

2016 年度後期 A2 最終レポート
オルソポジトロニウムの寿命測定

大田力也 鯉淵駿 龍澤誠之 羽田野真友喜 松尾一輝 三野裕哉

2017 年 5 月 17 日

概要

ポジトロニウム (Ps) は、電子 e^- と陽電子 e^+ の電氣的な束縛状態であり、短い時間で対消滅して γ 線を放出することが知られている。今回の実験の目的は、そのスピン 1 状態であるオルソポジトロニウム (o-Ps) の寿命を測定すること、そしてその結果を、量子電磁力学 (QED) による理論値と比較検証することである。陽電子源には β^+ 崩壊をする ^{22}Na 、電子源にはシリカパウダーを用意し、陽電子が生成された時刻と、対消滅により放出された γ 線を検出した時刻との差を測定することで o-Ps の寿命を測定した。解析の結果、3 つの NaI で、155.8(77) ns, 253.7(239) ns, 124.6(118) ns という結果が得られ、2 つ目の結果は理論値よりかなり大きな値になったが、他の 2 つについては QED に肯定的な結果が得られた。

目次

第 1 章	イントロダクション	3
第 2 章	理論	4
2.1	ポジトロニウムについて	4
第 3 章	実験の原理	7
3.1	実験器具	7
3.2	セットアップ	7
3.3	回路図	8
第 4 章	実験結果	11
4.1	概要	11
4.2	実験セットアップの安定性	11
4.3	TDC のチャンネル不良	13
第 5 章	データ解析	14
5.1	生データ	14
5.2	Calibration	16
5.3	TQ 補正	18
5.4	Pick-off 補正	23
第 6 章	結果・考察・まとめ	29
6.1	結果	29
6.2	考察	29
6.3	まとめ	34
謝辞		35
付録 A	ポジトロニウムの寿命計算	36
A.1	単位系、メトリック、記法	36
A.2	ポジトロニウムの構造	36
A.3	相互作用表示と時間発展	37
A.4	S 行列とダイソンの公式	38
A.5	場の量子化	39

A.6	スピン状態によるポジトロニウムの崩壊の違い	43
A.7	伝播関数 (プロパゲーター)	45
A.8	正規積とウィックの定理	47
A.9	不変振幅と散乱断面積	50
A.10	ガンマ行列の種々の公式	51
A.11	パラポジトロニウムの寿命	52
参考文献		57

第 1 章

イントロダクション

ポジトロニウム (Ps) は、電子 e^- と陽電子 e^+ が電氣的に束縛されることにより形成される物質で、エキゾチック原子と呼ばれるもののひとつである。電子と陽電子は電荷が正負逆だが質量が同じなため、古典的には 2 粒子の重心をお互いが回っており、水素原子によく似た構造をしている。

また、Ps は対消滅をして光子 (γ 線) を放出するのだが、そのスピン状態により異なる崩壊の仕方をする。スピン 0 状態をパラポジトロニウム (p-Ps)、スピン 1 状態をオルソポジトロニウム (o-Ps) といい、大きく異なる点は、前者の寿命が約 0.125 ns であるのに対し、後者は約 142 ns と比較的長いことである。Ps の寿命は量子電磁力学 (QED) の摂動論により近似的に計算でき、歴史的には o-Ps の寿命測定が QED の検証に用いられてきた。

我々もそれに倣い今回の実験では、オルソポジトロニウムの寿命を測定し、QED による理論値との比較検証を行った。

第 2 章

理論

ここでは、Ps の理論的なことについてできるだけ簡潔にまとめようと思う。より詳しい内容は付録にまとめたのでそちらを参照していただきたい。

2.1 ポジトロニウムについて

イントロダクションでも述べたように、Ps は電子 e^- とその反粒子である陽電子 e^+ の電氣的な束縛状態であり、スピン量子数の異なる 2 つの状態がある。

電氣的相互作用では荷電共役不変性が成り立っているが、その不変性により、p-Ps は偶数個の光子に、o-Ps は奇数個の光子に崩壊することが示せる。以下で、その崩壊の違いと、寿命計算についての大まかな説明をしていく。なお、Ps はほとんど静止しているとみなし、基底状態にあるとする。

2.1.1 パラポジトロニウム

上述のように p-Ps は合成スピン 0、いわゆるシングレットの状態であり、状態ベクトルのスピン部分は

$$|p\text{-Ps}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (2.1)$$

とかける。

場の理論によると、p-Ps は荷電共役変換 (C 変換) に対して偶である。すなわち、

$$|p\text{-Ps}\rangle \xrightarrow{C} |p\text{-Ps}\rangle \quad (2.2)$$

である。

一方、光子が n 個ある状態 $|n\gamma\rangle$ は、荷電共役変換に対して

$$|n\gamma\rangle \xrightarrow{C} (-1)^n |n\gamma\rangle \quad (2.3)$$

と変換する。つまり、荷電共役変換に対して、光子が偶数個ならば偶、奇数個ならば奇である。

QED では、荷電共役変換に対する理論の不変性を要請するので、荷電共役変換に対する変換性は状態が遷移しても変化しない。以上のことから、p-Ps は偶数個の光子にしか崩壊できないことが分かる。なお、4 個以上の光子への崩壊は、電磁相互作用を摂動として扱ったときの高次項に対応するので、遷移確率は小さくなり、p-Ps はほとんどが 2 個の光子に崩壊すると考えてよい。

Ps はほとんど静止していることから、2 個の光子への崩壊を考えると、運動量保存則より、互いに逆向きかつ同じエネルギー 511 keV のエネルギーを持った光子が飛び出してくるしかないことがわかる。なお、511 keV という値は、ほぼ電子(あるいは陽電子)の静止質量である。

