

2016 前期物理学課題演習 A2 レポート

奥野 友則・小田川 高大・徳宿 光子・増井 陸・天野 雄輝

2016 年 10 月 15 日

概要

ポジトロニウム (Ps) は e^- と e^+ の束縛状態であり, 1960 年代後半から量子電磁気学 (QED) の検証に用いられてきた。ポジトロニウムにはそれを構成する e^- と e^+ のスピンの向きによってパラポジトロニウム (p-Ps) とオルソポジトロニウム (o-Ps) と分かれる。今回の実験では物理学課題演習 A2 の一環として, プラスチックシンチレータと NaI シンチレータ, およびシリカパウダーなどを用いて o-Ps の寿命を測定した。その結果, 寿命として各種補正をかけて $147.2^{+4.09}_{-4.46}$ ns という値が得られた。QED から理論的に導かれる寿命が 139 から 142 ns であるから, 得られた結果と誤差は QED の理論に肯定的な結果の範囲内であると言える。

目次

第1章	イントロダクション	3
第2章	理論	4
2.1	Positronium の崩壊	4
2.2	単位系	4
2.3	$e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$ の不変散乱振幅	4
2.4	$e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$ の散乱断面積	7
2.5	para-positronium の寿命	9
2.6	$e^-e^+ \rightarrow 3\gamma$ の散乱断面積	9
2.7	ortho-positronium の寿命	12
第3章	セットアップ・実験原理	13
3.1	実験原理	13
3.2	実験器具	13
3.3	セットアップ	13
3.4	回路図	15
3.5	TQ 補正	16
3.5.1	TQ 補正	16
3.5.2	TQ 補正関数	16
3.6	pick-off 補正	17
3.6.1	pick-off 補正とは	17
3.6.2	pick-off 補正の考え方	18
3.6.3	pick-off 補正関数の作成	18
3.6.4	pick-off 補正後の寿命	19
第4章	データ解析・結果	20
4.1	Calibration	20
4.1.1	ADC Calibration	20
4.1.2	TDC Calibration	21
4.1.3	TQ 補正	24
4.1.4	pick-off 補正	25
第5章	考察	27
5.1	γ 線の直接入射による影響	27
5.2	ADC2 の pedestal 下の分布について	27
5.3	粒子の移動時間による誤差	28
5.4	統計誤差	28
5.4.1	TQ 補正関数の誤差	28
5.4.2	pick-off 補正関数の誤差	29
5.4.3	統計誤差のまとめ	30

第6章 まとめ	31
謝辞	31
参考文献	32

第1章 イントロダクション

ポジトロニウム (Ps) は電子と陽電子が電氣的に束縛された原子のようなものであり、エキゾチック原子と呼ばれるものの一種である。水素原子に近い構造を持つが、その安定性には大きな違いがあり、短時間で崩壊する。また、次章で述べるようにポジトロニウムにはスピンの状態に応じてオルソポジトロニウムとパラポジトロニウムの2種類があり、これらの間でも崩壊時間に差が生じる。他方で電子-陽電子の対消滅の過程は QED において最も基本的である。そこで今回の実験では、 ^{22}Na を e^+ 供給源として、またシリカパウダーを e^- の供給源として用いてセットアップを組み、オルソポジトロニウムが生成されてから対消滅するまでの時間を実験的に求め、これと理論値との比較、検討を行った。

第2章 理論

2.1 Positronium の崩壊

ポジトロニウム (Ps) は先に述べたように電子と陽電子から成り、粒子と反粒子とはスピンの大きさが等しいため、大きさ $\frac{1}{2}$ のスピンを持つフェルミオンの 2 粒子系である。よって 2 電子系と同じように粒子の互換に関して波動関数全体は反対称となり、スピン部分に限って見れば対称なスピン三重項 ($|++\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), |--\rangle$)、及び反対称なスピン一重項 ($\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$) が存在し、これらはそれぞれ全スピンの $S = 1, S = 0$ の状態に対応していて、ポジトロニウムの場合には前者をオルソポジトロニウム (o-Ps)、後者をパラポジトロニウム (p-Ps) と呼ぶ。次にこれらの崩壊の仕方の違い、具体的には電子と陽電子が対消滅したときに出る γ 線の本数の違いについて簡単に考察する。まず、運動量の保存のために Ps 中の電子と陽電子の対消滅には少なくとも 2 つの光子の放出を伴う必要がある。また、荷電共役変換に関して p-Ps は奇、o-Ps は偶であることから、それぞれ奇数個、偶数個の光子が放出される。これらを合わせて考えると p-Ps は 3, 5, 7, \dots 、o-Ps は 2, 4, 6, \dots 個の光子を放出するが、前者では 5 個以上、後者では 4 個以上の光子の放出は高次の摂動項の寄与であるため、これらを無視して考えて各々の Ps の状態の寿命は p-Ps では 3 光子、o-Ps では 2 光子への崩壊のみを考えることで近似的に求まる。以下の § で寿命の理論計算を詳しく見ていく。

2.2 単位系

この章においては、光速 $c = 1$ 、Dirac 定数 $\hbar = 1$ とした単位系を用い、電磁気の単位系は Heaviside-Lorentz 単位系を用いる。また、Minkowski 時空の計量は、 $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ を用いる。

2.3 $e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$ の不変散乱振幅

$e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$ の散乱断面積を計算し、それを用いて寿命を計算する。

electron, positron, 2 つの photon の 4 元運動量を $(p_1^\mu) = (E_1, \mathbf{p}_1), (p_2^\mu) = (E_2, \mathbf{p}_2), (k_1^\mu) = (\omega_1, \mathbf{k}_1), (k_2^\mu) = (\omega_2, \mathbf{k}_2)$ とする。始状態、終状態は、

$$|i\rangle = b_{s_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) d_{s_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) |0\rangle \quad (2.1)$$

$$|f\rangle = a_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) a_{\lambda_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) |0\rangle \quad (2.2)$$

である。ここで、各演算子は

$a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$: 偏光 λ 波数 k の photon の生成演算子

$b_s^\dagger(\mathbf{p})$: helicity s 運動量 \mathbf{p} の electron の生成演算子

$d_s^\dagger(\mathbf{p})$: helicity s 運動量 \mathbf{p} の positron の生成演算子

とする。各状態は次のように規格化されている:

$$\langle f|f\rangle = 2\omega_1 2\omega_2 V^2 \quad (2.3)$$

$$\langle i|i\rangle = 2E_1 2E_2 V^2 \quad (2.4)$$

ここで, $V = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) = \int d^3x e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{0}}$ は全空間の体積である. $\langle f|i \rangle$ を計算しよう. LSZ 公式によると,

$$\begin{aligned}
\langle f|i \rangle &= \langle 0|a_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1)a_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)b_{s_1}^\dagger(\mathbf{p}_1)d_{s_2}^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \\
&= \langle 0|\left(i\varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1)\int d^4x'_1 e^{-ik_1x'_1}(-\partial_1'^2)A_\mu(x'_1)\right) \\
&\quad \left(i\varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2)\int d^4x'_2 e^{-ik_2x'_2}(-\partial_2'^2)A_\nu(x'_2)\right) \\
&\quad \left(i\int d^4x_1 \bar{\Psi}(x_1)(i\overleftarrow{\not{\partial}}_1 + m)u_{s_1}(\mathbf{p}_1)e^{ip_1x_1}\right) \\
&\quad \left(-i\int d^4x_2 e^{ip_2x_2}\bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2)(-i\not{\partial}_2 + m)\Psi(x_2)\right)|0\rangle \\
&= -\varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1)\varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2)\int d^4x'_1 d^4x'_2 d^4x_1 d^4x_2 e^{-ik_1x'_1 - ik_2x'_2 + ip_1x_1 + ip_2x_2} \\
&\quad (-\partial_1'^2)(-\partial_2'^2)(i\overleftarrow{\not{\partial}}_1 + m)_{\alpha\beta}(-i\not{\partial}_2 + m)_{\gamma\delta} \\
&\quad u_{s_1}(\mathbf{p}_1)_\beta \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2)_\gamma \langle 0|A_\mu(x'_1)A_\nu(x'_2)\bar{\Psi}(x_1)_\alpha \Psi(x_2)_\delta|0\rangle
\end{aligned} \tag{2.5}$$

さて,

$$\begin{aligned}
&\langle 0|A_\mu(x'_1)A_\nu(x'_2)\bar{\Psi}(x_1)_\alpha \Psi(x_2)_\delta|0\rangle \\
&= \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu(x'_1)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\nu(x'_2)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x_1)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\delta(x_2)}\right)Z(J,\eta,\bar{\eta})\Bigg|_{J,\eta,\bar{\eta}=0}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
Z(J,\eta,\bar{\eta}) &= \exp(iW(J,\eta,\bar{\eta})) \\
&\propto \exp\left[ie\int d^4x\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(x)}\right)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\beta(x)}\right)\right]Z_0(J,\eta,\bar{\eta})
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$Z_0(J,\eta,\bar{\eta}) = \exp\left[i\int d^4x d^4y \bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right]\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J^\mu(x)\Delta_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\right] \tag{2.8}$$

$S(x), \Delta^{\mu\nu}(x)$ は, それぞれ Dirac 粒子, photon の propagator, η, J^μ は, それぞれ Dirac 粒子, photon の source である. W は Feynman diagram の和になっている. 特に, 次の Feynman diagram ($O(e^2)$) の寄与のみを考えることにする (図 2.1).

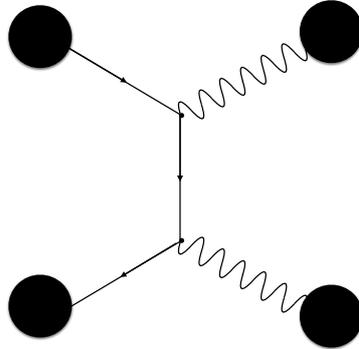


図 2.1: Feynman diagram.

$$\int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y'_1 d^4 y'_2 d^4 w_1 d^4 w_2 \bar{\eta}(y_2) S(w_2 - y_2) i e \gamma^\zeta S(w_1 - w_2) i e \gamma^\xi S(y_1 - w_1) \eta(y_1) \Delta_{\xi\rho}(w_1 - y'_1) J^\rho(y'_1) \Delta_{\zeta\sigma}(w_2 - y'_2) J^\sigma(y'_2) \quad (2.9)$$

すると、(2.6) は、

$$\begin{aligned} & \langle 0 | A_\mu(x'_1) A_\nu(x'_2) \bar{\Psi}(x_1)_\alpha \Psi(x_2)_\delta | 0 \rangle \\ &= i \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y'_1 d^4 y'_2 d^4 w_1 d^4 w_2 \delta(y_2 - x_2) [S(w_2 - y_2) i e \gamma^\sigma S(w_1 - w_2) i e \gamma^\rho S(y_1 - w_1)]_{\delta\alpha} \delta(y_1 - x_1) \\ & \quad \Delta_{\rho\mu}(w_1 - y'_1) \delta(y'_1 - x'_1) \Delta_{\sigma\nu}(w_2 - y'_2) \delta(y'_2 - x'_2) + (x'_1 \leftrightarrow x'_2) \\ &= i \int d^4 w_1 d^4 w_2 [S(w_2 - x_2) i e \gamma^\sigma S(w_1 - w_2) i e \gamma^\rho S(x_1 - w_1)]_{\delta\alpha} \\ & \quad \Delta_{\rho\mu}(w_1 - x'_1) \Delta_{\sigma\nu}(w_2 - x'_2) + (x'_1 \leftrightarrow x'_2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

