

A2 課題演習レポート

天野 良樹・岩島 呂帆
岡本 慎太郎・近藤 千尋

平成 28 年 4 月 7 日

目次

第 1 章	はじめに	2
1.1	実験背景	2
1.2	課題演習 A2 として	2
第 2 章	ポジトロニウム	3
2.1	ポジトロニウムとは	3
2.2	ポジトロニウムの崩壊	3
2.3	ポジトロニウムの寿命	4
第 3 章	実験	8
3.1	実験原理	8
3.2	実験器具	8
3.3	セットアップ	8
3.4	回路	10
第 4 章	データ解析	13
4.1	Calibration	13
4.2	TQ 補正	19
4.3	pick-off 補正	23
第 5 章	考察	28
5.1	統計誤差の評価	28
5.2	長寿命と測定される要因	30
	謝辞	31
	参考文献	31

第1章 はじめに

1.1 実験背景

電子と陽電子の対消滅は、QED の検証に用いることができる素粒子反応の 1 つである。電子と陽電子からなるエキゾチック原子であるポジトロニウムが 1951 年に MIT の Martin Deutsch によって発見されて以来、ポジトロニウムの寿命を測定することで QED を検証しようと様々な実験が行われてきた。本実験ではシリカパウダーとプラスチックシンチレーター及び NaI シンチレーターを用いて、オルソポジトロニウムの寿命を測定することを目的とした。また、実際に解析して得られた寿命と QED による寿命の理論値を比較し、考察した。

1.2 課題演習 A2 として

本実験は、2015 年度後期課題演習 A2 において行われたものである。実験を通してシンチレーターや光電子増倍管及び様々なモジュールの使い方を覚え、放射線実験の基礎を学んだ。

第2章 ポジトロニウム

2.1 ポジトロニウムとは

ポジトロニウム (Ps) とは電子と陽電子が水素原子のように束縛状態を形成したものであり、不安定で複数の光子に崩壊する。Ps はスピン $\frac{1}{2}$ を持つ二つの粒子の組み合わせであるので、スピン合成を行うとスピン 3 重項 (triplet) のオルソポジトロニウム (o-Ps) とスピン 1 重項 (singlet) のパラポジトロニウム (p-Ps) に分類できる。前者は対称スピン状態、後者は反対称スピン状態に対応する。

2.2 ポジトロニウムの崩壊

荷電共役変換 (C 変換) の下での演算子の関係は、

$$b^{(s)\dagger} \xleftrightarrow{\text{charge conj}} d^{(s)\dagger} \quad (2.1)$$

となる。但し、 $b^{(s)\dagger}$ は電子の生成演算子、 $d^{(s)\dagger}$ は陽電子の生成演算子である。相対運動量がゼロの系を考えると、3 重項状態は次のように変換する。

$$\begin{aligned} (\uparrow)_{e-} (\uparrow)_{e+} &= b^{(1)\dagger}(\mathbf{0}) d^{(1)\dagger}(\mathbf{0}) |0\rangle \\ \xrightarrow{\text{charge conj}} d^{(1)\dagger}(\mathbf{0}) b^{(1)\dagger}(\mathbf{0}) |0\rangle &= -b^{(1)\dagger}(\mathbf{0}) d^{(1)\dagger}(\mathbf{0}) |0\rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

したがって 3 重項状態の C-パリティは奇である。同様にして 1 重項状態の C-パリティが偶であることも確認できる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} [(\uparrow)_{e-} (\downarrow)_{e+} - (\downarrow)_{e-} (\uparrow)_{e+}] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [b^{(1)\dagger}(\mathbf{0}) d^{(2)\dagger}(\mathbf{0}) - b^{(2)\dagger}(\mathbf{0}) d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})] |0\rangle \\ \xrightarrow{\text{charge conj}} \frac{1}{\sqrt{2}} [b^{(1)\dagger}(\mathbf{0}) d^{(2)\dagger}(\mathbf{0}) - b^{(2)\dagger}(\mathbf{0}) d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})] |0\rangle & \end{aligned} \quad (2.3)$$

一方 j_μ は C 変換によって符号が変わるので電磁場 A_μ は荷電共役変換に関して奇であるが、相互作用密度 $-j_\mu A_\mu$ は不変でなければならない。A は $a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger$ と $a_{\mathbf{k},\alpha}$ を 1 次の形で含むので、これは横波電磁場の生成演算子と消滅演算子が荷電共役変換の元で符号を変えることを含意する。

$$a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \xrightarrow{\text{charge conj}} -a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger, \quad a_{\mathbf{k},\alpha} \xrightarrow{\text{charge conj}} -a_{\mathbf{k},\alpha} \quad (2.4)$$

上の演算子の変換則からの直接の帰結として、偶数 (奇数) の光子を含む系は、荷電共役変換に関して偶 (奇) だということになる。

$$a_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2,\alpha_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n,\alpha_n}^\dagger |0\rangle \xrightarrow{\text{charge conj}} (-1)^n a_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2,\alpha_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n,\alpha_n}^\dagger |0\rangle \quad (2.5)$$

上の多光子系の変換則は、各光子の運動量や偏極方向にはよらずに成立する。Ps の崩壊に戻ると、相互作用が荷電共役変換の下で不変であれば、次の規則が成立する。

$$\begin{aligned} 3 \text{ 重項 } ({}^3S) &\longrightarrow \text{奇数光子系} \\ 1 \text{ 重項 } ({}^1S) &\longrightarrow \text{偶数光子系} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、具体的な証明は省くが、

- 運動学的に光子を 1 個だけ放出して対消滅する過程は許されない。
- QED によると相互作用の結合定数は微細構造定数であるために高次の寄与が小さくなる。

という事情により、o-Ps は 3 個の光子に、p-Ps は 2 個の光子に崩壊する。

$${}^3S \rightarrow 3\gamma, \quad {}^1S \rightarrow 2\gamma \quad (2.7)$$

2.3 ポジトロニウムの寿命

2.3.1 相互作用表示

通常の時間に依存する摂動論は、時空座標やエネルギー-運動量変数が共変な形で用いられていないので、相対論的な粒子を含むような過程を扱う上であまり便利ではない。しかしハミルトニアン形式の枠内において "相互作用表示" (interactional representation) と呼ばれる表示を採用すると、遷移行列を明白な共変性を備えた形で与えることができる。

通常の Schrödinger 表示において、状態ベクトル $\Phi^{(S)}(t)$ の時間発展は Schrödinger 方程式によって次のように与えられる。

$$i \frac{\partial \Phi^{(S)}}{\partial t} = H^{(S)} \Phi^{(S)} \quad (2.8)$$

上付きの (S) は Schrödinger 表示を意味する。 $H^{(S)}$ を非摂動状態を表す主要ハミルトニアン $H_0^{(S)}$ と摂動ハミルトニアン $H_1^{(S)}$ の 2 つの部分に分ける。

$$H^{(S)} = H_0^{(S)} + H_1^{(S)} \quad (2.9)$$

ここで次の変換を考える。

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{iH_0^{(S)}t} \Phi^{(S)} \\ O(t) &= e^{iH_0^{(S)}t} O^{(S)} e^{-iH_0^{(S)}t} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$\Phi^{(S)}$ と $O^{(S)}$ は Schrödinger 表示における状態ベクトルと演算子で、上付き添え字がつかない Φ と O は相互作用表示における状態ベクトルと演算子である。上の変換は表示の変更と見なされる。 $\Phi(t)$ の時間発展は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= i \left[iH_0^{(S)} e^{iH_0^{(S)}t} \Phi^{(S)} + e^{iH_0^{(S)}t} \frac{\partial \Phi^{(S)}}{\partial t} \right] \\ &= -H_0^{(S)} e^{iH_0^{(S)}t} \Phi^{(S)} + e^{iH_0^{(S)}t} (H_0^{(S)} + H_1^{(S)}) e^{-iH_0^{(S)}t} e^{iH_0^{(S)}t} \Phi^{(S)} \\ &= H_1 \Phi \end{aligned} \quad (2.11)$$

H_1 は相互作用表示で表した摂動ハミルトニアンである。時間 $t = 0$ において $O^{(S)}$ と O が一致することに注意すると、相互作用の演算子の時間依存性は、

$$O(t) = e^{iH_0^{(S)}t} O(0) e^{-iH_0^{(S)}t} \quad (2.12)$$

である。よって相互作用表示の演算子 O が満たすべき運動方程式は次のようになる。

$$\dot{O} = i[H_0^{(S)}, O] = i[H_0, O] \quad (2.13)$$

2.3.2 U 行列と S 行列

微分方程式 (2.13) の形式解を求める。まず時間発展演算子 $U(t, t_0)$ を次のように定義する。

$$\Phi(t) = U(t, t_0)\Phi(t_0) \quad (2.14)$$

$\Phi(t_0)$ は、ある時刻 t_0 における系の状態を与える相互作用表示の状態ベクトルである。式 (2.13) は次式と等価である。

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1 U(t, t_0) \quad (2.15)$$

上式と $U(t_0, t_0) = 1$ より、1 本の積分方程式が得られる。

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt H_1(t) U(t, t_0) \quad (2.16)$$

上式を反復代入で形式的に解くと、

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_1(t_1) \left[1 - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_2) U(t_2, t_0) \right] \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_1(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_1(t_1) H_1(t_2) + \cdots \\ &\quad + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_1) H_1(t_2) \cdots H_1(t_n) + \cdots \end{aligned} \quad (2.17)$$

