot x_1 - ik_2 \cdot x_2} \epsilon^{(\alpha_1)\mu} \epsilon^{(\alpha_2)\nu} e^{-ip_+ \cdot x_1 + ip_- \cdot x_2} \\
&\quad \times \bar{v}_\alpha \gamma_\mu \left(-\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)} (\gamma \cdot q + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \gamma_\nu u \\
&\quad + \{k_1 \leftrightarrow k_2, \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2\} \quad (1-2-167)
\end{aligned}$$

最後の変形では Feynman Propagator の式 (1-2-104) を使っている。式 (1-2-167) の和の第 1 項は通常の diagram, 第 2 項は光子が交差する diagram を表す。

1.2.7 対消滅と M 行列

S 行列の式 (1-2-167) の計算を実行してみる。まず、時空座標に関する積分を行う。 x_1, x_2 に依存しない因子を省くと

$$\begin{aligned}
&\int d^4x_1 \int d^4x_2 \exp[i(-k_1 + p_+ - q) \cdot x_1] \exp[i(-k_2 + p_- + q) \cdot x_2] \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}[q - (p_+ - k_1)] (2\pi)^4 \delta^{(4)}[q - (p_- + k_2)] \quad (1-2-168)
\end{aligned}$$

となる。続いて運動量積分を実行すると、式 (1-2-168) における二つの $\delta^{(4)}$ のうち一方が消えて、 q が $-p_- + k_2$ に置き換わる。交差ダイアグラムの場合も同様の方法で扱えるが、 q が $-p_- + k_1$ に置き換わる。共変行列要素 \mathcal{M}_{fi} を次のように定義する。

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_- + p_+ - k_1 - k_2) \sqrt{\left(\frac{m}{E_- V}\right) \left(\frac{m}{E_+ V}\right) \left(\frac{1}{2\omega_1 V}\right) \left(\frac{1}{2\omega_2 V}\right)} \mathcal{M}_{fi} \quad (1-2-169)$$

ここで扱う過程に関しても δ_{fi} は 0 である。共変行列要素の式は、次のような単純な形で与えられる。

$$\mathcal{M}_{fi} = -e^2 \bar{v}^{(s_+)}(\mathbf{p}_+) \left[\gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \frac{-i\gamma \cdot (-p_- + k_2) + m}{(-p_- + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} + \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_2)} \frac{-i\gamma \cdot (-p_- + k_1) + m}{(-p_- + k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] u^{(s_-)}(\mathbf{p}_-) \quad (1-2-170)$$

1.2.8 対消滅の断面積

実験室系において静止状態の電子に対して陽電子を衝突させる状況を考えると、相対速度は簡単に、

$$v_{\text{rel}} = \frac{|\mathbf{p}|}{E_+} \quad (1-2-171)$$

となる。

実験室系における一方の光子:1 の微分断面積に興味がある。運動量空間で積分変数を極座標に変更し、道警方向の積分を実行すると、

$$d^3 p' \delta(E' - E) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{\partial E / \partial |\mathbf{p}|} d\Omega \quad (1-2-172)$$

と変換できることを使う。

こうして k_2 に関する積分をまず行う。 $\delta(E_+ + E_- - \omega_1 - \omega_2) d^3 k_1$ の評価に当たって知る必要のあるのは、 θ_1 と ϕ_1 を固定した時のデルタ関数の引数部分の偏微分である。運動学的な関係

$$|\mathbf{p}_+ - \mathbf{k}_1| = \sqrt{|\mathbf{p}_+|^2 - 2|\mathbf{p}_+|\omega_1 \cos \theta_1 + \omega_1^2} = |\mathbf{k}_2| = \omega_2, \quad (1-2-173)$$

$$m + E_+ = \omega_1 + \omega_2 \quad (1-2-174)$$

を利用して、上述の偏微分は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_f}{\partial |\mathbf{k}_1|} \right)_{\theta_1 \phi_1} &= \frac{\partial(\omega_1 + |\mathbf{p}_+ - \mathbf{k}_1|)}{\partial |\mathbf{k}_1|} \\ &= 1 + \frac{|\mathbf{k}_1| - |\mathbf{p}_+| \cos \theta_1}{\omega_2} \\ &= \frac{m(m + E_+)}{\omega_1 \omega_2} \end{aligned} \quad (1-2-175)$$

したがって、実験室系における微分断面積は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab}} &= \frac{1}{4m|\mathbf{p}_+|} (2m)^2 \frac{|\mathbf{k}_1|^2}{2\omega_1 (2\pi)^3} \frac{2\pi}{2\omega_2} \frac{1}{(\partial E_f / \partial |\mathbf{k}_1|)_{\theta_1 \phi_1}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{m^2 |\mathbf{p}_+|} \frac{\omega_1^2}{m + E_+} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2m)^2 \end{aligned} \quad (1-2-176)$$

この実験室系を採用して $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ の評価をする。

$$p_- = (m, 0, 0, 0), \epsilon^{(\alpha)} = (0, \epsilon^{(\alpha)}) \quad (1-2-177)$$

と置くことができる。これにより、

$$(\gamma \cdot p_-)(\gamma \cdot \epsilon^{(\alpha)}) u^{(s)}(\mathbf{p}_-) = (\gamma \cdot \epsilon^{(\alpha)}) m u^{(s)}(\mathbf{p}_-) \quad (1-2-178)$$

となる。 $\epsilon^{(\alpha)}$ は $\epsilon^{(\alpha_1)}$ でも $\epsilon^{(\alpha_2)}$ でもよい。さらに、

$$(-p_- + k_{1,2})^2 = m^2 - 2m\omega_{1,2} \quad (1-2-179)$$

なので、式 (1-2-170) より、共変行列要素は、

$$\mathcal{M}_{fi} = -e^2 \bar{v}(\mathbf{0}) \left[\frac{\gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \gamma \cdot k_2 \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_2)}}{2m\omega_2} + \frac{\gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_2)} \gamma \cdot k_1 \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_1)}}{2m\omega_1} \right] u(\mathbf{p}_-) \quad (1-2-180)$$

となる。始状態の電子と陽電子が非偏極であれば、次の量を評価する必要がある。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_+, s_-} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{4} \sum_{s_+, s_-} (u^{(s_-)\dagger} O^\dagger \bar{v}^{(s_+)\dagger}) (\bar{v}^{(s_+)} O u^{(s_-)}) \\ &= \frac{e^4}{4} \sum_{s_+, s_-} \bar{u}^{(s_-)} \gamma_0 O^\dagger \gamma_0 v^{(s_+)} \bar{v}^{(s_+)} O u^{(s_-)} \\ &= \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left[\gamma_0 O^\dagger \gamma_0 \left(-\frac{-\gamma \cdot p_+ + m}{2m} \right) O \left(\frac{\gamma \cdot p_- + m}{2m} \right) \right] \end{aligned} \quad (1-2-181)$$

ここに O は式 (1-2-180) のカッコ内の部分を表す。係数 $1/4$ は Ps の 4 つのスピンの状態に関する平均をとるための因子。ここで空間成分が実数、第四成分が純虚数の任意の四元ベクトル a_μ に対して次の公式が成り立つ。

$$\gamma_4 (\gamma \cdot a)^\dagger = \gamma_4 [\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a} + \gamma_4 (ia_0)^*] \gamma_4 = -\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a} \quad (1-2-182)$$

次式を評価しなければならない。

$$\text{Tr}[(\gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_2)} \gamma \cdot k_2 \gamma \epsilon^{(\alpha_1)})(i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_+ + m)(\gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \gamma \cdot k_2 \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_2)})(-\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_- + m)] \quad (1-2-183)$$

m の一次の項は、奇数個のガンマ関数の関の Trace が 0 になるという規則により 0 になる。 m^2 の項も 0 になることは、

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot k_2 \boldsymbol{\gamma} \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \boldsymbol{\gamma} \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \boldsymbol{\gamma} \cdot k_2 = k_2^2 = 0 \quad (1-2-184)$$

この証明には

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a}) = a^2 \quad (1-2-185)$$

を用いた。これは次の式の特例である。

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{b}) + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{b})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a}) = \gamma_\mu a^\mu \gamma_\mu b^\mu + \gamma_\mu b^\mu \gamma_\mu a^\mu = 2\delta_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1-2-186)$$

残りの項を評価するには、ガンマ行列を消すために式 (1-2-185), (1-2-186) を利用できることを念頭におく。また、

$$\epsilon^{(\alpha_{1,2})} \cdot \mathbf{p}_- = 0, k_{1,2}^2 = 0 \quad (1-2-187)$$

また、式 (1-2-186) より

$$\text{Tr}[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{b})] = \text{Tr}[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{b})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{a})] = 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1-2-188)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} &\text{Tr}[\boldsymbol{\gamma} \cdot \epsilon^{(\alpha_2)} \boldsymbol{\gamma} \cdot k_2 \boldsymbol{\gamma} \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_+ + \boldsymbol{\gamma} \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \boldsymbol{\gamma} \cdot k_2 \boldsymbol{\gamma} \cdot \epsilon^{(\alpha_2)} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_-] \\ &= -16(\epsilon^{(\alpha_1)} \cdot k_2)^2 (k_2 \cdot \mathbf{p}_-) + 8(k_1 \cdot \mathbf{p}_-)(k_2 \cdot \mathbf{p}_-) \\ &= 16m\omega_2(\epsilon^{(\alpha_1)} \cdot k_2)^2 + 8m^2\omega_1\omega_2 \end{aligned} \quad (1-2-189)$$

最後の行では横波の条件

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)} \cdot \mathbf{k}_1 = 0 \quad (1-2-190)$$

とエネルギー-運動量保存より導かれる、

$$k_2 \cdot p_+ = k_1 \cdot p_- \quad (1-2-191)$$

という関係を用いている。他の過程の鑑賞から生じる Trace も同様に計算できる。これらを合わせた正味の結果は

$$\frac{1}{4} \sum_{s_+, s_-} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{2(2m)^2} \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} + 2 - 4(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)})^2 \right] \quad (1-2-192)$$

となり、二光子を放出する対消滅の微分断面積の式は、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab}} = \frac{\omega_1^2 r_0^2}{8|\mathbf{p}_+|(m + E_+)} \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} + 2 - 4(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)})^2 \right] \quad (1-2-193)$$

となる。式 (1-2-193) において低エネルギー-極限を考えて、

$$\omega = \omega_1 = \omega_2, \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2, |\mathbf{p}_+| = mv_+ \quad (1-2-194)$$

と設定してみる。そうすると、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab}} = \frac{r_0^2}{4v_+} (1 - (\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)})^2) \quad (1-2-195)$$

となる。偏極に関する総和は単に因子 2 を生じる。全断面積を得るには、終状態において識別不可能な二つの光子が含まれていることに注意する。

$$\sigma^{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \quad (1-2-196)$$

であり、スピンを平均した全断面積は

$$\sigma^{\text{tot}} = \frac{r_0^2}{4v_+} 2 \times 2\pi = \frac{\pi r_0^2}{v_+} \quad (1-2-197)$$

ここに r_0 は考えている系の半径。

1.2.9 p-ポジトロニウムの寿命

$$R = \sigma_{\text{tot}} v_+ \rho \quad (1-2-198)$$

は電子密度 ρ の下での陽電子の平均寿命の逆数に当たる。Ps の基底状態においては a_0 を Bohr 半径として

$$\rho = |\psi_{1S}(\mathbf{x} = 0)|^2 = \frac{1}{\pi(2a_0)^3} \quad (1-2-199)$$

こうして崩壊幅が微細構造定数を用いて

$$\Gamma(n = 1, {}^1S \rightarrow 2\gamma) = \lim_{v_+ \rightarrow 0} 4\sigma_{\text{tot}}^{\text{unpol}} v_+ |\psi_{1s}(\mathbf{x} = 0)|^2 \quad (1-2-200)$$

$$= 4\pi \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 \frac{1}{\pi(2/\alpha m)^3} = \frac{1}{2} \alpha^5 m \quad (1-2-201)$$

と計算できる。よって $n = 1$ の 1S 状態の平均寿命は

$$\tau_{\text{singlet}} = \frac{2}{\alpha^5 m} \simeq 1.25 \times 10^{-10} \text{sec} \quad (1-2-202)$$

1.2.10 o-ポジトロニウムの寿命

p-Ps 寿命計算 (1.2.9 節) の最後が難しいことからわかるように、この辺に特に時間切れの波が波及した... よって当然のことながら o-Ps の寿命計算について詳細はかくことができず、以下の計算式は、ただ単に [1] の文献から数式を選び抜いて殴り書きしたものにすぎない... ごめんなさい

$$P = 2\pi |H_{FA}|^2 \rho \quad (1-2-203)$$

$$H_{FA} = \sum_{I,II} \frac{H_{FII} H_{III} H_{IA}}{(E_A - E_I)(E_A - E_{II})} \quad (1-2-204)$$

$$H_{IA} = e(w\pi/kL^3)^{1/2} (u_I, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} u_A) \quad (1-2-205)$$

$$H_{FA} = e^3 ((2\pi)^3 / k_1 k_2 k_3 L^3)^{1/3} \times \sum_k \sum_{I,II} \frac{(u_F, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 u_{II})(u_{II}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_2 u_I)(u_I, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}_1 u_A)}{(E_1 - k_1 - E')(k_3 - E_2 - E')} \quad (1-2-206)$$

ここに $E_1, E_2 = m$ は電子と陽電子の initial energy で、 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ は運動量を表す。 E', E'' は電子の一つ目と二つ目の中間状態のエネルギーを表す。

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0; k_1 + k_2 + k_3 = 2m \quad (1-2-207)$$

$$L^{-3/2} = (\kappa/\pi)^{1/2} \quad (1-2-208)$$

ここに κ はボーア半径の二倍である。

$$H_{FA} = -(2\pi e^3 / m^2 L^3) (\kappa^3 / k_1 k_2 k_3)^{1/2} (\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3) \cdot \mathbf{u} \quad (1-2-209)$$

ここに

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) - \mathbf{a}_2 (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1) - \mathbf{a}_3 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_1 (\mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{a}'_3) - \mathbf{a}'_2 (\mathbf{a}'_3 \cdot \mathbf{a}_1) - \mathbf{a}'_3 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}'_2), \mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}'_1 \times (\mathbf{k}_1 / |\mathbf{k}_1|) \quad (1-2-210)$$

$$\sum_{\text{polarizations}} \langle |H_{FA}|^2 \rangle = (32\pi^2 e^6 / 3L^3) (\kappa^3 / k_1 k_2 k_3) \times \{ [1 - \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3)]^2 + [1 - \cos(\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1)]^2 + [1 - \cos(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)]^2 \} \quad (1-2-211)$$

$$\rho = (2\pi)^{-5} L^6 k_1 k_2 k_3 dk_2 dk_1 d\Omega_1 \quad (1-2-212)$$

$$1/\tau = (16e^6 \kappa^5 / 9\pi m^3) \int_0^m F(k_1) dk_1 = (16/9\pi) (\pi^2 - 9) (e^6 \kappa^3 / m^2) \quad (1-2-213)$$

ここに

$$\begin{aligned} F(k_1) &= \int_{m-k_1}^m \left\{ \frac{m_2(m-k_1)^2}{k_2^2 k_3^2} + \frac{m_2(m-k_2)^2}{k_3^2 k_1^2} + \frac{m_2(m-k_3)^2}{k_1^2 k_2^2} \right\} \\ &= 2 \left\{ \frac{k_1(m-k_1)}{(2m-k_1)^2} - \frac{2m(m-k_1)^2}{(2m-k_1)^3} \log \frac{m-k_1}{m} + \frac{2m-k_1}{k_1} + \frac{2m(m-k_1)}{k_1^2} \log \frac{m-k_1}{m} \right\} \end{aligned} \quad (1-2-214)$$

$$\tau_{\text{singlet}} / \tau_{\text{triplet}} = (4/9\pi) (\pi^2 - 9) (e^2 / \hbar c) \quad (1-2-215)$$

(変に復習の部分に時間使うんじゃないかった...)

2 実験

2.1 実験に使用した装置一覧 (回路部分除く)

線源 (^{22}Na) 本実験の目的であるポジトロニウム (以下 Ps) を生成するための e^+ を提供する放射性物質。

プラスチックシンチレーター (以下 P.S.) 有機シンチレーターの一つで、放射線が通過して信号を出す。本実験では、主に ^{22}Na から放出される e^+ からの信号を出す。

NaI(Tl) シンチレーター 無機シンチレーターの一つで、放射線が通過して信号を出す。本実験では、主に γ 線からの信号を出す。

光電子増倍管 シンチレーターに入った信号を増幅する役割を担う。本実験では、各シンチレーターとセットになっている。

シリカパウダー (主成分 SiO_2) ^{22}Na から放出された e^+ から Ps を生成する。本実験では、十分に加熱して水分を飛ばしたものを使用した。

鉛ブロック 着目したい現象以外の影響を減らす役割を担う。

遮光用ビニル (黒) P.S. に光が入り破損してしまうのを防ぐのと、バックグラウンドの影響を減らす役割を担う。

2.2 実験原理

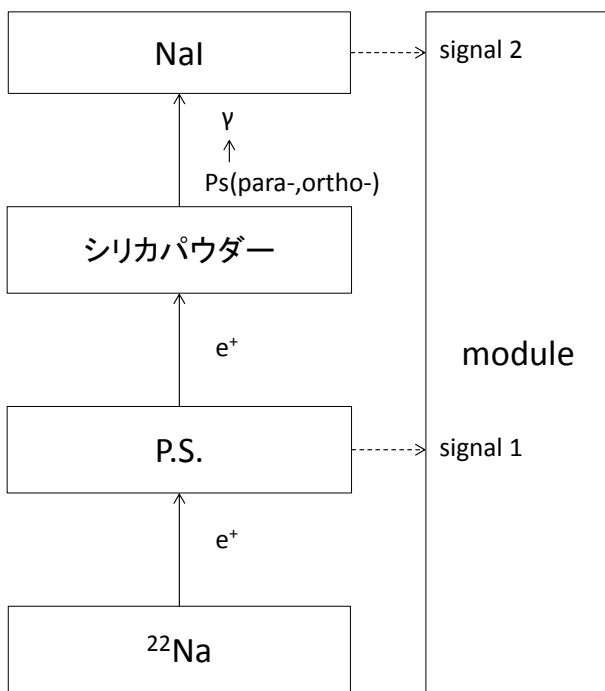


図 4: 原理図

実験原理の概念図は左の図 4 のようである。以下に実験原理を 1 つずつ見ていくこととする。

1: ^{22}Na の β^+ 崩壊で放出される e^+ を P.S. が検出して、回路に signal1 を送信する。

2: P.S. を通った e^+ がシリカパウダーに入り、Ps を生成する。この時、Ps としては para-Ps, ortho-Ps の 2 種類が生じるが今回は ortho-の寿命を測定することを考える。

3: Ps が γ 線に崩壊 (para-は 2 γ 、ortho-は 3 γ) し、NaI が γ を検出し、回路に signal2 を送信する。

4: signal1 と signal2 が module に入力された時間の差を測定する。

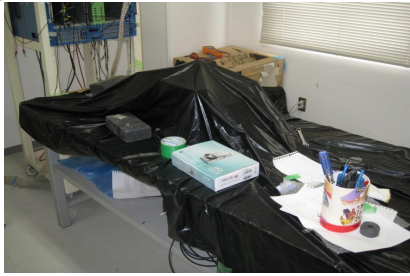
5: 4 で得られたデータに、pick-off 補正、TQ 補正などの補正を加えて、Ps の寿命を計算する。

以上のようにして、実験を行うこととした。

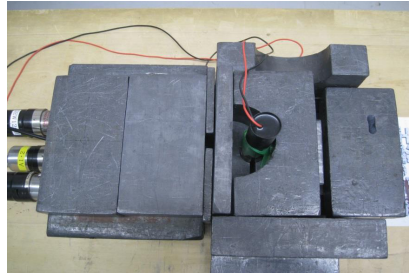
2.3 実験装置の配置

以下に、実験装置の実際のセットアップの写真を掲載する。図 5a が実験時の様子で、遮光ビニルを外す前と外した後のものを掲載

した。



(a) 実験装置の全体図



(b) ビニルを外した図:1



(c) ビニルを外した図:2

図 5: 実験時の実際の配置の様子

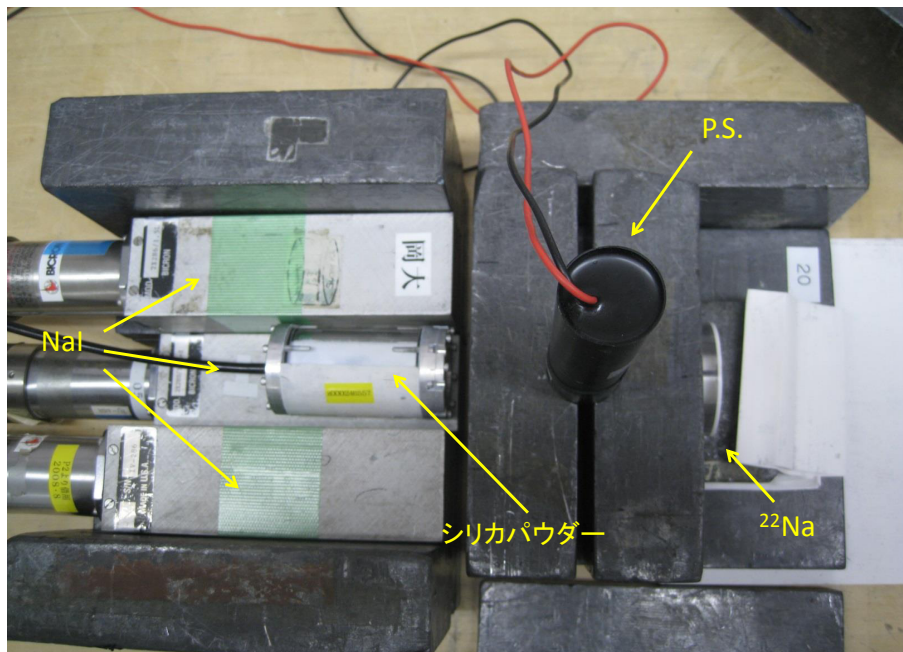


図 6: 装置内部の様子

図 5b は装置上部の鉛ブロックを外して中が見えるようにしたものである。図 5b を見ると分かるように、図 4 で説明した原理図と同じ配置になるように各装置を配置してある。