となるので、(2.5) は、

$$\begin{aligned} \langle f | i \rangle &= -i \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 w_1 d^4 w_2 e^{-i k_1 x'_1 - i k_2 x'_2 + i p_1 x_1 + i p_2 x_2} \\ & \quad (-\partial_1'^2)(-\partial_2'^2)(i\cancel{\partial}_1 + m)_{\alpha\beta} (-i\cancel{\partial}_2 + m)_{\gamma\delta} \\ & \quad u_{s_1}(\mathbf{p}_1)_\beta \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2)_\gamma [[S(w_2 - x_2) i e \gamma^\sigma S(w_1 - w_2) i e \gamma^\rho S(x_1 - w_1)]_{\delta\alpha} \\ & \quad \Delta_{\rho\mu}(w_1 - x'_1) \Delta_{\sigma\nu}(w_2 - x'_2) + (x'_1 \leftrightarrow x'_2)] \\ &= -i \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 w_1 d^4 w_2 e^{-i k_1 x'_1 - i k_2 x'_2 + i p_1 x_1 + i p_2 x_2} \\ & \quad u_{s_1}(\mathbf{p}_1)_\beta \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2)_\gamma [[\delta(w_2 - x_2) i e \gamma_\nu S(w_1 - w_2) i e \gamma_\mu \delta(x_1 - w_1)]_{\gamma\beta} \\ & \quad \delta(w_1 - x'_1) \delta(w_2 - x'_2) + (x'_1 \leftrightarrow x'_2, \mu \leftrightarrow \nu)] \\ &= -i \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 d^4 w_1 d^4 w_2 e^{-i k_1 x'_1 - i k_2 x'_2 + i p_1 w_1 + i p_2 w_2} \\ & \quad [\bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) i e \gamma_\nu S(w_1 - w_2) i e \gamma_\mu u_{s_1}(\mathbf{p}_1) \delta(w_1 - x'_1) \delta(w_2 - x'_2) + (x'_1 \leftrightarrow x'_2, \mu \leftrightarrow \nu)] \\ &= -i \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) \left[\int d^4 w_1 d^4 w_2 e^{-i k_1 w_1 - i k_2 w_2 + i p_1 w_1 + i p_2 w_2} \right. \\ & \quad \left. \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) i e \gamma_\nu S(w_1 - w_2) i e \gamma_\mu u_{s_1}(\mathbf{p}_1) + (k_1 \leftrightarrow k_2, \mu \leftrightarrow \nu) \right] \\ &= -i \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) \left[\int d^4 w_1 d^4 w_2 e^{-i k_1 w_1 - i k_2 w_2 + i p_1 w_1 + i p_2 w_2} \right. \\ & \quad \left. \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) i e \gamma_\nu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-\cancel{p} + m) e^{i p(w_1 - w_2)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} i e \gamma_\mu u_{s_1}(\mathbf{p}_1) + (k_1 \leftrightarrow k_2, \mu \leftrightarrow \nu) \right] \\ &= -i \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) (2\pi)^4 \left[\int d^4 p \delta(p - k_1 + p_1) \delta(p + k_2 - p_2) \right. \\ & \quad \left. \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) i e \gamma_\nu \frac{-\cancel{p} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} i e \gamma_\mu u_{s_1}(\mathbf{p}_1) + (k_1 \leftrightarrow k_2, \mu \leftrightarrow \nu) \right] \\ &= i e^2 \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ & \quad \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) \left(\gamma_\nu \frac{-\cancel{p}_1 + \cancel{k}_1 + m}{(p_1 - k_1)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{-\cancel{p}_1 + \cancel{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 + m^2 - i\epsilon} \gamma_\nu \right) u_{s_1}(\mathbf{p}_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。これを次のように置く：

$$\langle f | i \rangle = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) i \mathcal{T} \quad (2.12)$$

この \mathcal{T} を不変散乱振幅という。散乱断面積の計算には $|\mathcal{T}|^2$ が重要となるので、以下で計算する。

$$\mathcal{T} = e^2 \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) \left(\gamma_\nu \frac{-\cancel{p}_1 + \cancel{k}_1 + m}{-t + m^2 - i\epsilon} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{-\cancel{p}_1 + \cancel{k}_2 + m}{-u + m^2 - i\epsilon} \gamma_\nu \right) u_{s_1}(\mathbf{p}_1) \quad (2.13)$$

(但し, $u = -(p_1 - k_2)^2 = -(p_2 - k_1^2), t = -(p_1 - k_1)^2 = -(p_2 - k_2)^2$) である.

$$A^{\mu\nu} = e^2 \left(\gamma^\nu \frac{-\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{-t + m^2 - i\epsilon} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{-\not{p}_1 + \not{k}_2 + m}{-u + m^2 - i\epsilon} \gamma^\nu \right) \quad (2.14)$$

とおくと,

$$\mathcal{T} = \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) \bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) A_{\mu\nu} u_{s_1}(\mathbf{p}_1) \quad (2.15)$$

であり,

$$\mathcal{T}^* = \bar{\mathcal{T}} = \varepsilon_{\lambda_1}^{\mu*}(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^{\nu*}(\mathbf{k}_2) \bar{u}_{s_1}(\mathbf{p}_1) \bar{A}_{\mu\nu} v_{s_2}(\mathbf{p}_2) \quad (2.16)$$

ここで, $\bar{A}_{\mu\nu} = \beta A \beta$ であり, $\overline{\not{a}\not{b}\not{c}} = \not{c}\not{b}\not{a}$ を用いると, $\bar{A}_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ である. よって,

$$|\mathcal{T}|^2 = \varepsilon_{\lambda_1}^\mu(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^\nu(\mathbf{k}_2) \varepsilon_{\lambda_1}^{\rho*}(\mathbf{k}_1) \varepsilon_{\lambda_2}^{\sigma*}(\mathbf{k}_2) (\bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) A_{\mu\nu} u_{s_1}(\mathbf{p}_1)) (\bar{u}_{s_1}(\mathbf{p}_1) A_{\sigma\rho} v_{s_2}(\mathbf{p}_2)) \quad (2.17)$$

である. 今回, 放出光子の偏極 λ には関心がないので, すべての偏極の和をとってしまう. Coulomb gauge において,

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_\lambda^{\rho*}(\mathbf{k}) = g^{\mu\rho} + t^\mu t^\rho - z^\mu z^\rho \quad (2.18)$$

が成り立つ. ここで, $(g^{\mu\rho}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ は時空の計量, $(t^\mu) = (1, \mathbf{0}), (z^\mu) = (0, \mathbf{e}_z)$ はそれぞれ時間方向の時間的単位ベクトル, \mathbf{k} 方向の空間的単位ベクトルである ($(k^\mu) = (\omega, \mathbf{k})$ である.). このとき,

$$z^\mu = \frac{k^\mu + (t^\nu k_\nu) t^\mu}{[k^2 + (t^\nu k_\nu)^2]^{1/2}} \quad (2.19)$$

であるが, 実は分子の k^μ はこの計算に寄与しない. さらに, 放出光子に対して, $k^2 = 0$ であることを考慮すれば, $z^\mu = t^\mu$ であり,

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_\lambda^{\rho*}(\mathbf{k}) = g^{\mu\rho} \quad (2.20)$$

と考えてよい. 従って,

$$|\mathcal{T}|^2 = (\bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) A_{\mu\nu} u_{s_1}(\mathbf{p}_1)) (\bar{u}_{s_1}(\mathbf{p}_1) A^{\nu\mu} v_{s_2}(\mathbf{p}_2)) \quad (2.21)$$

である. さらに, 始状態において, spin が選択的でないとするれば, これについて平均化して,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{T}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2=\pm} (\bar{v}_{s_2}(\mathbf{p}_2) A_{\mu\nu} u_{s_1}(\mathbf{p}_1)) (\bar{u}_{s_1}(\mathbf{p}_1) A^{\nu\mu} v_{s_2}(\mathbf{p}_2)) \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr}(A_{\mu\nu} (-\not{p}_1 + m) A^{\nu\mu} (-\not{p}_2 - m)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

これを地道に計算していくことにより (長くなるので省略する) 結局,

$$\langle |\mathcal{T}|^2 \rangle = 2e^4 \left[\left(\frac{tu - m^2(3t + u) - m^4}{(m^2 - t)^2} + (t \leftrightarrow u) \right) + \frac{2m^2(s - 4m^2)}{(m^2 - t)(m^2 - u)} \right] \quad (2.23)$$

となる. ここで, $s = -(p_1 + p_2)^2 = -(k_1 + k_2)^2$ である.

2.4 $e^- e^+ \rightarrow 2\gamma$ の散乱断面積

前節の設定で, 次の式が成り立つ:

$$|\langle f|i \rangle|^2 = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) VT |\mathcal{T}|^2 \quad (2.24)$$

$$\frac{|\langle f|i \rangle|^2}{\langle f|f \rangle \langle i|i \rangle} = \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) T |\mathcal{T}|^2}{16\omega_1 \omega_2 E_1 E_2 V^3} \quad (2.25)$$

但し, T は全時間である. よって, 単位時間当たりの遷移確率 (放射光子のある波数について) は,

$$\frac{1}{T} \frac{|\langle f|i \rangle|^2}{\langle f|f \rangle \langle i|i \rangle} = \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |T|^2}{16\omega_1 \omega_2 E_1 E_2 V^3} \quad (2.26)$$

である. 放射光子のスペクトルとしてみると,

$$d\dot{P} = \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |T|^2}{4E_1 E_2 V} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \quad (2.27)$$

となる. ここまでは, Lorentz 不変な形式で記述してきたが, 実際の散乱断面積の計算には, 具体的な座標に移ることが必要である. 勿論, 実験値との比較のために実験室系をとるが, 今回の実験では, positronium はほとんど静止しているとみなすので, 重心系と実験室系は同じとみなせる. 従って, $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$ を仮定する. この設定のもと, 上の $d\dot{P}$ を入射 flux $j_{in} = |\mathbf{p}_2|/E_2 V$ (散乱を考えるために, 入射 positron はごく微小の速度を持つとする.) で割ってやることで, 微分散乱断面積

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |T|^2}{4|\mathbf{p}_2| \sqrt{s}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \quad (2.28)$$

が得られる. $s = -(p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2$ は重心のエネルギーの二乗となっている. 散乱断面積は, これを積分して,

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |T|^2}{4|\mathbf{p}_2| \sqrt{s}} \\ &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^2 2\omega_1} \frac{d^3 k_2}{2\omega_2} \frac{\delta(E_1 + E_2 - \omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) |T|^2}{4|\mathbf{p}_2| \sqrt{s}} \\ &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^2 4\omega^2} \frac{\delta(E - \omega) |T|^2}{4|\mathbf{p}| \sqrt{s}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

(但し, $\omega = \omega_1 = |\mathbf{k}_1|$, $E = E_1 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ とおいた.) である. positron の運動方向 \mathbf{p}_2 から測った散乱角を θ とおく. すると

$$d^3 k_1 = |\mathbf{k}_1|^2 d|\mathbf{k}_1| d\Omega \quad (2.30)$$

(但し, $d\Omega$ は微小立体角要素) と表わせ, δ -関数の公式を用いて $|\mathbf{k}_1|$ に関する積分を実行すると,

$$\sigma = \int d\Omega \frac{|\mathbf{k}_1|}{16\pi^2} \frac{|T|^2}{4|\mathbf{p}| \sqrt{s}} \quad (2.31)$$

となる. ここで, $|\mathbf{k}_1| = \omega = \sqrt{s}/2$, $|\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{s - 4m^2}/2$ と $|\mathbf{p}|/E = v$ (入射粒子の速度) を用いると,

$$\sigma = \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{|T|^2}{4v\sqrt{s}} \quad (2.32)$$

さて, $t = m^2 - 2\omega E + 2|\mathbf{p}|\omega \cos \theta$, $s + t + u = 2m^2$ 等に注意して, $|T|^2$ を v の 0 次までの近似で計算すると,

$$\sigma = \int d\Omega \frac{e^4}{16\pi^2 s v} = \frac{e^4}{4\pi s v} \quad (2.33)$$

となる. 微細構造定数 $\alpha = e^2/4\pi$ を用いて, さらに $s = 4m^2 + O(v)$ であることより, 散乱断面積は

$$\sigma = \frac{\pi \alpha^2}{m^2 v} \quad (2.34)$$

と求まる.

2.5 para-positronium の寿命

崩壊幅 Γ は、散乱断面積に入射 flux $j = v|\psi(0)|^2$ を乗じることで得られる。ここで、 $\psi(x) = e^{-r/a}/\sqrt{\pi a^3}$, $a = 2/m\alpha$ は positronium の基底状態の波動関数である。但し、これは ortho-, para-positronium で平均した 2γ への崩壊幅になってしまう。初めの考察のとおり、今は 2γ へと崩壊するのは para-positronium だけと考えており、こちらは singlet であることより、上の手続きで得られる崩壊幅は本来の para-positronium の崩壊幅の $1/4$ である。従って、para-positronium の崩壊幅は、

$$\begin{aligned}\Gamma = 4j\sigma &= 4v|\psi(0)|^2 \frac{\pi\alpha^2}{m^2v} \\ &= 4 \frac{1}{\pi a^3} \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \\ &= \frac{m\alpha^5}{2}\end{aligned}\tag{2.35}$$

となり、para-positronium の寿命は、

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{2}{m\alpha^5} = \frac{2\hbar}{mc^2\alpha^5} = 0.124\text{ns}\tag{2.36}$$

となる。

2.6 $e^-e^+ \rightarrow 3\gamma$ の散乱断面積

$e^-e^+ \rightarrow 3\gamma$ の崩壊では、次の Feynman diagram の寄与 $O(e^3)$ のみ考える (図 2.2)。

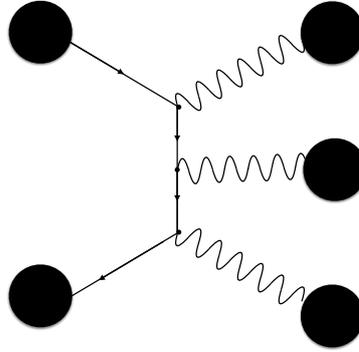


図 2.2: Feynman diagram.