U の物理的な意味について考える。系が時刻 t_0 において状態 i にあると分かったとすると、その後時刻 t において状態 f にあることが見出される確率は、

$$|\langle \Phi_f | U(t, t_0) \Phi_i \rangle|^2 = |U_{fi}(t, t_0)|^2 \quad (2.18)$$

と与えられる。 $i \rightarrow f$ の単位時間あたりの遷移頻度は、

$$w = \frac{1}{t - t_0} |U_{fi}(t, t_0) - \delta_{fi}|^2 \quad (2.19)$$

参考文献 [1] によると、 $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ とするとこの遷移頻度は確定的な極限值に近づく。そこで S 行列として知られる演算子を次のように定義する。

$$S = U(\infty, -\infty) \quad (2.20)$$

式 (2.14) に従い、S 行列は相互作用表示における無限の未来の状態 $\Phi(\infty)$ と無限の過去の状態 $\Phi(-\infty)$ を関係づける。

$$\Phi(\infty) = S\Phi(-\infty) \quad (2.21)$$

S 行列の具体的な形は、式 (2.17) から容易に得られる。

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= S^{(0)} + S^{(1)} + S(2) + S(3) + \cdots \\ &= 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \cdots \\ &\quad + (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) + \cdots \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.3.3 2 光子放射型 e^-e^+ 対消滅

ここでは p-Ps の崩壊である、2 光子放射型 e^-e^+ 対消滅の断面積をかいつままで計算していく (詳細は参考文献 [1] の第 4 章の 4.2, 4.4 を参照)。まず 2 光子放射型 e^-e^+ 対消滅は次のような過程である。

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma \quad (2.23)$$

始状態と終状態は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \Phi_i &= |e^-e^+\rangle = b^{(s_-)\dagger}(\mathbf{p}_-) b^{(s_+)\dagger}(\mathbf{p}_+) |0\rangle \\ \Phi_f &= |2\gamma\rangle = a_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

$S^{(0)}$ と $S^{(1)}$ は寄与を持たないので、 S が $S^{(2)}$ によって近似できるものと仮定すると、 S_{fi} は次のように書ける。

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (-e)^2 \int d^4x_1 \int_{t_2 < t_1} d^4x_2 \langle 2\gamma | \bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) A_\nu(x_2) | e^-e^+ \rangle \\ &= (-e)^2 \int d^4x_1 \int_{t_2 < t_1} d^4x_2 \langle 0 | \bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu \psi(x_2) | e^-e^+ \rangle \\ &\quad \times \langle 2\gamma | A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.25)$$

引き続き計算を進めると、

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_- + p_+ - k_1 - k_2) \sqrt{\left(\frac{m}{E_- V}\right) \left(\frac{m}{E_+ V}\right) \left(\frac{1}{2\omega_1 V}\right) \left(\frac{1}{2\omega_2 V}\right)} \mathcal{M}_{fi} \quad (2.26)$$

となる。 \mathcal{M}_{fi} は共変行列要素で次のような形で与えられる。

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{fi} &= (-e)^2 \bar{v}^{(s_+)}(\mathbf{p}_+) \left[\gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \frac{-i\gamma \cdot (p_- - k_2) + m}{i[(p_- - k_2)^2 + m^2 - i\epsilon]} \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_2)} \right. \\ &\quad \left. + \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \frac{-i\gamma \cdot (p_- - k_1) + m}{i[(p_- - k_1)^2 + m^2 - i\epsilon]} \gamma \cdot \epsilon^{(\alpha_1)} \right] u^{(s_-)}(\mathbf{p}_-) \end{aligned} \quad (2.27)$$

これを計算していくと、2光子放射型 e^-e^+ 対消滅の断面積は

$$d\sigma = (2\pi)^4 \frac{1}{v_{\text{rel}}} \frac{1}{2E_+} \frac{1}{2E_-} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2m)^2 \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - k_1 - k_2) \quad (2.28)$$

となる。したがって、スピンを平均した全断面積は

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{tot}} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \\ &= \frac{r_0^2}{4\beta_+} 2 \times 2\pi = \frac{\pi r_0^2}{\beta_+}, \quad (\beta_+ \ll 1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。

2.3.4 Ps の寿命

式 (2.29) から Ps の寿命を計算する。まず $\sigma^{\text{tot}} v_+ \rho$ という量が単位体積に電子が一つある場合の陽電子の平均寿命の逆数であるので、

$$R = \sigma^{\text{tot}} v_+ \rho \quad (2.30)$$

は電子密度 ρ の下での陽電子の平均寿命の逆数にあたる。Ps の Bohr 半径が水素原子の 2 倍であるので、基底状態において、

$$\rho = |\psi_{1s}(\mathbf{x} = \mathbf{0})|^2 = \frac{1}{\pi(2a_0)^3} \quad (2.31)$$

となる。この束縛系における電子（陽電子）の速度は光速の $1/137$ 倍のオーダーなので、Ps の寿命を評価するために、式 (2.31) において $\lim_{\beta_+ \rightarrow 0}$ を適用してよい。基底状態に関して次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \Gamma(n=1, {}^1S \rightarrow 2\gamma) &= \lim_{v_+ \rightarrow 0} 4\sigma_{(\text{unpol})}^{\text{tot}} v_+ |\psi_{1s}(\mathbf{x} = \mathbf{0})|^2 \\ &= 4\pi \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 \frac{1}{\pi(2/\alpha m)^3} = \frac{1}{2} \alpha^5 m \end{aligned} \quad (2.32)$$

よって $n=1$ の 1S 状態の平均寿命は、

$$\tau_{\text{singlet}} = \frac{2}{\alpha^5 m} \simeq 0.125 \text{ ns} \quad (2.33)$$

となる。一方 3S 状態は光子 3 個に崩壊するので、もうひとつ e^- の次数が増え、寿命が $(1/\alpha)$ 倍ほど長くなると予想される。実際の結果は $n=1$ の s 波束縛状態において、次のようになる。

$$\frac{\tau_{\text{triplet}}}{\tau_{\text{singlet}}} = \frac{9\pi}{4(\pi^2 - 9)\alpha} \simeq 1115, \quad \tau_{\text{triplet}} \simeq 139 \text{ ns} \quad (2.34)$$

第3章 実験

3.1 実験原理

^{22}Na の β^+ 崩壊で放出される e^+ とシリカパウダーの e^- によって p-Ps, o-Ps が形成され、これが電子陽電子対消滅すると γ 線が放出される。そこで、シリカパウダーと ^{22}Na を離し、その間にプラスチックシンチレーター (以下 P.S.) を置く。ここで e^+ が P.S. を通過した時と Ps が形成された時を同時とみなす。P.S. を通過した e^+ はシリカパウダー内で対消滅して γ 線を放出する。この γ 線を NaI シンチレーター (以下 NaI) で検出し、検出された時を Ps の崩壊した時を同時とみなして、P.S. で e^+ が検出された時間と NaI で γ 線が検出された時間の差を Ps の寿命と考える。

3.2 実験器具

^{22}Na e^+ を供給する線源。

P.S. e^+ を検出。

NaI γ 線を検出。

シリカパウダー (主成分 SiO_2) ^{22}Na からの e^+ を受け Ps を形成する役割を果たす。pick-off 反応 (4.3.1 参照) を抑えるため、加熱して水分を飛ばした。

鉛ブロック γ 線が直接 NaI に入るとコンプトン散乱のエネルギーが混ざってしまうのでそれを防止するために NaI を鉛のブロックで出来るだけ覆った (図 3.3 参照)。

遮光用ビニール P.S. に光が入ると破損してしまう恐れがあるのでセットアップ全体を黒いビニールで覆って遮光した。(図 3.4 参照)

3.3 セットアップ

各実験装置は図 3.1、図 3.2 のように配置した。線源とシリカパウダーの間においてある鉛ブロックには中央に穴が空いており、 e^+ の通る経路が確保されている。