2.4 回路の構造と測定原理

次に、実験で使用した回路について記す。まず、回路全体としては次のような図(図 5c)となる。

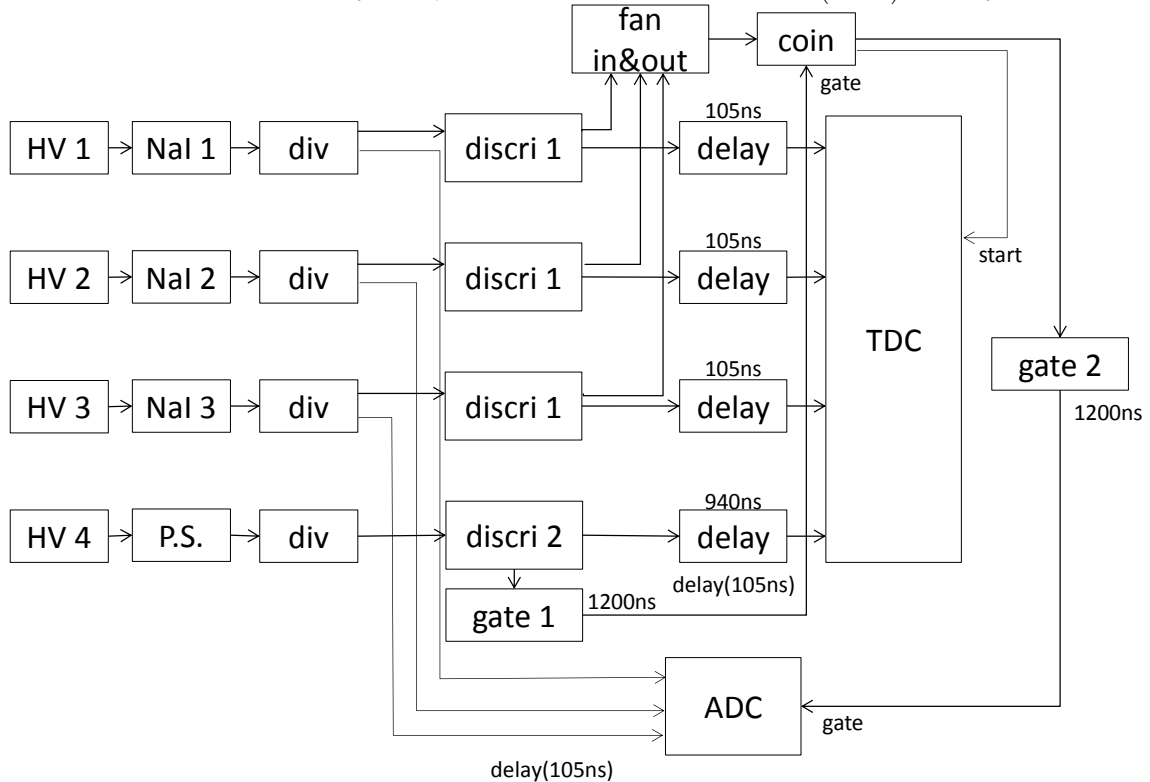


図 7: 回路の構造

以下に、各 module の説明を記載する。

HV(1~4) 各シンチレーターにかけた電源電圧

div 各シンチレーターから送られてきた信号を 2 分割する

discri(1,2) div から送られてきた信号が discri にかけている閾値を超えた時に、NIM 信号を出力する

fan in,out 3つの discri の信号の or をとる module、つまり 3つの in のどれかに入力があった時に out より出力する

coin 2つの信号の coincidence をとる、片方の信号が入力されている間にもう片方の信号が入力されると出力する

delay 信号を遅らせる働きがある、網掛けの delay は module ではなく、同軸ケーブルを用いて遅らせていることを表す

gate1,2 NIM 信号が入力された時に、ある一定の幅の NIM 信号を出力する

ADC 信号パルスの面積を積分により計算する、積分値がパルスの大きさと比例関係にある

TDC start に信号が入力されてから各ゲートに信号が入力されるまでの時間を計測する

次に、上記の回路からどのようにして P_s の寿命が測定できるかについて説明する。まず、各シンチレータから送られてくる信号の処理の概念図を以下に載せ、その説明を下に付す。

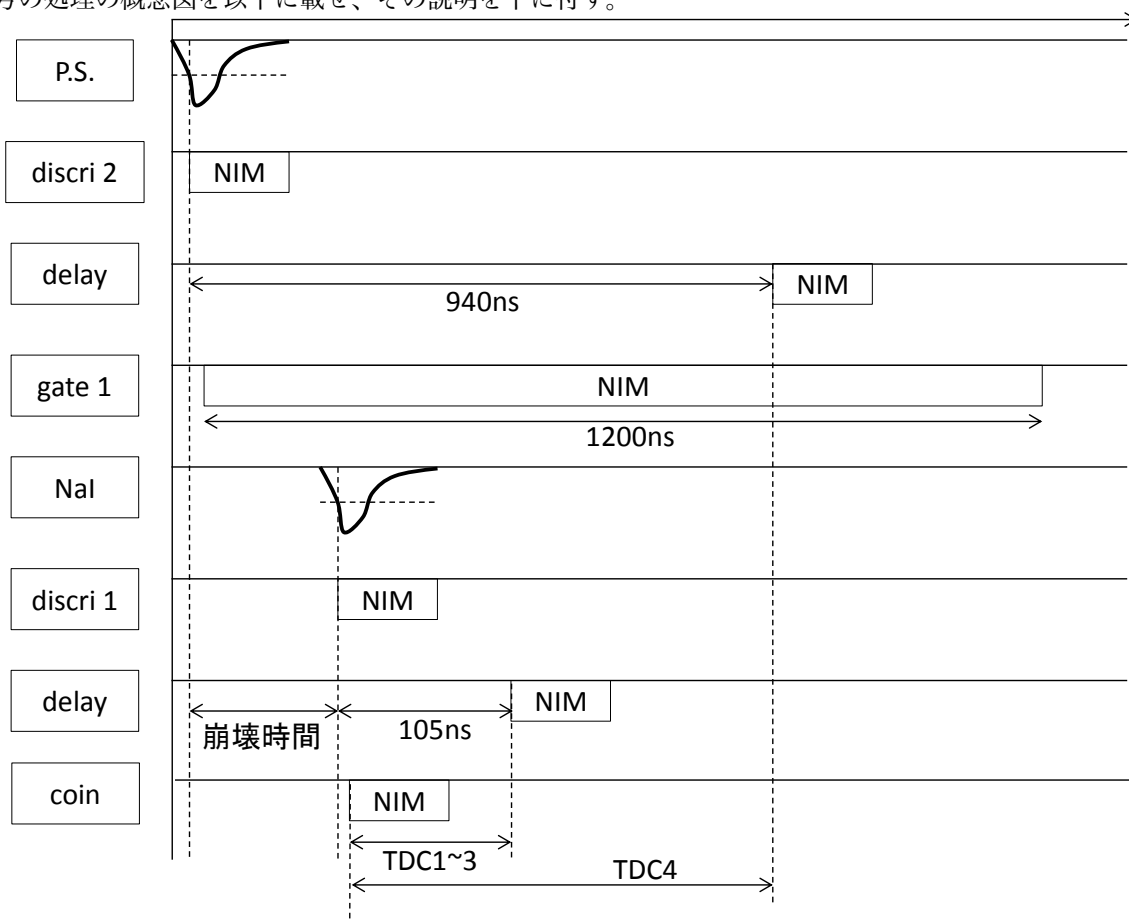


図 8: 信号処理の概念図

信号処理の手順を順を追って説明していくことにすると、

- 1: P.S. から生の信号が出力されて、それが discri2 に入り、NIM 信号が discri2 から出力される。
- 2: discri2 から出力された信号が gate1 に入り、1200ns の NIM 信号を gate1 が出力する。ここで discri2 の入力と gate1 の出力には時間差があるが、これは module での処理にかかる時間を意味している。また、discri2 の信号は 940ns の delay をかけられる。
- 3: NaI から生の信号が出力されて、discri1 から NIM 信号が出力される。また、discri1 から出力された NIM は 105ns の delay がかけられる。
- 4: gate1 と discri1 の coincidence がとられる。coin の信号と discri1 の信号に若干の時間差があるが、これは先にも述べたように、module によるものである。また、TDC1~3 を、coin の NIM と 105ns の NIM との時間差で計測しているが、これは discri1 の信号とそれ自身の delay との時間差を計測しているのので、実験が正しく行われていれば一定値を示す。
- 5: 図から分かるように P_s の崩壊時間は discri1 と discri2 との時間差であるが、実験の目的であるイベントの数は、P.S. を $\beta +$ などが通過するイベント数よりもずっと少ない。計測の際には、実験効率や余分なイベントを排除することを考慮して、NaI で観測されたイベントをトリガーとして、P.S. の delay との時間差を求めて (TDC4) それを 940ns から引くということをして崩壊時間を計測した。

以上が回路の構造及び測定原理である。

2.5 実験時のパラメーター

実験を行った時の各パラメーターを以下に記す。

実験時には目的のイベント以外の影響が少なくなるように真空を引いて行ったが、その時の装置内の気圧はゲージ圧で -0.032MPa だった。

HV(V)	
NaI1	1119
NaI2	1091
NaI3	1330
P.S.	1600

表 2: HV の値

THR(mV)	
THR1	-11.0
THR2	-15.5

表 3: 各 discri の THR の値 (THR は閾値のこと)

3 データ解析

2015年2月20日昼～3月12日夕方までの約20日間データを取り続けた。合計15,380,028 event 得られた。このデータを用いて解析を行った。

得られた ADC、TDC の生データを図9、図10に示す。

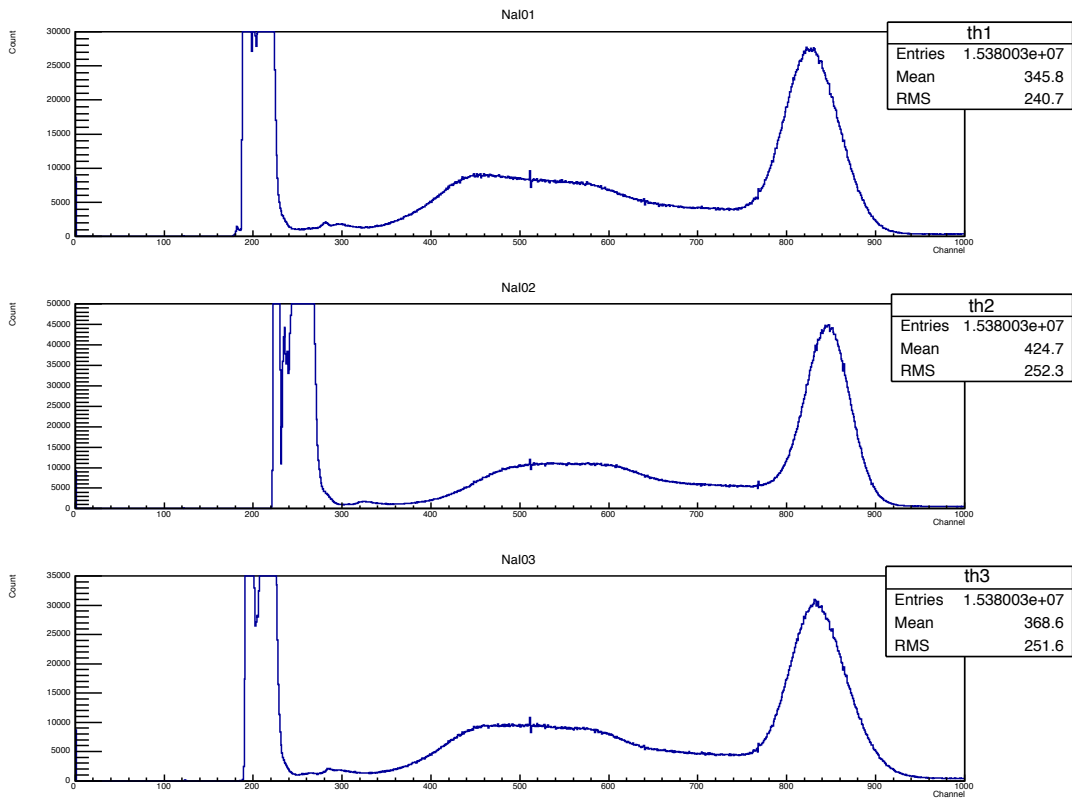


図 9: ADC の生データ

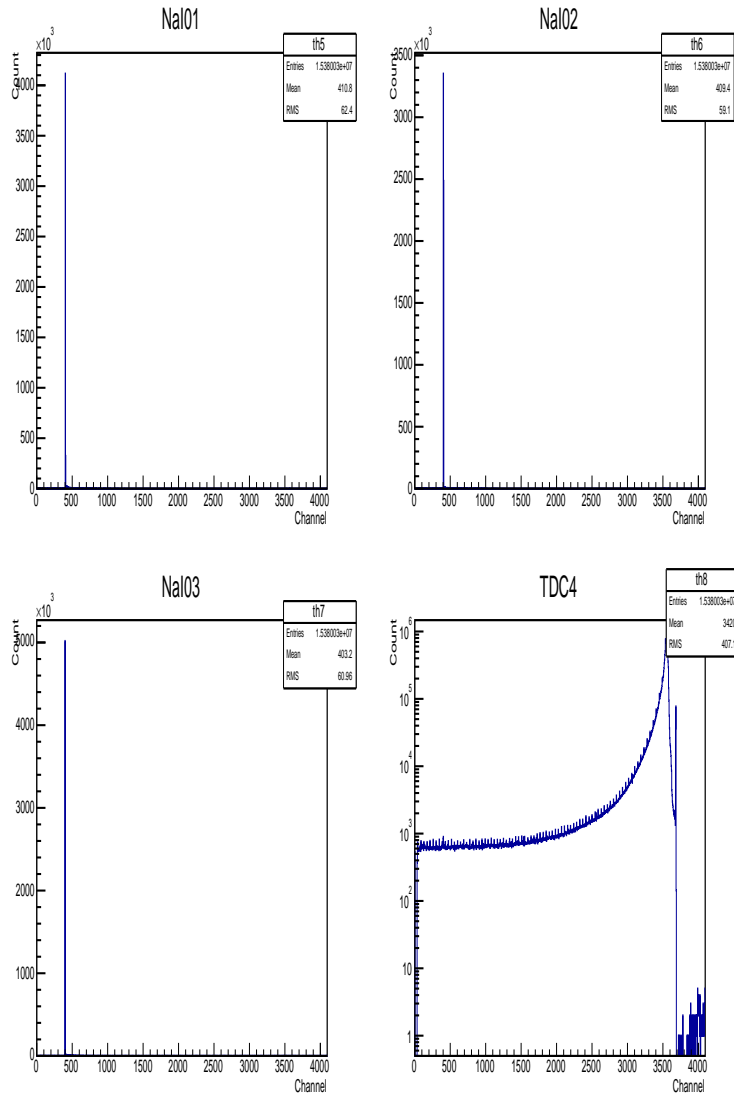


図 10: TDC の生データ

3.1 Calibration

3.1.1 ADC Calibration

ADCによって入力された信号の面積に対応する0~4095までの整数値が得られ、実際のエネルギー値が得られるわけではない。したがって、実際のエネルギー値とADCの出力値との対応を関係付けるCalibrationが必要になる。本実験では、初期set up時に ^{22}Na の511KeVと1274KeV、 ^{60}Co の1173KeVと1332KeV、 ^{137}Cs の662KeVの5つのエネルギー値を用いてCalibrationを行った。

それぞれの値は以下の通りである。

表 4: エネルギー値とADCの出力値の関係

Energy (KeV)	ADC1	ADC2	ADC3
511	862	860	859
662	1035	1035	1041
1173	1628	1650	1647
1274	1755	1755	1781
1332	1806	1841	1837

各 ADC の Calibration の結果から、以下の関係が得られた。

$$E_1[KeV] = 0.8386 \times ADC1 - 208.1 \quad (3-1-1)$$

$$E_2[KeV] = 0.8622 \times ADC2 - 231.6 \quad (3-1-2)$$

$$E_3[KeV] = 0.8357 \times ADC3 - 207.2 \quad (3-1-3)$$

ADC の Calibration 後のデータを図 11 に示す。

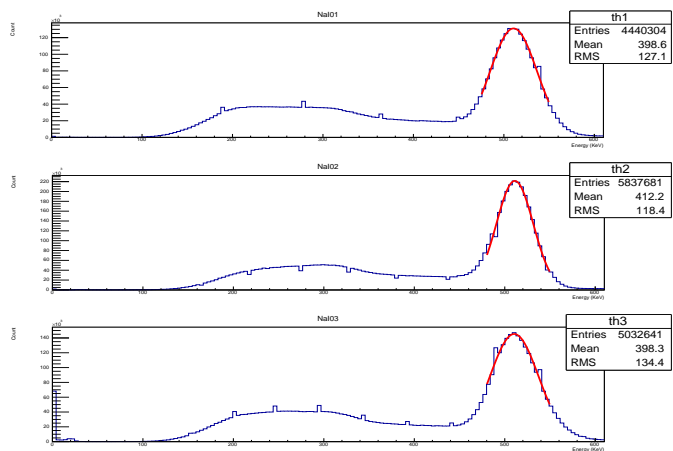


図 11: ADC Calibration 後のグラフ

3.1.2 ADC 出力と gain の時間変化

今回の実験では、エネルギーの値を厳密に知る必要はないが、念のために各シンチレータの出力値の時間変化を追った。具体的には、全データを約1日分の750,000eventごとに分割し、それぞれについてペDESTALの最低部分と511KeVのピークの位置を見た。それらを図12、図13に示す。

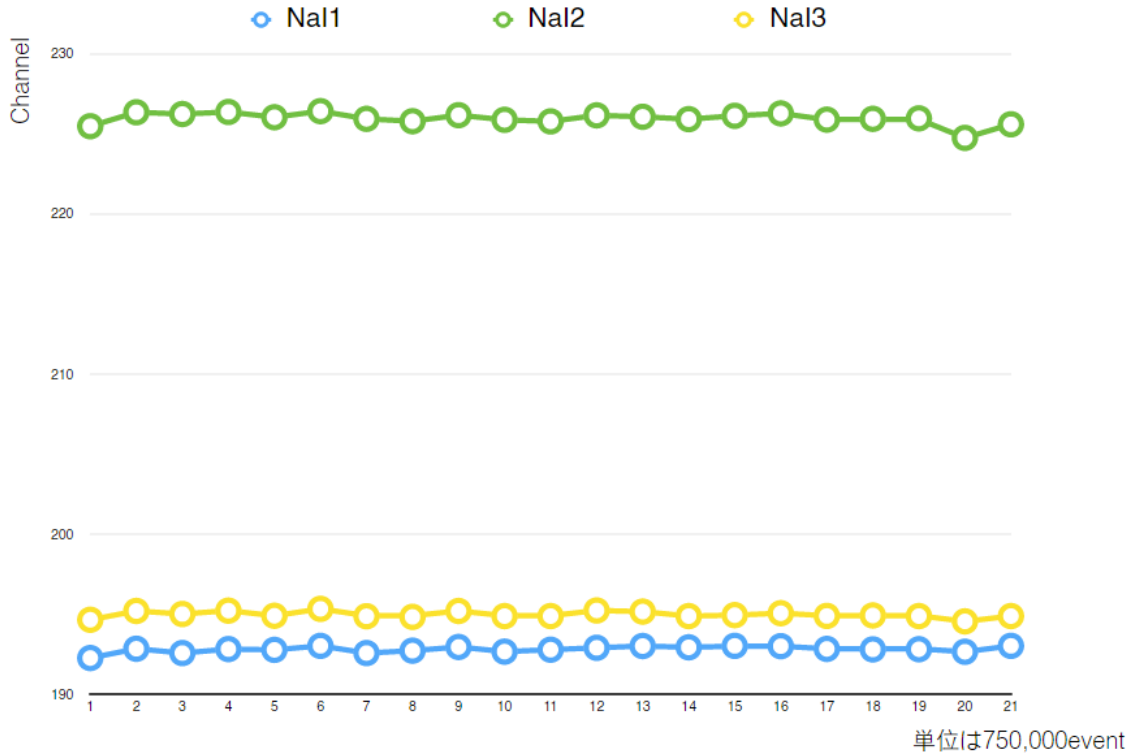


図 12: ペDESTALの時間変化

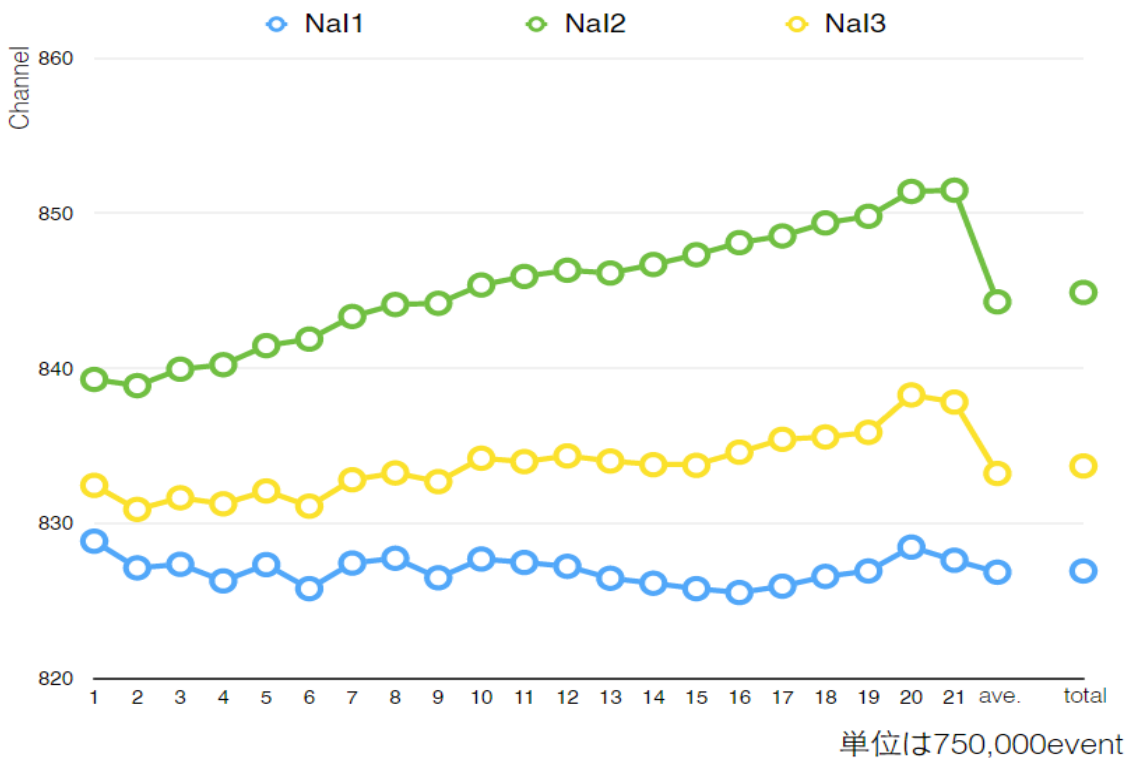


図 13: 511KeV ピークの時間変化

また、それぞれの差を図 14 に、 $Energy = a \times (Channel - b)$ としたときの a の値を図 15 に示す。図 15 をみると gain は時間と共に変化しているが、それによる影響は小さいとして今回は解析を行った。厳密な解析をするならば、各時間で Calibration を行い、その時間における Energy を求めればよい。