最後に、p-Ps の寿命について説明しておく。ここでの寿命は、単位時間当たりの崩壊確率の逆数として定義される。場の理論における摂動論により、崩壊過程の遷移確率は、対応する遷移過程のファインマンダイアグラムからの寄与を計算すればよい。摂動の最低次における p-Ps の2 光子崩壊のファインマンダイアグラムが図 2.1 である。光子のボース統計性により、2つの光子を入れ替えた2つの図形が遷移確率に同じ寄与を与える。なお、図の下から上に向かって時間軸をとっているものとする。

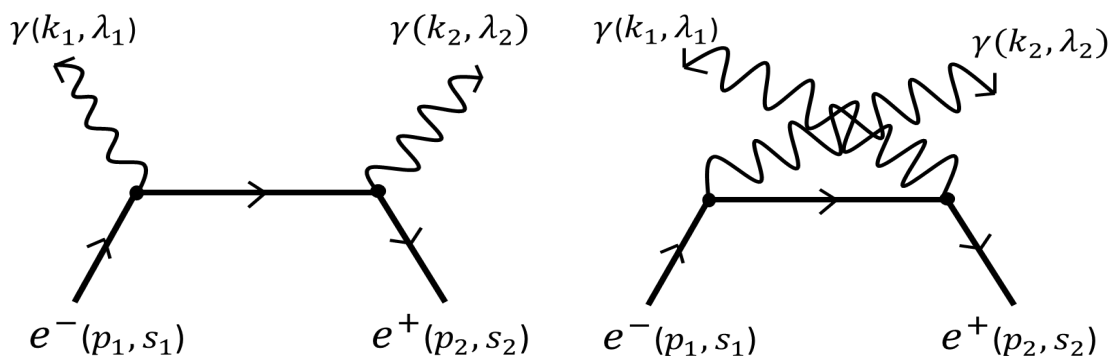


図 2.1: p-Ps の 2 光子崩壊

より高次の摂動を考慮した詳細な計算によると、

p-Ps の寿命:約 0.125 ns

である。高次のファインマンダイアグラムの一例が図 2.2 である。

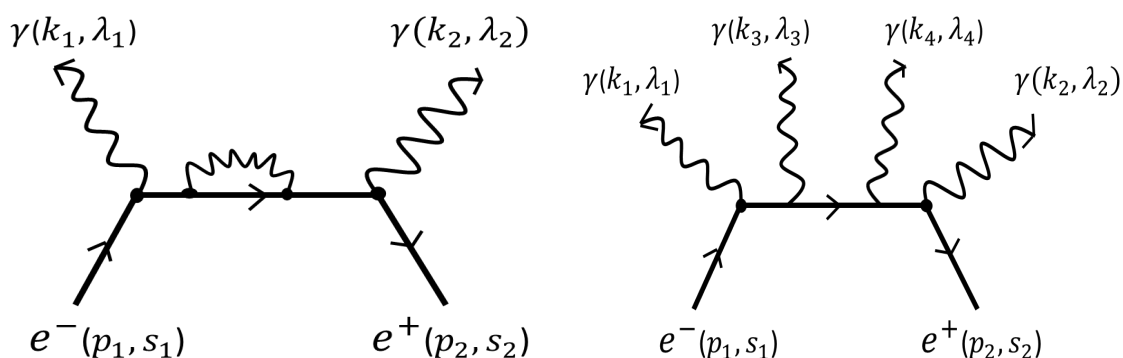


図 2.2: 高次の p-Ps のダイアグラム

左が 2 光子崩壊のもう一つ高次の遷移過程で、右が 4 光子崩壊のダイアグラムである。もちろん光子を入れ替えた図もある。

2.1.2 オルソポジトロニウム

o-Ps は合成スピン 1、いわゆるトリプレットの状態であり、以下のように 3 重縮退している。

$$|o\text{-Ps}\rangle = \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} \quad (2.4)$$

荷電共役変換については、奇であることが示せる。つまり、

$$|o\text{-Ps}\rangle \xrightarrow{C} -|o\text{-Ps}\rangle \quad (2.5)$$

したがって、p-Ps のところで述べた時と同じように、荷電共役変換に対する変換性が同じである奇数個の光子への崩壊しか許されないことが分かる。ただし、1 個の光子への崩壊は運動量保存を満たすことができないので禁止される。ゆえに、ほとんどの o-Ps は 3 個の光子へ崩壊する。

そして、摂動の最低次における o-Ps の 3 光子崩壊のファインマンダイアグラムが図 2.3 である。本来は光子を入れ替えた図 (3!=6 通り) も書くべきだが、ここでは一番シンプルなものだけを載せる。

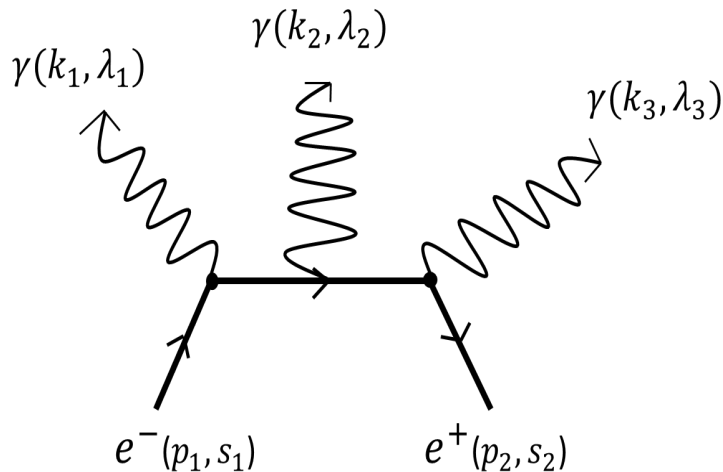


図 2.3: o-Ps の 3 光子崩壊

p-Ps のダイアグラム (図 2.1) と異なる点は、頂点 (vertex) の個数がひとつ多いことである。摂動論のファインマンルールによると、ダイアグラムの頂点がひとつ増えるごとに結合定数ひとつオーダーだけ確率が小さくなることが知られている。QED の結合定数は、微細構造定数 $\alpha \approx 1/137$ である。したがって、ダイアグラムを見れば、o-Ps の方が p-Ps よりも寿命が長いことが分かる。実際、高次の摂動も考慮した詳細な計算によると、