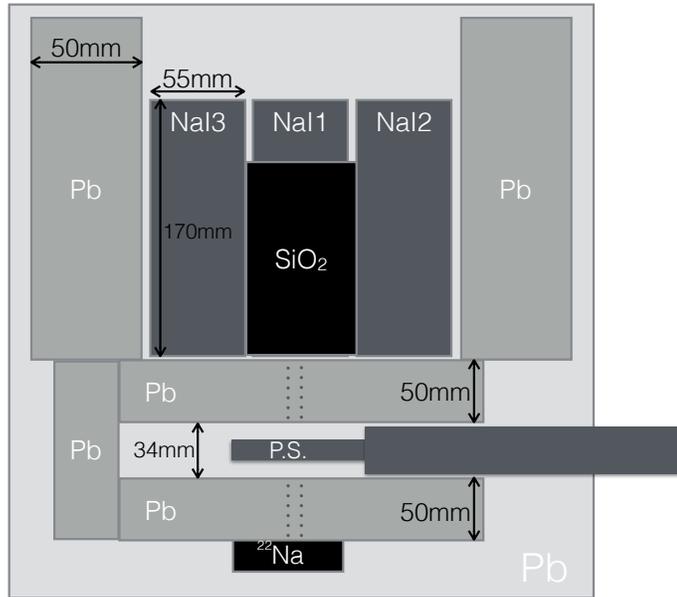


図 3.1: セットアップの模式図



図 3.2: セットアップ

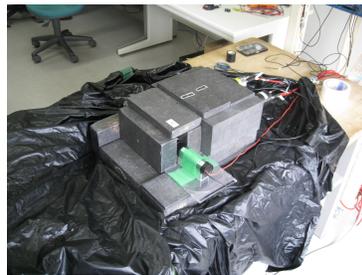


図 3.3: 鉛ブロックによる遮蔽



図 3.4: 遮光の様子

3.4 回路

回路は図 3.5 のように組んだ。また、図 3.6 に信号の概念図がまとめてある。現象の時系列は e^+ が P.S. を通過してから崩壊して γ 線を放出して NaI に検出されることから、P.S. の信号の方が先に来るので TDC の start を P.S. で初めて NaI で stop をかけたいところであるが、P.S. を通過した e^+ が必ずしも Ps を形成するとは限らない。このような実験に必要な信号は取り除きたいので、P.S. の信号を受け取った後 gate を開くと同時に veto によって引き続き P.S. にやってくる e^+ の信号を受け付けなくし、NaI と coincidence を取っている。ここで、Ps ができるだけ確実に崩壊するよう gate(および veto) を開く時間は o-Ps の寿命より十分長い時間をとる。ただし、この coincidence をとる操作によって TDC の start を決めるのは NaI になってしまったので、stop は P.S. がかけなければ寿命の測定という本実験の目的が達成できない。しかし、このままでは時系列が逆転してしまうので P.S. の信号を遅らせることでこれを解消する。この遅延時間は崩壊時間が遅い Ps もできるだけ測定できるように、818ns と多くとった。また、時系列を逆にして測定しているため、Ps の寿命は図 3.6 にあるように 818ns から TDC の (値を時間に直した) 値を引いた時間となる。小さいエネルギーの e^+ 及び γ 線も測定したいので threshold の値 (絶対値) は小さく設定した。

ADC のヒストグラムをみると、滑らかなピークがひとつあり (図 4.1 参照)、これは p-Ps の崩壊による γ 線の 511keV のピークに対応する。各 ADC の値を揃えるためにこの 511keV に対応するピークの数値を参考に HV の値を調整した。ただし、信号が来ていない時の ADC の値は 0 ではなく、ある決まった値 (ペDESTAL) を返すので、正確にはピークとペDESTAL の差を揃えた。表 3.1 に HV とその時の ADC の値を示してある。

表 3.1: HV の調整

	HV[V]	ペDESTAL	ピーク	差
NaI1	1250	203	965	762
NaI2	1350	187	920	733
NaI3	1110	223	937	714

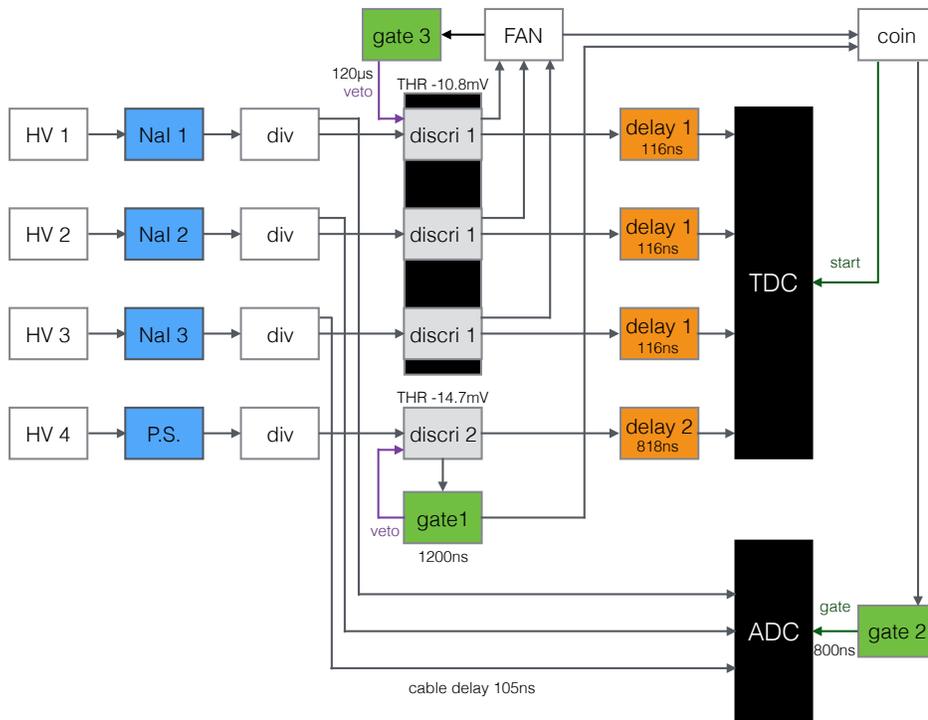


図 3.5: 回路の概略図

上の概略図における記号の補足

HV negative high voltage. 光電子増倍管に負の電圧を印加する。

div divider. 入力された信号を 2 つに分ける。

discri discriminator. 入力信号が threshold を負の方向へ越えた時、NIM 信号を出力する。

coin coincidence. すべての入力端子に同時に信号入力された時、(NIM) 信号を出力する。

gate gate generator. 信号が入力された時、設定した時間幅の NIM 信号を出力する。

delay 入力信号を設定した時間だけ遅らせて出力する。

FAN 入力端子のいずれかに信号が入ると、信号を出力する。

TDC time to digital converter. start に信号が入ってから、stop に信号が入るまでの時間に比例した大きさの値の出力を返す。

ADC analog to digital converter. gate が開いている間に入力された信号の総和 (積分) に比例した大きさの値の出力を返す。

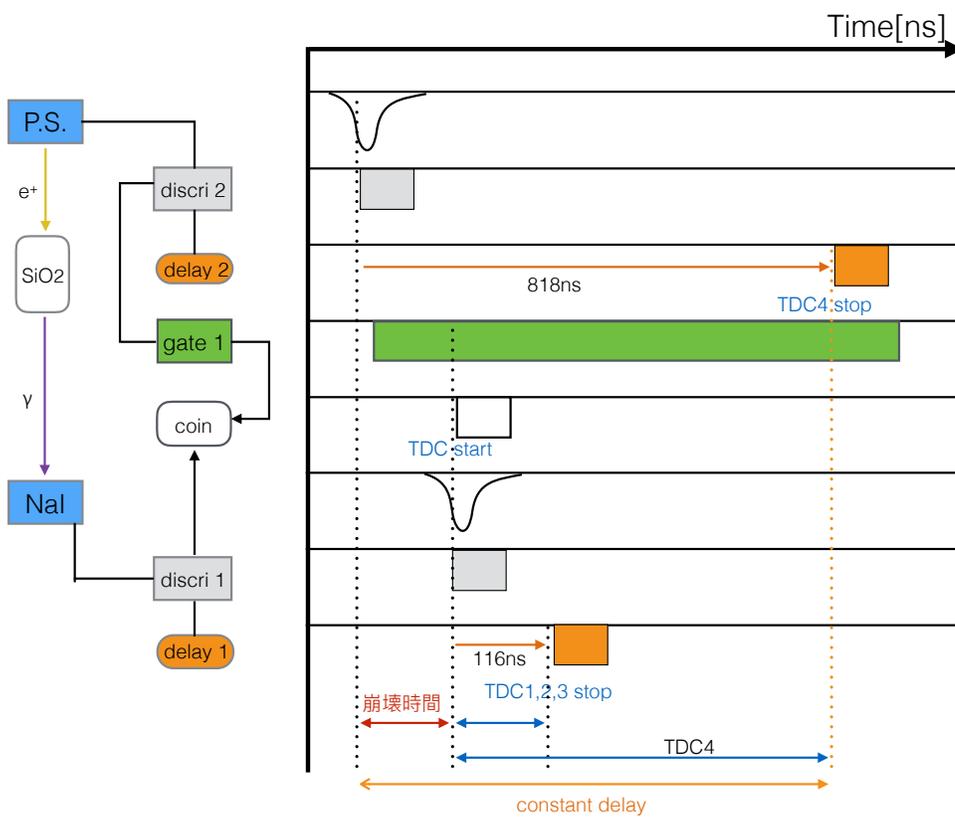


図 3.6: 信号の概念図

第4章 データ解析

2016年2月5日から3月29日まで約54日間データを取り続けた。合計2559071event得られ、トリガーレートは約0.55Hzであった。

4.1 Calibration

4.1.1 ADC Calibration

ADCは、入力された信号の面積（エネルギーに比例する。）に対応して0~4095までの整数値を返す。したがって、ADCの出力値と実際のエネルギーの値の対応関係を知る必要がある。そこで、線のエネルギー値とADCの出力値との間に線形関係があると仮定し、定数a,bを用いて

$$(\text{線のエネルギー値 [keV]}) = a \times (\text{ADCの出力値}) + b$$

として、各NaIシンチレーターごとの対応関係を求めた。その際、Psの崩壊時に放出される511keVの線とペDESTAL(0keV)を基準として用いた。ADCの生データは図4.1に示す通りであり、図4.2のようにフィッティングを行ってそれぞれのエネルギーに対応するADCの出力値を求めた。その結果は以下の表4.1に示す通りである。