計算を始める前にこの図から分かることとして、vertex の数が 2γ のときより 1 つ多いためその分 2 桁程寿命が長い事が予想され、この予想が実際正しいことを以下で見る。

$$\begin{aligned}\int d^4y_1 d^4y_2 d^4y'_1 d^4y'_2 d^4y'_3 d^4w_1 d^4w_2 d^4w_3 \bar{\eta}(y_2) S(w_3 - y_2) i e \gamma^\zeta S(w_2 - w_3) i e \gamma^\eta S(w_1 - w_2) \\ i e \gamma^\xi S(y_1 - w_1) \eta(y_1) \Delta_{\xi\rho}(w_1 - y'_1) J^\rho(y'_1) \Delta_{\eta\tau}(w_2 - y'_2) J^\tau(y'_2) \Delta_{\zeta\sigma}(w_3 - y'_3) J^\sigma(y'_3)\end{aligned}\tag{2.37}$$

式 (2.11) と同様にして, spin, 偏極の添字を省略して,

$$\begin{aligned}
i\mathcal{T} &= \bar{v}(\mathbf{p}_2)(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}_3)\frac{i(-\not{p}_2 + \not{k}_3 + m)}{-(-p_2 + k_3)^2 - m^2}\varepsilon_\nu^*(\mathbf{k}_2)(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)}{-(p_1 - k_1)^2 - m^2}\varepsilon_\rho^*(\mathbf{k}_1)(-ie\gamma^\rho)u(\mathbf{p}_1) \\
&+ \bar{v}(\mathbf{p}_2)(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}_3)\frac{i(-\not{p}_2 + \not{k}_3 + m)}{-(-p_2 + k_3)^2 - m^2}\varepsilon_\nu^*(\mathbf{k}_1)(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m)}{-(p_1 - k_2)^2 - m^2}\varepsilon_\rho^*(\mathbf{k}_2)(-ie\gamma^\rho)u(\mathbf{p}_1) \\
&+ \bar{v}(\mathbf{p}_2)(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}_2)\frac{i(-\not{p}_2 + \not{k}_2 + m)}{-(-p_2 + k_2)^2 - m^2}\varepsilon_\nu^*(\mathbf{k}_3)(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)}{-(p_1 - k_1)^2 - m^2}\varepsilon_\rho^*(\mathbf{k}_1)(-ie\gamma^\rho)u(\mathbf{p}_1) \\
&+ \bar{v}(\mathbf{p}_2)(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}_1)\frac{i(-\not{p}_2 + \not{k}_1 + m)}{-(-p_2 + k_1)^2 - m^2}\varepsilon_\nu^*(\mathbf{k}_2)(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_3 + m)}{-(p_1 - k_3)^2 - m^2}\varepsilon_\rho^*(\mathbf{k}_3)(-ie\gamma^\rho)u(\mathbf{p}_1) \\
&+ \bar{v}(\mathbf{p}_2)(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}_1)\frac{i(-\not{p}_2 + \not{k}_1 + m)}{-(-p_2 + k_1)^2 - m^2}\varepsilon_\nu^*(\mathbf{k}_3)(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m)}{-(p_1 - k_2)^2 - m^2}\varepsilon_\rho^*(\mathbf{k}_2)(-ie\gamma^\rho)u(\mathbf{p}_1) \\
&+ \bar{v}(\mathbf{p}_2)(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}_2)\frac{i(-\not{p}_2 + \not{k}_2 + m)}{-(-p_2 + k_2)^2 - m^2}\varepsilon_\nu^*(\mathbf{k}_1)(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_3 + m)}{-(p_1 - k_3)^2 - m^2}\varepsilon_\rho^*(\mathbf{k}_3)(-ie\gamma^\rho)u(\mathbf{p}_1) \\
&= ie^3\varepsilon_{\alpha_1}^*(\mathbf{k}_1)\varepsilon_{\alpha_2}^*(\mathbf{k}_2)\varepsilon_{\alpha_3}^*(\mathbf{k}_3)\bar{v}(\mathbf{p}_2)\left(\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}\frac{\gamma^{\alpha_i}(\not{p}_2 - \not{k}_i - m)\gamma^{\alpha_k}(\not{p}_1 - \not{k}_j + m)\gamma^{\alpha_j}}{\{-(-p_2 + k_i)^2 - m^2\}\{-(p_1 - k_j)^2 - m^2\}}\right)u(\mathbf{p}_1) \quad (2.38)
\end{aligned}$$

ここで, $p^2 = m^2$ および, $k^2 = 0$ より

$$(-p + k)^2 - m^2 = -2p^\mu k_\mu (= 2p \cdot k) \quad (2.39)$$

であり, 電子に対する Dirac 方程式を用いて

$$\begin{aligned}
(\not{p} + m)\gamma^\mu u(\mathbf{p}) &= (2p^\mu - \gamma^\nu(\not{p} - m))u(\mathbf{p}) \\
&= 2p^\mu u(\mathbf{p})
\end{aligned} \quad (2.40)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{1}{4}e^3\varepsilon_{\alpha_1}^*(\mathbf{k}_1)\varepsilon_{\alpha_2}^*(\mathbf{k}_2)\varepsilon_{\alpha_3}^*(\mathbf{k}_3)\bar{v}(\mathbf{p}_2)\left(\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}\frac{\gamma^{\alpha_i}(\not{p}_2 - \not{k}_i - m)\gamma^{\alpha_k}(2p_1^{\alpha_j} - \not{k}_j\gamma^{\alpha_j})}{(p_2 \cdot k_i)(p_1 \cdot k_j)}\right)u(\mathbf{p}_1) \\
&= \frac{1}{4}e^3\varepsilon_{\alpha_1}^*(\mathbf{k}_1)\varepsilon_{\alpha_2}^*(\mathbf{k}_2)\varepsilon_{\alpha_3}^*(\mathbf{k}_3)\bar{v}(\mathbf{p}_2)\left(\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}\frac{(2p_2^{\alpha_i} - \not{k}_i)\gamma^{\alpha_k}\gamma^{\alpha_i}(2p_1^{\alpha_j} - \not{k}_j\gamma^{\alpha_j})}{(p_2 \cdot k_i)(p_1 \cdot k_j)}\right)u(\mathbf{p}_1) \quad (2.41)
\end{aligned}$$

ここで 2 行目において反粒子に対する Dirac 方程式を用いた. また, これの複素共役は

$$\mathcal{T}^* = \frac{1}{4}e^3\varepsilon_{\alpha_1'}(\mathbf{k}_1)\varepsilon_{\alpha_2'}(\mathbf{k}_2)\varepsilon_{\alpha_3'}(\mathbf{k}_3)\bar{u}(\mathbf{p}_1)\left(\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}\frac{(2p_1^{\alpha_j'} - \gamma^{\alpha_j'}\not{k}_j)^\dagger(\gamma^{\alpha_k'})^\dagger(2p_2^{\alpha_i'} - \not{k}_i\gamma^{\alpha_i'})^\dagger}{(p_2 \cdot k_i)(p_1 \cdot k_j)}\right)v(\mathbf{p}_2) \quad (2.42)$$

また,

$$\sum_{polarization} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k})\varepsilon_{\mu'}(\mathbf{k}) = -g_{\mu\mu'} \quad (2.43)$$

$$\sum_{spin} u^s(\mathbf{p})\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}) = \not{p} + m \quad (2.44)$$

$$\sum_{spin} v^s(\mathbf{p})\bar{v}^{s'}(\mathbf{p}) = \not{p} - m \quad (2.45)$$

がそれぞれ成り立つ. ここで u の肩の s はスピンの状態を陽に表したものであり, 光子の偏極についてはこれまでと同様に陽には書いていない. これまでの結果をもとに微分断面積を求めるために $p\text{-Ps} \rightarrow 2\gamma$ の時と同様, $|\mathcal{T}|^2$ の

フェルミオンのスピンにおける平均と、光子の偏極に関する総和を取れば以下ようになる:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{spin\ polarization} \sum |\mathcal{T}|^2 \\
&= -\frac{e^6}{64} g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g_{\rho\rho'} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 - m) \left(\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \frac{(2p_2^{\alpha_i} - \not{k}_i \gamma^{\alpha_k}) \gamma^{\alpha_i} (2p_1^{\alpha_j} - \gamma^{\alpha_j} \not{k}_j)}{(p_2 \cdot k_i)(p_1 \cdot k_j)} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \frac{(2p_1^{\alpha_{j'}} - \gamma^{\alpha_{j'}} \not{k}_j)^\dagger (\gamma^{\alpha_{k'}})^\dagger (2p_1^{\alpha_{i'}} - \not{k}_i \gamma^{\alpha_{i'}})^\dagger}{(p_2 \cdot k_i)(p_1 \cdot k_j)} \right) (\not{p}_1 + m) \right\} \\
&= -\frac{e^6}{64} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 - m) \left(\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \frac{(2p_2^{\alpha_i} - \not{k}_i \gamma^{\alpha_k}) \gamma^{\alpha_i} (2p_1^{\alpha_j} - \gamma^{\alpha_j} \not{k}_j)}{(p_2 \cdot k_i)(p_1 \cdot k_j)} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \frac{(2p_1 \alpha_j - \gamma_{\alpha_j} \not{k}_j)^\dagger (\gamma_{\alpha_k})^\dagger (2p_1 \alpha_i - \not{k}_i \gamma_{\alpha_i})^\dagger}{(p_2 \cdot k_i)(p_1 \cdot k_j)} \right) (\not{p}_1 + m) \right\} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

この計算を行ない、また、p-Ps の時と同様に非相対論的極限をとって実験室系と重心系を同一視し、さらに変数を $\omega_i = |\mathbf{k}_i| (i = 1, 2, 3)$ 及び $E_j = \sqrt{m_e^2 + |\mathbf{p}_j|^2} (j = 1, 2)$ とすれば、

$$\frac{1}{4} \sum_{spin\ polarization} \sum |\mathcal{T}|^2 = (4\pi)^3 e^6 \times 16 \left[\left(\frac{m_e - \omega_1}{\omega_2 \omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m_e - \omega_2}{\omega_1 \omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m_e - \omega_3}{\omega_1 \omega_2} \right)^2 \right] \quad (2.47)$$

これを微分断面積の表式 (2.28) に代入して、

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{e^6}{\pi^2 m^2 v} \left[\left(\frac{m_e - \omega_1}{\omega_2 \omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m_e - \omega_2}{\omega_1 \omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m_e - \omega_3}{\omega_1 \omega_2} \right)^2 \right] \\
&\quad \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m) \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (2.48)
\end{aligned}$$

また、 θ_{12} を $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ のなす角とすると、

$$d^3 k_1 d^3 k_2 \longrightarrow 4\pi \omega_1^2 d\omega_1 \cdot 2\pi \omega_2^2 d(\cos \theta_{12}) d\omega_2 \quad (2.49)$$

さらに、余弦定理 $\omega_3^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \theta_{12}$ から

$$d \cos \theta_{12} = \frac{\omega_3}{\omega_1 \omega_2} d\omega_3 \quad (2.50)$$

を得、 ω_3 の積分を 0 から m の範囲で実行すると $\delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m)$ を消去することが出来る事を踏まえると、微分断面積は

$$d\sigma = \frac{1}{6} \frac{8e^6}{vm^2} \left[\left(\frac{m - \omega_1}{\omega_2 \omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m - \omega_2}{\omega_1 \omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m - \omega_3}{\omega_1 \omega_2} \right)^2 \right] d\omega_1 d\omega_2 \quad (2.51)$$