o-Ps の寿命: 約 142 ns

である。

以上のように、QED によって近似的に寿命を計算することができる。より詳しい計算法は付録を参照。

第3章

実験の原理

線源 ^{22}Na の β^+ 崩壊により放出された e^+ がシリカパウダーまで到達し、シリカパウダー SiO_2 中の e^- と結合して Ps を形成する。ここでできた Ps が対消滅を起こすことで γ 線が放出される。具体的な実験内容としては、プラスチックシンチレータ (P.S.) で e^+ を検出し、Ps が放出する γ 線を NaI で検出した。これらに現れる検出時間の差を測定することで Ps の寿命を求めた。またこの際に e^+ が P.S. を通過した時刻と Ps が形成された時刻、 γ 線が検出された時刻と Ps が崩壊した時刻をそれぞれ同時とみなして解析を行った。(実際、これらの時刻の差は o-Ps の崩壊時間に比べ十分短く妥当な近似である。)

3.1 実験器具

- ^{22}Na : β^+ 崩壊によって e^+ を放出する線源。
- シリカパウダー: e^- を多く有し、 e^+ を受けて Ps を形成する。
- P.S.: e^+ を検出する。
- NaI: γ 線を検出する。
- PMT(光電子増倍管): 光子を受け、光電子増倍器で増幅した電子パルスを出す。NaI や P.S. と組み合わせて用いた。
- 鉛ブロック: 外部からの放射線を遮断する。
- 遮蔽ビニール: P.S. に光が入り破損してしまうのを防ぐために、セットアップ全体を覆うように使用した。

3.2 セットアップ

各実験装置は図 3.1a のように配置した。図 3.1b には線源側から見た NaI の配置を示している。線源とシリカパウダーの間の鉛ブロックには e^+ の通るための穴が開いている。

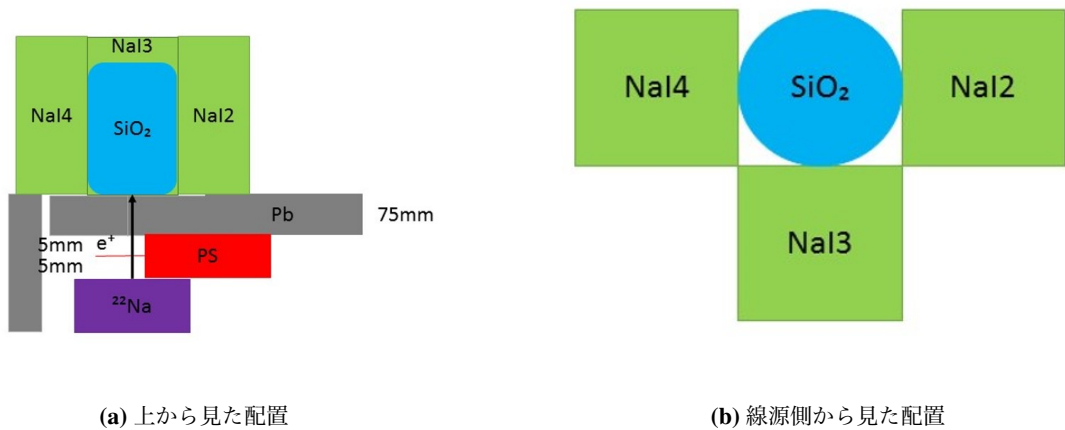


図 3.1: セットアップの模式図

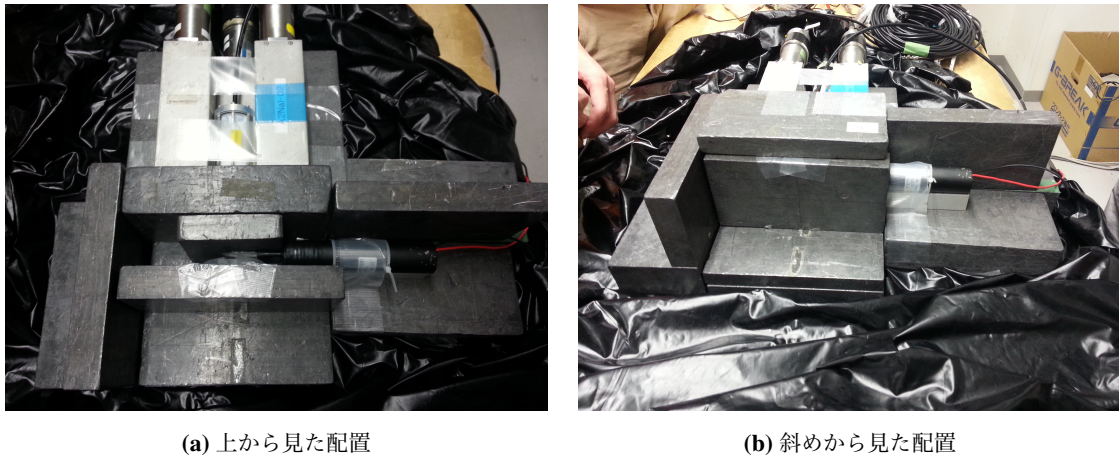


図 3.2: 実際のセットアップ

3.3 回路図

回路は図 3.3 のように組んだ。また、信号の概念図を図 3.4 に示した。現象としては e^+ が P.S. を通過した後に Ps が崩壊し γ 線を出して NaI を鳴らすので、P.S. の信号を TDC の start に、NaI の信号を TDC の stop にすることが理想的である。しかし P.S. を通過した e^+ が必ずしも Ps を形成するとは限らない。よって P.S. の信号から gate を生成し、この gate と NaI の信号で coincidence をとりこれを TDC の start とする。なお、gate を生成する際に後からやってくる e^+ による信号を受け取らないようにするために veto を取っている。すなわち、実質 Ps 崩壊による γ 線の信号を start としているので、P.S. の信号を遅らせてこれを TDC の stop と