表 4.1: ADCの出力値とエネルギー値の関係

	0keV	511keV
ADC1	202	934
ADC2	182	880
ADC3	223	871

その結果から、以下の式が得られた。

$$E_1[\text{keV}] = 0.698 \times (\text{ADC1} - 141.0)$$

$$E_2[\text{keV}] = 0.732 \times (\text{ADC2} - 133.2)$$

$$E_3[\text{keV}] = 0.789 \times (\text{ADC3} - 175.9)$$

この式を用いて Calibration を行った後のグラフを図4.3に示す。

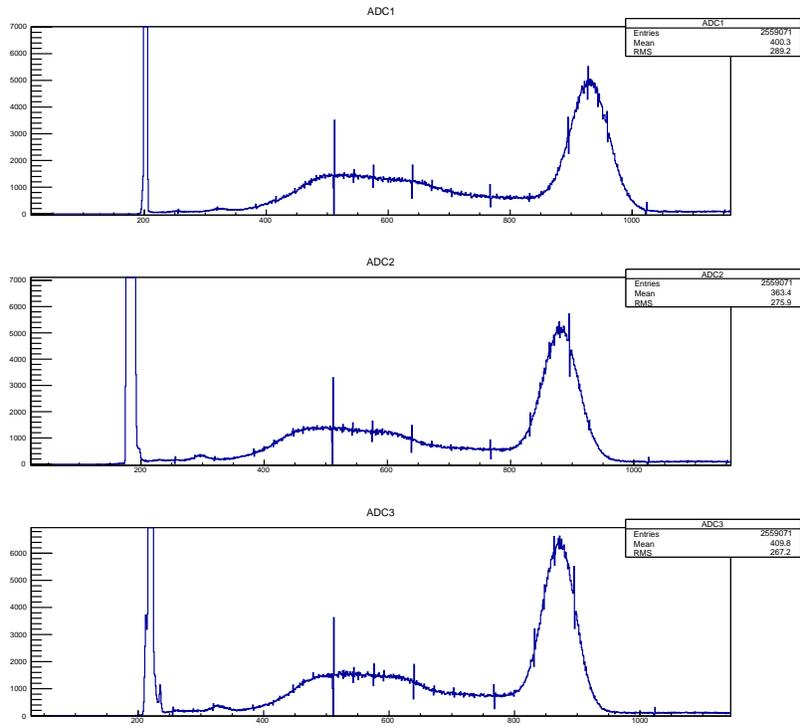


図 4.1: ADC の生データ (横軸は CH)

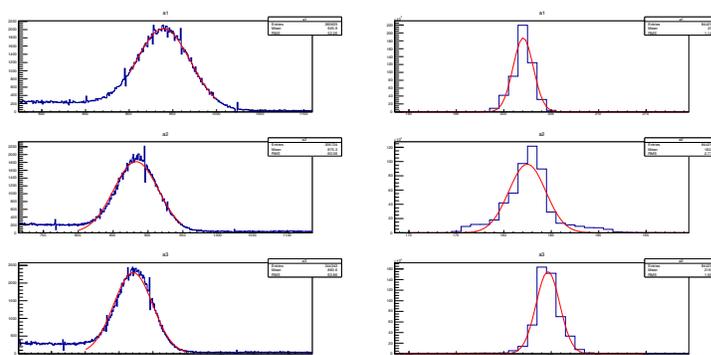


図 4.2: フィッティングの様子 (左が 511keV、横軸:CH)

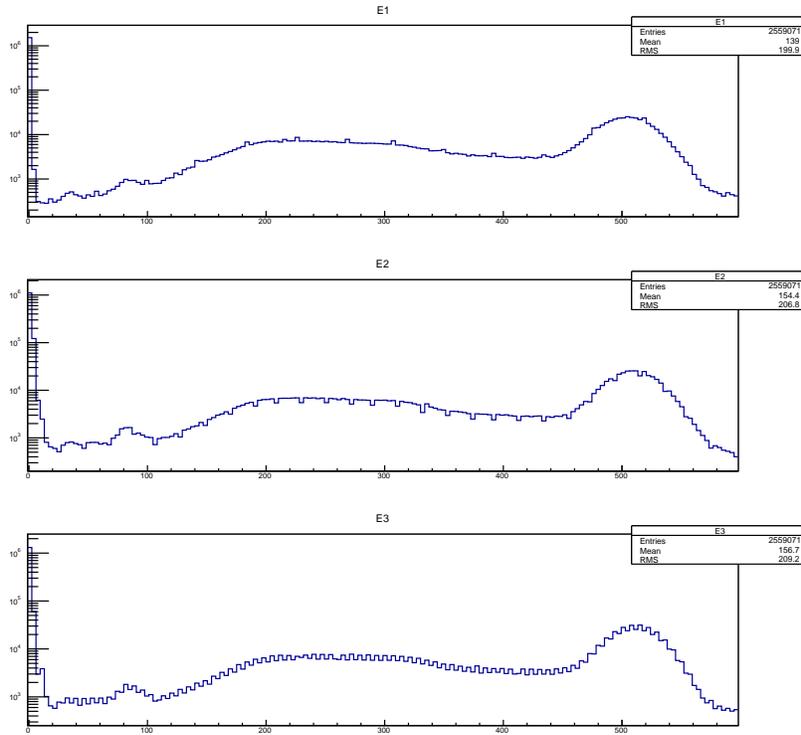


図 4.3: Calibration 後のグラフ (横軸はエネルギー [keV]、縦軸は対数目盛り)

4.1.2 TDC Calibration

TDC は時間に対応して 0~4095 までの整数値を返す。したがって、ADC の場合と同様に、実際の時間と TDC の出力値の対応関係を求める必要がある。そこで、ここでも線形関係を仮定し、定数 a, b を用いて

$$(\text{時間 [ns]}) = a \times (\text{TDC の出力値}) + b$$

として求めた。ただし、今回 TDC1~3 は一定値を返すのみで実際に時間を測っているのはプラスチックシンチレータとつながっている TDC4 だけであるから、TDC4 の出力値と時間の対応を求めればよい。そのための方法として、本実験では 1 つのスタート信号と異なる時間の fixed delay を用意し、実際の fixed delay の時間と TDC の出力値を対応させた。なお、実際の fixed delay の時間間隔はオシロスコープを用いて目視で測定した。その結果得られた関係を以下の表 4.2 に示す。

また、この結果を用いてフィッティングを行い(図 4.4)、以下の式を得た。

$$\text{Time[ns]} = 0.251 \times \text{TDC4} - 16.3$$

ただし、本実験においては TDC のスタートとストップの役割が実際の反応とは逆になっているため、実際の反応の時間としては ch が大きいほど速いということになる。そこで、正負を反転させ、 $ch4095$ を $0[\text{ns}]$ と定めると、結局以下の式が得られる。

$$\text{Times[ns]} = -0.251 \times \text{TDC4} + 1027.8$$

表 4.2: TDC の出力値と時間の関係

delay[ns]	TDC4
116.5	523
232.0	990.3
347	1452
466	1919.5
582	2387
701	2858.2
818	3320.5

TDC の生データを図 4.5 に、TDC4 の Calibration 及び反転後のグラフを図 4.6 に示す。

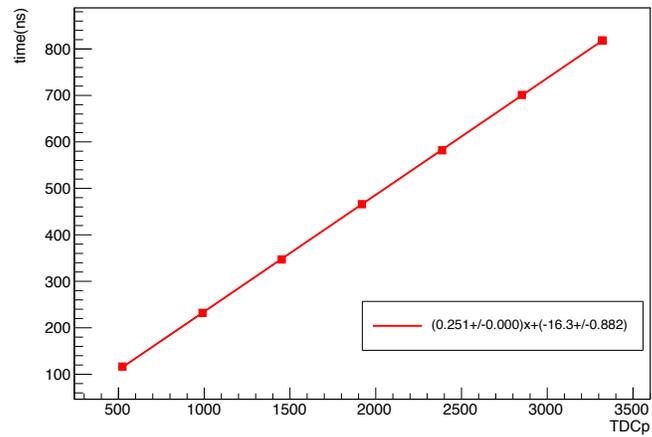


図 4.4: フィッティングの様子 (横軸:CH)

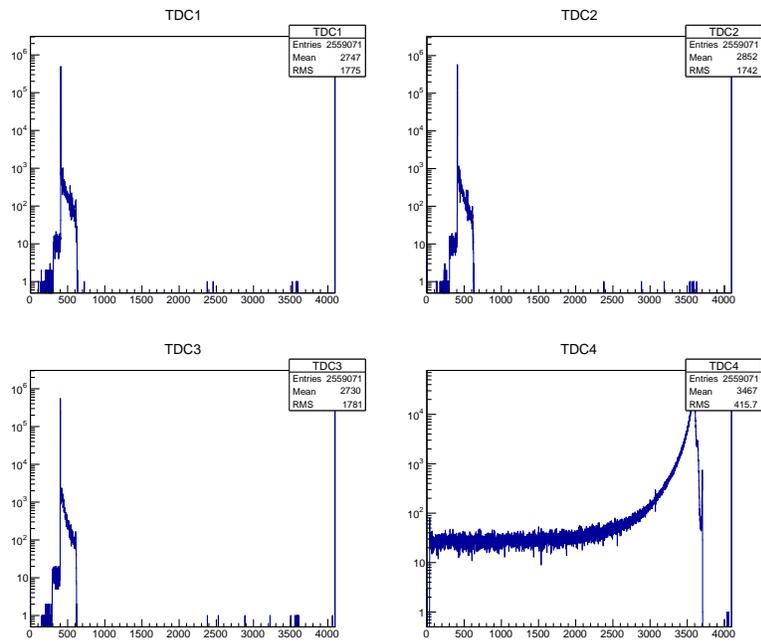


図 4.5: TDC の生データ (横軸:CH、縦軸は対数目盛り)