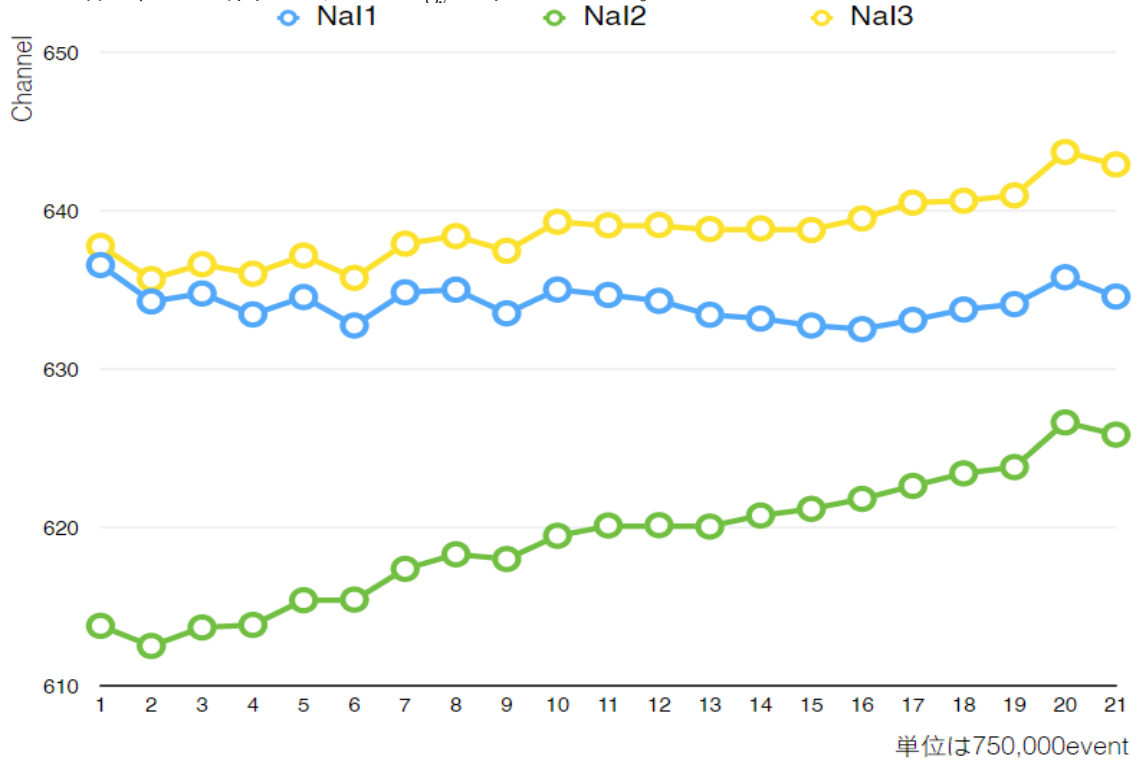


図 14: 511KeV(Channel)-0KeV(Channel) の時間変化

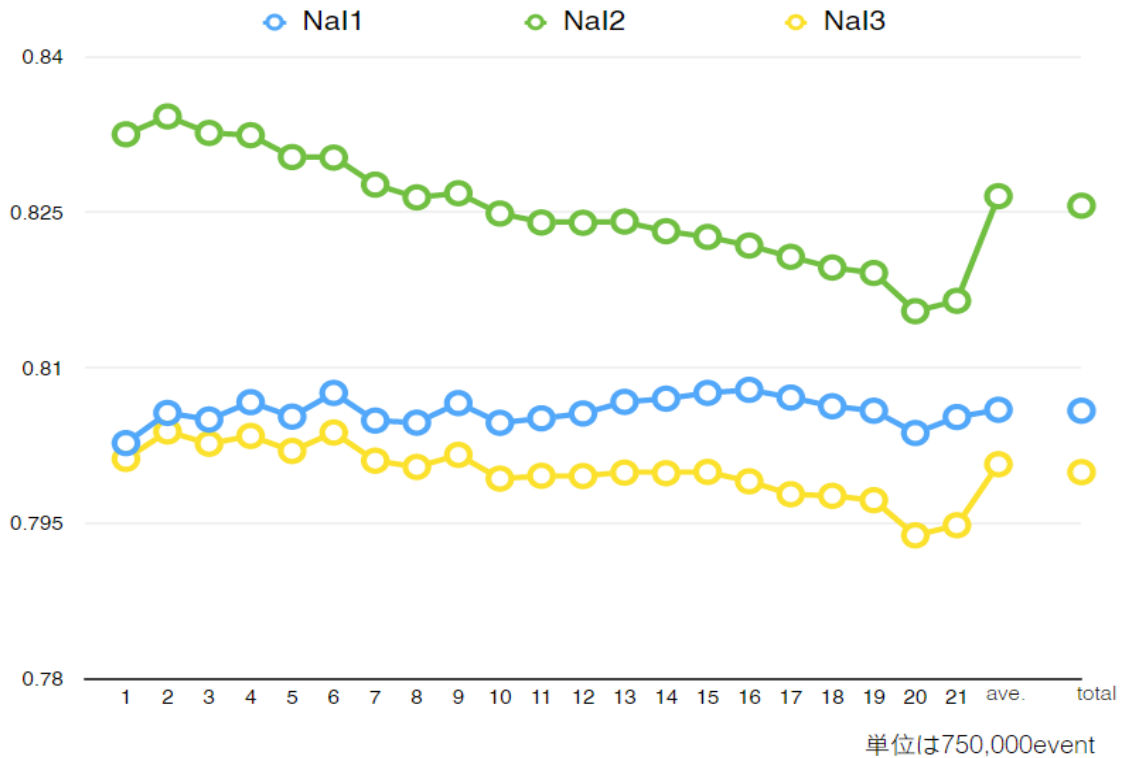


図 15: gain の時間変化

3.1.3 補足

図9を見ると、200Channel 付近のペDESTALに幅が見られる。本来ならペDESTALが数十 Channel に及ぶということではなく、今回のように見られた原因は不明である。考えられる原因としては、電源の電圧変化による gain 変化により、全体的に ADC の出力値がずれた、ということであるが、全データの時間変化を追ったところ、各時間においてもペDESTALに幅が見られた。図16は全データを分割したとき、2番目にあたるデータの ADC の問題となっている部分である。これの Mean と RMS の時間変化を追ったものが図17である。図17をみると、Mean 自体に変化はほとんど見られない。これらより、gain 変化による ADC 出力値の変化が原因ではないと結論付けられ、原因は不明のままである。

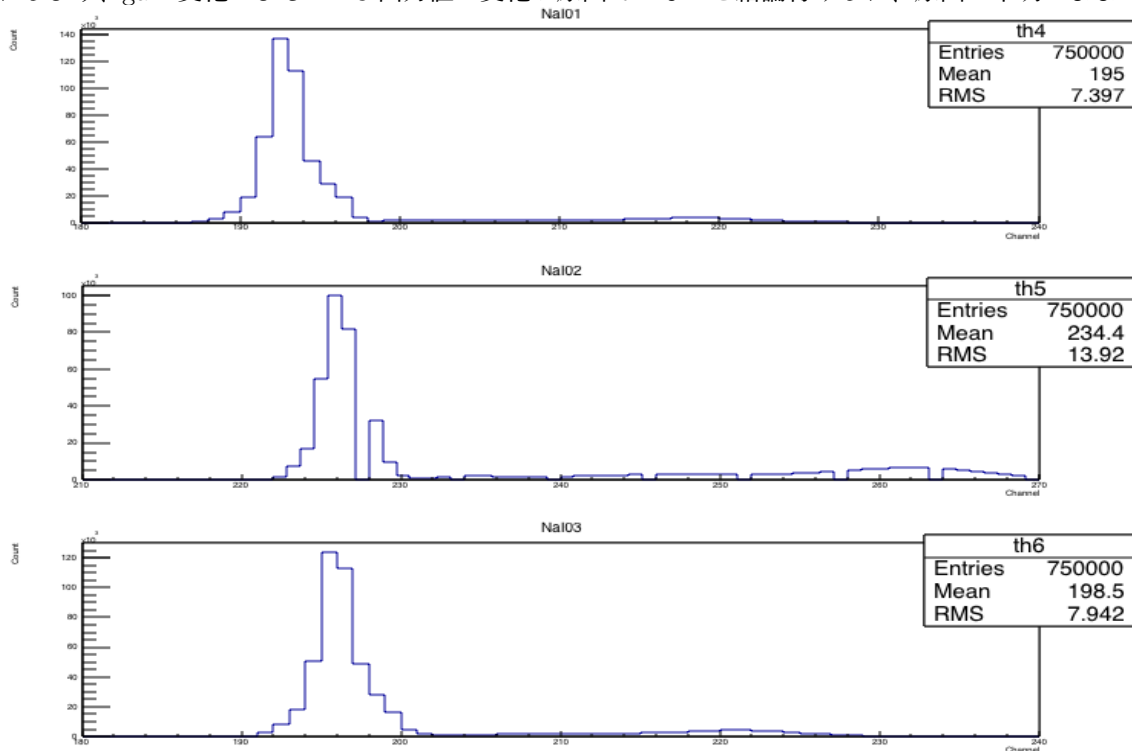


図 16: 750,000~ 1,500,000event の ADC の様子

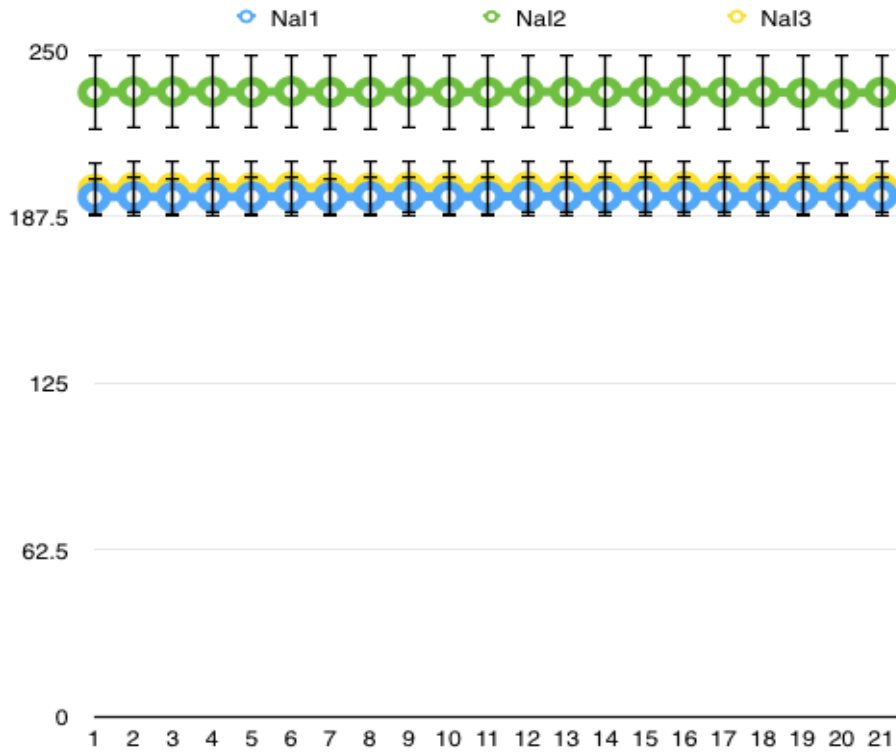


図 17: Mean と RMS を考慮した pedestal の時間変化

ペDESTALは、veto を用い回路を工夫することでなくせるものと思われるが、今回はそのような処理は行わなかった。gate generator による NIM 信号が入力されていない時に ADC に信号が入ると、これは信号が無いとして扱われ、ペDESTALとなる。今回の setting で求める event では、TDC1~3 は一定の値を出力し、それ以外は不要な event である。よって解析においてペDESTALを処理するには、後述の、各 TDC1~3 のスパイク部分に対応する event のみをヒストグラムに描けばよい。そのようにしたヒストグラムを図 18 に示す。なお、図 11 もそのように条件を付けて示している。図 18 では、NaI1,NaI2 についてはペDESTALは消えているが、NaI3 については残っている。これは、NaI3 には、threshold を超えるが Energy は持たないようなノイズが多い可能性があることを示している。

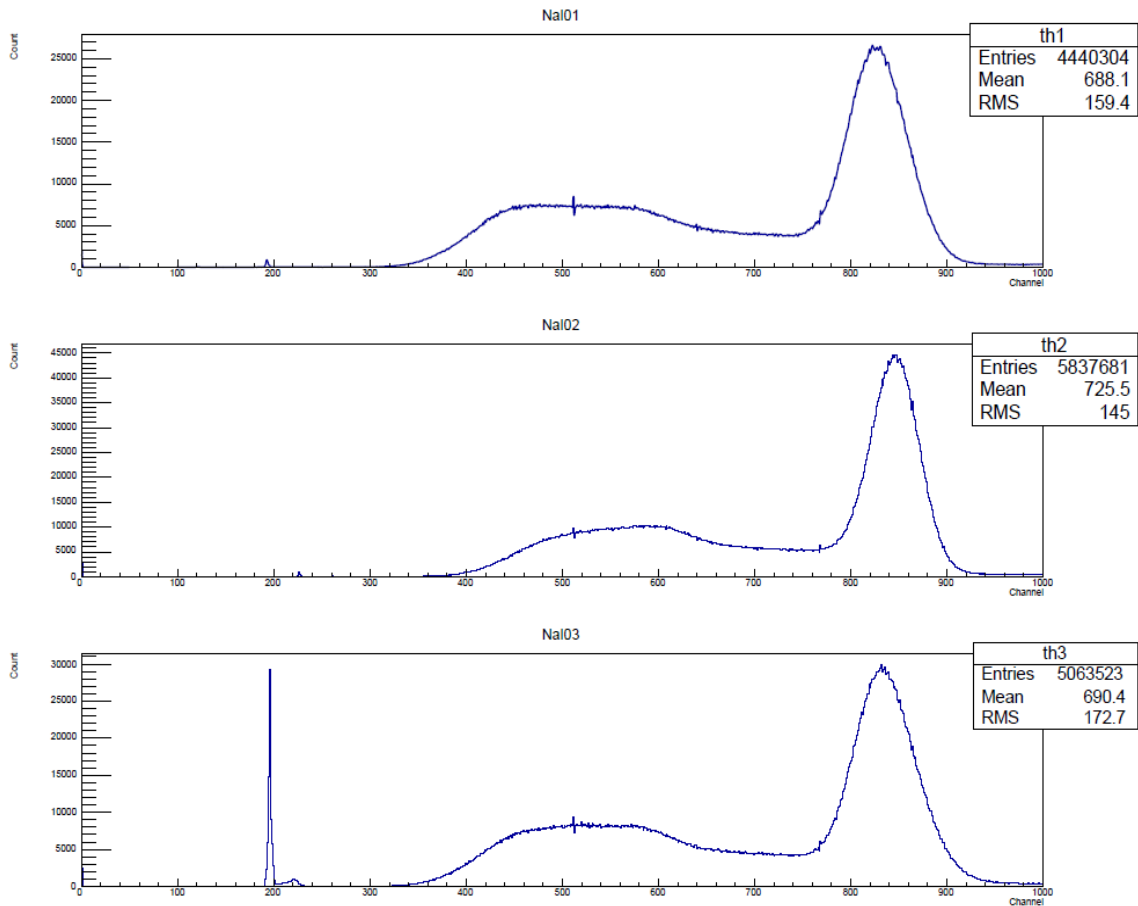


図 18: 条件付けによる表示

3.1.4 TDC Calibration

ADC と同様に、TDC から得られる整数値も実際の時間と対応を関係付ける必要がある。今回は回路に組み込んである fixed delay を用い、各 fixed delay の時間間隔に対応する TDC の出力値より、Calibration を行った。fixed delay の時間間隔はオシロスコープを用いて測定した。その関係を表 5 に示す。

表 5: fixed delay の値と TDC の出力値の関係

Time (ns)	TDC4
368	1511
600	2441
712	2904
952	3837

これらに線形関係があると仮定し、最小二乗法で fitting した。(図 19) fitting の結果から、以下の関係が得られた。

$$Time[ns] = 0.2507 \times TDC4 - 12.25 \quad (3-1-4)$$

Calibration 後の TDC4 のデータを図 20 に示す。

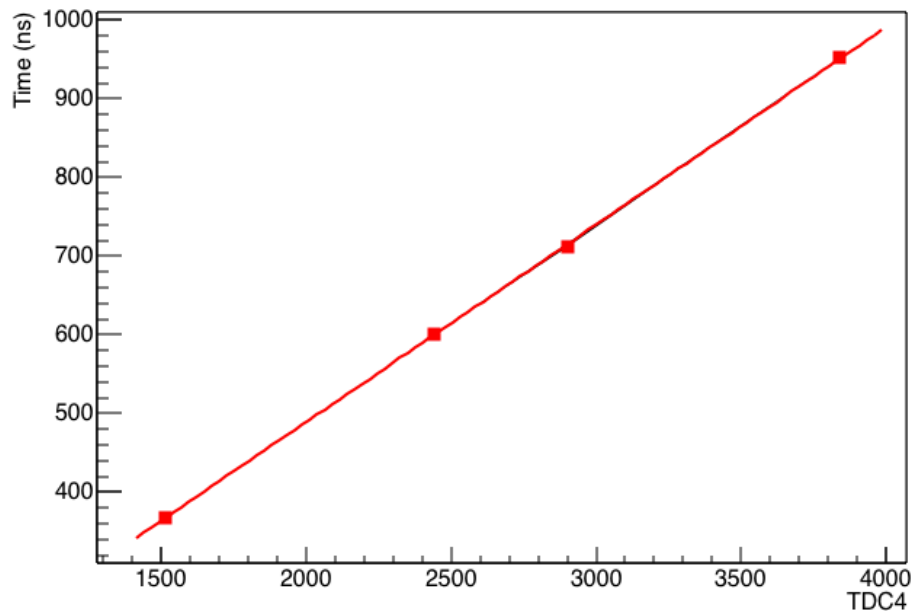


図 19: TDC Calibration の様子

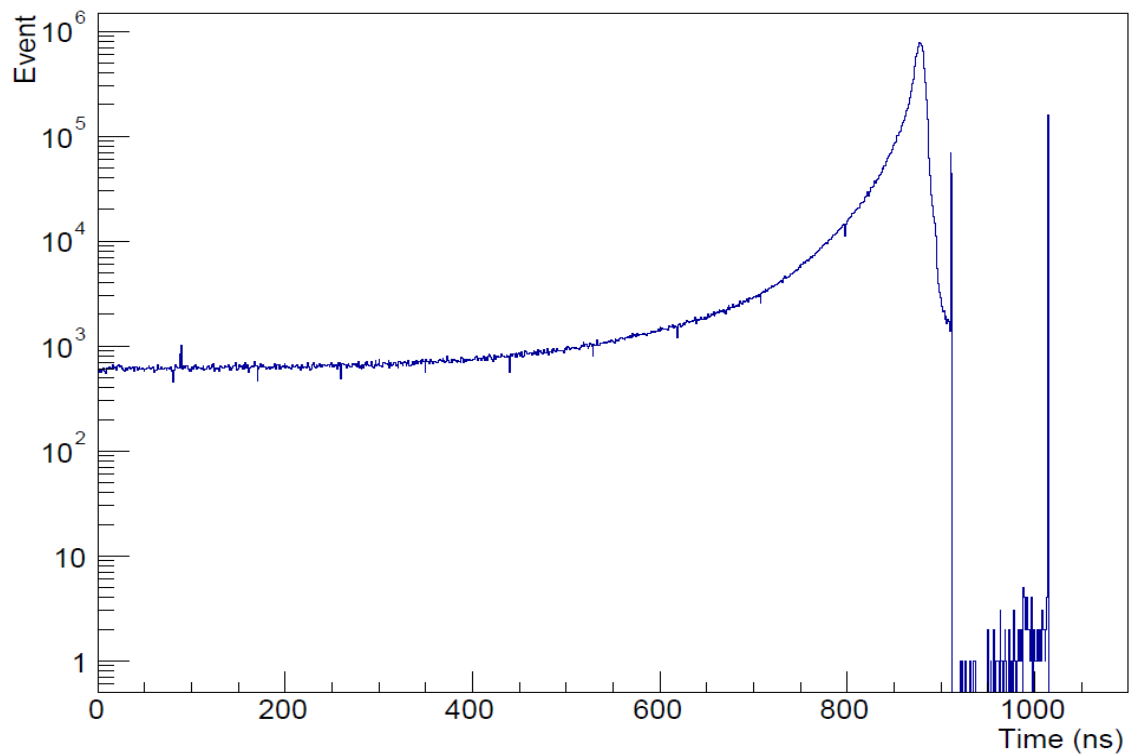


図 20: TDC Calibration 後のグラフ

図 10 をみると、TDC1~3 のある Channel(Time) にスパイクが見られる。これは、TDC1~3 の start と stop が、とある信号とそれに delay をかけたものであるためである。また、このスパイク以外の TDC1~3 の出力は、不要な event のものである。