た。この時の delay から TDC の値を引いたものが求めたい崩壊時間である。ここで、使用した各種モジュールについて以下に説明する。

- discriminator : 入力された信号が threshold を超えた時 NIM 信号を出力する。
- coincidence : すべての入力端子に同時に信号が来た場合のみ NIM 信号を出力する。
- FAN : いずれかの入力端子に信号が来た場合に NIM 信号を出力する。
- gate generator : 信号が入力されたとき一定の時間幅の NIM 信号を出力する。
- veto : gate の信号が来ている間は、次の信号が入力されないようにする。
- TDC : start に信号が入ってから stop に信号が入るまでの時間に比例した値を出力する。
- ADC : gate が開いている間に来た信号の時間積分である電荷に比例した値を出力する。

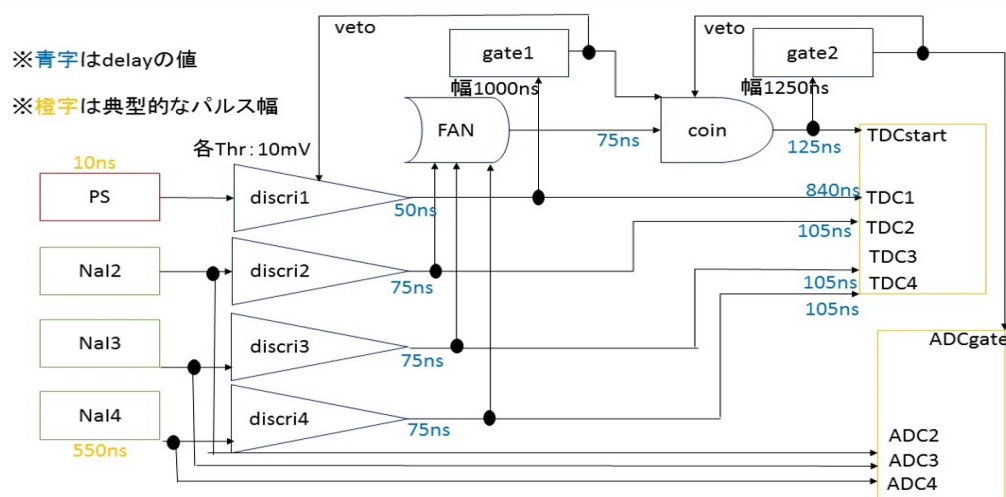


図 3.3: 回路図

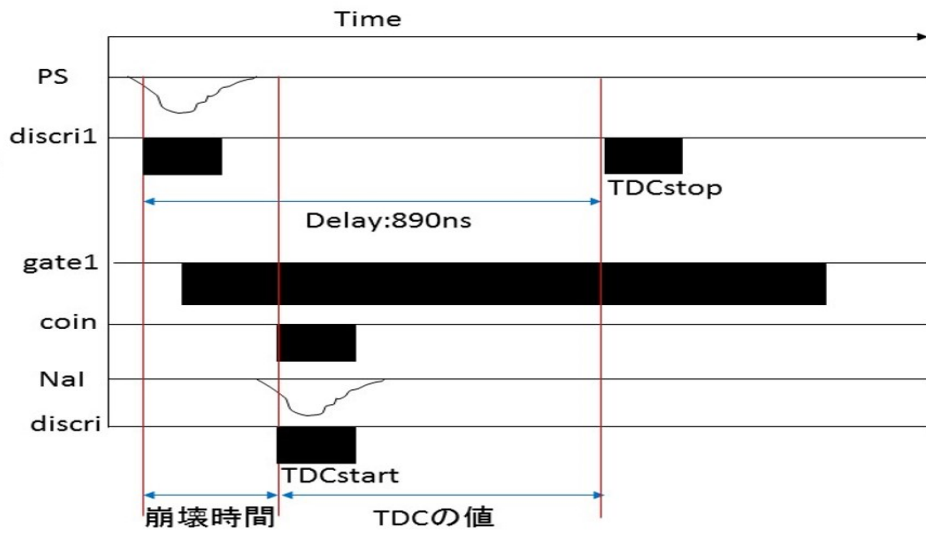


図 3.4: 信号の概念図

第 4 章

実験結果

4.1 概要

以上の実験セットアップで PC を用いてデータの取得を行った。2 月 23 日 16 時よりデータの取得をはじめ、100 万イベントの記録が取れた 2 月 27 日 16 時でデータの取得を終了した。平均のデータの取得のレートは 29.15 Hz であった。以下では実験のセットアップが問題なかったことを確認する。

4.2 実験セットアップの安定性

以下では 5 日間の間とりつづけた事による大局的な時間経過における実験セットアップの変動が実験結果に影響を与えていないかを見た。すなわちイベントをとった日付や時刻によって系統的な誤差が生じてないかを確認した。

4.2.1 ADC の時刻変動性

ここではエネルギーデータの取得に用いた ADC について変動がないかを見ていく。ADC ではエネルギーが 0 となるようなペDESTAL と呼ばれるイベントに対して、ADC は 0 ではない値を返す。この値が 0 とならないのは ADC そのものの特性や微小電流によるもので、基本的には一定の値を返す。ここで、次のペDESTAL イベントに対する ADC の値と大局的な時間経過に対する時間変動をみる。

図 4.1 に NaI2 につながった ADC がペDESTAL イベントにおける時間変動がどのようになっているかを示した。それぞれの時刻ごとにおいては統計的なばらつきが見えるのに加え、一日周期において変動があることがはっきりとわかる。これは要因としては一日における実験棟の消費電力や温度の昼夜による微小電流の変化が考えられる。ここでの誤差は後の ADC のキャリブレーションにおいて十分無視できる範囲であることと考えられる。そのため以下の解析・考察ではこの時刻変動性については取り扱わなかった。