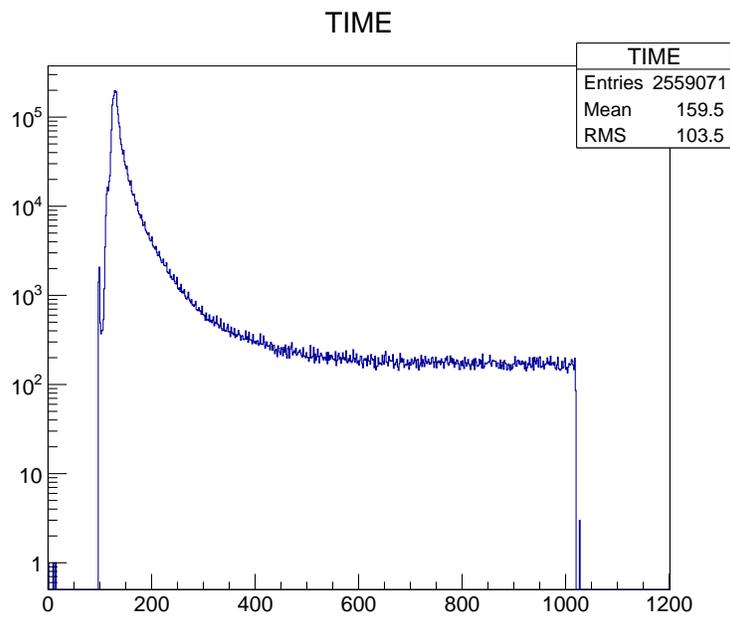


図 4.6: TDC Calibration 後の時間グラフ (横軸:時間 [ns])

4.1.3 データの抽出

ここで、得られた全データのうち宇宙線や熱電子によるもの、Psの崩壊の際に複数のNaIで線を検出したものなど、寿命を測る上で不適切であるものを除く。実験装置のセットアップにより、本実験で観測しようとしている反応の場合、線の入射したNaIにつながるTDCは各々の決まった値(およそ400)を返し、TDC4を除く残りのTDCはストップ信号がないため4095、さらに残り2つのNaIに繋がったADCは0に近いエネルギーを返すことになる。したがって、この条件を満たすデータのみを抽出して以降の解析を行った。これまでのCalibrationと抽出により得られたエネルギーと時間の2次元分布図は図4.7の通りである。

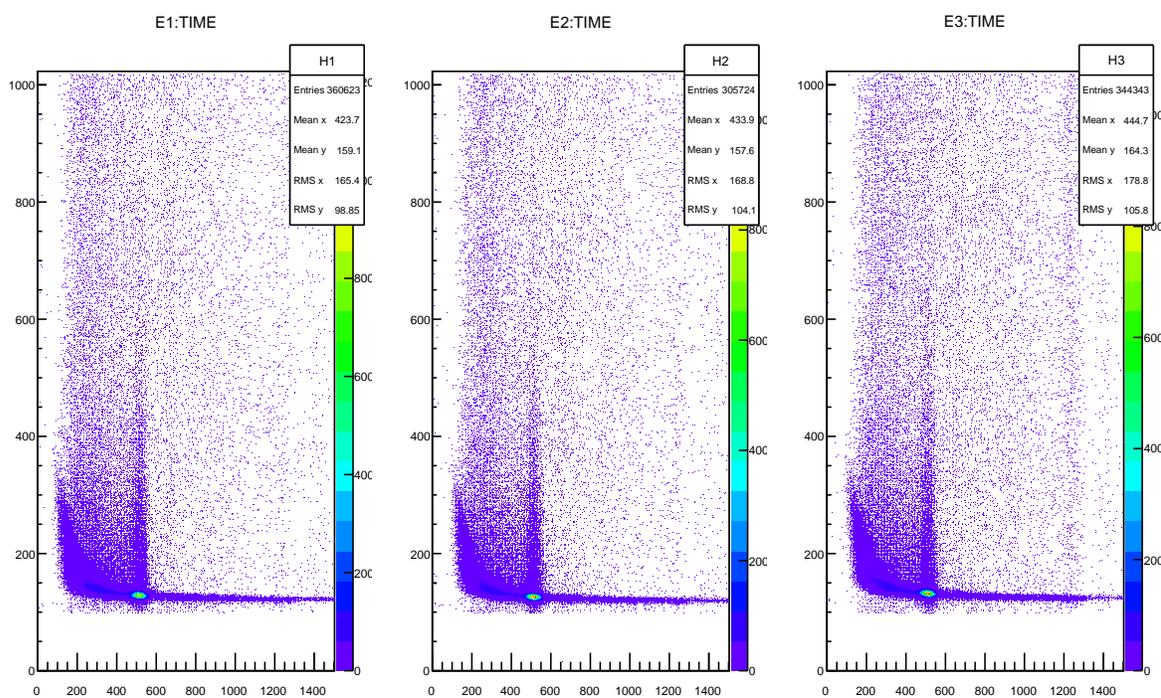


図 4.7: 二次元分布図 (縦軸:時間 [ns]、横軸:エネルギー [keV])

4.2 TQ 補正

4.2.1 TQ 補正とは

図 4.8 のように、NaI から発せられた信号は、立ち上がるのに時間がかかる。しかし、TDC のトリガーが発せられるのは信号が threshold を超えた時刻であるため、それにかかる時間の分だけ TDC の値は小さくなる。さらに、図 4.8 を見ればわかるように信号の大きさ (エネルギーの大きさ) によって信号が threshold を超えるまでの時間は異なるため、このままでは TDC の値が等しいものが等しい時間で崩壊したものだと言うことはできない。そこで、実際の寿命と観測された寿命の差 T を引いて補正することが必要である。これが TQ 補正であり、そのために以下の方法で T をエネルギーの関数として求めた。

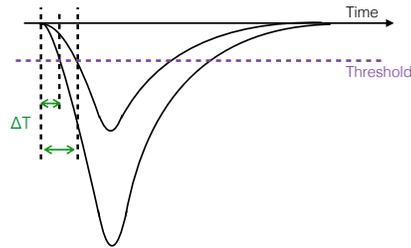


図 4.8: NaI からの信号の概略

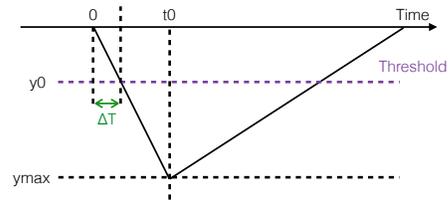


図 4.9: TQ 補正の概念

4.2.2 TQ 補正関数の作成

まず、一番簡単な近似として、NaI からの信号を図 4.9 のような三角形であると仮定して考える。さらに、

- ピークの位置 t_0 は、エネルギーの値によらない。
- 三角形の底辺の長さ (信号を受け取る総時間) は、エネルギーの値によらない。

とすると、三角形の高さ y_{max} は三角形の面積 (E) に比例するので、threshold の値を y_0 と置くと、

$$T(E) = \frac{y_0 t_0}{y_{max}} \propto \frac{1}{E}$$

と書ける (図 4.9 参照)。

以上は最も簡略化した近似であるが、実際には信号の形は三角形ではないこと (第 1 項の補正)、回路の遅れなど (第 2 項の追加) を考慮し、上記の式の骨格だけ採用して、フィッティング関数を

$$T(E) = \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} + p_3$$

とした。

TQ 補正は時間の原点を決める補正であるから、フィッティングに用いるデータとしては Ps がすぐに崩壊した現象のデータを抽出して用いるべきである。さらに、p-Ps など、できてすぐ崩壊するものは時間が経ってから崩壊するものよりも多いと考えられる。そこで、エネルギーの値 (図 4.7 の横軸) ごとに、最も点が密集している時間に対して 6 割以上の点があるところのみを抽出した。この抽出した点群に対して上記のフィッティング関数を適用すると、パラメーターとして表 4.3 に示す値が得られた。その様子は図 4.10 に示されている。また、この結果を用い、 T を引いて得られた TQ 補正後のエネルギー対時間の 2 次元分布図は図 4.11 の通りである。

表 4.3: TQ 補正のパラメーター

	p_0	p_1	p_2	p_3
NaI1	46737 ± 28507	76.7 ± 7.0	1.46 ± 0.11	122.016 ± 0.681
NaI2	48581 ± 25947	84.4 ± 5.7	1.48 ± 0.10	119.746 ± 0.575
NaI3	42297 ± 19910	86.5 ± 5.4	1.42 ± 0.09	123.841 ± 0.631