ここで ω_2 は $m - \omega_1$ から m の範囲の値を取りうることを考え、 ω_2 について積分を実行すると

$$d\sigma = \frac{8e^6}{3vm^3} \left[\frac{\omega_1(m - \omega_1)}{(2m - \omega_1)^2} + \frac{2m - \omega_1}{\omega_1} + \left\{ \frac{2m(m - \omega_1)}{\omega_1^2} - \frac{2m(m - \omega_1)^2}{(2m - \omega_1)^3} \right\} \ln \left(\frac{m - \omega_1}{m} \right) \right] d\omega_1 \quad (2.52)$$

となる。これをさらに ω_1 について 0 から m の範囲で積分をすれば全断面積は、

$$\sigma = \frac{4(\pi^2 - 9)}{3v} \alpha \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \quad (2.53)$$

ここに α は微細構造定数である。

2.7 ortho-positronium の寿命

寿命は散乱断面積から p-Ps の時と同様にして求めることができる。崩壊幅 Γ が

$$\begin{aligned}\Gamma = \frac{4}{3}j\sigma &= \frac{4}{3}v|\psi(0)|^2 \frac{4(\pi^2 - 9)}{3v} \alpha \left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \\ &= \frac{4}{3} \frac{1}{\pi a^3} \frac{4(\pi^2 - 9)}{3} \alpha \left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \quad \left(a = \frac{2}{m\alpha}\right) \\ &= \frac{16}{9} \frac{m^3 \alpha^3}{8\pi} \frac{4(\pi^2 - 9)}{3} \alpha \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 \\ &= \frac{2(\pi^2 - 9)m\alpha^6}{9\pi}\end{aligned}\tag{2.54}$$

であるから、求める寿命はこれの逆数を取って、

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{9\pi\hbar}{2(\pi^2 - 9)mc^2\alpha^6} = 1.399 \times 10^{-7}(\text{s}) = 139.9(\text{ns})\tag{2.55}$$

と求まる。

第3章 セットアップ・実験原理

3.1 実験原理

^{22}Na の β^+ 崩壊より放出される陽電子 e^+ とシリカパウダー SiO_2 中にある電子 e^- によって p-Ps と o-Ps が形成され、これらが電子陽電子対消滅する際に γ 線が放出される。o-Ps の寿命を計測するにあたって、まず線源 ^{22}Na とシリカパウダー SiO_2 の間にプラスチックシンチレーター (以下 P.S.) を設置し、 e^+ が P.S. を通過した時間と Ps が形成された時間を同時と見なす。その後シリカパウダー内で対消滅した Ps が放出した γ 線を NaI シンチレーター (以下 NaI) にて検出し、検出された時間と Ps が崩壊した時間が同時と見なす。P.S. で e^+ が検出された時間と NaI で γ 線が検出された時間の差を Ps の寿命と見なす。

3.2 実験器具

^{22}Na	β^+ 崩壊により e^+ を供給する。
P.S.	e^+ を検出する。
NaI	γ 線を検出する。
シリカパウダー	主成分 SiO_2 。 e^- を多く有し、 ^{22}Na からの e^+ を受け Ps を形成する。
鉛ブロック	外部からの放射線を遮断する。
遮光ビニール	P.S. に光が入り破損してしまうのを防ぐためセットアップ全体を覆う。

3.3 セットアップ

各実験装置は図 3.1 ように配置した。線源とシリカパウダーの間の鉛ブロックには穴があいており、 e^+ のとおる通路が確保されている。

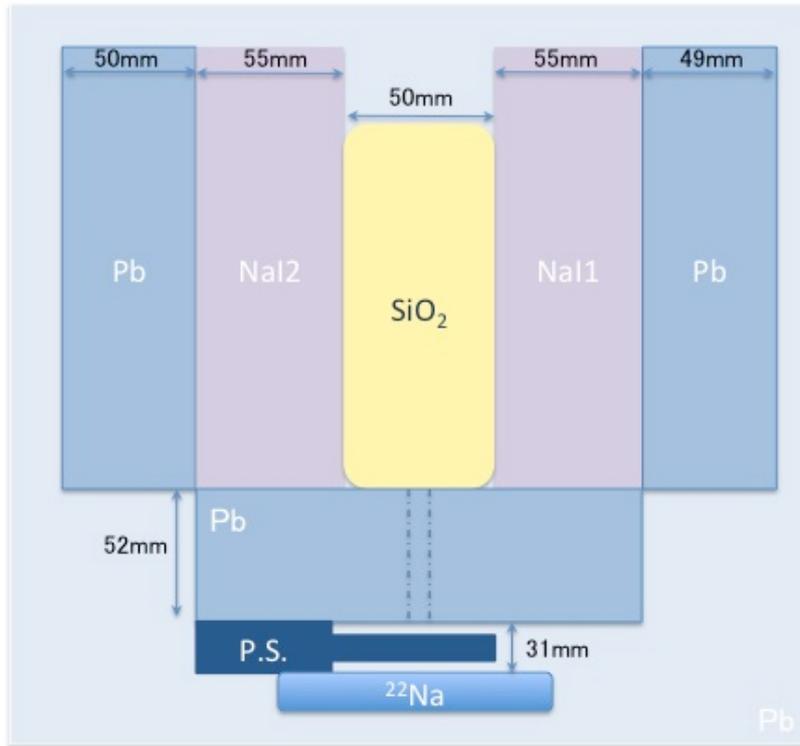


図 3.1: セットアップの模式図



図 3.2: セットアップ



図 3.3: セットアップ

3.4 回路図

回路は図 3.5 のように組んだ。信号の概念図を図 3 に記す。現象の時系列としては e^+ が P.S. を通過した後に崩壊して γ 線をだして NaI をならすことから、P.S. の信号を TDC の start とし、NaI の信号を TDC の stop にすることが理想的であるが、P.S. を通過した e^+ が必ずしも P_s を形成すると限らない。そこで P.S. の信号を受け取り gate を開くと同時に veto によって引き続き P.S. にやってくる e^+ による信号を受け取らないようにする、P.S. の gate と NaI の信号の coincidence をとり、それを TDC の start とする。これでは NaI の信号を start としてしまっているため P.S. の信号で stop をかけなくては P_s の寿命の測定はできない。時系列の逆転を解消するため P.S. の信号を遅らせた。

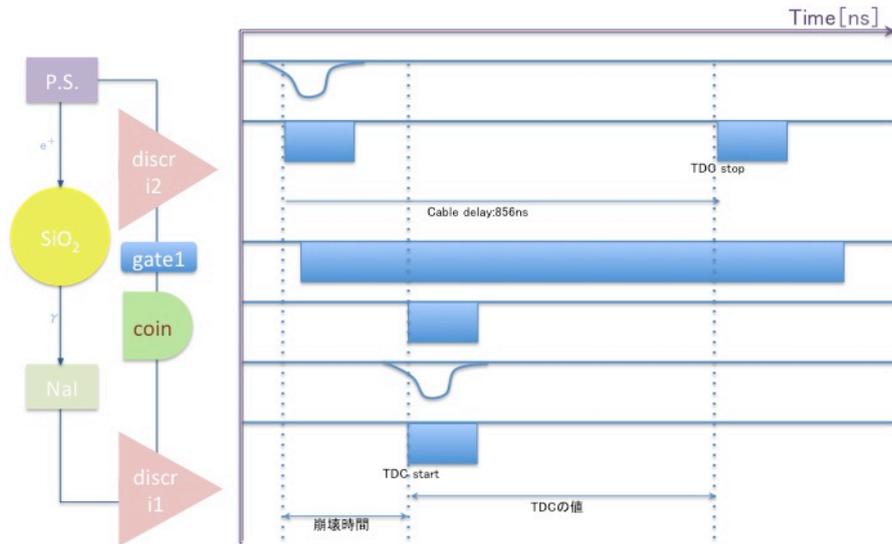


図 3.4: 信号の概念図

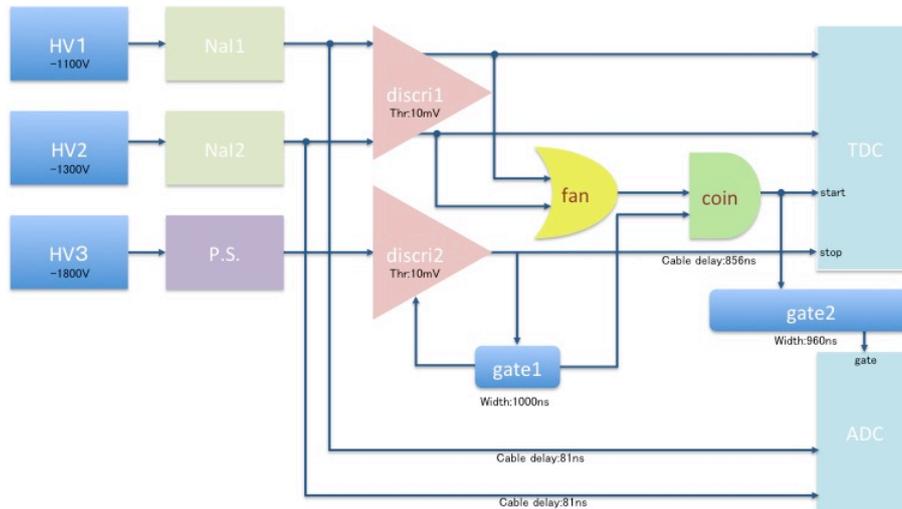


図 3.5: 回路図

- HV : negative high voltage. 光電子増倍管に負の電圧をかける。
- div : divider. 入力された信号を二つに分ける。
- discr i : discriminator. 入力された信号が threshold の値を負の方向に超えとき、NIM 信号を出力する。
- coin : coincidence. すべてに入力端子に同時に入力されたときのみ NIM 信号を出力する。
- gate : gate generator. 信号が入力されたとき設定した時間幅 (width) の NIM 信号を出力する。
- gate delay : 入力信号を設定した時間だけ遅らせて出力する。
- FAN : 入力端子のいずれかに信号がはいると、信号を出力する。
- TDC : time to digital converter. start に信号が入ってから、stop に信号が入るまでの時間に比例した大きさの値を出力する。
- ADC : analog to digital converter. gate がひらいている間に入力された信号の総和 (積分) に比例した大きさの値を出力する。

3.5 TQ補正

次に、以上のセットアップからくる系統誤差の補正についてこの節と次の節で述べる。

3.5.1 TQ補正

NaIシンチレータからの信号は立ち上がりに時間がかかる。TDCのstartがかかるためにはパルスが discriminator の threshold を超える必要があるが、ここにパルスの大きさ、従って γ 線のエネルギー（パルスの面積に対応）に依存した崩壊時刻の”遅れ” ΔT が生じる（図 3.6）。つまり、検出された γ 線のエネルギーが低いほど、崩壊が遅く見えてしまう。寿命の測定にはこの”遅れ” ΔT を差し引いて時間原点を揃えてやらねばならない。この補正を TQ 補正という。

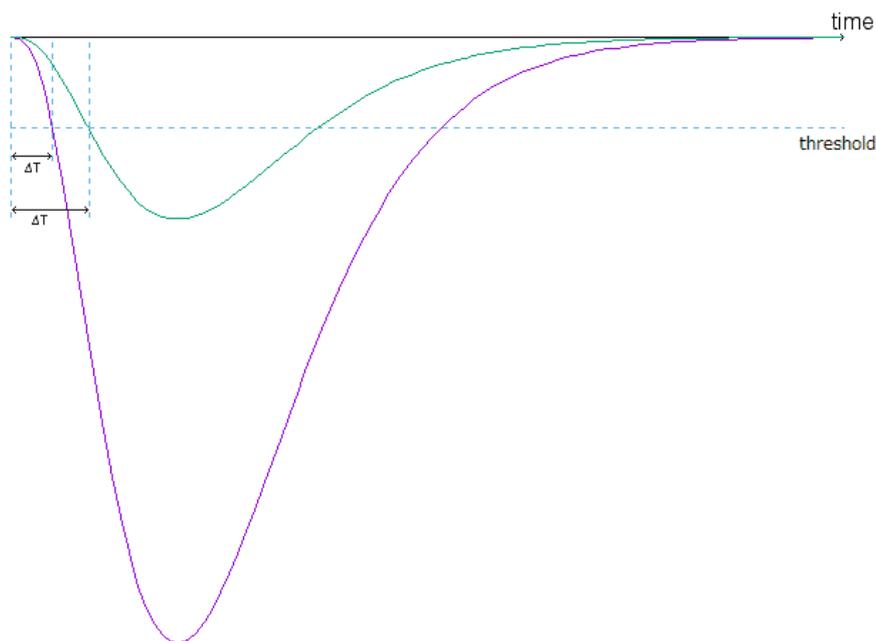


図 3.6: NaI シンチレータからの信号の概略図。同時刻に出た異なるエネルギーのパルスを示した。

3.5.2 TQ補正関数

さて、TQ 補正を行うためには、 $\Delta T = \Delta T(E)$ (E : γ 線のエネルギー) の関数形を知らねばならない。まず、第一近似として、パルスの形を三角形と近似する。さらに、peak までの時間、信号の（時間的）長さはエネルギーによらないと仮定する。今、時間軸を T 、信号の縦軸を V で表し、時間原点をパルスの真の立ち上がり時刻に取る。パルスの peak を $T = T_{peak}$ 、 $V = V_{peak}$ とし、threshold を V_0 とする。対応するパルスの立ち上がり時刻が ΔT である（図 3.7）。図 3.7 より、