4.2.2 TDC の時刻変動性

ここではトリガー信号とシンチレータ (NaI および P.S.) 信号の時間間隔の測定に使っている TDC について変動がないかを見る。TDC も ADC と似たような事情により、時間間隔が 0 でも TDC の値は 0 とならない。これは TDC の特性によるものに加え、それぞれの信号伝送の際にケーブル長の違いによって生じる信号の遅れ等の要因が考えられる。特に今回の測定では測定の事情から恣意的にシンチレータの信号に対してレイテン

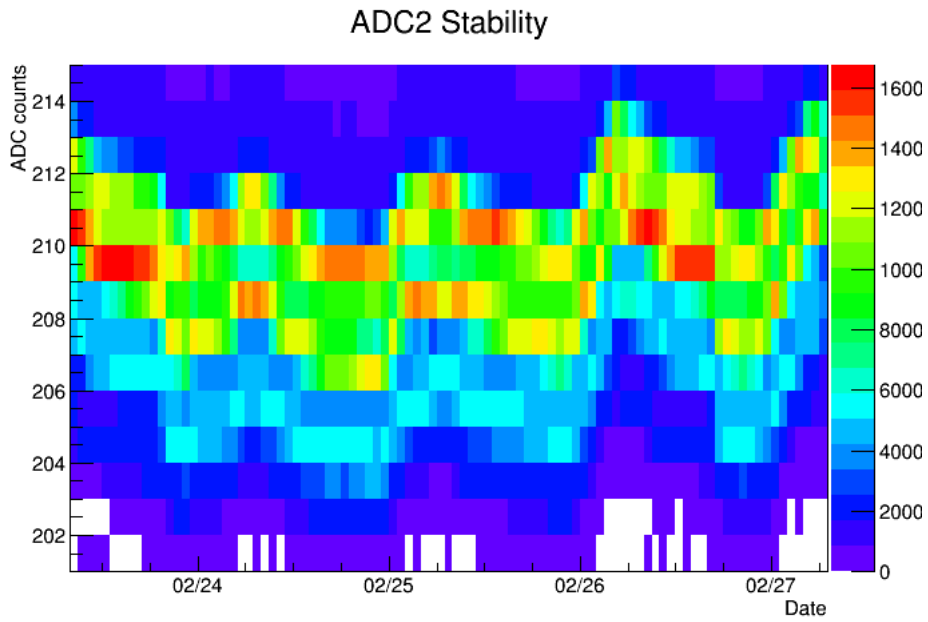


図 4.1: ADC2(NaI2) のペDESTALイベントの時間変動

シを加えているため、その値は比較的大きくなっている。ここで時間間隔が 0 となるイベントがどのようにして生じているかを考える。NaI の信号をまとめる際に FAN を使っていることと P.S. とそのまとめた信号が COINCIDENCE をとっていることより、そのシンチレータがトリガーになるようなイベントにおいてそうなると思われる。

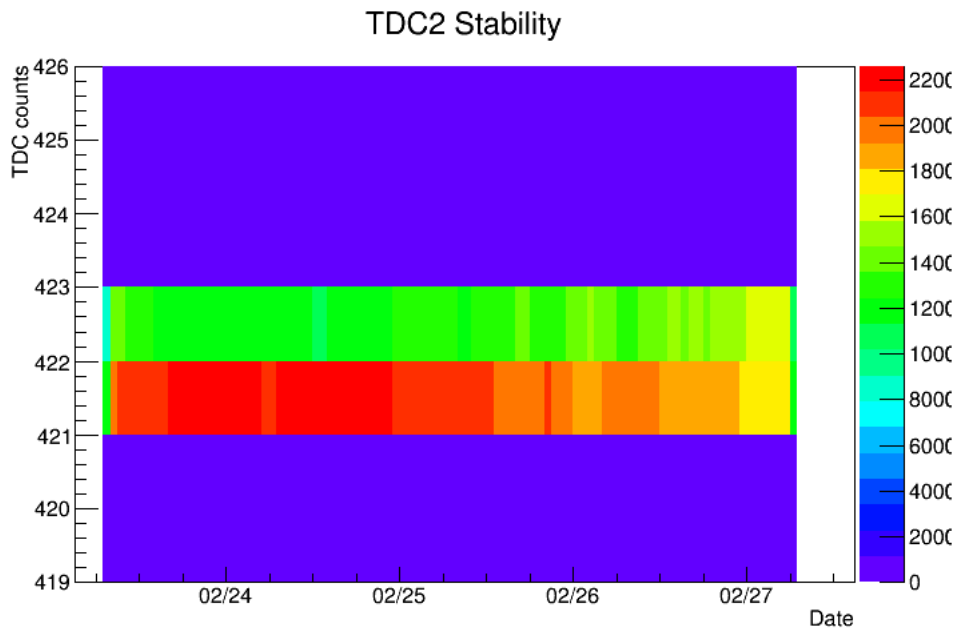


図 4.2: ADC2(NaI2) のトリガーの時間変動

図 4.2 に NaI2 のつながった TDC のトリガー信号に対する時間差 0 のイベントの時間変動を示した。ここでは各時刻において統計的なばらつきは見えるが、一方どの時刻でとったイベントも同じようにとれていることから安定してデータは取れているとみなせる。

4.3 TDC のチャンネル不良

すべての時間測定は同じ TDC モジュールで行っているが、P.S. の時間測定に使用していたチャンネルだけ次のような不調が確認されたため問題ないと思われるものを使うことにした。本実験では予備実験とは違うチャンネルを用いて測定した。