3.2 TQ 補正

3.2.1 TQ 補正とは

図 21 のように、NaI から発せられる信号は実際には立ち上がるのに時間を要する。そのため、信号が threshold を超える時間は、真に信号を受け始めた時間より遅れ、その分だけ TDC4 の値は小さくなり、測定される寿命は大きくなってしまう。さらにその時間はエネルギーの大きさに依存すると考えられるため、本来エネルギーと寿命に相関関係はないにも関わらず、低エネルギーの γ 線を測定した時に寿命がのびているように見えてしまう。この真の寿命からのずれを補正することが TQ 補正である。

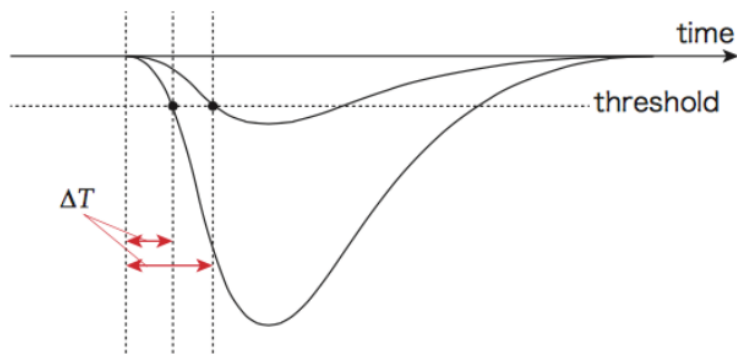


図 21: NaI からの信号の概略図

3.2.2 TQ 補正関数の作成

TQ 補正関数は、 ΔT をエネルギーの関数として表したものである。具体的には、 ΔT の関数形を以下のように近似した。まず一次近似として、信号を三角形とみなして近似する。この時、ピークの位置 t_0 と三角形の底辺の長さは、エネルギーの値に依らないと仮定する。すると三角形の高さ y_{max} は三角形の面積に比例し、 $y_{max} \propto E$ となる。 $threshold$ の値を y_0 とおくと、

$$\Delta T(E) = \frac{y_0 t_0}{y_{max}} \propto \frac{1}{E} \quad (3-2-5)$$

と書ける。以上をふまえて fitting 関数を、

$$\Delta T(E) = \frac{p_0}{(Energy - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (3-2-6)$$

とした。

fitting に用いたデータは、Time=140ns 付近を採用した。ここで p-Ps の崩壊現象が最もよく見え、p-Ps の寿命は 0.13ns と非常に短いので、この時刻を Ps の発生時刻とみなすことができる。

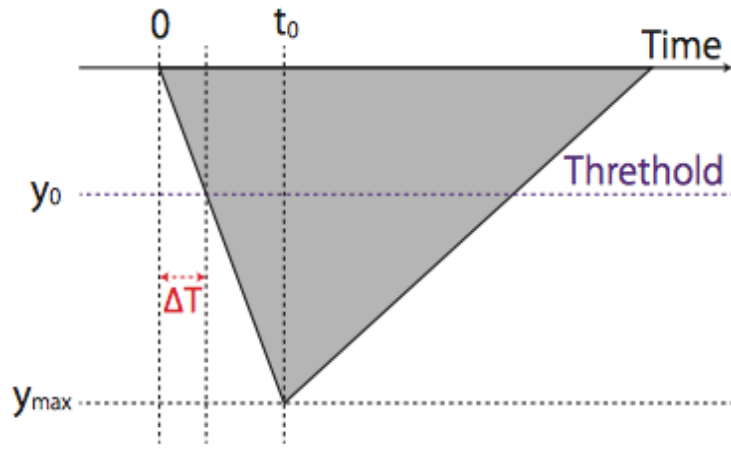


図 22: TQ 補正の概念図

TQ 補正前後の Energy v.s.Time(ns) の二次元ヒストグラムを、図 23、図 24 に示す。

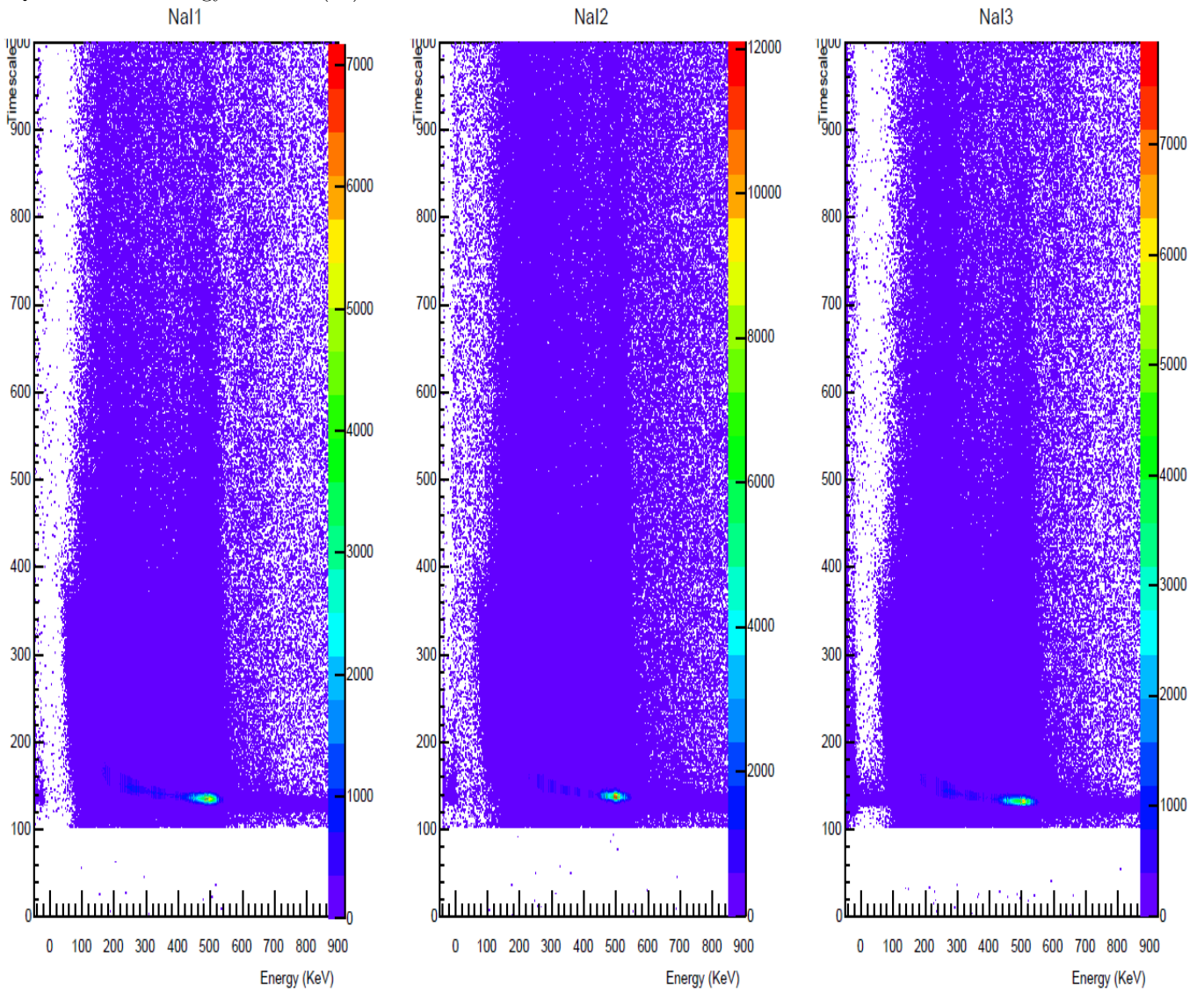


図 23: TQ 補正前の二次元ヒストグラム

TQ 補正の fitting 関数の fitting 結果は表 6 の通りである。

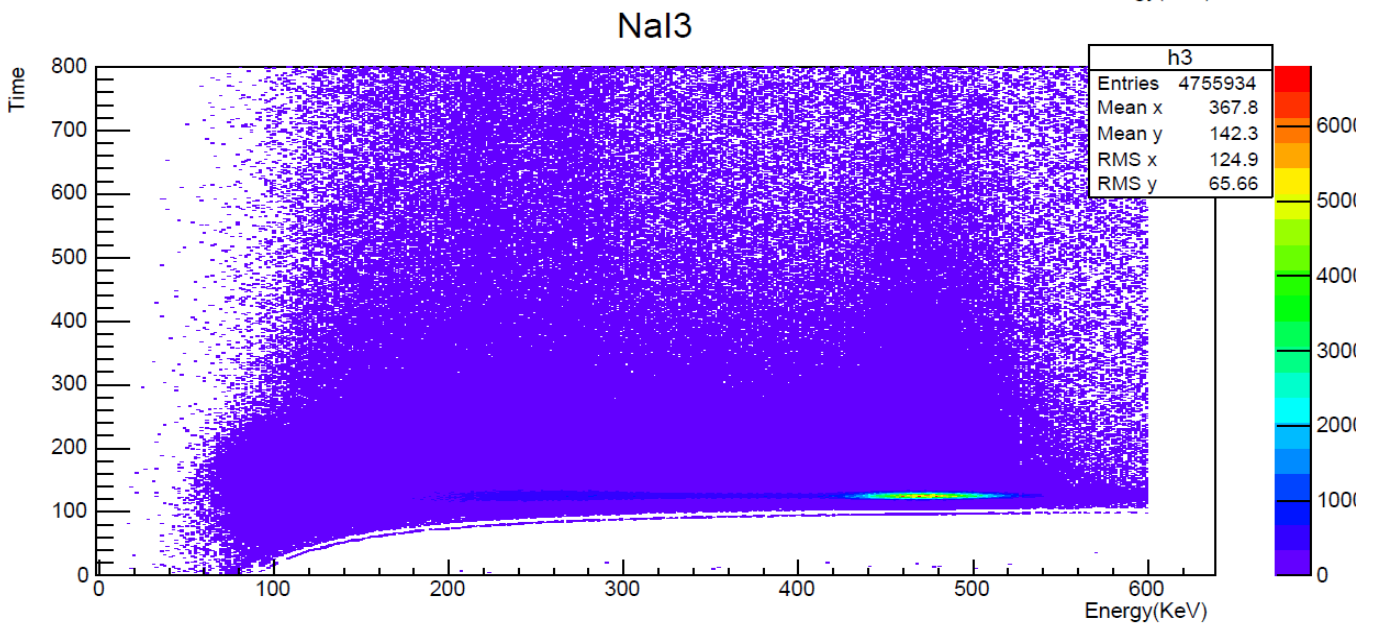
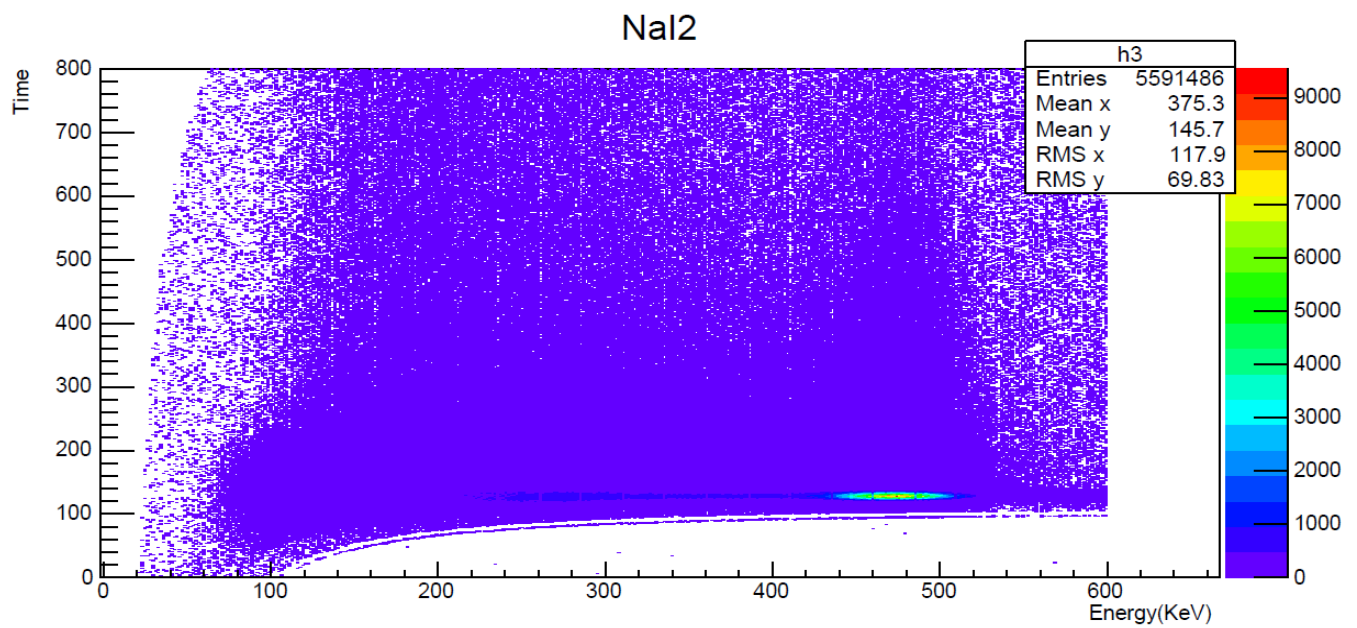
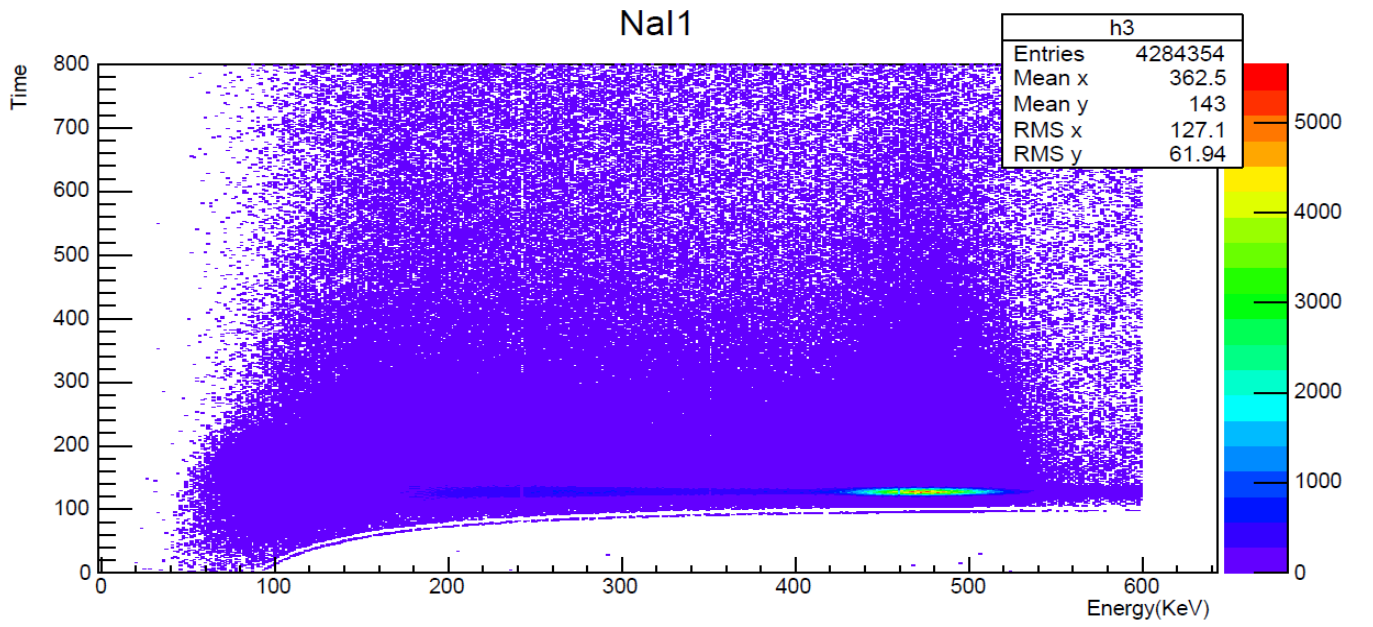


図 24: TQ 補正後の二次元ヒストグラム

表 6: TQ 補正結果

Parameter	NaI1	NaI2	NaI3
p_0	1.785×10^5	1.951×10^5	2.022×10^5
p_1	7.849	4.658	9.426
p_2	1.623	1.607	1.652
p_3	128.0	128.9	125.8

3.2.3 pick-off 補正前の寿命の計算

TQ 補正によって正しい Time がわかったので、現在のデータを用いて time ヒストグラムを fit し寿命を求めてみる。fitting 関数は以下のものを使用した。このとき、 $p[1]$ が寿命 (ns) となる。

$$N(t) = p[0] \exp\left(-\frac{t}{p[1]}\right) + p[2] \quad (3-2-7)$$

この際、使用したイベントは 0 600keV の範囲である。この範囲を指定したのは α -Ps からの γ 線の持つエネルギーが 511keV より小さいからである。511keV のピークに広がりが見られたので、600keV までを fitting に使用した。fitting したヒストグラムが図 26 である。

これにより得られた寿命は、表 7 である。この結果は、理論値に比べて短い寿命となっている。以下に述べるような pick-off 反応や Accidental イベントを考慮していなかったためであると考えられる。

表 7: TQ 補正後の Lifetime-fitting

NAI	寿命 (ns)
NaI1	88.83 ± 0.63
NaI2	86.16 ± 0.60
NaI3	85.54 ± 0.58

3.3 pick-off 補正

この章では、今回の実験の解析においてオルソポジトロニウム以外の崩壊による寄与を見積もりオルソポジトロニウムの正しい寿命を求めるための方法を述べる。その後、今回の実験での最終的な結果を求める。

3.3.1 pick-off 補正の理論

今回の実験で観測している崩壊幅を Γ_{all} とすると、これは以下のように表される。

$$\Gamma_{all} = \Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{pick-off}(t) \quad (3-3-8)$$

$\Gamma_{3\gamma}$... オルソポジトロニウムの崩壊による崩壊幅

$\Gamma_{pick-off}$... オルソポジトロニウムが空気中の酸素と反応 (スピン交換) しパラポジトロニウムに変化する過程による崩壊幅。オルソポジトロニウムが寿命を全うしない事になるので $\Gamma_{3\gamma}$ よりも大きい (つまり、寿命が短い)。また、後述の熱化過程により崩壊幅が時間変化する。

さて、崩壊幅 Γ の崩壊をする物質について、単位時間あたりに崩壊する数の時間変化は以下のように表せる。

$$n(t) = n_0 \exp(t \times \Gamma) + b \quad (3-3-9)$$

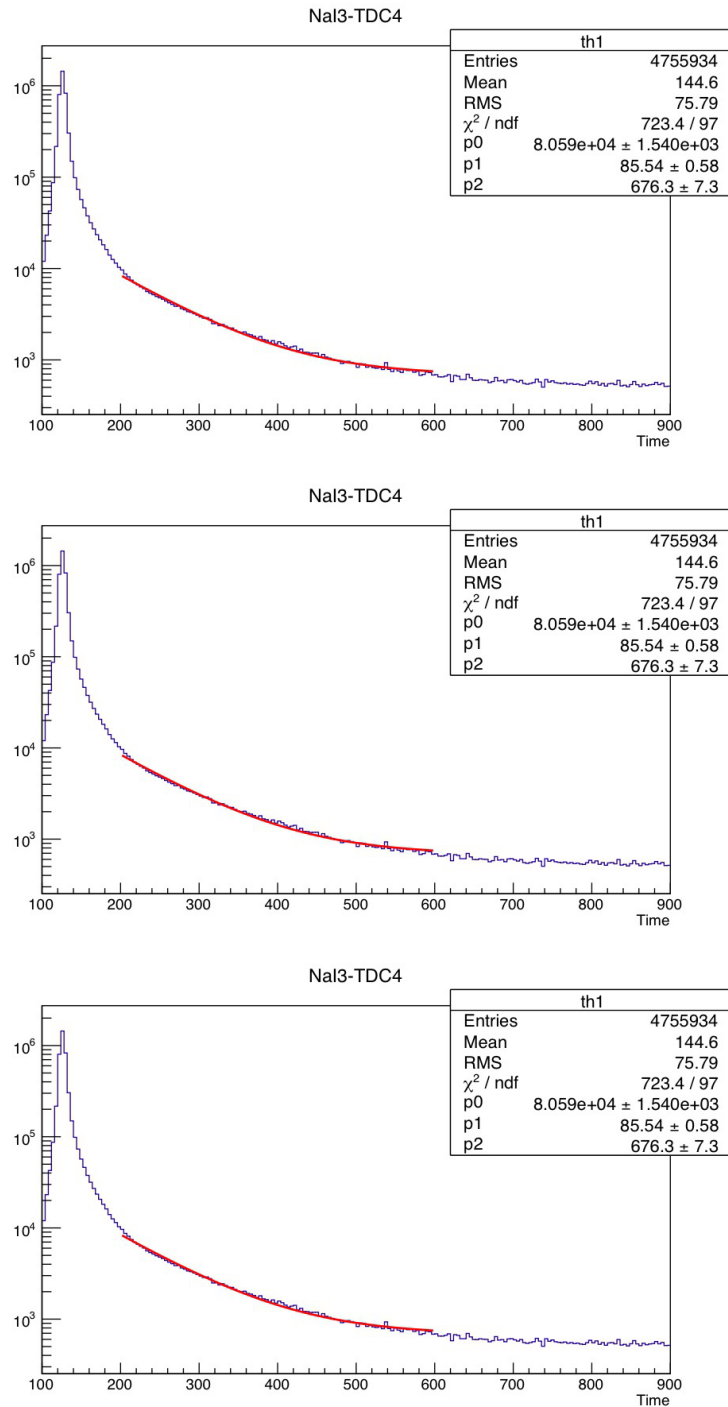
二つの崩壊過程が競合している場合、例えば式 3-3-8 の場合は、次のようになる (一方の崩壊幅が時間変化することに注意)。

$$n(t) = n_0 \exp\left[t \times \int_0^t (\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{pick-off}(t)) dt\right] + b = n_0 \exp\left[\frac{t}{\tau_{3\gamma}} \int_0^t \left(1 + \frac{\Gamma_{pick-off}(t)}{\Gamma_{3\gamma}}\right) dt\right] + b \quad (3-3-10)$$