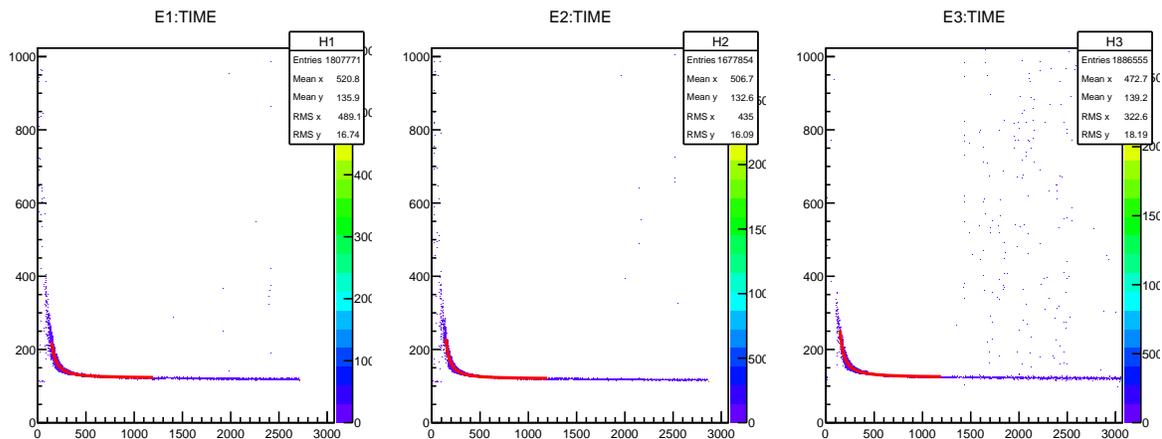


図 4.10: 抽出及び TQ 補正関数のフィッティングの様子 (縦軸:時間 [ns]、横軸:エネルギー [keV])

4.2.3 TQ 補正後の寿命

これまでに得られた TQ 補正後のデータを用いて一度 o-Ps の寿命を求めてみた。補正後の図の 220ns~920ns の範囲で、フィッティング関数を

$$count = p_0 \times \exp\left(-\frac{Time}{p_1}\right) + p_2$$

としてフィッティングを行った。ここで、 p_1 が求める寿命 t_{ortho} である。フィッティングの様子と結果は、図 4.12 と表 4.4 の通りである。

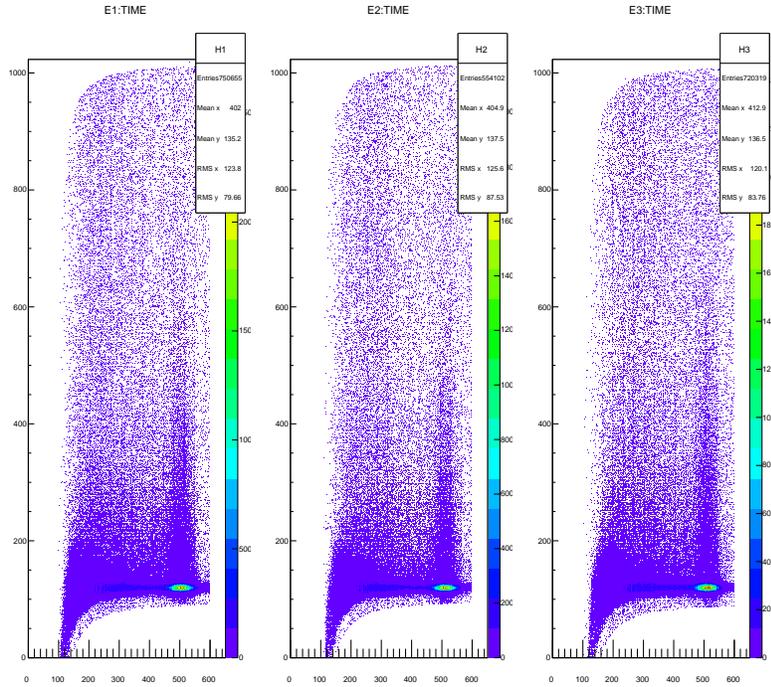


図 4.11: TQ 補正後の二次元分布図 (縦軸:時間 [ns]、横軸:エネルギー [keV])

表 4.4: 寿命のフィッティングのパラメーター

	p_0	p_1	p_2
NaI1	1680	89.6 ± 2.0	18.4
NaI2	1030	92.1 ± 2.9	17.1
NaI3	1070	100 ± 2.6	18.6

これより、検出器ごとに算出した o-Ps の寿命は以下ようになる。これらの値は、pick-off 反応を考慮していないため理論値と比べて小さくなっている。

NaI1 : 89.6ns

NaI2 : 92.1ns

NaI3 : 100ns

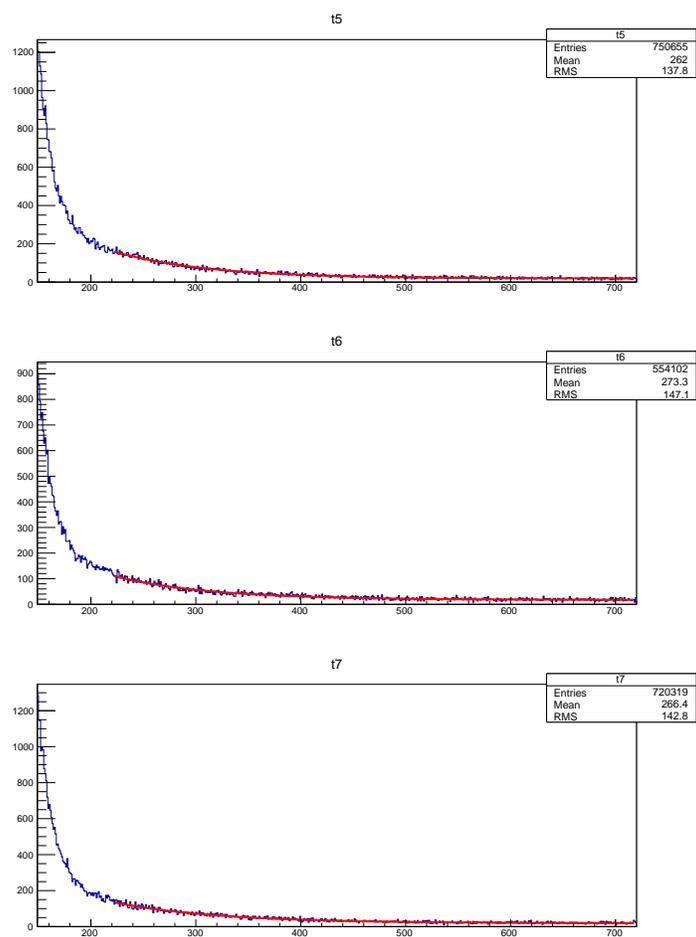


図 4.12: TQ 補正後の寿命のフィッティング (横軸:時間 [ns]、縦軸:count)

4.3 pick-off 補正

4.3.1 pick-off 補正とは

物質中では、Ps は次のような物質との相互反応を起こして崩壊することがある。

- pick-off 反応...o-Ps が生成された後、o-Ps の陽電子が、周囲の物質の電子と相互作用を起こし対消滅してしまう反応
- スピン交換反応...生成した o-Ps が、対電子を持つ酸素分子とスピン交換反応を起こし、p-Ps に変化してしまう反応
- 化学反応...Ps は構造が水素と近いので化学反応を起こす。例えば酸化反応の場合、Ps が酸化され、裸になった陽電子が自由な状態となって対消滅などを起こす。

これらの相互作用による崩壊 (*pick-off*) と o-Ps の直接 3 への崩壊 (*ortho*) が競合するため、崩壊幅は以下のように書ける。

$$obs = ortho + pick-off$$

ここで、*obs* は実験で測定することのできる値である。本実験では、次節で述べるような方法で *pick-off* を見積もり、解析を行った。

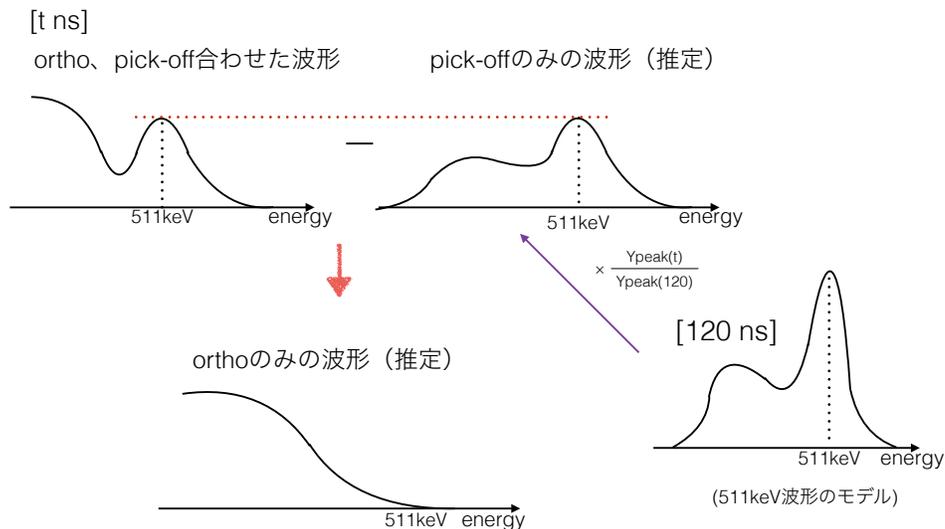


図 4.13: pick-off 補正の概念図

4.3.2 pick-off 補正関数の作成

本実験で観測された反応は、o-Ps の崩壊、上記の相互反応による崩壊、p-Ps の崩壊の 3 パターンであり、このうち o-Ps は (主に)3 に崩壊し、その他は (主に)2 に崩壊する。また、p-Ps は寿命が極端に短い。このことから、511keV のピークのうち、本実験において Ps が生成された時刻である 120ns 付近のものは p-Ps の崩壊によるものであり、それより遅いものは上記の相互反応による崩壊のものと考えられる。また、500keV 以下に見られるデータは、これらの 511keV ピークの compton 散乱によるものと、o-Ps の崩壊によるものが混ざっている。ただし、120ns 付近においては p-Ps の崩壊が圧倒的に多い (節末の (補足) 参照) ことから、o-Ps の崩壊によるものの割合は小さいと考えられる。従って、120ns 付近における波形は 511keV のピークとその compton 散乱の波形のモデルとして適していると言える。今回の解析では、511keV のピークと compton 散乱による波形が各時刻で相似であると考え、それを取り除くことで o-Ps の反応を取り出した。