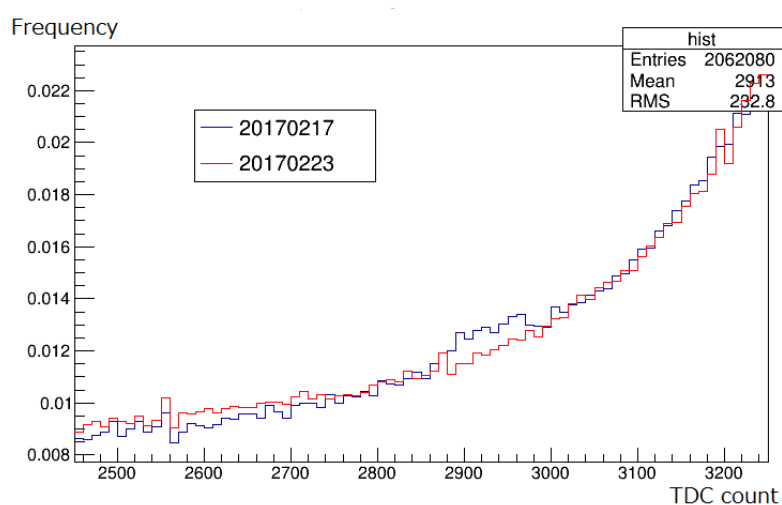


図 4.3: TDC1(P.S.) の分布

図 4.3 を見ると、予備実験を行った 2 月 17 日における分布と正しい分布と想定される本実験を行った 2 月 23 日における分布を見比べると 2 月 17 日の方が不自然な変化をしていることがわかる。

実験終了後確認 TDC に対して Clock モジュールをトリガーにしてそれにレイテンシーを入れた信号をそれぞれの TDC のチャンネルに入れて一定の時間を測定したが、その際に 2 月 17 日の際に使用していたチャンネルのみ、本来のピークとは別に手前にそれなりの大きさのピークが生じていた。おそらく上の不自然な変化も大きなピークとなる直接の p-Ps の生成イベントに対して TDC が一定の割合で手前がピークを作っていたことが原因だったと考えられる。

第 5 章

データ解析

5.1 生データ

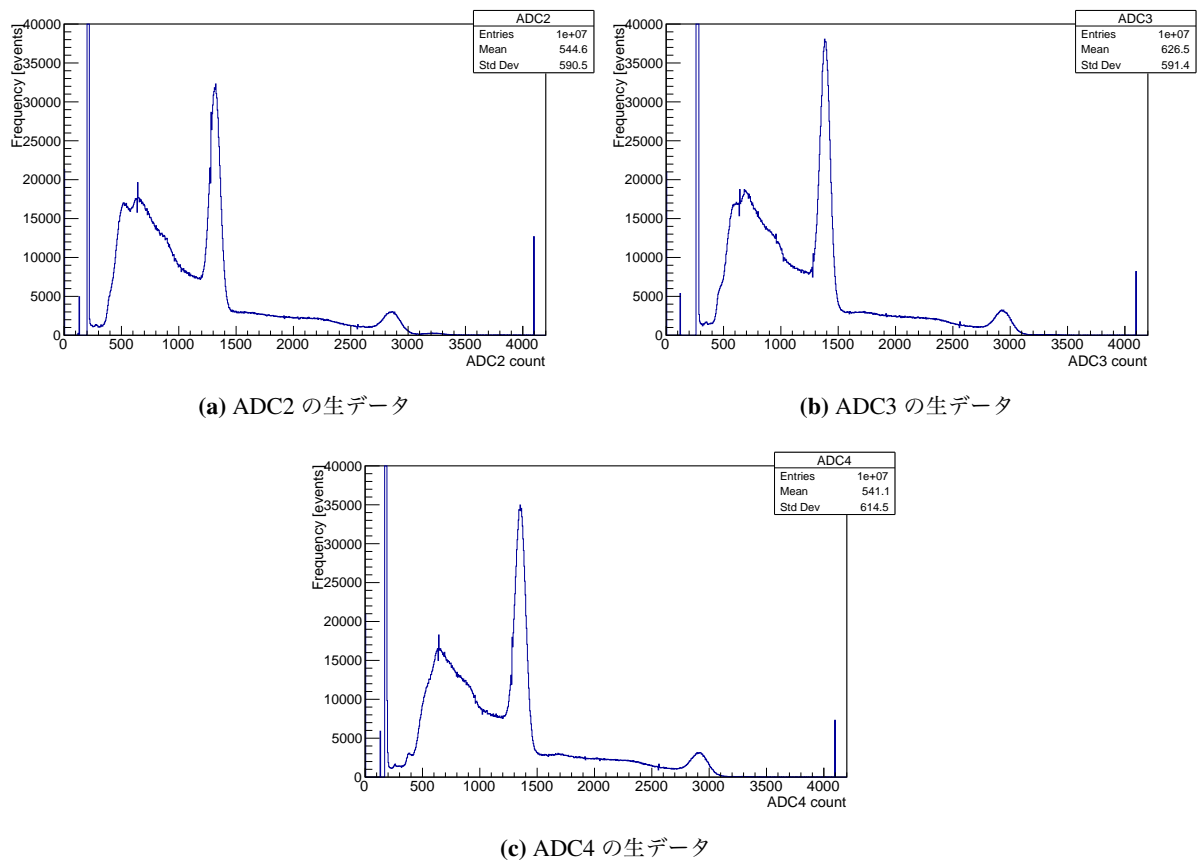
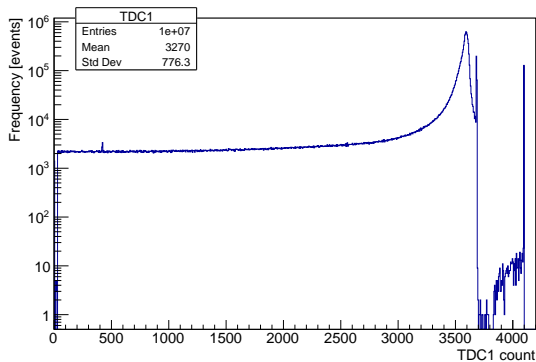
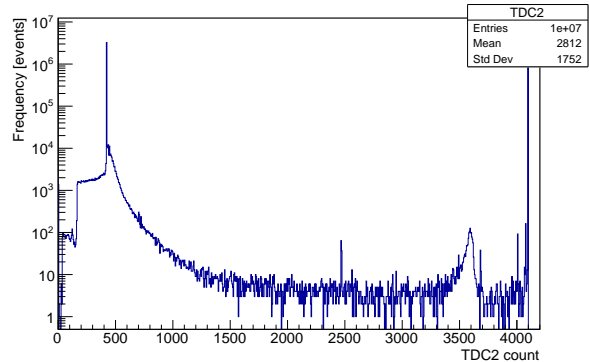