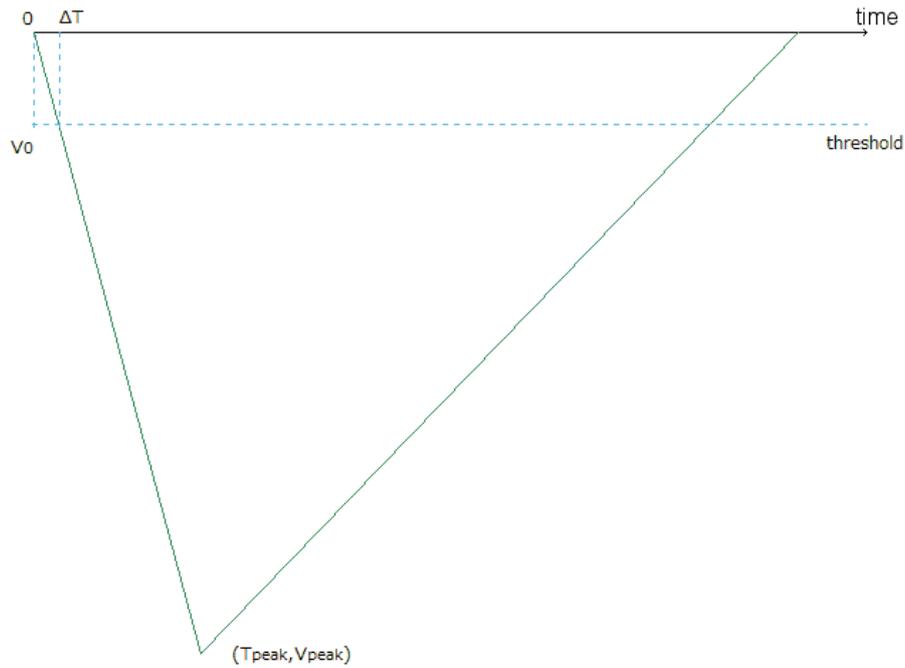


図 3.7: TQ 補正第一近似.

$$\Delta T = \frac{V_0}{V_{peak}} T_{peak}$$

である. 今の仮定では, $T_{peak} V_0 = \text{const}$ であり, 三角形の面積即ち線のエネルギー E は, V_{peak} に比例するので,

$$\Delta T(E) \propto \frac{1}{E}$$

である. 実際には, パルスの形は三角形ではないこと (第一項), 回路の遅れ等 (第二項) を考慮して, 次のように補正を入れた関数を採用する.

$$\Delta T(E) = \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (3.1)$$

ここで, $p_i (i = 0, 1, 2, 3)$ は parameter であり, 実験のセットアップに依存するので, 得られたデータの fitting より決定する. これは, データ解析の章で行うこととする.

3.6 pick-off 補正

3.6.1 pick-off 補正とは

物質中では o-Ps が以下の相互作用によって p-Ps となり, 2γ に崩壊することがある.

- pick-off 反応
 - Ps が周囲の物質の電子と衝突し, 対消滅する.
- スピン交換反応
 - Ps が不対電子を持つ電子と衝突し, スピンを交換する反応.
- 化学反応 (酸化反応)

- Ps は水素原子と構造が似ているため、水素原子と同様に化学反応を起こす。特に Ps が酸化されると、残った陽電子が対消滅を起こす。

そのため、形成された o-Ps の中に、p-Ps となって本来の o-Ps の寿命よりも早く崩壊するものが現れてしまい、寿命が短く見えてしまう。寿命の測定のためには当然これの補正が必要であり、この補正を pick-off 補正という。

本実験で得られたデータは主に、o-Ps の 3γ への直接の崩壊、p-Ps の崩壊、o-Ps が上記の相互作用を経て p-Ps となり崩壊した 2γ に分類できる。さらに 2γ に関しても compton 散乱によって 511keV よりも低いエネルギーに分布し得る。これらを考慮し観測されたデータを補正する。

3.6.2 pick-off 補正の考え方

p-Ps に関しても上記の反応は考えられるが、理論の章の計算で求めたように、p-Ps は極めて短い寿命で 2γ へ崩壊し、これにより上記の相互作用の影響を受けないとみなすことができる。また、o-Ps は主にこれより長い寿命をもち、 3γ は 511keV 未満のエネルギー帯に分布する。これらと前節の内容を既知とし、前節のような 3 種類のイベントが競合した状態から 3γ のスペクトルをより正確に得るために以下のように補正方法を考える。

まず、それぞれのイベントが主にどの領域に分布しているか考える。観測される最も早い時刻にあるピークは主に p-Ps の崩壊によるイベントであると言える。このピークが観測される時刻を t_0 とする。これより寿命の長いイベントは主に o-Ps の崩壊によるものであり、 3γ が 511keV 未満のエネルギーしか持たないことから、511keV 付近のイベントは主に上の相互作用による 2γ への崩壊、511keV 未満のエネルギーのイベントはその compton 散乱によるものと o-Ps の 3γ への直接の崩壊によるものであると言える。

次に、 2γ への崩壊によるイベントの分布を詳しく考える。すべての時刻で 511keV に対するある 511keV 未満のエネルギーのイベントは同じ確率で分布すると考える。 t_0 付近は主に 2γ への崩壊のみのイベントであることから、511keV ピークに対する compton 散乱の分布のモデルとしてふさわしい。以上よりすべての時刻での 2γ の 511keV ピークのイベント数とそれに対応する各エネルギーでのイベント数の分布が観測された数値からわかる。これで 2γ によるイベントの分布が詳しく分かった。

最後に、各時刻での総イベント数から 2γ のイベント数を引くことで o-Ps の 3γ への直接の崩壊のイベント数が求まる。

3.6.3 pick-off 補正関数の作成

実際には上記のように差分を求めるのではなく以下のような補正関数 $f(t)$ を作成し、これを用いた新たな関数でデータを fitting することで寿命を求める。

実験で測定できる (TQ 補正までで求まる) 崩壊幅を Γ_{obs} 、o-Ps の 3γ への直接の崩壊の崩壊幅を Γ_{ortho} 、相互作用による崩壊幅を $\Gamma_{pick-off}$ とすると、

$$\Gamma_{obs} = \Gamma_{ortho} + \Gamma_{pick-off}$$

の関係が成り立つ。時刻 t での o-Ps の相互作用、 3γ への直接の崩壊の検出数を $\Delta N_{pick-off}(t)$ 、 $\Delta N_{ortho}(t)$ として、

$$f(t) = \frac{\Gamma_{pick-off}}{\Gamma_{ortho}} = \frac{\Delta N_{pick-off}(t)}{\Delta N_{ortho}(t)}$$

なる関数を考える。時刻 t での 511keV peak のイベント数を $y_{peak}(t)$ 、イベント総数を $S(t)$ とする。前節の考察より、

$$\Delta N_{pick-off}(t) = \frac{y_{peak}(t)S(t_0)}{y_{peak}(t_0)}$$

なので、

$$f(t) = \frac{\Delta N_{pick-off}(t)}{S(t) - \Delta N_{pick-off}(t)} = \frac{y_{peak}(t)S(t_0)}{y_{peak}(t_0)S(t) - y_{peak}(t)S(t_0)}$$

となる。これを過去の実験に倣って、

$$f(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 \quad (3.2)$$

で fitting したものを補正関数として採用する。但し、 $p_i (i = 0, 1, 2)$ は parameter である。

3.6.4 pick-off 補正後の寿命

o- Ps の 3γ への崩壊寿命を τ_{ortho} とし、前節で得た $f(t)$ を用いて

$$\Gamma_{obs} = \Gamma_{ortho} + \Gamma_{pick-off} = \Gamma_{ortho}(1 + f(t)) = \frac{1 + f(t)}{\tau_{ortho}}$$

であるので、時刻 t における o- Ps の数を $N(t)$ とすると、

$$\frac{dN(t)}{dt} = -N(t)(\Gamma_{ortho} + \Gamma_{pick-off}) = -\frac{N(t)}{\tau_{ortho}}(1 + f(t))$$

が成立する。これを解くと、

$$N(t) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_{ortho}} \int^t (1 + f(t')) dt'\right)$$

となる。これを再度微分することで、

$$-\frac{dN(t)}{dt} = N_0(1 + f(t)) \exp\left(-\frac{1}{\tau_{ortho}} \int^t (1 + f(t')) dt'\right)$$

となる。定数は一旦 N_0 と置いた。定数を fitting parameter $q_i (i = 0, 1)$ と置き換え、background を考慮して (q_2 の項)、

$$-\frac{dN(t)}{dt} = q_0(1 + f(t)) \exp\left(-\frac{1}{q_1} \int^t (1 + f(t')) dt'\right) + q_2 \quad (3.3)$$

と表し、この関数を用いて fitting を行う。

$-\frac{dN(t)}{dt}$ はまさに観測しているイベント数であり、 q_1 が pick-off 補正後の求める寿命である。

第4章 データ解析・結果

4.1 Calibration

4.1.1 ADC Calibration

ADCは、入力された信号のエネルギーに比例する面積に対応して0~4095までの整数値を返す。今回の実験で得られたADCのデータを横軸をチャンネル数、縦軸をイベント数としてグラフにしたのが以下の図4.1及び図4.2である。ここではADCの出力値と実際のエネルギーの値の対応関係を調べる。γ線のエネルギー値とADCの出力値の間に線形性があると仮定して、定数 a, b を用いて

$$(\gamma\text{線のエネルギー値 (keV)}) = a \times (\text{ADCの出力値}) + b \quad (4.1)$$

として、Psの崩壊時に多く放出されるγ線のエネルギー値511keV、ペDESTAL0keVを代入値とし各NaIシンチレーターごとの対応関係を求めた。図のようにADCのhistogramをそれぞれをGaussianでfittingを行ってそれぞれのエネルギーに対応するADCの出力値を求めた。結果を以下の表に記す。