$n(t)$ が分かっているとき、 $\frac{\Gamma_{pick-off}(t)}{\Gamma_{3\gamma}}$ の時間変化を得ることができれば上の式によるフィッティングにより時間によらない定数 $\tau_{3\gamma}$ がわかる。

熱化による $\frac{\Gamma_{pick-off}(t)}{\Gamma_{3\gamma}}$ の時間変化を求めよう。

図 25: TQ 補正後



3.3.2 熱化について

ポジトロニウムが生成した時、それはおよそ 1eV の運動エネルギーを持っている。運動する途中で周囲の物質と非弾性衝突を繰り返し、エネルギーを失いおよそ 1/30 eV(室温程度に相当)の運動エネルギーとなるまで減速する。これを熱化 thermalization という [11] [12]。オルソポジトロニウムが pick-off 反応をするのは周囲の物質と衝突した時だと考えられるが、オルソポジトロニウムの速度が速いと(十分に熱化されていないと)周囲の物質との衝突頻度が大きくなり pick-off レートも大きいと考えられる。一方、十分に熱化されたオルソポジトロニウムは運動エネルギーが小さく周囲の物質との衝突頻度が小さいゆえに pick-off レートが小さいと考えられる。今回の実験では、pick-off レートが時間の関数として

指数関数的に減衰することを仮定して解析を進める。つまり、

$$\frac{\Gamma_{\text{pick-off}}(t)}{\Gamma_{3\gamma}} = p[0] \times \exp(-1 \times \frac{t}{p[1]}) + p[2] \quad (3-3-11)$$

最後に、単位時間あたりの 3γ 崩壊イベントと pick-off イベントの検出数 $n_{3\gamma}$ 、 $n_{\text{pick-off}}$ が分かっている場合の $\frac{\Gamma_{\text{pick-off}}(t)}{\Gamma_{3\gamma}}$ を与える。単位時間あたりの崩壊数と検出数の関係は

α ...pick-off 反応が起きた時その γ 線がシンチレータで検出される確率。

β ...オルソポジトロニウムの崩壊が起きた時その γ 線がシンチレータで検出される確率。

とすると

$$n_{3\gamma} \propto \beta \times \Gamma_{3\gamma} \quad (3-3-12)$$

$$n_{\text{pick-off}} \propto \alpha \times \Gamma_{\text{pick-off}}(t) \quad (3-3-13)$$

だから、

$$\frac{n_{\text{pick-off}}(t)}{n_{3\gamma}} = \frac{n_{\text{pick-off}}(t) \times \alpha}{n_{3\gamma} \times \beta} \approx \frac{\Gamma_{\text{pick-off}}(t)}{\Gamma_{3\gamma}} \quad (3-3-14)$$

3.3.3 Accidental イベントの除去

上で述べた方法は、時間によらない Accidental イベントが存在しないことを仮定している。ここでは Accidental イベントの影響の取り除き方を述べる。今回の実験では、900ns から 1050ns の領域においてオルソポジトロニウムは十分に熱化しており、またオルソポジトロニウムの数自体も寿命の 6 倍の時間を経て少なくなっているため、この時間領域において観測しているのは時間に関係なく存在する Accidental イベントであると考えた。1250keV に存在するピークとそれより低エネルギー側でのイベント、511keV の小さなピークが見える。Na²² から直接入る γ 線によるものが多くを占めていると考えられる。このヒストグラムを Accidental ヒストグラムと呼ぶ。図 26 では全体のヒストグラム (青色) から Accidental のヒストグラムをスケール変換したもの (赤色) を引く様子を表している。引いた後のヒストグラムが緑色のヒストグラムである。引いた後では 600keV 以上のエネルギーのイベントがほとんど無くなっている。ポジトロニウムの崩壊によるイベントのみを抽出できたと考えてよいと思われる。

3.3.4 Threshold の見積りと低エネルギー領域イベント外挿

今回の実験では、threshold 以下の情報が消えてしまい、およそ 100keV 以下でイベント数が急激に減少している。これを復元するために、およそ 100keV でのイベント数の降下が始まるエネルギーでのイベント数を読み取り、それ以下のエネルギー領域に外挿した。

3.3.5 pick-off rate の時間変化の見積もりの方法

ここでの目的は、 $\frac{n_{\text{pick-off}}(t)}{n_{3\gamma}}$ の時間変化を求めることである。しかし、イベント数が限られているために、時間を一定の幅で区切って有限個の $\frac{n_{\text{pick-off}}(t)}{n_{3\gamma}}$ の値を求め近似的に関数形を求めるしかない。今回の実験では、125ns から 50ns ごとに区切った。

まず、120ns から 130ns のイベントのエネルギーヒストグラムを描き、時間幅によってスケール変換した Accidental ヒストグラムを引いたものを pick-off 反応によるエネルギーヒストグラムとして pick-off ヒストグラムと呼ぶ。これは図 27 に示してある。この時間領域ではパラポジトロニウムの崩壊が支配的であるために、pick-off 反応によるヒストグラムと相似であることが期待できる。

125ns から 50ns ごとに区切った各ヒストグラムについて、以下の手順を施す。この様子は図 28(NaI1) 図 29(NaI2) 図 30(NaI3) に示している。

- A. 時間幅によってスケール変換した Accidental ヒストグラム (緑色) を引く。(引く前:青、引いた後:水色)
- B. A で求めたヒストグラムに 511keV のピークの高さを合わせるように pick-off ヒストグラムをスケール変換し、それを引く。(赤:スケール変換した pick-off ヒストグラム)
- C. B で得られたヒストグラムの 0~600 keV のイベント数 $n_{3\gamma}$ と、B でスケール変換した後の pick-off ヒストグラムの 0~600 keV のイベント数 $n_{\text{pick-off}}$ を得る。

図 26: Accidental イベントを引く様子

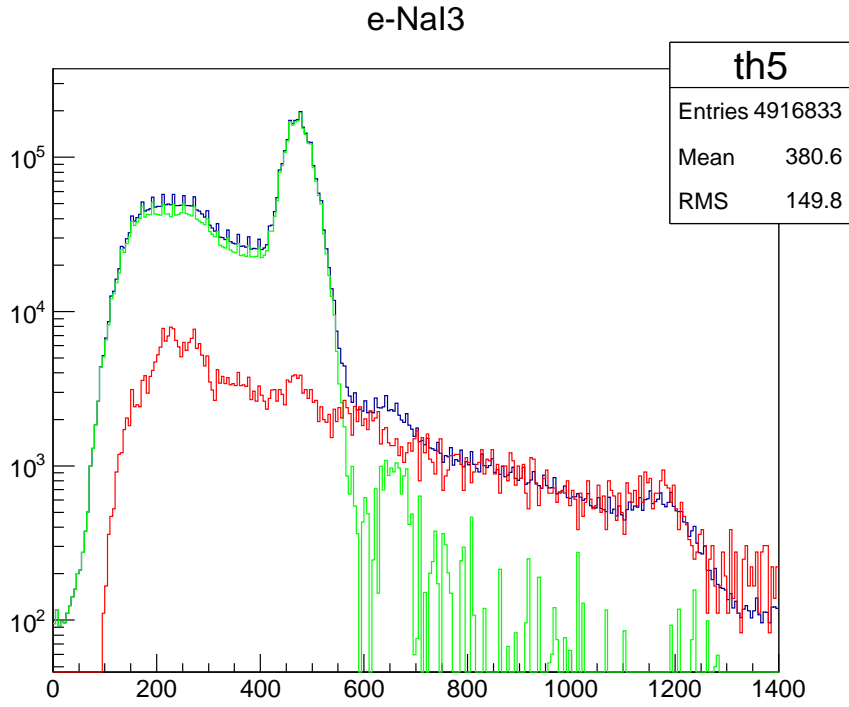
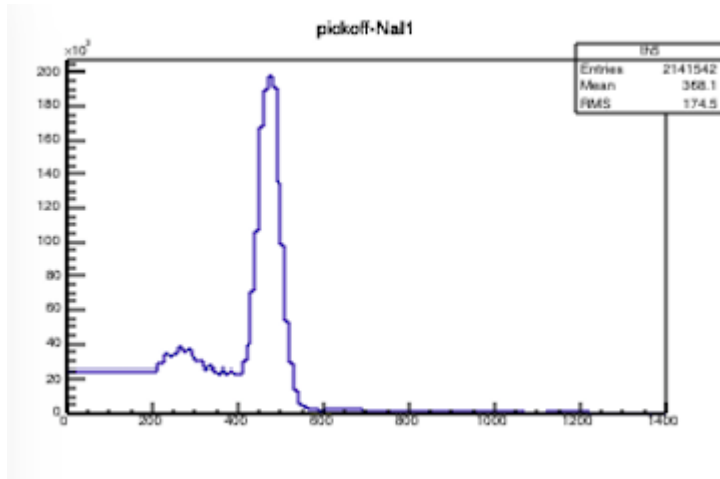


図 27: PickOff ヒストグラム



3.3.6 pick-off rate の時間変化の計算

得られた $\frac{2n_{\text{pick-off}}(t)}{3n_{3\gamma}}$ を時間 (ns) を横軸にプロットしたものが図 31 である。手順 B で 511keV ピークの高さ (カウント) を求める際に行ったフィッティングの誤差をもとにエラーバーを描いている。原因は分からないが、極大値を持つ関数となってしまう。値の飛びがある範囲を無視し、誤差が小さいプロットの範囲を選びその範囲を式 3-3-11 でフィッティングすることにする。フィッティングした結果が表 8 である。

表 8: pick-off レートの時間変化フィッティング結果

NaI	p[0]	p[1]	p[2]
1	1.130	209.9	0.2275
2	0.7211	296.3	0.05930
3	0.9239	230.4	0.07300

図 28: 時間で区切ったヒストグラム (NaI1)

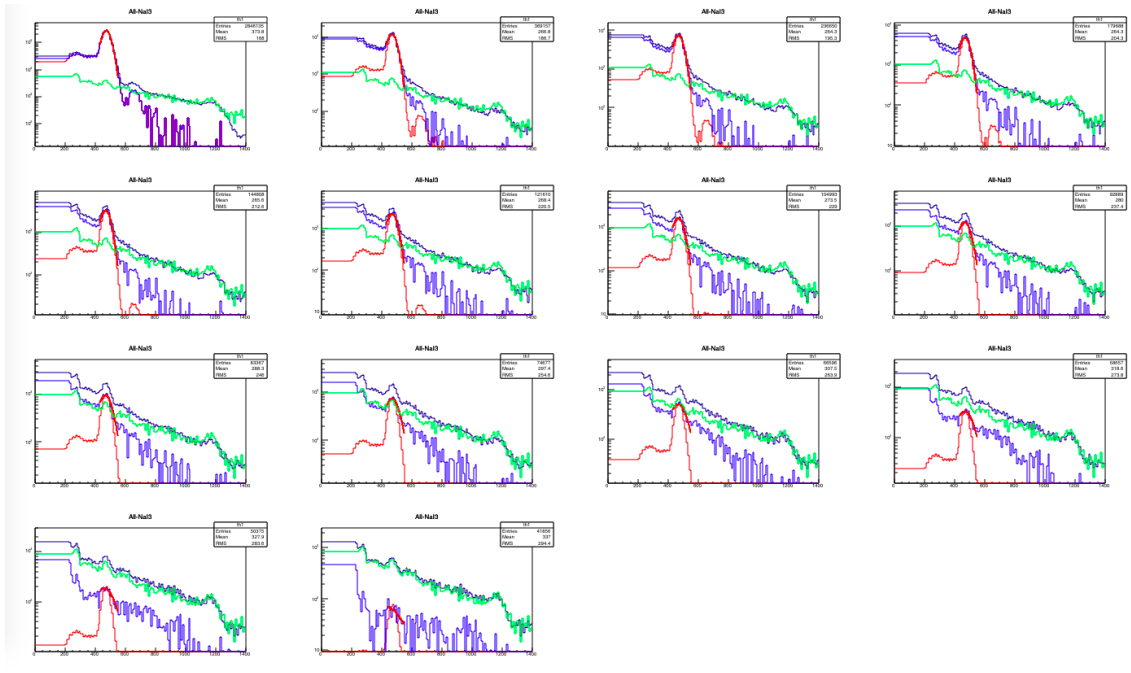
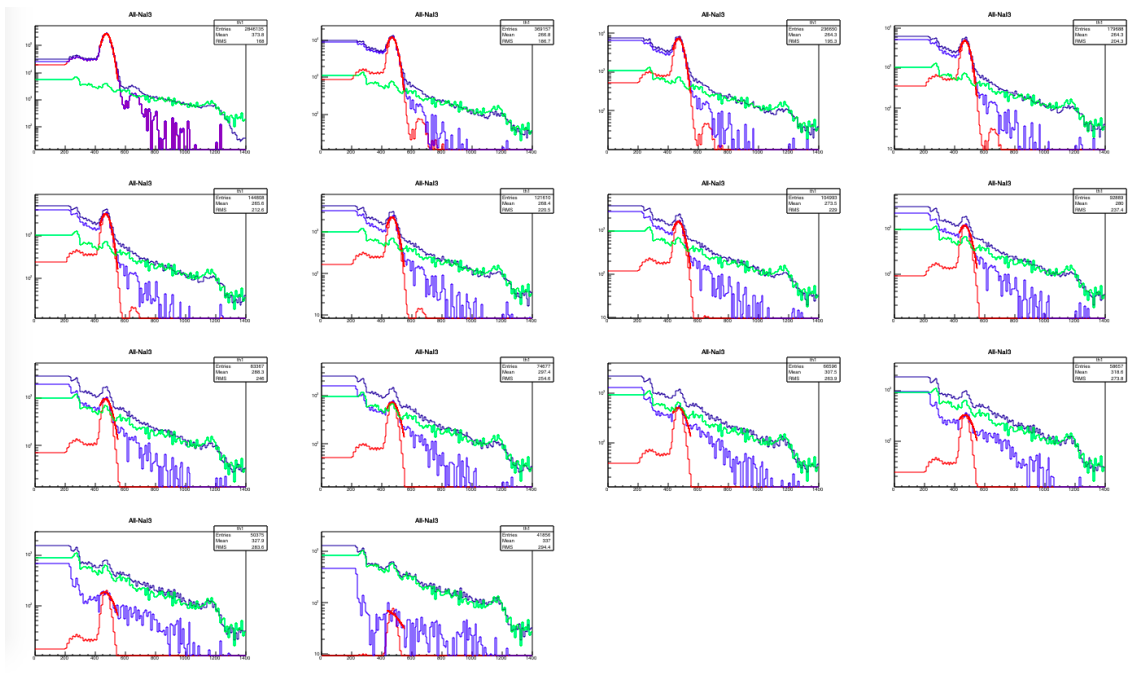


図 29: 時間で区切ったヒストグラム (NaI2)



3.3.7 pick-off を考慮した場合の寿命

上で得た関数形を用いて、3-3-10 によってフィッティングする。その際、ふたたび Accidental イベントを取り除く操作を行う。結果として得られたのが表 9 である。pick-off による影響が取り除かれ、長い寿命が求めたと見ることができる。Accidental イベントの取り除きとフィッティングの様子を図 32 に示している。

3.3.8 fitting time による結果の変化

先ほど寿命を求めめるために行ったフィッティングにおいて、フィッティングの範囲を変えると結果にも変化が現れた。今回の実験ではフィッティング終了時刻を Accidental イベントが支配的になる前の 800ns(ただし NaI3 は 600ns あたりで

図 30: 時間で区切ったヒストグラム (NaI3)

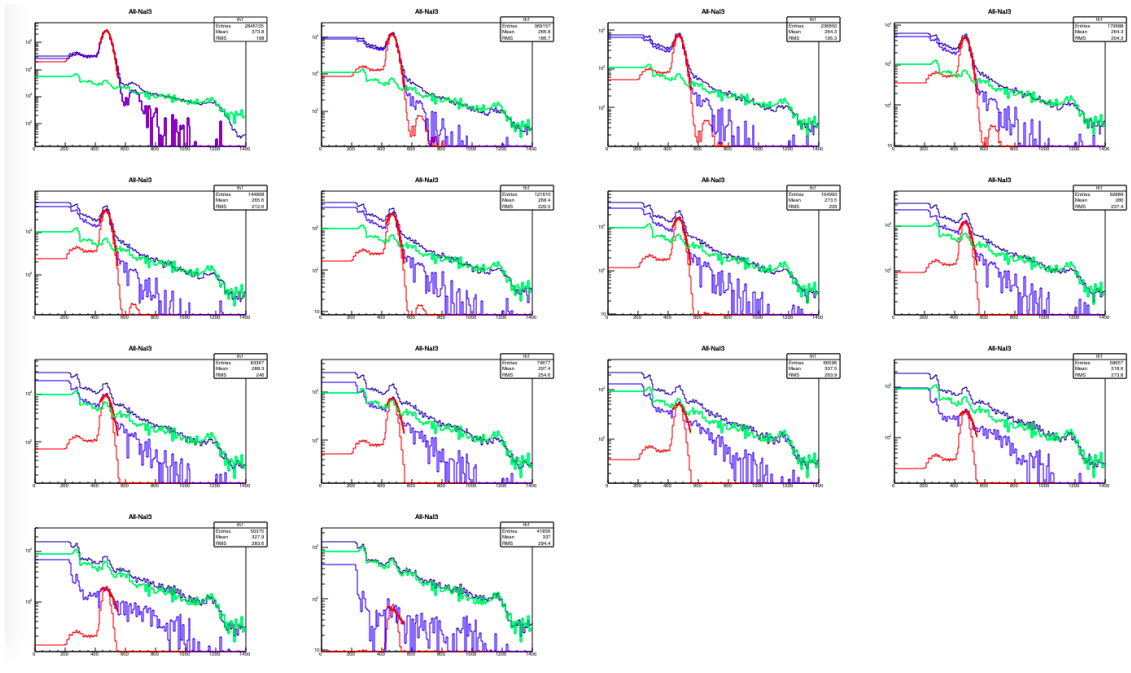


表 9: pick-off 補正後の寿命

NaI	寿命 (ns)
1	149.1 ± 0.7
2	145.5 ± 0.9
3	139.9 ± 1.5
平均	144.8

カウントが0に近くなるので580nsまでのフィッティング範囲とした。)、フィッティング開始時刻をフィッティング開始時刻を少しずらしても結果が一定になる時刻とした。

図 refkaishi は、各 NaI においてフィッティング開始時刻を変化させた時の結果の変化である。エラーバーにはフィッティングの際に root が出力する誤差を用いている。また、赤線はすべての結果の平均である。