図 5.1: 各 ADC の生データ

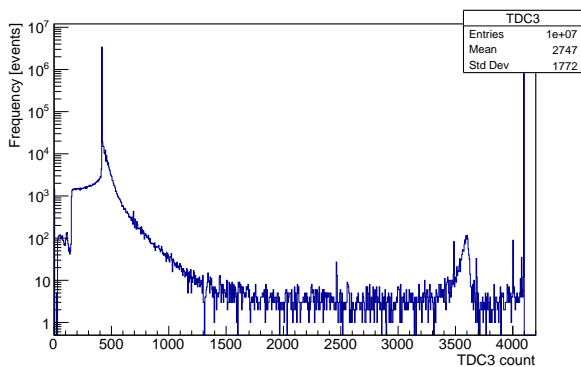
まずは本実験で実際に取得された生データのヒストグラムを記載する。図 5.1 は各 ADC の生データである。ここで、ADC2,3,4 はそれぞれ NaI2,3,4 に対応していることに注意。これを見ると、511 keV、1275 keV のピーク及びそれらの Compton 散乱が確認できる。



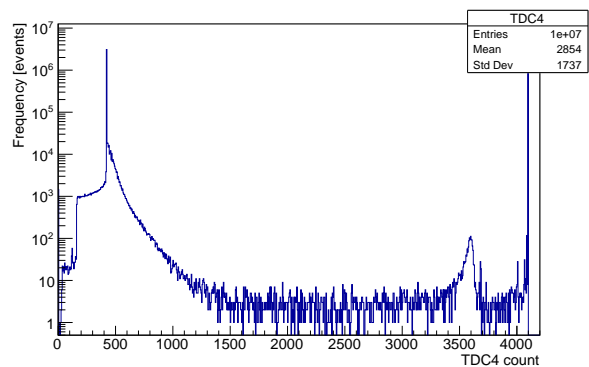
(a) TDC1 の生データ



(b) TDC2 の生データ



(c) TDC3 の生データ



(d) TDC4 の生データ

図 5.2: 各 TDC の生データ

図 5.2 は各 TDC の生データである。先と同じく、TDC2,3,4 はそれぞれ NaI2,3,4 に対応していることに注意。Ps の寿命測定に直接的に必要なデータは TDC1 である。ここで、先に述べたように TDC1 の start と stop の時間順序が逆であることに注意。TDC1 count の 3500 辺りにピークがあり、TDC1 count が小さくなる方向に指数関数的に減衰している様子が見て取れる。また、TDC1 count の 3700 あたりでヒストグラムが切れているが、これは図 3.4 における“崩壊時間 = 0”に対応しているものと考えられる。すなわち、このセットアップでは原理的にこれ以上の値を取り得ず、実際に測定された event はすべて accidental なものであると考えられる。ここで“崩壊時間 = 0”付近にも event が確認されているのは、NaI の分解能に起因するものである。

TDC2-4 はすべて TDC count の 400 辺りにピークが存在するが、これは各 NaI が Ps 崩壊によって発生した γ 線を検出したことを意味する。具体的には次のように説明される。例えば NaI2 が γ 線を検出したとしよう。このとき、回路図 3.3 によると NaI2 の信号は discriminator2 によってデジタル信号に変換され、FAN を通り coincidence に入力される。coincidence のもう一方の入力先は P.S. が検出した信号によって生成された gate 信号であるので、この γ 線が Ps 崩壊によるものならば確実に先に gate 信号は coincidence に入力されているはずである。よって NaI2 から来た信号は即座に coincidence を通過し TDC の START へ入力される。その後回路依存の一定時間が経過した後に discriminator2 から来た信号が TDC2 へと入力されるため、TDC2 の値は回路依存の一定値を取ることになる。しかし、複数の NaI が γ 線を検出した場合、これらは同時であるとは限らないため各 TDC はピーク後に若干の広がりを持つ。図 5.2 を見るとこのことが実際に確認されよう。また、

3500 辺りにも小さめのピークが確認されるがこれは先に述べた TDC 機器の不良によるものであり、物理現象とは関係がない。以下のデータ解析において、各 NaI が Ps 崩壊による γ 線を検出した時のデータのみを主として扱いたいため、TDC2-4 のデータはそれを判定する cut 条件として用いることができる。実際に使用した cut 条件を表 5.1 に記す。

表 5.1: 各 NaI が Ps 崩壊による γ 線を検出した条件

cut 条件	
NaI2	419 < TDC2 < 424
NaI3	414 < TDC3 < 418
NaI4	419 < TDC4 < 424

5.2 Calibration

次に、測定された ADC count 及び TDC count の値を実際の γ 線のエネルギースケール及び時間スケールに変換することを考える。特に、TDC0 の calibration は Ps の寿命の測定結果に直接影響を及ぼすので注意が必要である。

5.2.1 ADC calibration

まずは ADC の calibration を行う。ADC とは、入力されたアナログ信号のエネルギーに応じて 0 から 4095 までの整数値を返す機器である。ここで、信号が入力されなくても暗電流等の影響によりほぼ一定の正の値 (いわゆる pedestal) を返すことに注意。ここでは、 γ 線のエネルギーと ADC count の相関が直線的であると仮定する。また、図 5.1 で見られる ADC count が 1500 付近のピークが 511 keV に、3000 付近のピークが 1275 keV に対応しているものと仮定する。この仮定のもと、図 5.3 のように Gaussian で fitting した結果、各 ADC に対する 0 keV、511 keV、1275 keV の値は表 5.2 のようになった。