表 4.1: ADCの出力値とエネルギー値 (keV) の関係

	0keV	511keV
NaI1	215.1	826.8
NaI2	192.9	752.8

これより、以下の式を得ることができた。

$$E_1(\text{keV}) = 1.197 \times (\text{ADC1} - 215.1) \quad (4.2)$$

$$E_2(\text{keV}) = 1.096 \times (\text{ADC2} - 192.9) \quad (4.3)$$

fittingの様子を以下に示す。

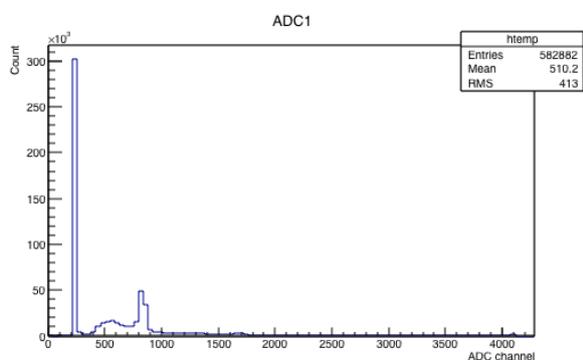


図 4.1: ADC1 で得られた元のデータ

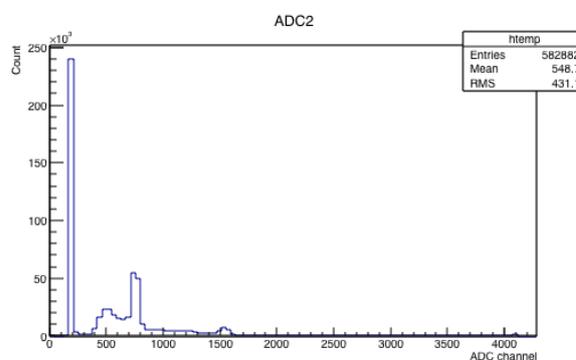


図 4.2: ADC2 で得られた元のデータ

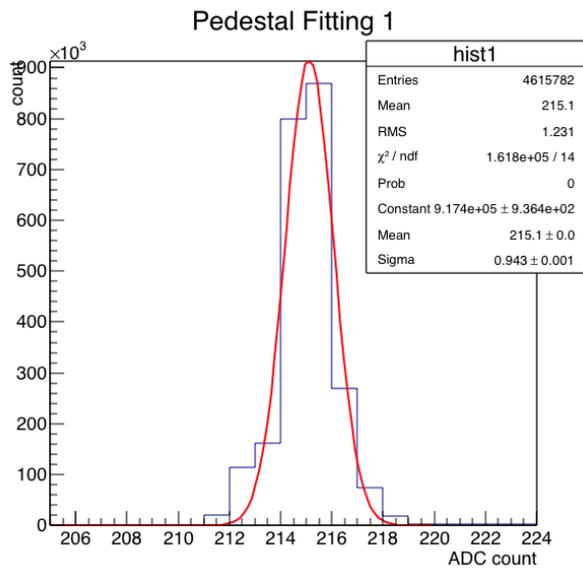


図 4.3: NaI1 の 5pedestal の fitting の様子

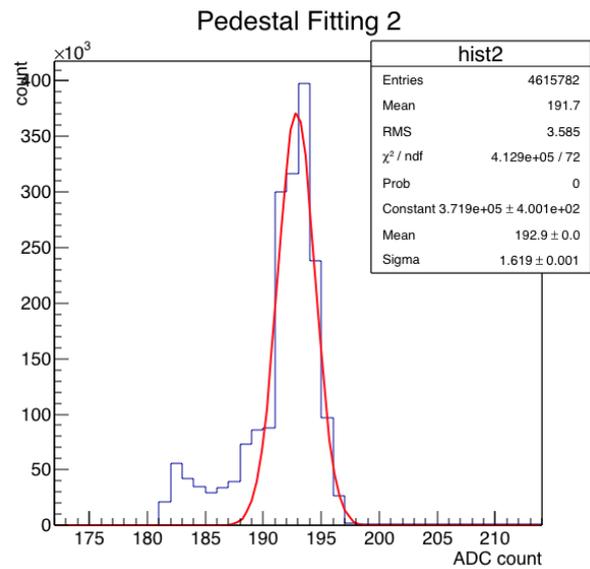


図 4.4: NaI2 の pedestal の fitting の様子

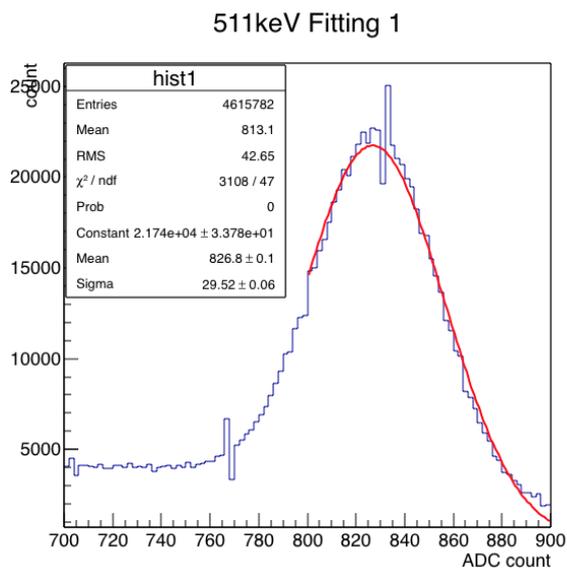


図 4.5: NaI1 の 511keV の fitting の様子

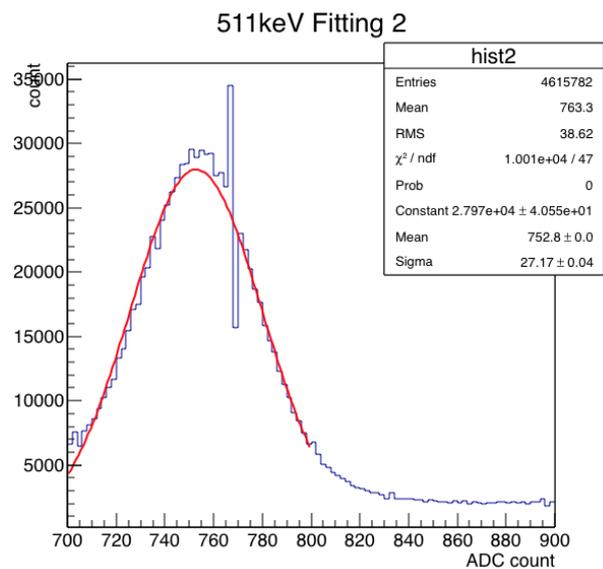


図 4.6: NaI2 の 511keV の fitting の様子

4.1.2 TDC Calibration

TDC も start の信号が入力されてから stop の信号が入力されるまでの時間に対応した 0 から 4095 の整数値を返す. 実験で得られた TDC のチャンネルとイベント数の関係を表すグラフとして図 4.7 ~ 図 4.9 が得られた.

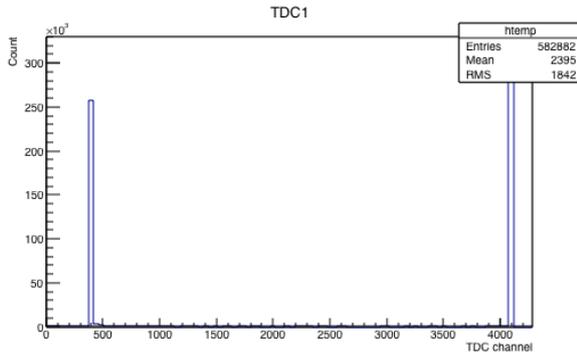


図 4.7: TDC1 のチャンネルとイベント数の関係

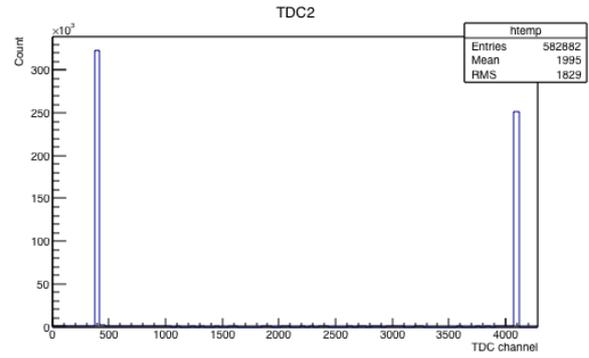


図 4.8: TDC2 のチャンネルとイベント数の関係

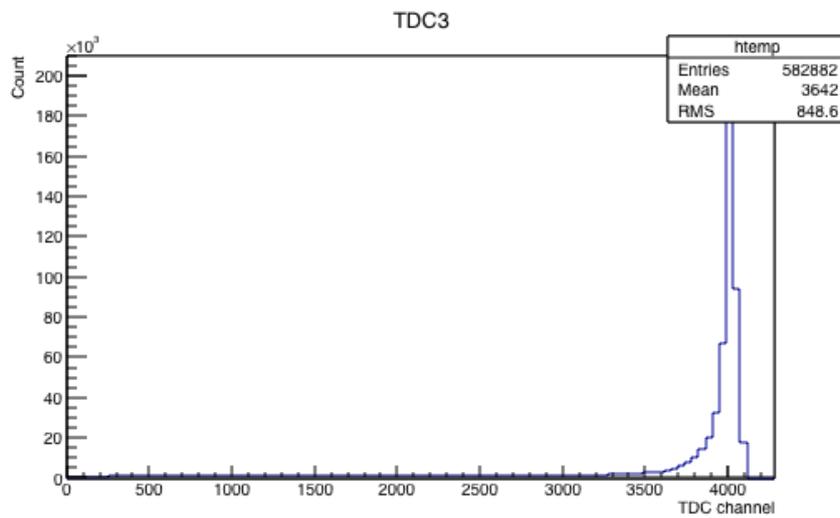


図 4.9: TDC3 のチャンネルとイベント数の関係

TDC の出力値と実際の時間の対応を以下のように調べた。なお、本実験ではプラスチックシンチレータと繋がっている TDC の 5ch についてのみ調べれば十分である。

1 つのデジタルパルスの start 信号とそれに対し fixed delay や gate generator で delay をかけた stop 信号を用意する。オシロスコープにこの 2 つの信号を写し、立ち上がりの時刻の差をオシロスコープの目盛を目視することで得た値を delay の値とした。100, 200, 300, 400, 800ns の 5 種類の delay をかけ、それに対する TDC の値を調べた。表 4.6 がその結果をまとめたものである。

これを縦軸を TDC の値、横軸を delay の時間としてプロットしたところ線形関係が見られたので

$$\text{TDC} = p_1 \text{time} + p_0$$

(p_1, p_0 は parameter) という一次関数で fitting した。その結果が図 4.10 である。これにより

$$\text{time} = 0.251\text{TDC} - 12.7 \text{ (ns)}$$

という式を得た。

本実験のセットアップでは、実際の反応の順番と TDC の start 信号と stop 信号の順番が逆になっており、TDC の値が大きいイベントほど反応した時刻の早いイベントとなる。よって、上の式の正負を反転させ、TDC の値が 4095 の時を 0ns として

$$\text{time} = -0.251\text{TDC} + 1027.8 \text{ (ns)}$$

表 4.2: TDC の出力値と時間の関係

delay(ns)	TDC
100	447.3
200	846.905
300	1247.66
400	1648.22
800	3238

という式で calibration を行う.

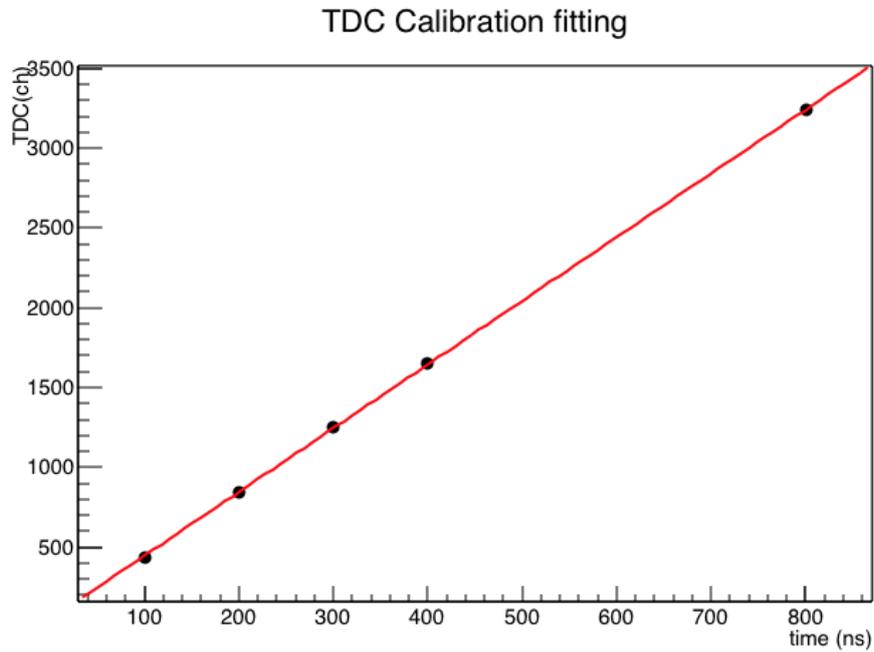


図 4.10: Fitting の様子.

Calibration 後のエネルギー対時間の 2 次元 histogram を以下に示す.