具体的には、120ns で 511keV のピークの高さを任意の時刻での 511keV のピークの高さに調節し、これを各時刻における 511keV ピークと compton 散乱による波形であると考え。そして、これを各時刻のデータから引いた差分を、o-Ps の崩壊スペクトルであるとみなす (図 4.13 参照)。

ただし実際には、差分を求めるのではなく各時刻における event 数のうち pick-off 反応によるものの割合 (崩壊幅の比) を求め、これを寿命を求める式に組み込むという方法によって補正を行った。すなわち、時刻 t での相互作用における崩壊と o-Ps の崩壊の検出数を $N_{pick-off}$ 、 N_{ortho} として、

$$f(t) = \frac{pick-off}{ortho} = \frac{N_{pick-off}(t)}{N_{ortho}(t)}$$

と書ける pick-off 補正関数 $f(t)$ を用いて解析を行った。

(補足)

TQ 補正後の寿命のフィッティング関数を 120ns まで外挿して得られた値が実際の 120ns での event 数の 200 分の 1 程度であったことからこのように判断した。

4.3.3 pick-off 補正関数の作成方法

実際に pick-off 関数を求める際には、175ns~825ns のデータを 50ns ごとに区切ったものと、115~125ns のデータを用いた。それぞれの 511keV ピークを $y_{peak}(t)$ 、event 総数を $S(t)$ とすると、前節より時刻 t での $N_{pick-off}(t)$ は

$$N_{pick-off} = \frac{y_{peak}(t)S(120)}{y_{peak}(120)}$$

であるから、

$$f(t) = \frac{N_{pick-off}(t)}{S(t) - N_{pick-off}(t)} = \frac{y_{peak}(t)S(120)}{y_{peak}(120)S(t) - y_{peak}(t)S(120)}$$

となる。このようにして 50ns ごとの $f(t)$ を得、次式でフィッティングしたものを pick-off 補正関数として採用した。

$$f(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2$$

以下の表 4.5、4.6 及び図 4.14 に得られた値と補正関数を示す。

表 4.5: $f(t)$ の値

	NaI1	NaI2	NaI3
200	0.8483	0.8391	0.8317
250	0.7973	0.7689	0.8127
300	0.7023	0.5476	0.6612
350	0.5089	0.4067	0.3972
400	0.3937	0.3789	0.4030
450	0.2136	0.2275	0.2056
500	0.2329	0.1788	0.2218
550	0.1684	0.1378	0.1713
600	0.1407	0.1469	0.1375
650	0.1482	0.1243	0.1148
700	0.1691	0.1259	0.1960
750	0.1334	0.1163	0.1243
800	0.1383	0.1337	0.1000

表 4.6: $f(t)$ のフィッティングパラメーター

	p_0	p_1	p_2
NaI1	2.307 ± 0.390	205 ± 36	0.059 ± 0.049
NaI2	2.620 ± 0.379	172 ± 21	0.076 ± 0.027
NaI3	2.374 ± 0.445	197 ± 37	0.053 ± 0.049

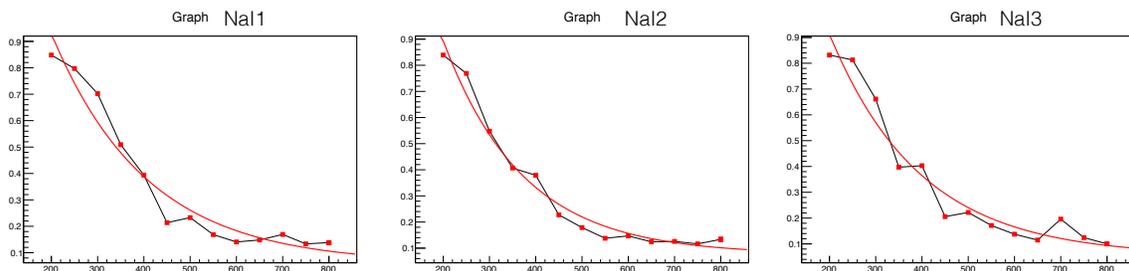


図 4.14: pick-off 補正関数 (横軸:時間 [ns]、縦軸: $f(t)$)

4.3.4 pick-off 補正後の寿命

これまでで得られた $f(t)$ を用いて、再度寿命を評価した。全体の崩壊幅は

$$obs = ortho + pick-off = \frac{1 + f(t)}{t_{ortho}}$$

であることから、時刻 t における o-Pos の数を $N(t)$ とおくと、微分方程式

$$\frac{dN(t)}{dt} = -N(t) \times (ortho + pick-off) = \frac{N(t)}{t_{ortho}} \times (1 + f(t))$$

が成り立つ。これを解くと、

$$N(t) = \exp\left(-\frac{1}{t_{ortho}} \int dt(1 + f(t))\right)$$

となる。観測しているデータは崩壊する o-Pos の数、すなわち $-dN(t)/dt$ であるから、再度微分して

$$-\frac{dN(t)}{dt} = N_0(1 + f(t)) \times \exp\left(-\frac{1}{t_{ortho}} \int dt(1 + f(t))\right)$$

を得る。この式中の定数をパラメーターで置き換え、

$$p_0(1 + f(t))\exp\left(-\frac{1}{p_1} \int dt(1 + f(t))\right) + p_2$$

という形で、pick-off 補正前と同じ時間範囲でフッティングを行った。寿命を表すのは p_1 である。その結果は以下の表 4.7 と図 4.15 に示す。

表 4.7: 寿命のフィッティングパラメーター

	p_0	p_1	p_2
NaI1	2036	169.9 ± 3.7	16.59
NaI2	1346	176.5 ± 5.4	15.20
NaI3	1419	179.5 ± 4.6	18.11

従って、検出器ごとに算出した o-Pos の寿命は、

NaI1 : 169.9ns

NaI2 : 176.5ns

NaI3 : 179.5ns

となった。

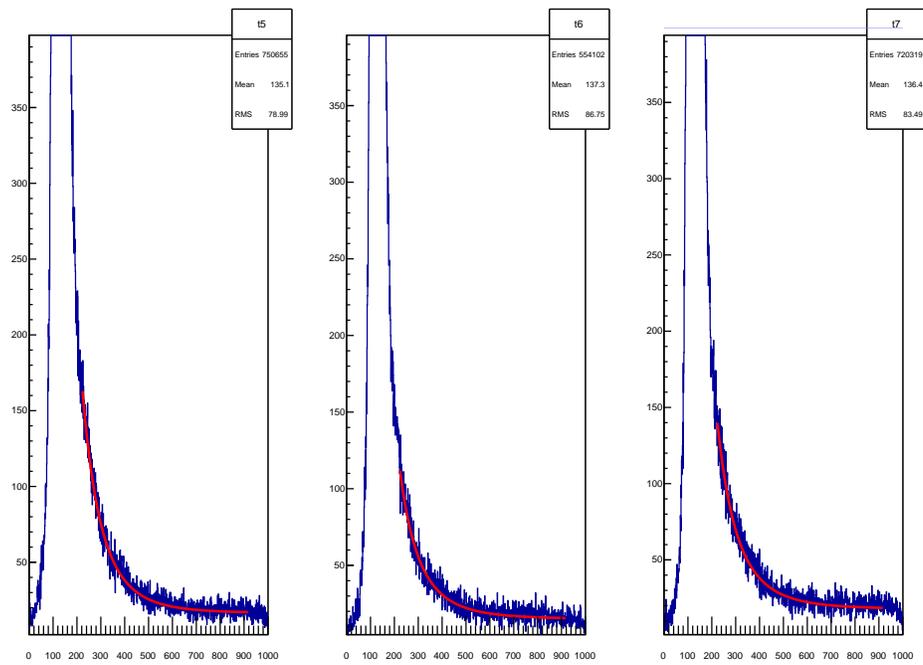


図 4.15: 寿命のフィッティングの様子 (横軸:時間 [ns]、縦軸:count)

第5章 考察

5.1 統計誤差の評価

解析を行う過程で生じる統計的な誤差について、誤差伝搬の公式

where $q = q(x_1, \dots, x_n)$

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial x_n} \delta x_n\right)^2} \quad (5.1)$$