図 34 より、各 NaI のフィッティング範囲を表 10 のようにした。

表 10: フィッティングの範囲

NaI	start time(ns)	end time(ns)
1	225	800
2	250	800
3	250	580

3.4 考察

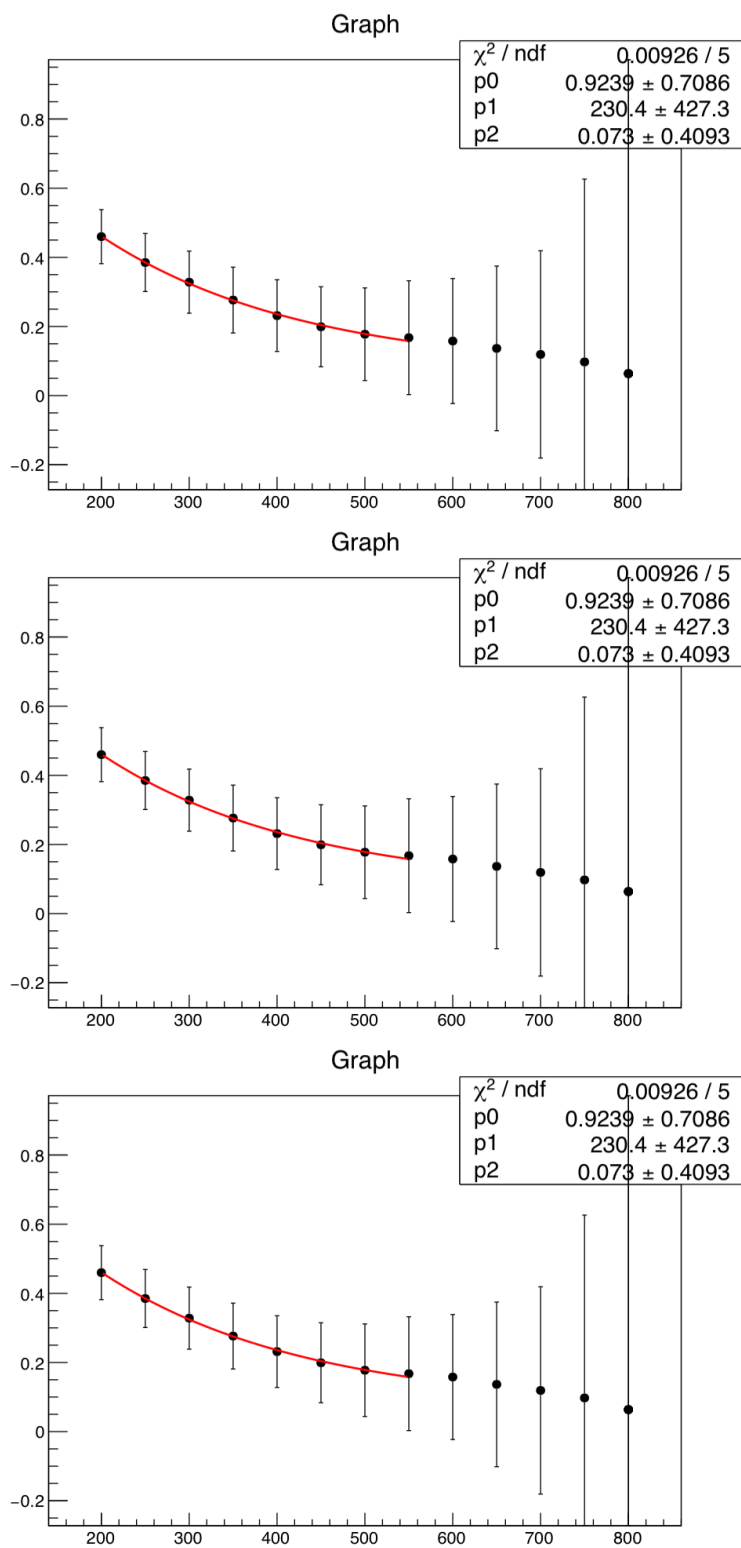
本章では、今回の実験における誤差の大きさや改善点などについて触れる。

3.4.1 誤差の見積もり

今回の実験で考えられる系統誤差として、

- ADC2 の calibration 関数の時間変化
- 低エネルギー側外挿による誤差

図 31: pick-off レートの時間変化

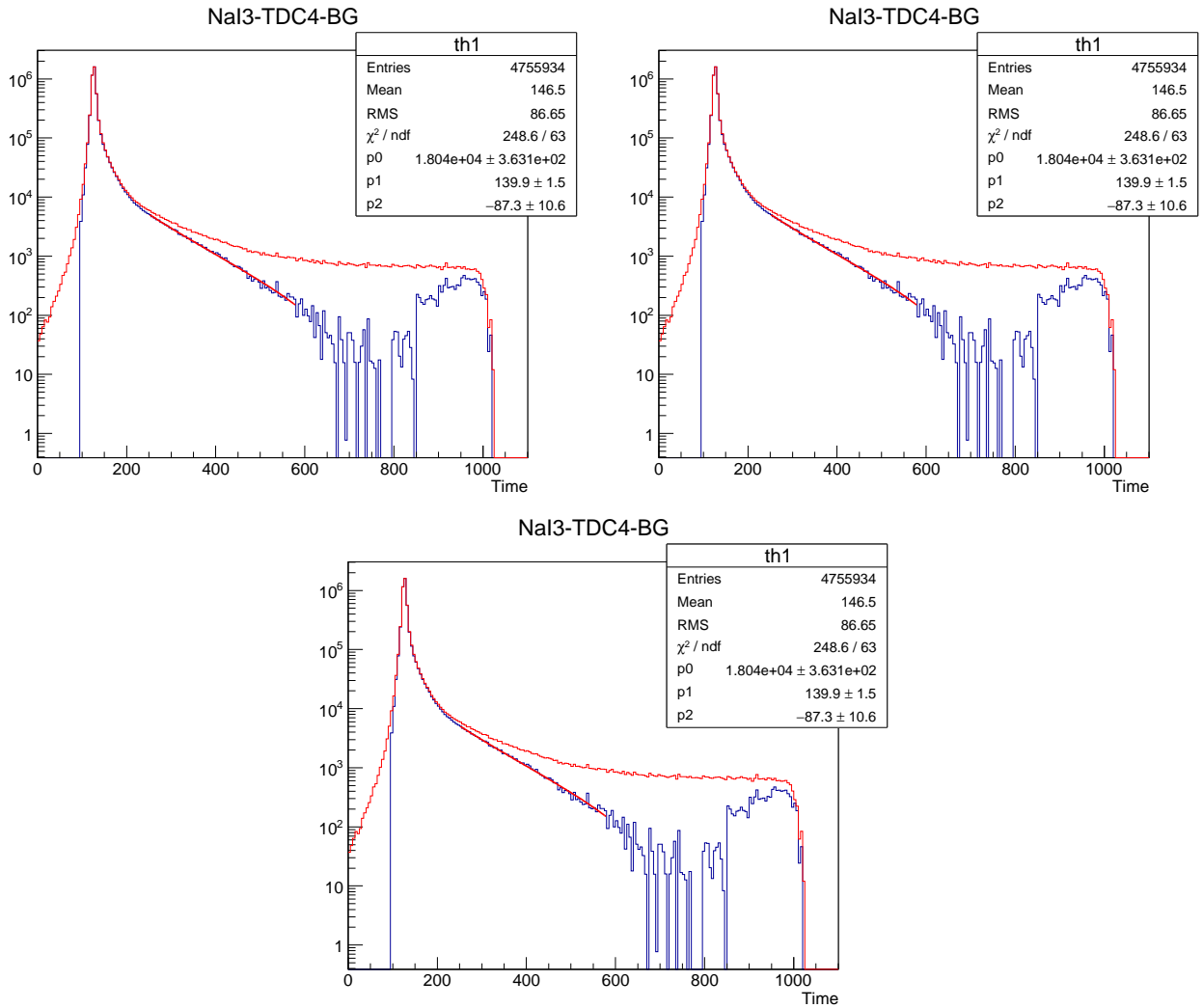


がある。統計誤差としては

- ・ TDC4 の calibration 関数の誤差
- ・ pick-off 補正関数の誤差

がある。以上について誤差の大きさを計見積もった。

図 32: 寿命のフィッティング



3.4.2 ADC2 の calibration 関数の時間変化

節で述べているように、ADC2 の生データにおいてペダスタルの位置の時間変化が見られた。これにより、ADC2 の calibration 関数も変化するはずである。calibration 関数のパラメーター a を変化させて解析を行い、その範囲内での寿命の変化量を求め、誤差を求めた。表 11 がその結果である。これにより、NaI2 の解析結果に対しておよそ 3% の誤差が存在することが分かった。3 つの NaI の結果を平均して出す結果に対しては 1% の誤差として現れるはずである。

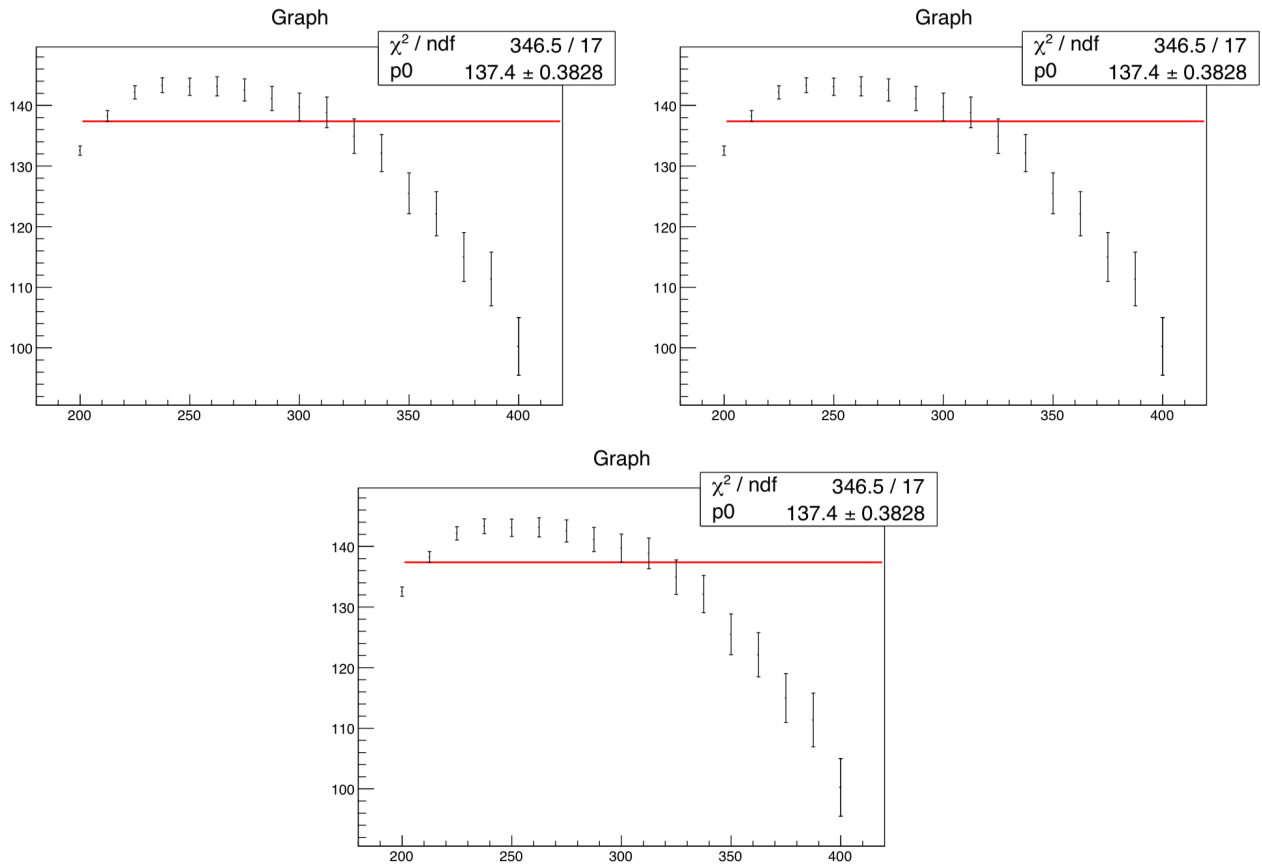
表 11: パラメーター a の最大値最小値における寿命の解析結果

最大/最小	値	寿命 (ns)
最大	0.8325	132.1
最小	0.8154	141.0

3.4.3 低エネルギー外挿による誤差

今回の解析では低エネルギーでのヒストグラムは threshold での値を降下が始まるエネルギーでの値とし、その値でゼロエネルギーまでの外挿を行った。しかし、threshold での値の見積もりの任意性とゼロエネルギーまでのヒストグラムの形の不定性により誤差が存在する。低エネルギーでのヒストグラムの形を再現するのは難しいので、threshold での値についてのみ誤差の評価をした。具体的には、threshold での値について以下の 2 種類を用いて解析し、結果の差を誤差と

図 33: フィッティング開始時刻を変えた時の結果

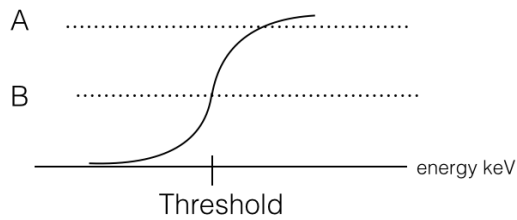


した。

A...カウントの低下が始まる所での値 (3-4-15)

B...カウントの低下の中心 (最も傾きが大きいところ) (3-4-16)

図 34: threshold での値の選び方



その結果が表 12 である。寿命が大きくなる方向に 3% の誤差があると考えられる。
表 12: threshold の値の選び方による寿命の解析結果

値の選び方	寿命 (ns)
A	146.0
B	155.9

3.4.4 TDC4 の calibration 関数の誤差

TDC の calibration 関数をフィッティングにより求める際に、root が誤差を出力した。この誤差に起因する寿命の統計誤差を求める。TDC calibration の結果は

$$Time = (0.2507 \pm 0.00196) * count + \dots \quad (3-4-17)$$

であった。パラメータの取りうる最小値と最大値を用いて解析を行った結果が表 13 である。

表 13: TDC calibration のパラメータを変えた時の寿命の解析結果 (NaI)

TDC calibration	寿命 (ns)
Time=0.2526*count+..	142.1 ± 0.8
time=0.2488*count+..	140.9 ± 0.9

寿命の誤差は 0.5% であった。

3.4.5 誤差のまとめ

最終的な結果として、 144.8 ± 7.24 ns がオルソポジトロニウムの寿命として求められた。

表 14 に今回の実験で見積もった誤差をまとめている。

表 14: 誤差のまとめ

誤差の原因	大きさ (%)
外挿	3
ADC2 calibration	1
系統誤差合計	4
TDC4calibraion	0.5
寿命の fitting	0.5
統計誤差合計	1
合計	5

3.4.6 改善点

- 立体配置... 線源とシンチレータ、鉛ブロックの立体配置を工夫して、Accidental イベントの検出数を増やすことなくレートを増やす事ができるであろう。小さな鉛ブロックを増やし、大きな鉛ブロックの隙間を埋めるなどできれば精度が上がるのではないかと考えられる。また、文献 [12] にあるような立体配置ができればより精度の高い実験ができるだろう。
- ターゲット... ターゲット物質の種類や置き方を変えることによってターゲットで実際なにが起こっているのか検証することができる。例えば、容器のいらぬシリカエアロジェルの使用やシリカパウダー容器の変更が挙げられる。
- 解析... 今回より多くのデータを貯めることで、より精密な解析ができると考えられる。特に pick-off レートの時間変化について細かな時間幅で多くのデータを集めることができるようになる。
- threshold ... 今回は threshold 以下のイベント数を直線で近似したが、HV の電圧を上げるなどの工夫により threshold を下げることが可能である。より精密な解析ができるようになる。

4 比較実験

今回の実験では、比較としてシリカパウダーの有無や線源との距離を変えての実験を試みた。しかし、あくまでよりよい setting を探っていく過程のもとでの比較であるため、厳密な形での比較実験を行うことはできなかった。

1. シリカパウダーあり
 - (a) 過去の実験
 - (b) 線源なし
2. シリカパウダーなし
 - (a) 容器、シリカパウダーなし
 - (b) 容器あり
 - (c) NaI を覆う鉛ブロックなし
 - (d) 線源からのビームを NaI 前で止める
 - (e) ビームを絞る
 - (f) さらにビームを絞る
3. 本実験

シリカパウダーの入った容器及び鉛ブロックを、図 55 のように配置する

それぞれの場合の配置と結果を以下に示す。

No.0 過去の実験 これは過去の実験を参考に、一番最初に試した setting である。結果は本実験のものと event 数やレートの違い以外はほぼ同じであった。レートは 1.2Hz ほどであった。

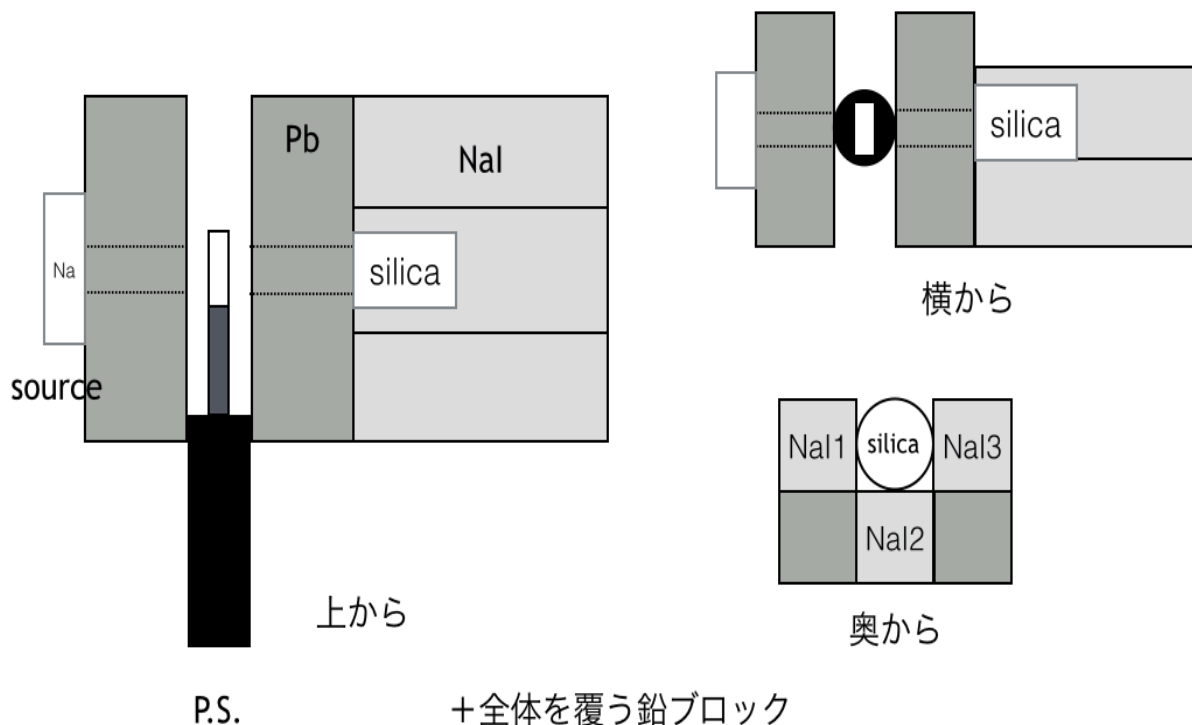


図 35: No.0 配置

No.1 線源なし これは No.0 の配置のまま、線源である ^{22}Na を除いた場合である。この setting により、宇宙線やその他放射線の影響を観測することができると考えられる。

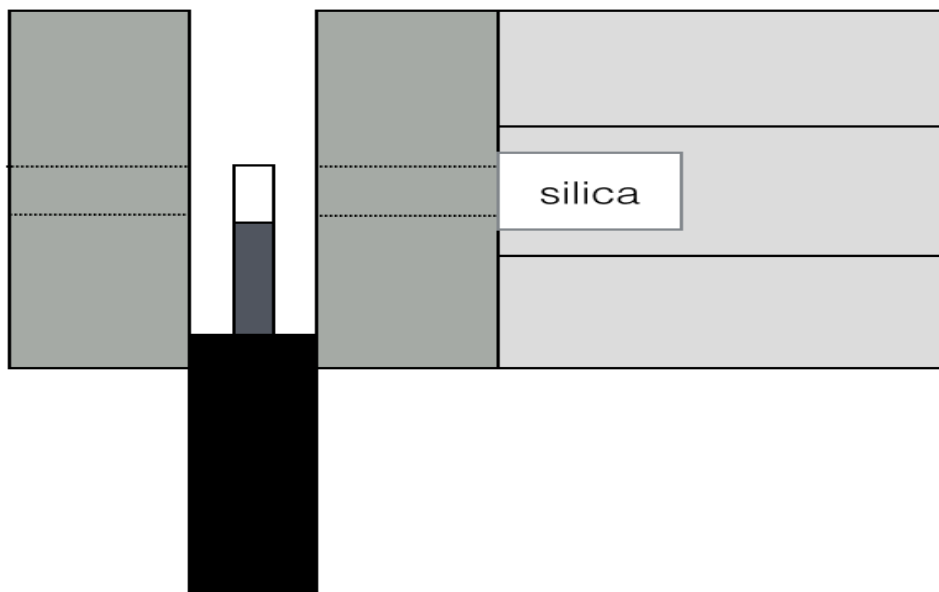


図 36: No.1 配置

結果としてレートは 0.027Hz ほどであり、これらの影響は十分小さいと考えられる。

No.2 シリカパウダー、容器なし これは No.0 の setting からシリカパウダーを容器ごと除いた場合である。この setting では、シリカパウダーで生成されると考えられる Ps は生成されず、それに伴って TDC4 の decay curve も見られないことが期待される。

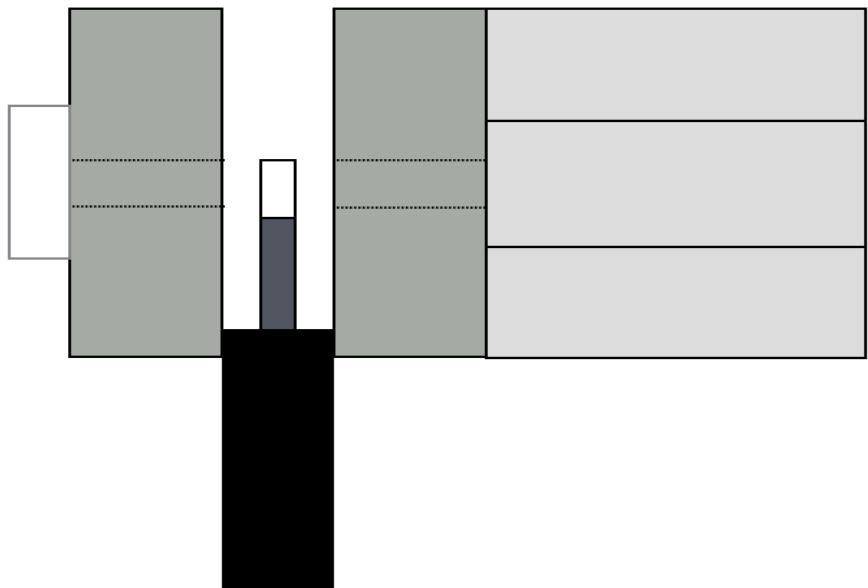


図 37: No.2 配置

結果を図 38 に示す。これを見ると、decay curve が確認でき、Ps が生じていることが確認できる。シリカパウダーでのみ Ps が生じるという仮定に疑問が生じた。