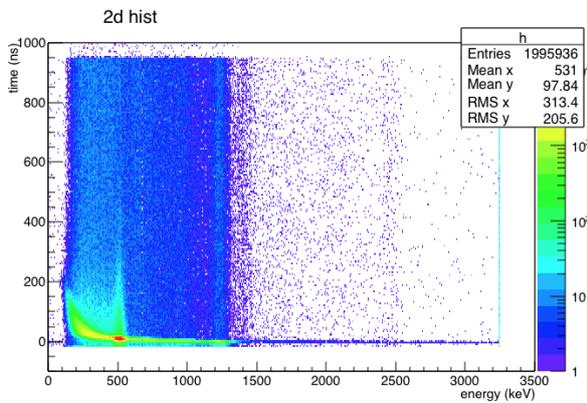


図 4.11: Calibration 後の二次元ヒストグラム

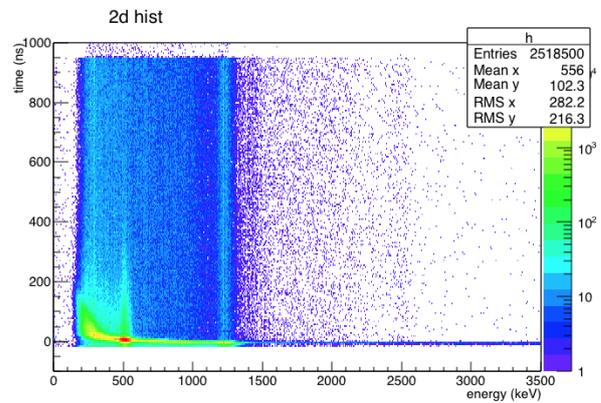


図 4.12: Calibration 後の二次元ヒストグラム

4.1.3 TQ 補正

TQ 補正関数

3.5 節において TQ 補正関数を出した. (p-Ps の崩壊イベントを抽出するため) イベント数が最大の bin の 0.08 倍以上のイベント数でカットし TQ 補正関数 (3.1) の fitting を行った. 結果を以下に示す.

表 4.3: TQ 補正のパラメータ

	p_0	p_1	p_2	p_3
NaI1	1932 ± 907.3	126.8 ± 32.77	0.7964 ± 0.1142	-7.701 ± 4.819
NaI2	1062 ± 139	153.1 ± 31.36	1.217 ± 0.2402	-2.487 ± 2.119

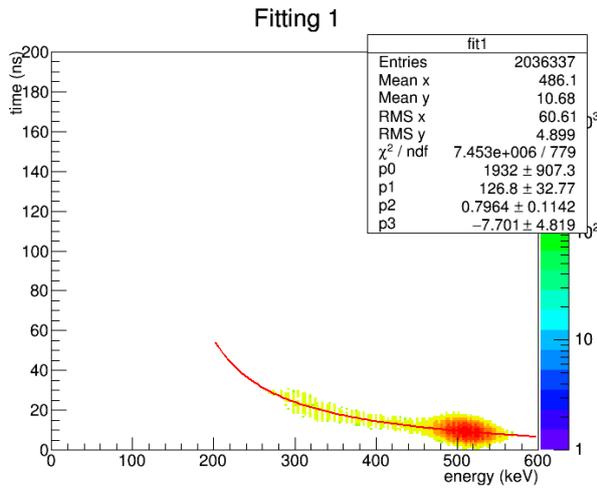


図 4.13: TQ 補正関数の fitting の様子

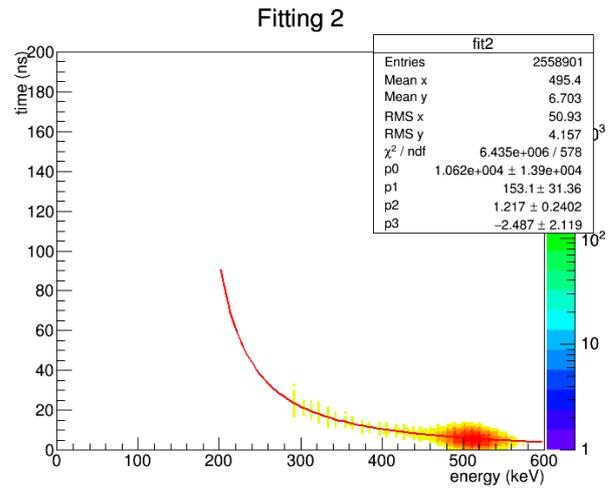


図 4.14: TQ 補正関数の fitting の様子

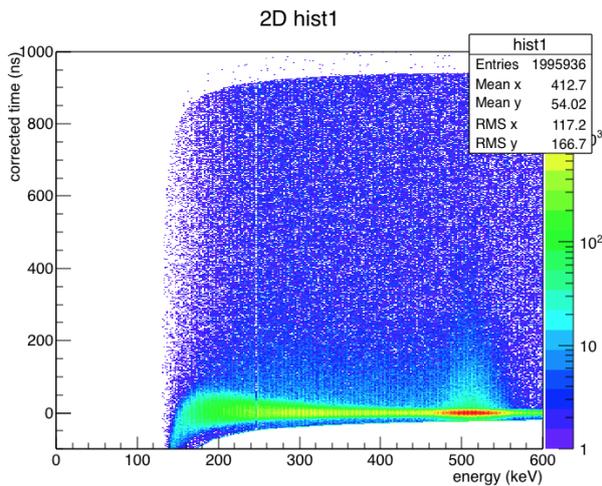


図 4.15: TQ 補正後の二次元ヒストグラム

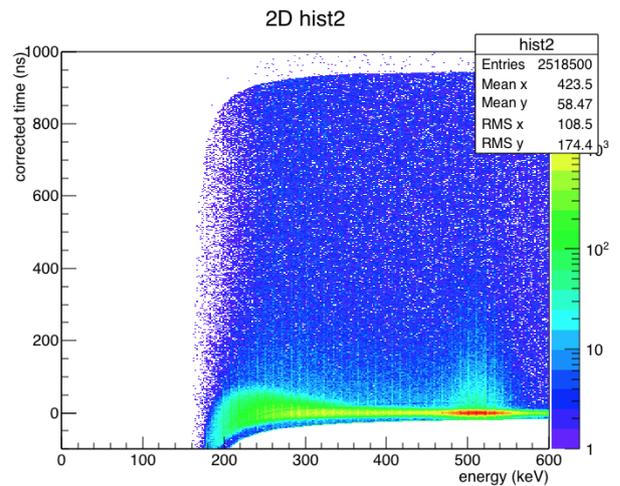


図 4.16: TQ 補正後の二次元ヒストグラム

表 4.4: TQ 補正後の寿命 fitting パラメーター

	p_0	p_1	p_2
NaI1	6668 ± 220.4	86.08 ± 1.66	1014 ± 4.6
NaI2	7358 ± 224.5	89.86 ± 1.66	1282 ± 5.3

TQ 補正後の寿命

これより, 検出器ごとに算出した α -Ps の寿命は以下ようになった. これらの値は, pick-off 反応を考慮していないため理論値と比べて小さくなっている.

NaI1 : 86.08 ns

NaI2 : 89.86 ns

4.1.4 pick-off 補正

pick-off 補正関数

3.6 節にならい, t_0 のデータとして -5ns から 5ns のイベントを採用し, 80ns から 680ns までを 50ns 刻みで得たデータをもとに pick-off 補正関数 (3.2) を作成した. 結果を以下に示す.

表 4.5: $f(t)$ の fitting パラメーター

	p_0	p_1	p_2
NaI1	4.448 ± 0.121	99.75 ± 8.395	0.2172 ± 0.01136
NaI2	1.014 ± 0.07882	109.4 ± 9.33	0.199 ± 0.009024

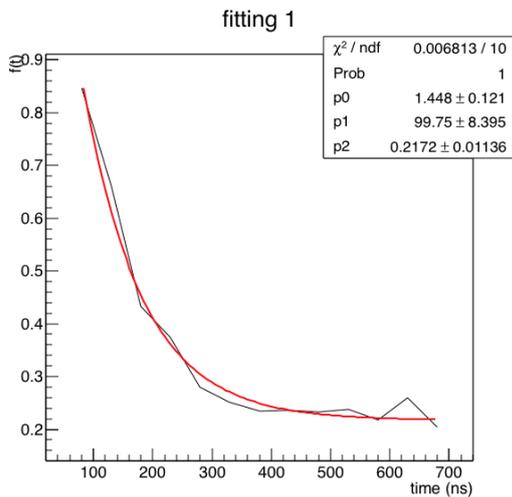


図 4.17: NaI1 の pick-off 補正関数の fitting

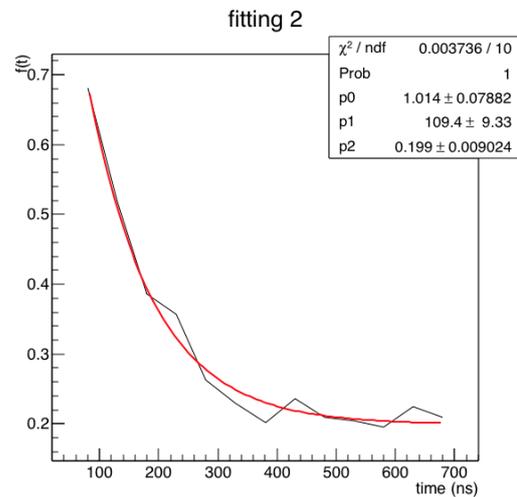


図 4.18: NaI2 の pick-off 補正関数の fitting

寿命フィッティング

上で得た pick-off 補正関数, 式 (3.3) を用いて寿命の fitting を行った.

表 4.6: 寿命の fitting パラメーター

	q_0	q_1	q_2
NaI1	2028 ± 41.9	150.1 ± 3.2	995.4 ± 5.2
NaI2	2690 ± 55.2	144.2 ± 2.9	1264 ± 5.9

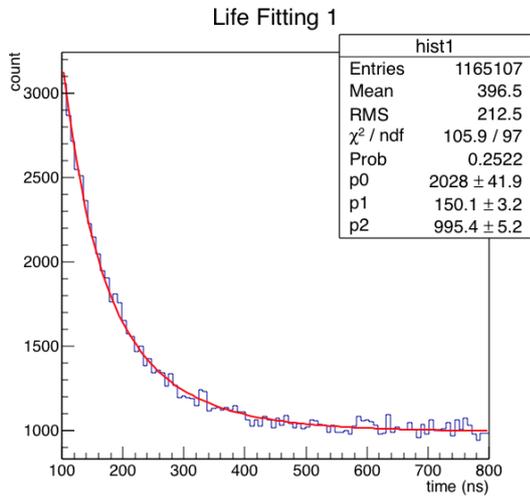


図 4.19: NaI1 寿命の fitting

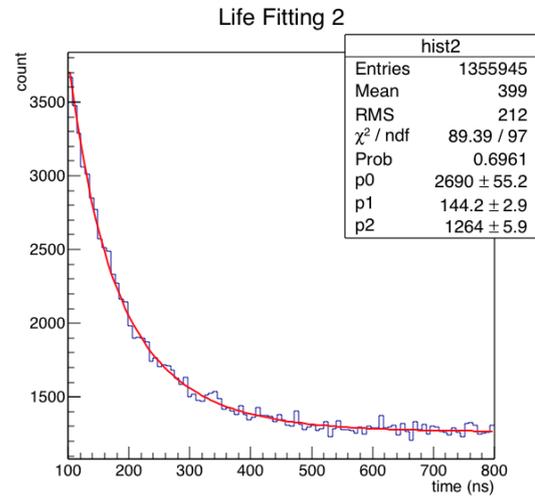


図 4.20: NaI2 寿命の fitting

これより、検出器ごとに算出した o -Ps の寿命は以下ようになった。

NaI1 : 150.1 ± 3.2 ns

NaI2 : 144.2 ± 2.9 ns

第5章 考察

5.1 γ 線の直接入射による影響

2次元 histogram を見ると, 1275keV のイベントが存在するが, これは ^{22}Na からの γ 線の直接の入射による. これの compton 散乱による結果への影響を考察する. 図 5.1 と図 5.2 が 1275keV peak 付近のイベントのみを抽出し横軸を時間, 縦軸をカウント数として NaI1,2 についてそれぞれプロットしたものである. これから見るにイベント数に時間依存性はほぼ無いと考えた. よって, これらの compton 散乱により 511keV 以下までなだれ込んだイベントは fitting 結果の back ground を表す項にのみ影響し, 求める寿命には影響が無いものと考えられる.