を用いて評価する。

5.1.1 TQ 補正関数の誤差

TQ 補正関数に対して誤差伝搬の式を用いると、

$$\Delta T = \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \delta \Delta T &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_0} \delta p_0\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_1} \delta p_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial p_2} \delta p_2\right)^2} \\ &= \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} \sqrt{\left(\frac{\delta p_0}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{E - p_1} \delta p_1\right)^2 + (\log(E - p_1) \delta p_2)^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

この誤差を考慮した新たな TQ 補正関数 $\Delta T + \delta \Delta T$, $\Delta T - \delta \Delta T$ を用いて TQ 補正を行い、寿命を求めると次のようになった。

$$\Delta T + \delta \Delta T$$

NaI1 : 91.4 ± 2.5 ns

NaI2 : 91.5 ± 3.5 ns

NaI3 : 100 ± 3.3 ns

$$\Delta T - \delta \Delta T$$

NaI1 : 62.5 ± 1.1 ns

NaI2 : 67.1 ± 2.0 ns

NaI3 : 85.2 ± 2.3 ns

NaI2 において誤差を考慮しない TQ 補正の後に求めた寿命が 92.1ns であるのに対し、誤差を正にとった寿命も負にとった寿命もそれより短くなっている。

実際に TQ 補正式の揺らぎに対する寿命の応答はそれほど単調なものではないはずなので誤差の範囲で最長の寿命と最短の寿命を求めるために TQ 補正関数として $\Delta T + \delta\Delta T$, $\Delta T + \frac{3}{4}\delta\Delta T$, $\Delta T + \frac{1}{2}\delta\Delta T$, ..., $\Delta T - \delta\Delta T$ と誤差 $\delta\Delta T$ の影響を 1/4 刻みにして TQ 補正を行い、寿命を求めた。

	$-\delta$	$-3/4\delta$	$-1/2\delta$	$-1/4\delta$	0	$+1/4\delta$	$+1/2\delta$	$+3/4\delta$	$+\delta$
NaI1	62.5	74.0	84.9	89.5	89.6	90.6	90.0	90.5	91.4
NaI2	67.1	78.1	84.6	87.9	92.1	89.3	91.6	90.5	91.5
NaI3	85.2	94.9	98.1	99.6	100	100	102	101	100

正の誤差を σ_{TQ1}^+ , σ_{TQ2}^+ , σ_{TQ3}^+ 、負の誤差を σ_{TQ1}^- , σ_{TQ2}^- , σ_{TQ3}^- とおくと、

$$\begin{aligned}\sigma_{TQ1}^+ &= 1.8\text{ns} & \sigma_{TQ2}^+ &= 0\text{ns} & \sigma_{TQ3}^+ &= 2\text{ns} \\ \sigma_{TQ1}^- &= 27.1\text{ns} & \sigma_{TQ2}^- &= 25.0\text{ns} & \sigma_{TQ3}^- &= 14.8\text{ns}\end{aligned}$$

と書けて、TQ 補正関数の誤差による寿命への影響は長寿命側には殆ど出ず、短寿命側には大きく出ることが分かる。

5.1.2 pick-off 補正関数の誤差

次に pick-off 補正関数 $f(t)$ のパラメータ q_0 , q_1 , q_2 の誤差が pick-off 補正後の寿命を求める g によるフィッティングに与える影響を見積もる。

$$g = p_0(1 + f(t)) \exp\left(-\frac{1}{p_1} \int dt (1 + f(t))\right) + p_2 \quad (5.4)$$

$$f(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) + q_2 \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}\delta g &= p_0 \exp\left\{-\frac{1}{p_1} \left(t(1 + q_2) - q_0 q_1 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right)\right)\right\} \\ &\times \left[\left\{ \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) \left(1 + \frac{q_1}{p_1} \left(1 + q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) + q_2\right)\right) \delta q_0 \right\}^2 \right. \\ &+ \left. \left\{ q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) \left(\frac{t}{q_1^2} + \frac{1}{p_1} \left(1 + \frac{t}{q_1}\right) \left(1 + q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) + q_2\right)\right) \delta q_1 \right\}^2 \right. \\ &+ \left. \left. \left\{ \left(1 - \frac{t}{p_1} \left(1 + q_0 \exp\left(-\frac{t}{q_1}\right) + q_2\right)\right) \delta q_2 \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)\end{aligned}$$

TQ 補正同様 δg の寿命に対する影響は単調ではないため、 $\frac{1}{4}\delta g$ 刻みで寿命を求めるフィッティングを行った。結果を以下に示す。

	$-\delta$	$-3/4\delta$	$-1/2\delta$	$-1/4\delta$	0	$+1/4\delta$	$+1/2\delta$	$+3/4\delta$	$+\delta$
NaI1	226	206	182	151	170	196	205	210	213
NaI2	212	193	170	142	177	207	219	226	231
NaI3	233	209	183	151	180	210	221	228	232

正の誤差負の誤差をそれぞれまとめると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{po1}^+ &= 56\text{ns} & \sigma_{po2}^+ &= 54\text{ns} & \sigma_{po3}^+ &= 53\text{ns} \\ \sigma_{po1}^- &= 19\text{ns} & \sigma_{po2}^- &= 35\text{ns} & \sigma_{po3}^- &= 29\text{ns} \end{aligned}$$

5.1.3 統計誤差のまとめ

ここまでで得られた誤差の寿命への伝播と pick-off 補正後のフィッティングそのものの誤差を正負に分けて次のような式でまとめる。

$$\sigma_1^+ = \sqrt{(\sigma_{TQ1}^+)^2 + (\sigma_{po1}^+)^2 + (\sigma_{fitting1})^2} \quad (5.7)$$

計算結果を以下に示す。

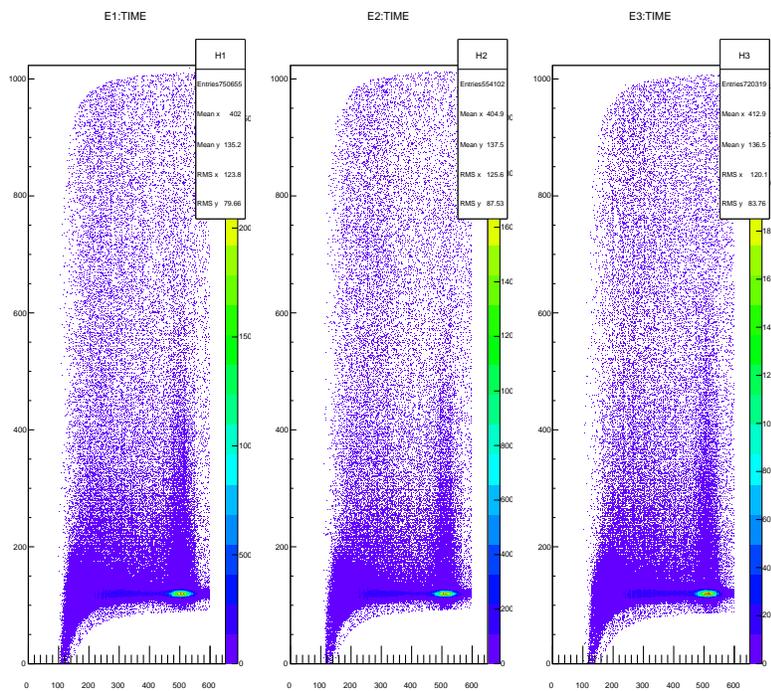
$$\begin{aligned} \sigma_1^+ &= 56.2 & \sigma_1^- &= 33.3 \\ \sigma_2^+ &= 54.3 & \sigma_2^- &= 43.3 \\ \sigma_3^+ &= 53.2 & \sigma_3^- &= 32.9 \end{aligned}$$

前章の NaI3 の解析によって得られた寿命は 179.5ns であり、理論値はこの統計誤差の範囲にない。また、他の 2 つに関しても測定値が理論値よりも長い傾向にある。

5.2 長寿命と測定される要因

TQ 補正後のエネルギー対時間の二次元分布図をもう一度ここに示す。この図からわかるように、特に低エネルギー帯で顕著だが、今回の解析においてただちに崩壊した時に出力される時間とした 120ns よりも短い時間範囲に分布が存在する。寿命を求めるフィッティングで使ったのは 120ns よりも上の範囲なのでこれらのデータは捨てたことになる。もしこれらのデータが 120ns に集まり、捨てられない形で解析されればピークが高く、傾きが急になり短寿命の結果が出ると予測される。実際に TQ 補正の誤差伝搬を $\Delta T - \delta\Delta T$ ととり、120ns より短い範囲の分布が減った状態で寿命を出すと大きく短寿命側に振れることは上に確認した通りである。

この問題の対策としてスレッシュホールドを下げて出来る限り立ち上がりの速さによる時間差を縮め、TQ 補正の重みを減らすことが考えられる。



謝辞

今回実験を進めるにあたって、半年間懇切丁寧に指導、助言して頂いた石野雅也さんと、隅田土詞さんに感謝いたします。また、実験にお付き合いいただき手助けをして頂いた TA の廣田誠子さんと野口陽平さんに感謝いたします。

参考文献

1. J.J. サクライ著 樺沢宇紀訳 (2010) 『サクライ「上級量子力学」第 II 巻 共変な摂動論』丸善プラネット株式会社.
2. 西島和彦著 (1997) 『場の理論』紀伊國屋書店
3. 2014 年度前期 A2 課題演習レポート.

http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/research/ATLAS/dokuwiki/lib/exe/fetch.php?media=education:2014a_a2_report.pdf