TDC4

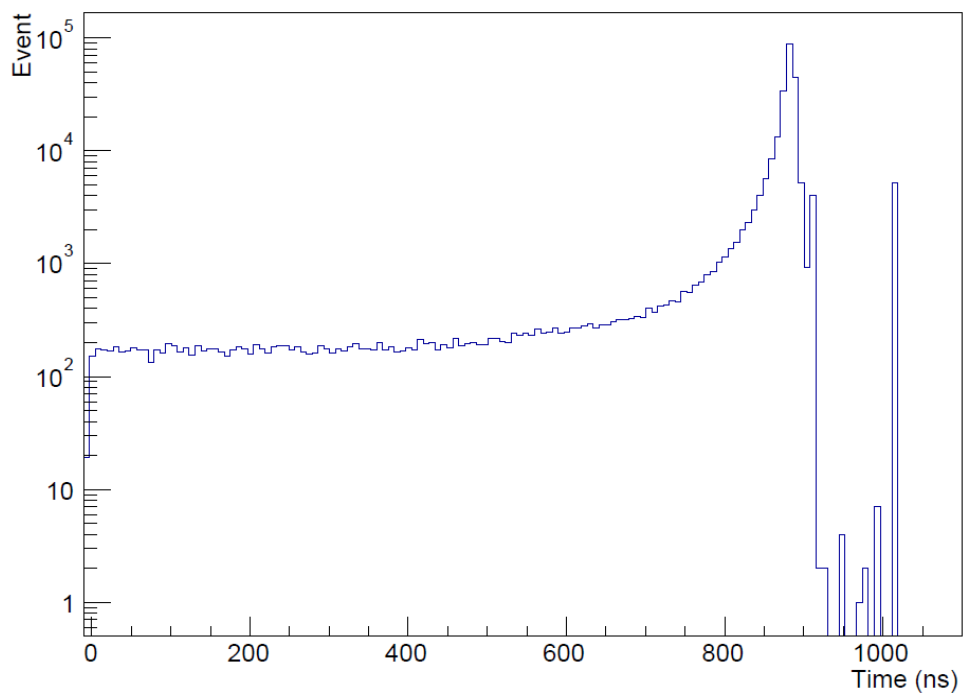


図 38: No.2 TDC4 のヒストグラム

No.3 シリカパウダーなし、容器あり これは No.0 の setting からシリカパウダーを容器から除いた場合である。この setting では、 β 線と容器との反応を見ることができると考えられる。また、No.2 では、シリカパウダーはなかったものの、 β 線が何か (今回は容器) に衝突した際の反応を見ることができなかつたため、厳密にただシリカパウダーがなかった場合を見たというわけではない。よってこの setting で β 線が何かに衝突した場合の反応を観測する。

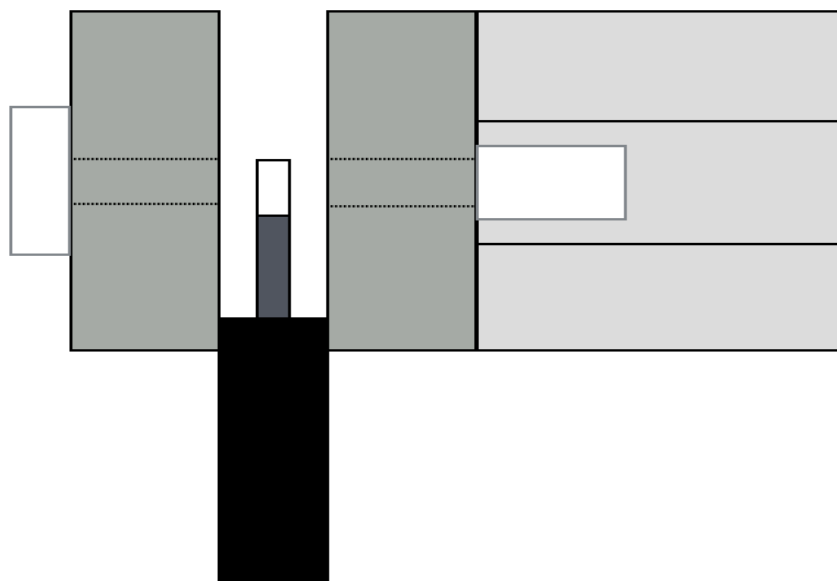


図 39: No.3 配置

結果を図 40 に示す。これは、図 38 と比較しても、違いがはっきりと確認できず、シリカパウダー及び容器の役割を見失ってしまう結果となった。

TDC4

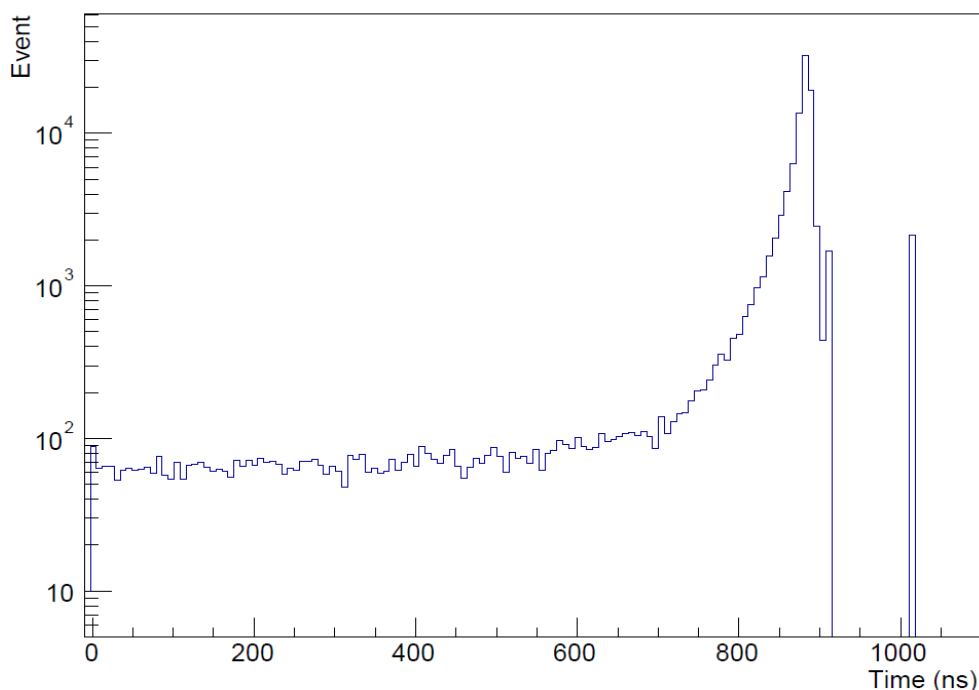


図 40: No.3 TDC4 のヒストグラム

No.4 NaI を覆う鉛ブロックなし これは No.0 の setting の NaI の周囲を覆っている鉛ブロックを取り除いた場合である。これにより、放射線と物質の作用、今回は β 線が周囲の鉛に衝突、対消滅による γ 線の発生などを抑えることができると考えられる。しかし、結果は本実験のものと event 数やレートの違い以外はほぼ同じであった。レートは 1.6Hz ほど

どであった。

No.5 ビームの出口をふさぐ これはNo.2で、ビームの出口となっている鉛ブロックの穴を鉛ブロックでふさいだ場合となっている。この setting では、P.S. のみが

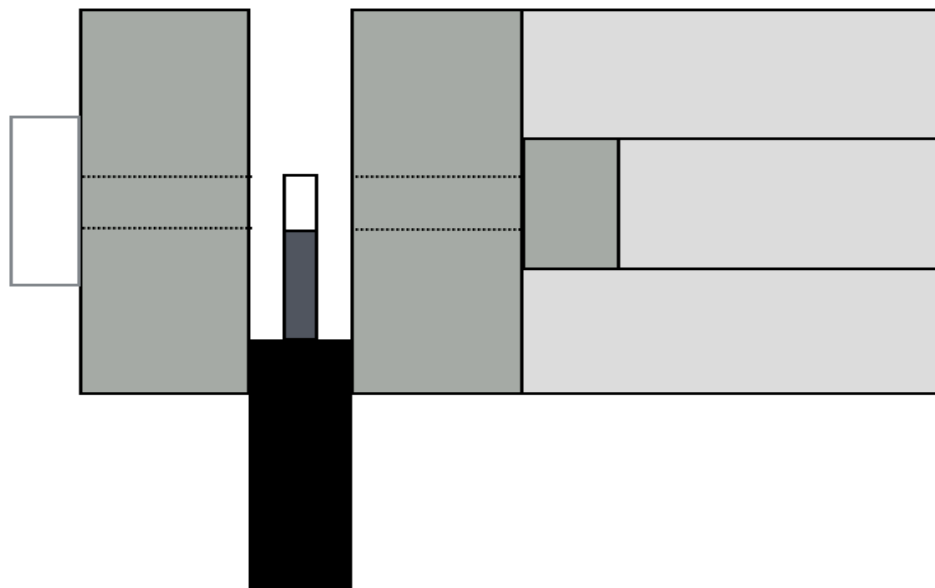


図 41: No.5 配置

結果を図 42 に示す。

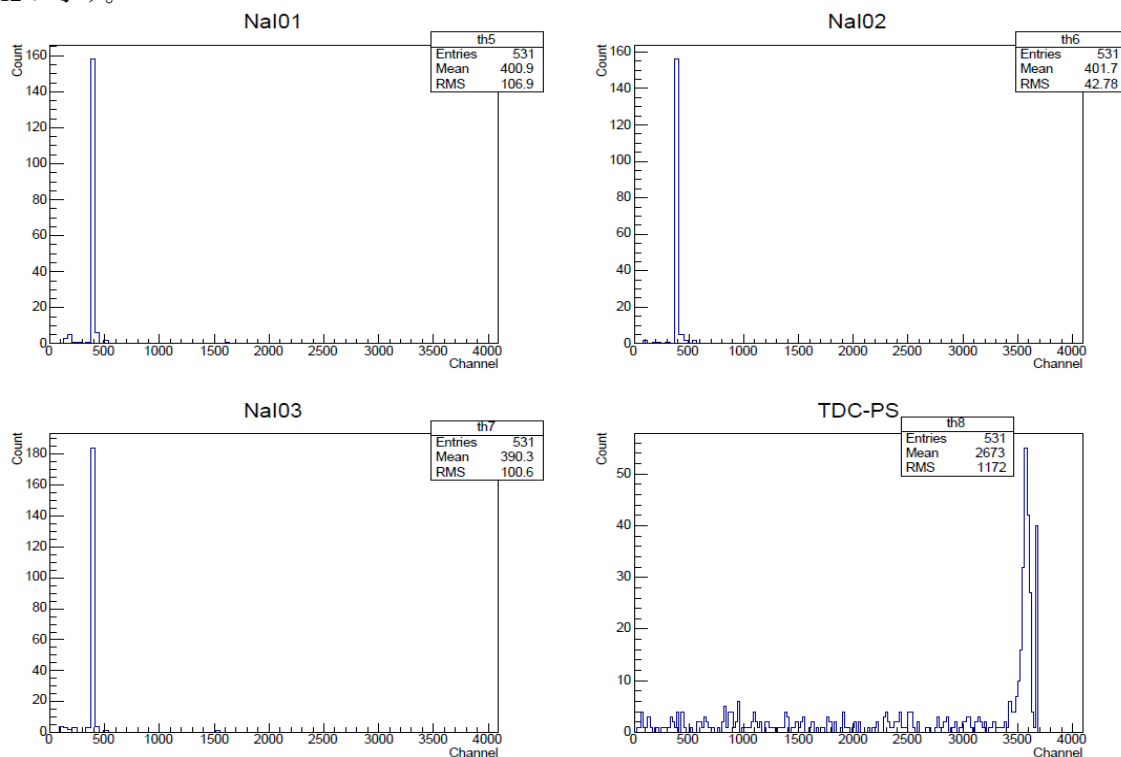


図 42: No.5 TDC のヒストグラム

これを見ると、decay curve のようなものが見られている。これは、穴をふさぐ鉛ブロックの大きさが十分ではなかったため、透過力の高い γ 線を遮蔽することができなかったと考えられる。しかし、透過力の弱い β 線は十分遮蔽できたものと考え、Ps は塞いだ穴の NaI 側で生じたものではなく、P.S. 側で生じ、その崩壊による γ 線を NaI が検出したと考えられる。

No.6 ビームを絞る part.1 これは、線源からのビームを絞り、NaI に直接入る event を減らすようにした場合である。レートは 1.2Hz ほどであった。

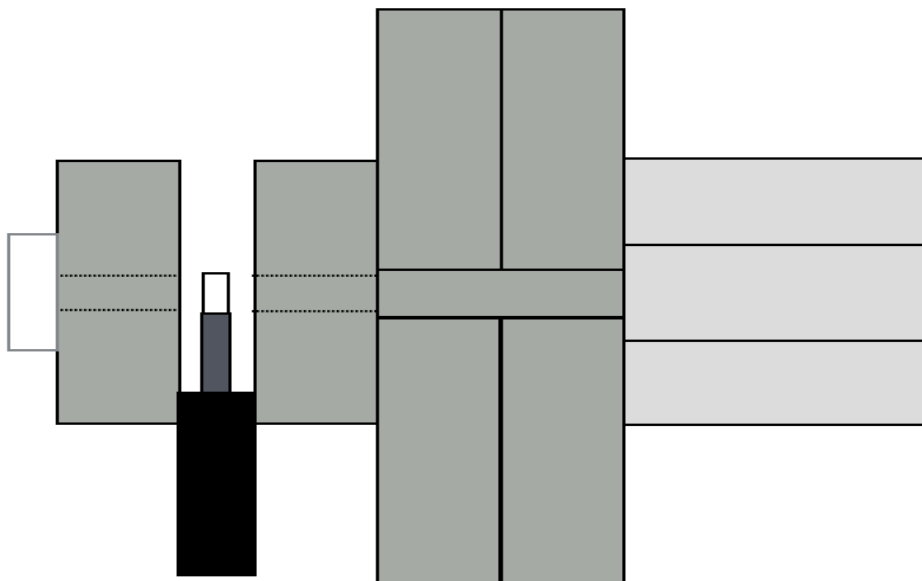


図 43: No.6 配置 上から

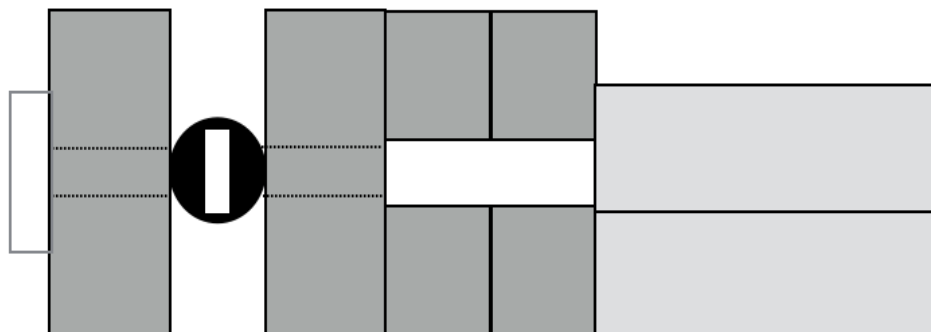


図 44: No.6 配置 横から

結果を図 45、図 46 に示す。

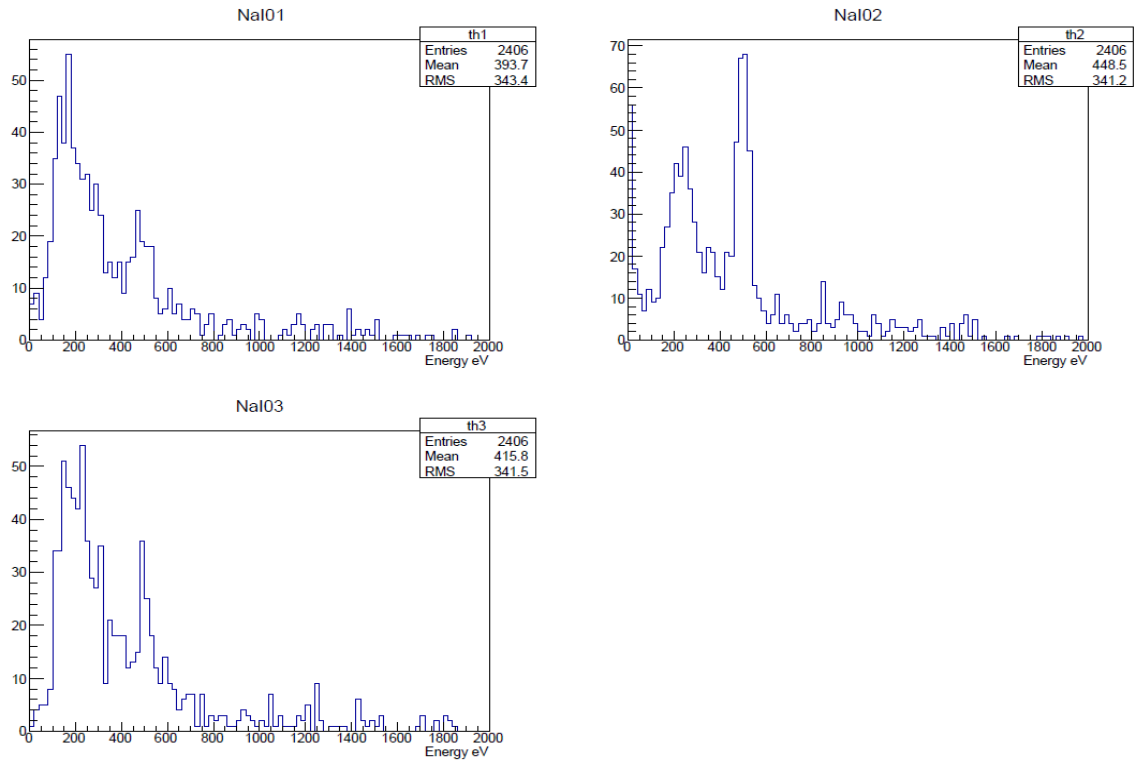


図 45: No.6 ADC のヒストグラム

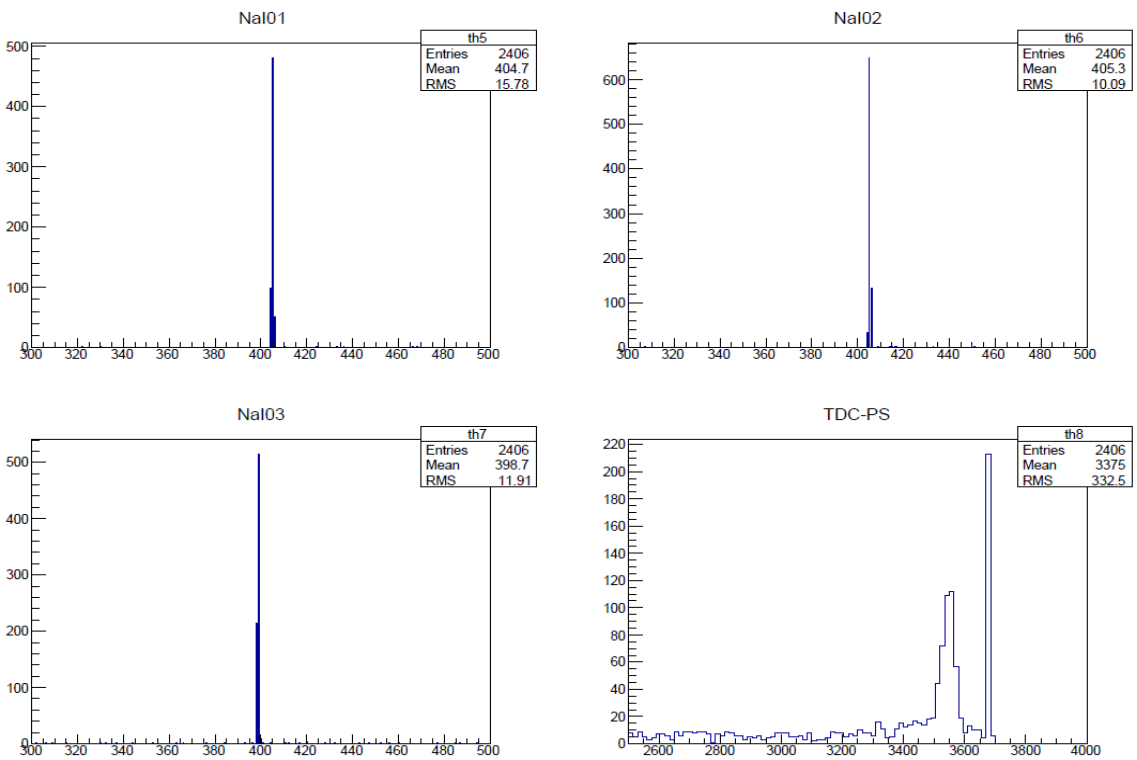


図 46: No.6 TDC のヒストグラム

これを見ると、ADC の 511KeV 付近のピーク、TDC の decay curve が小さくなっていることがわかる。これは線源から直接 NaI に入る event が減少し、何らかの影響で decay curve が小さくなったと考えられる。

No.7 ビームを絞る part.2 これはNo.6でADCの511KeV付近のピーク、TDCのdecay curveが小さくなったことを受け、さらにビームを絞った場合である。レートは0.6Hzほどであった。