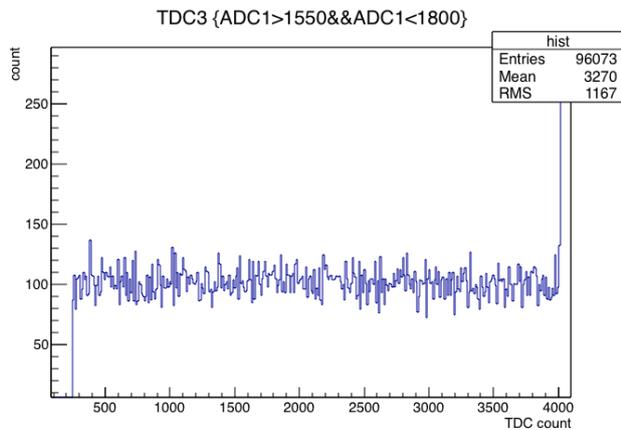


図 5.1: NaI1 の 1275keV 付近のイベント

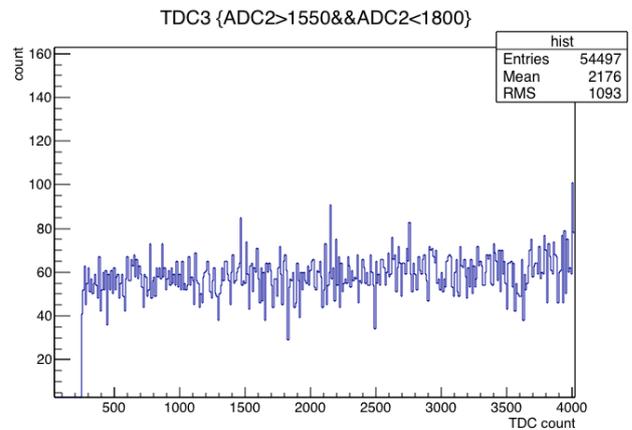


図 5.2: NaI の 1275keV 付近のイベント

5.2 ADC2 の pedestal 下の分布について

NaI2 の ADC において pedestal が 181 から 187(ADC count) あたりで比較的少ないイベント数で分布していた. これらイベントの発生した原因及びその影響について下のように考察した.

データ取得開始から 4 日目の NaI2 の pedestal の様子が 図 5.3 であるが, この時点で 195(ADC count) 付近にピークがあるのに対して 181 から 187(ADC count) の範囲に 図 4.4 と同様の分布が見られる. NaI2 を接続した ADC が 181 から 187(ADC count) の応答をした際のプラスチックシンチレータを接続した TDC の応答が 図 5.4 であるが, この分布は 図 4.9 のイベントの分布とほぼ同様である. これらのことから, この分布は時間の経過や環境の変化によって pedestal の位置が変化したものではなく使用したシンチレータもしくはそれを接続した ADC の 2ch の不具合などによるものであり, これは結果に影響を及ぼさないと考えた.

以上より, NaI2 の pedestal を決める際には 186 から 200(count) の範囲でこれらのデータを含まないように fitting し, 結果を求める際には cut はしなかったが, 影響はないものと考えられる.

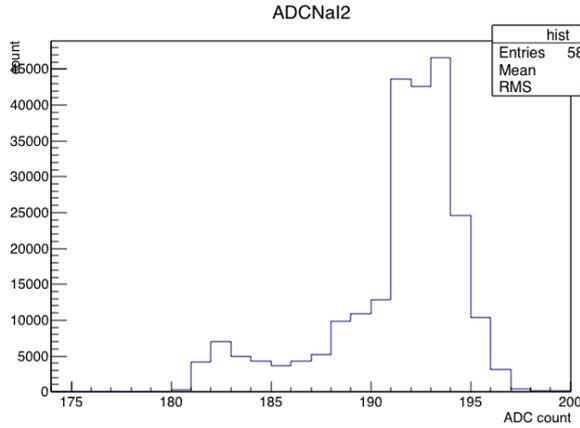


図 5.3: データ取得 4 日目の pedestal の様子.

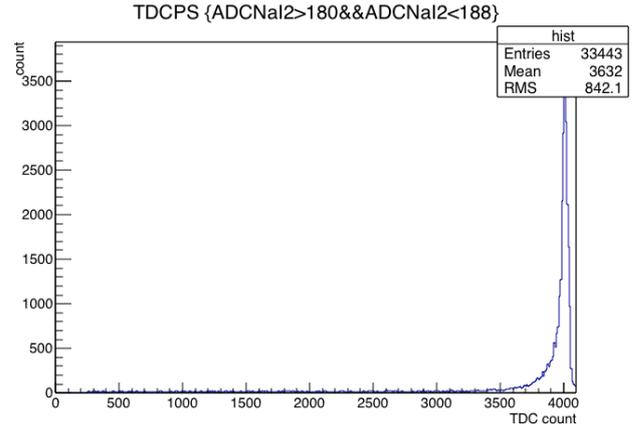


図 5.4: ADC count 181-187 のイベントのプラスチックシンチレータの応答.

5.3 粒子の移動時間による誤差

今回の測定では, positron がプラスチックシンチレータで検出されてから positronium を形成するまで, positronium が崩壊してから γ 線が検出されるまでに, positron や γ 線の移動のために時間ラグがある. 移動距離は数 cm ほどなので, 粒子が光速 ($\sim 10^{-10}$ cm/s) で走るとすれば, ~ 0.1 ns 程寿命が長く見えることになる. 今回は para-positronium の寿命 (~ 0.1 ns) を 0 ns とみなしている, この精度での測定ではこれは影響しないことになる. また, positron の検出から positronium 形成までの時間については, TQ 補正の際に para-positronium の崩壊時刻が 0 ns となるようにしているので, 影響しないとしてよいと考えられる¹.

5.4 統計誤差

今回の解析では, fitting を三回行っている. TQ 補正, pick-off 補正, 最後の寿命の fitting である. 各 fitting には, 当然, 統計誤差が含まれているが, 最終的な寿命の誤差としては扱われていない. ここでは, 誤差伝搬の式を用いて統計誤差をまとめることを考える.

5.4.1 TQ 補正関数の誤差

TQ 補正関数をここに再掲する.

$$\Delta T(E) = \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} + p_3$$

各 parameter には統計誤差 δp_i が含まれており, ΔT に対するその影響が $\delta T + \delta(\Delta T)$ と現れるとすると,

$$\begin{aligned} \delta(\Delta T) &= \sqrt{\sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial(\Delta T)}{\partial p_i} \delta p_i \right)^2} \\ &= \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} \sqrt{\left(\frac{\delta p_0}{p_0} \right)^2 + \left(\frac{p_2}{E - p_1} \delta p_1 \right)^2 + (\log(E - p_1) \delta p_2)^2 + \left(\frac{(E - p_1)^{p_2}}{p_0} \delta p_3 \right)^2} \end{aligned}$$

である. この誤差を考慮した TQ 補正関数 $\Delta T \pm \delta(\Delta T)$ を用いて, TQ 補正を行い, 寿命を評価することで, 寿命への誤差の影響を見積もる. 実際には ΔT の寿命への影響は単調ではないはずなので, $\Delta T \pm (i/4) \delta(\Delta T)$, ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) を TQ 補正関数として, 寿命を評価した (pick-off 補正は含めていない). 結果を表 5.1 に示す.

¹後述のとおり, TQ 補正による誤差の方が非常に大きいと考えられる.

表 5.1: TQ 補正の誤差の寿命への影響 (単位: ns)

	$-\delta$	$-(3/4)\delta$	$-(1/2)\delta$	$-(1/4)\delta$	0	$+(1/4)\delta$	$+(1/2)\delta$	$+(3/4)\delta$	$+\delta$
NaI1	57.94	56.58	56.37	56.38	86.08	53.77	53.04	52.72	84.82
NaI2	57.67	62.23	62.23	54.35	89.86	61.58	58.77	55.20	89.74

TQ 補正の fitting による統計誤差の正の側, 負の側への影響は表 5.1 における最大の誤差をとって, 次のようにまとめられた:

$$\text{NaI1} : +0\text{ns} -33.04\text{ns}$$

$$\text{NaI2} : +0\text{ns} -35.51\text{ns}$$

しかし, 初めの fitting の際の誤差 δp_i ($i = 0, 1, 2, 3$) が大きく, ΔT より $\delta(\Delta T)$ の方が関数形を決めてしまっているのか, このときの TQ 補正はうまくいっていなかった. 誤差伝搬の式は誤差が十分小さいと仮定した下での式であるので, 今回は使用できなかったということで, TQ 補正の統計誤差については保留とした.

5.4.2 pick-off 補正関数の誤差

Pick-off 補正関数, 寿命の fitting の式をここに再掲する.

$$f(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2$$

$$g(t) = q_0(1 + f(t)) \exp\left(-\frac{1}{q_1} \int^t (1 + f(t')) dt'\right) + q_2$$

pick-off 補正関数作成の際に, p_i に δp_i の誤差が生じている. これの寿命への影響 δg は,

$$\begin{aligned} \delta g &= \sqrt{\sum_{i=0}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \delta p_i\right)^2} \\ &= q_0 \exp\left\{-\frac{1}{q_1} \left(t(1 + p_2) - p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right)\right)\right\} \left[\left\{ \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) \left(1 + \frac{p_1}{q_1} \left(1 + p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2\right)\right) \delta p_0 \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) \left(\frac{t}{p_1^2} + \frac{1}{q_1} \left(1 + \frac{t}{p_1}\right) \left(1 + p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2\right)\right) \delta p_1 \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(1 - \frac{t}{q_1} \left(1 + p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2\right)\right) \delta p_2 \right\}^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

である. この誤差を考慮して, 寿命の fitting を $g \pm \delta g$ で行って誤差の影響を見積もる. TQ 補正と同様に, 実際には $f(t)$ の寿命への影響は単調ではないはずなので, $g \pm (i/4)\delta g$, ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) を fitting 関数として, 寿命を評価した.

表 5.2: pick-off 補正の誤差の影響 (単位: ns)

	$-\delta$	$-(3/4)\delta$	$-(1/2)\delta$	$-(1/4)\delta$	0	$+(1/4)\delta$	$+(1/2)\delta$	$+(3/4)\delta$	$+\delta$
NaI1	143.8	145.4	147.0	148.6	150.1	151.5	153.0	154.4	155.7
NaI2	139.7	140.9	142.0	143.1	144.2	145.3	146.3	147.3	148.3

Pick-off 補正の fitting による統計誤差の正の側, 負の側への影響は表 5.2 における最大の誤差をとって, 次のようにまとめられる:

$$\text{NaI1} : +5.6\text{ns} -6.3\text{ns}$$

$$\text{NaI2} : +4.1\text{ns} -4.5\text{ns}$$

但し, pick-off 補正関数の sampling の際の誤差は考慮していない.

5.4.3 統計誤差のまとめ

最後の寿命 fitting の際の誤差と, pick-off 補正関数の fitting による誤差をまとめると,

NaI1 : +6.5ns -7.1ns

NaI2 : +5.0ns -5.4ns

となった. 但し, ここには TQ 補正の fitting による大きな誤差, pick-off 補正関数作成の際の sampling による誤差は含んでいない.

第6章 まとめ

Ortho-positronium の寿命は, NaI1, NaI2 それぞれについて, $150.1^{+6.5}_{-7.1}$ ns, $144.2^{+5.0}_{-5.4}$ ns と計測され¹, これらを合わせると, 実験的なその寿命として $147.2^{+4.09}_{-4.46}$ ns という値が得られる. 実際にはさらに考察であげたような考慮されていない誤差が含まれる. 一方, 第2章で見たように QED の理論計算によると Ortho-positronium の寿命は一次の摂動までで 139.9 ns と求まっているので² これと実験的なその寿命とを比較すれば, 今回の実験では QED に肯定的な値が得られたと言える.

謝辞

今回実験を進めるにあたって, 懇切丁寧に指導, 助言して下さった隅田土詞さん, TA の中桐洸太さん, 森正光さんに感謝いたします.

¹上付き及び下付き添え字はそれぞれ正負の統計誤差の最大値を意味する. 次も同じ

²高次の摂動まで計算すると約 142 ns

参考文献

- [1] Mark Srednicki (2007). "Quantum Field Theory" Cambridge University Press.
- [2] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder (1995). "An Introduction to Quantum Field Theory" Westview Press.
- [3] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood (1998). "An Introduction to the Standard Model of Particle Physics" Cambridge University Press. (W. N. コットインガム, D. A. グリーンウッド, 樺沢宇紀 (訳) (2012). 「素粒子標準模型入門」丸善出版).
- [4] ヴェ = ベレステツキー, イェ = リフシツツ, エリ = ピタエフスキー, 井上健男 (訳) (1969). 「相対論的量子力学 I」東京図書.³
- [5] 浅井祥仁, 折戸周治 (1994). 「オルソポジトロニウムの寿命問題」日本物理学会誌 Vol.49(1994) No.3 P 217-220.
- [6] 猪木慶治, 川合光 (1994). 「量子力学 I・II」講談社サイエンティフィック.
- [7] 2015 年度後期課題演習 A2 レポート.

³原著はロシア語であるが, 字体の都合上記述できなかったので省略した.