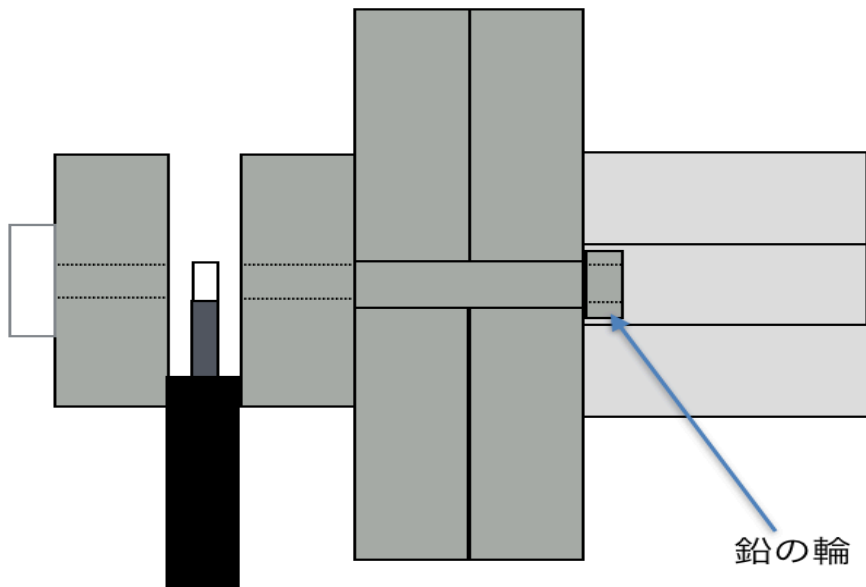


図 47: No.7 配置 上から

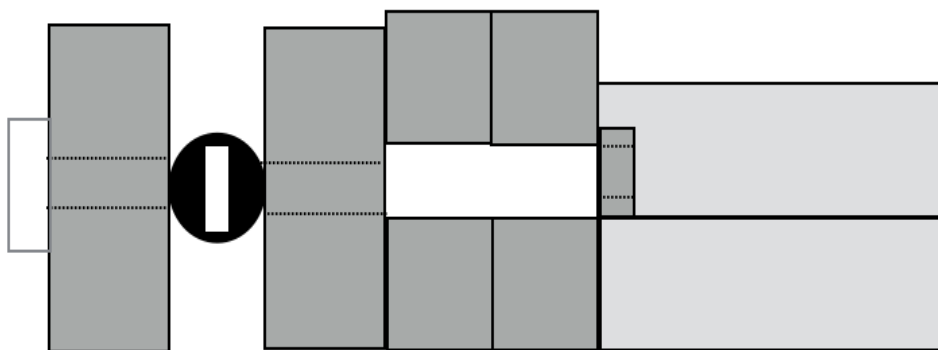


図 48: No.7 配置 横から

結果を図 49、図 50 に示す。

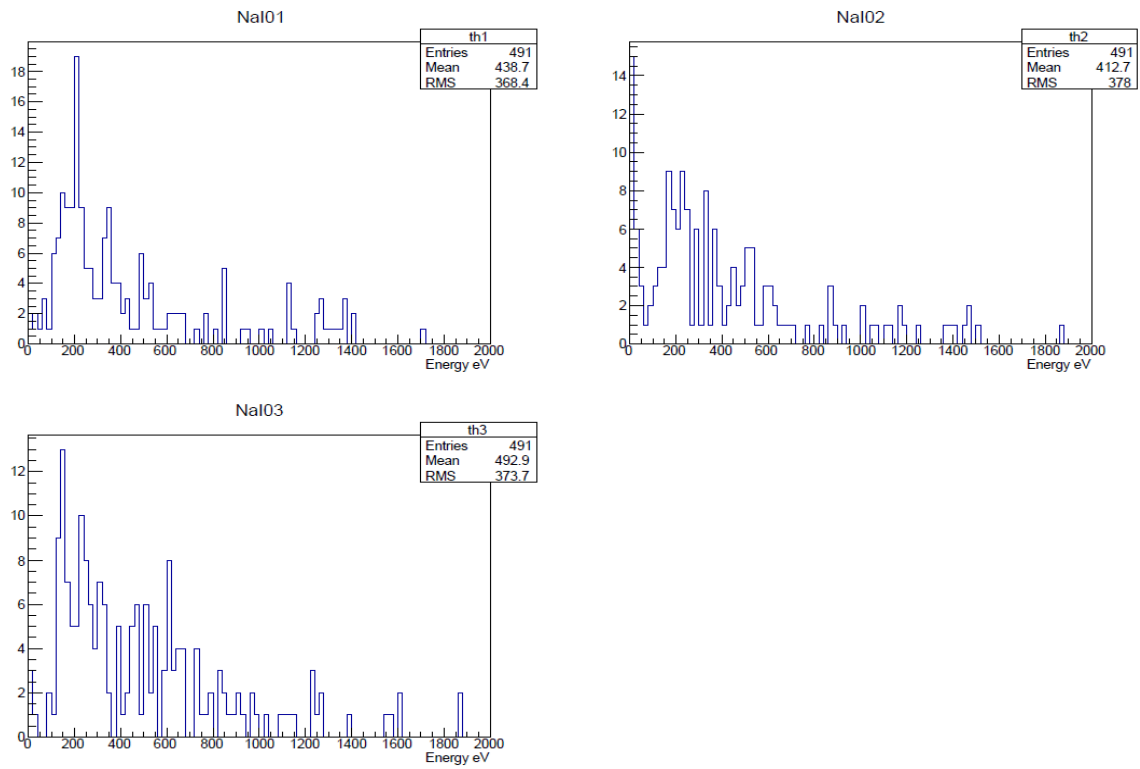


図 49: No.7 ADC のヒストグラム

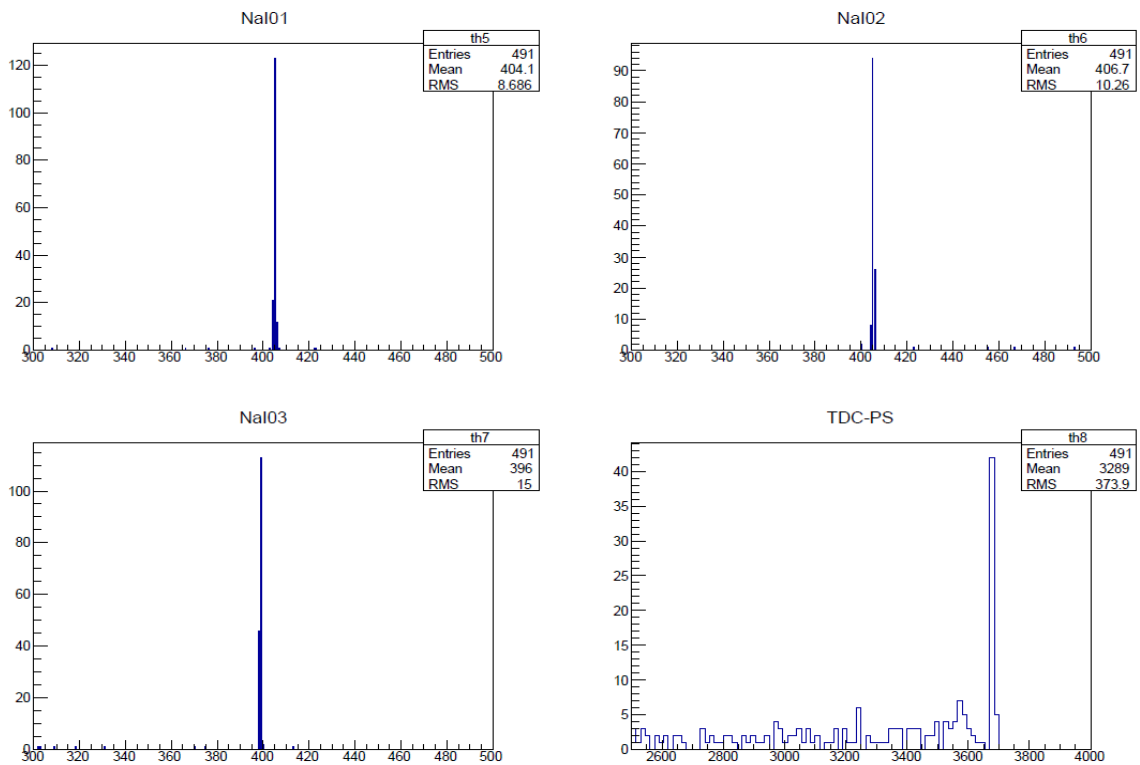


図 50: No.7 TDC のヒストグラム

これを見ると、やはり予想通り ADC の 511KeV 付近のピーク、TDC の decay curve がさらに小さくなっていることがわかる。これで望まれない、シリカパウダーなしでも decay curve が見られるという場合を除くことができた。よって、この setting で Ps の寿命測定を試みる。

No.8 ビームを絞る、シリカパウダーあり これは No.7 で decay curve が見えなくなったことを受け、シリカパウダーありでデータをとったものである。レートは 0.2Hz ほどであった。

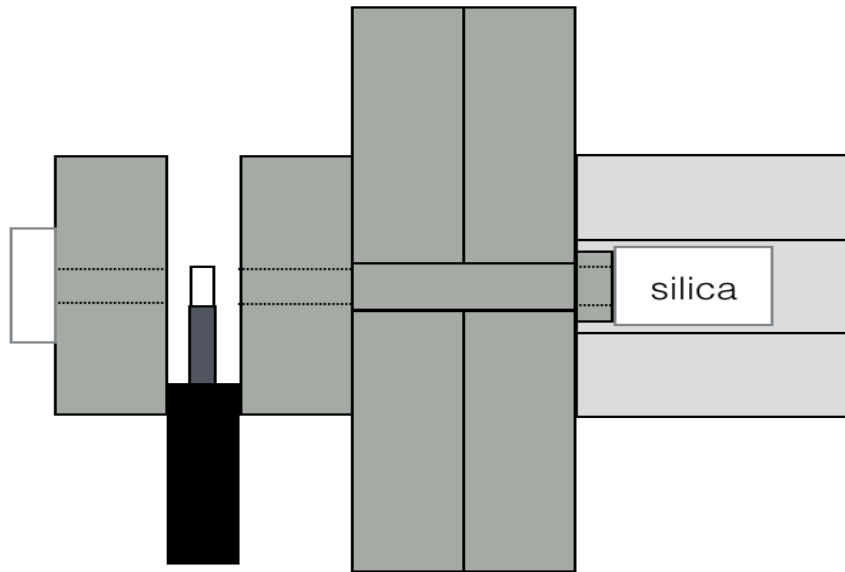


図 51: No.8 配置 上から

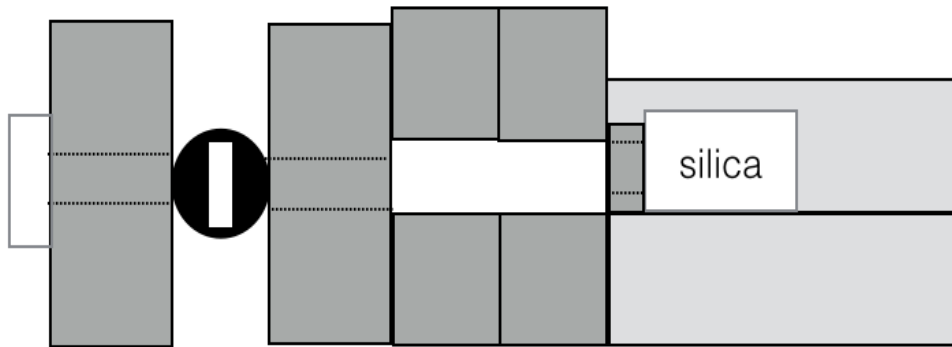


図 52: No.8 配置 横から

結果を図 53、図 54 に示す。

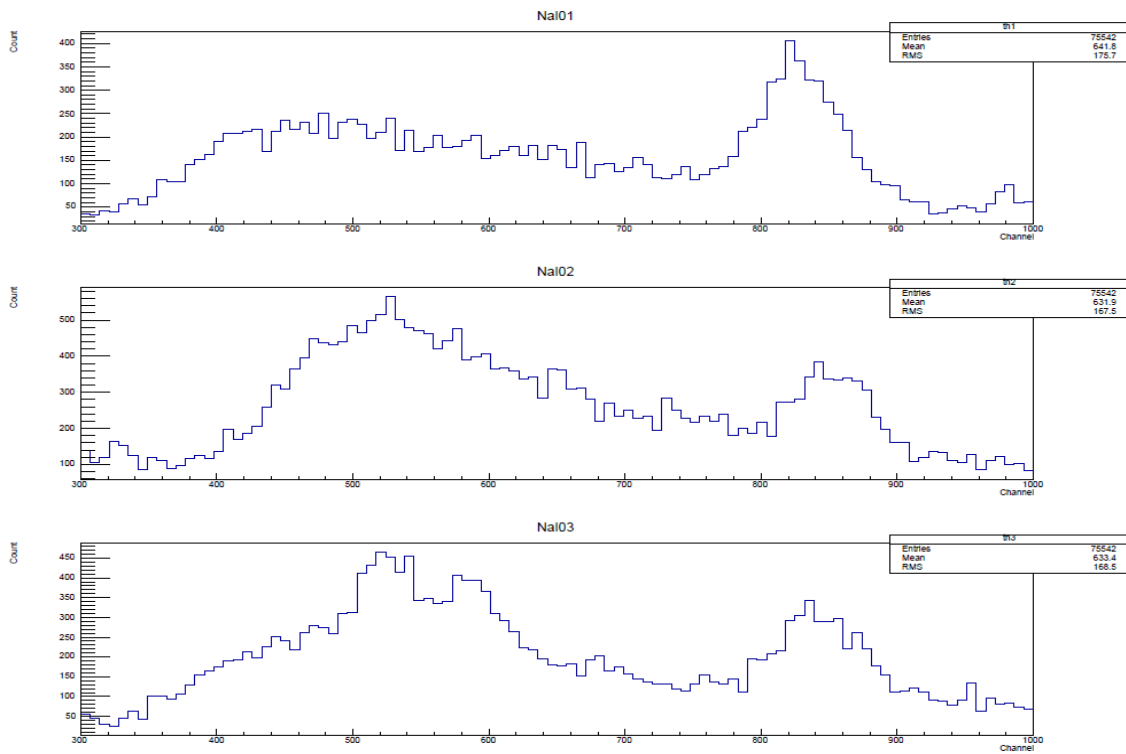


図 53: No.8 ADC のヒストグラム

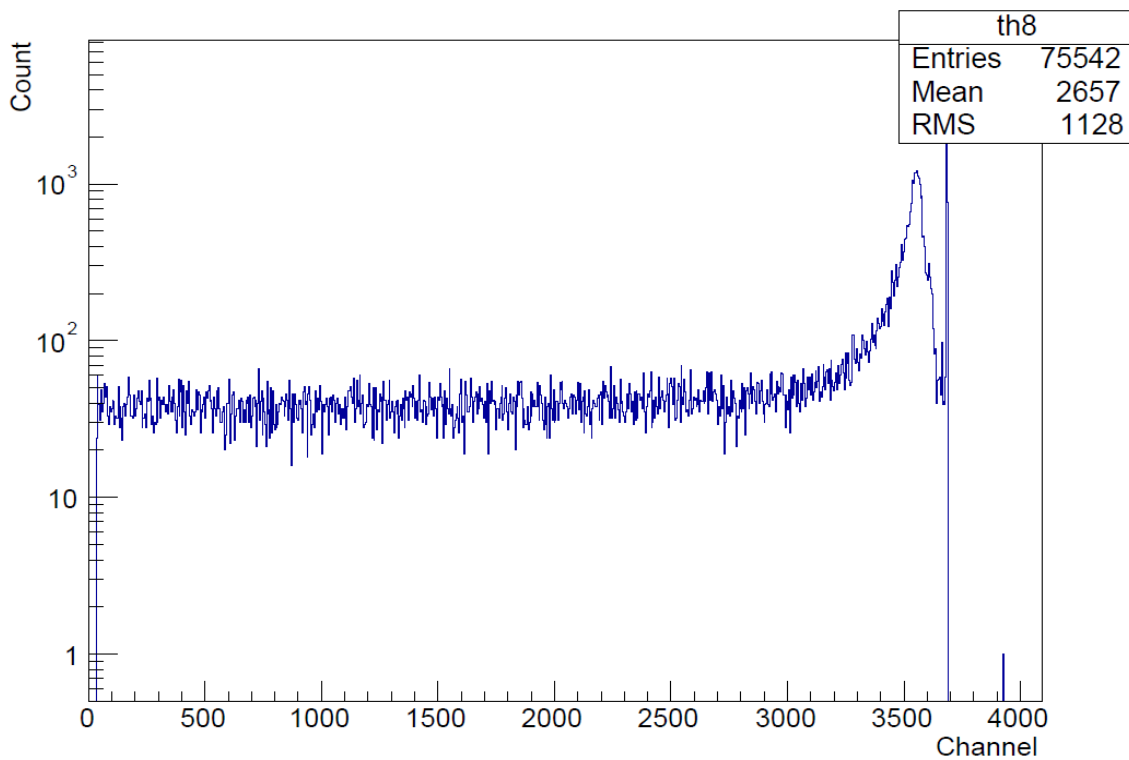


図 54: No.8 TDC のヒストグラム

これで寿命を測定したところ、数 ns という結果になった。また、レートもかなり小さく、十分な event 数を確保できない可能性があった。

No.9 本実験 これは今回の実験で最終的にデータをとっていた setting である。結果は図9や図10の通りである。レートは8.5Hzほどであり、十分な event 数を確保できた。

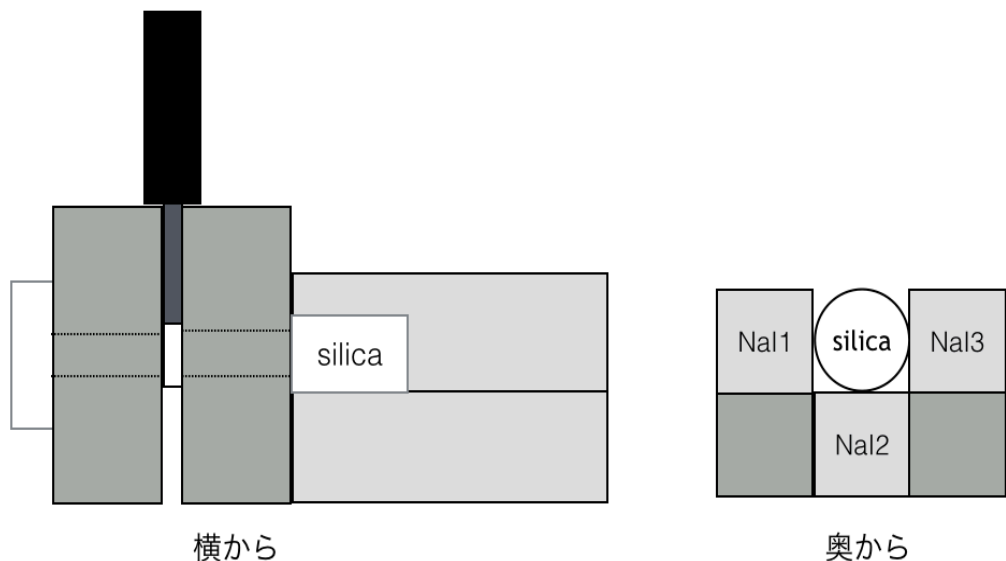


図 55: No.9 配置

これら比較実験のまとめを表 15 に示す。

表 15: 比較まとめ

No.	Condition	rate (Hz)	ADC (511KeV peak)	TDC (decay curve)
0		~1.5	あり	decay curve あり
1	線源なし	0.027		
2	シリカパウダー、容器なし	~2		あり
3	シリカパウダーなし、容器あり			あり
4	NaI を覆う鉛なし	1.6		あり
5	ビームの出口を塞ぐ	0.3	やや減	あり
6	ビームを絞る part.1	1.2	減	減
7	ビームを絞る part.2	0.6	さらに減	ほぼなし
8	ビームを絞る、シリカパウダーあり	0.2		減
9	P.S. の周りの隙間を狭く	8.5	あり	decay curve あり

まとめ 比較実験の結果よりわかったこととしては、

1. Ps が生成されることはシリカパウダーの有無に依存しない (No.2,3)
2. シリカパウダーの有無はレートや寿命に関係する (No.2,3)
3. Ps が生成されるのは NaI 側ではなく P.S. 側である (No.5,6,7,8)

である。これかより、P.S. を通過した β 線が P.S. 付近で Ps を形成し、Ps の崩壊による γ 線を NaI が検出していたのではないかと考えられる。このように考えると、No.6,7 でビームを絞った場合に、 γ 線を検出できる数が減り、測定される寿命が小さくなったことも理解できる。しかしこれはあくまで仮定であり、この仮定を検証できなかったのは残念である。この結果を次回以降の実験に活かしていただくことを願っている。

参考文献

- [1] A.Ore and J.L.Powell, “Three-Photon Annihilation of an Electron-Positron Pair”, Phys.Rev.75,11(1949).

- [2] William E.Caswell, G.Peter Lepage, and Jonathan Sapirstein, “ $O(\alpha)$ Corrections to the Decay Rate of Orthopositronium”, Phys.Rev.Lett.38,9(1977).
- [3] Christopher Smith, “*Bound State Description in Quantum Electrodynamics and Chromodynamics*”, Université Catholique de Louvain(2002).
- [4] G.S.Adkins, R.N.Fell and J.Sapirstein, “*Order α^2 corrections to the decay rate of orthopositronium*”, [arXiv:hep-ph/0003028v2](2000).
- [5] Bernd A.Kniehl and Alexander A.Penin, “*Order $\alpha^3 \ln(1/\alpha)$ Corrections to Positronium Decays*”, [arXiv:hep-ph/0004267v2](2000).
- [6] B.A.Kniehl,A.V.Kotikov and O.L.Veretin, “*Orthopositronium lifetime at $O(\alpha)$ and $O(\alpha^3 \ln \alpha)$ in closed form*”, [arXiv:0909.1431v2 [hep-ph]](2009)
- [7] J.J. サクライ, 上級量子力学 I,II, 丸善.
- [8] 坂井典佑, 場の量子論, 裳華房.
- [9] 日置義郎, 場の量子論-摂動計算の基礎-, 吉岡書店.
- [10] 江沢洋, 相対性理論, 裳華房.
- [11] M. Skalsey, J. J. Engbrecht, R. K. Bithell, R. S. V allery, and D.W . Gidley, Phys. Rev. Lett. 80, 3727 (1998)
- [12] S.Asai. (n.d.). ‘Precise measurements of the positronium decay rate and energy level’ retrieved from http://tabletop.icepp.s.u-tokyo.ac.jp/Tabletop_experiments/HFS_measurement_with_Zeeman_splitting_files/Ps_asai_1.pdf on 10.3.2015

5 謝辞

半期という長い間、毎週指導して下さった石野さん、ちょっとしか会えませんでしたでしたがポイントとなる方針を立てて下さった隅田さん、また時間を割いて実験室に足を運んで下さった黄さん、柳田さん、ありがとうございました!!