表 5.2: 各 ADC count とエネルギーの関係

	0 keV	511 keV	1275 keV
ADC2	209.2	1316	2850
ADC3	275.0	1284	2930
ADC4	182.1	1352	2908

この結果を図 5.4 のように plot して直線 fitting したところ、以下の式が得られた:

$$\text{Energy [keV]} = (\text{ADC2} - 209.2)/2.1467 \quad (5.1a)$$

$$\text{Energy [keV]} = (\text{ADC3} - 275.0)/2.1565 \quad (5.1b)$$

$$\text{Energy [keV]} = (\text{ADC2} - 182.1)/2.2595 \quad (5.1c)$$

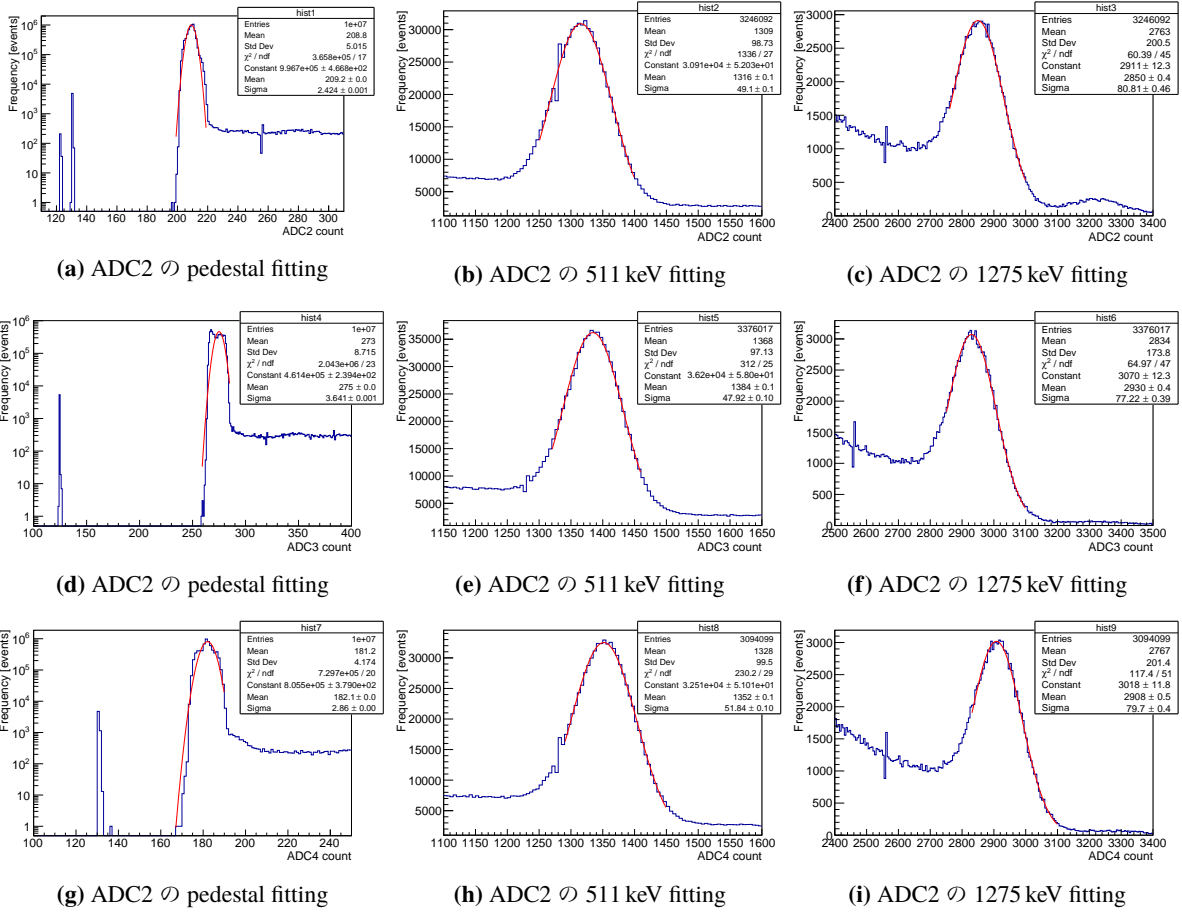


図 5.3: ADC calibration の様子

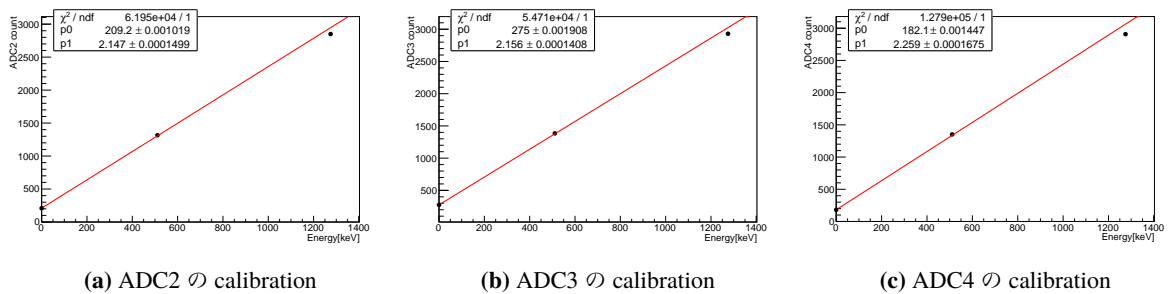


図 5.4: ADC calibration の様子 2

5.2.2 TDC calibration

次に、TDC の calibration を行う。TDC とは、start に信号が入力されてから各 ch に信号が入力されるまでの時間幅に応じて 0 から 4095 までの整数値を返す機器である。ここでも、実際の時間幅と TDC count の相関が直線的であると仮定するが、Ps の寿命として測るのは反応の減衰時間であるため、calibration で求めるべきは係数部分のみであり定数項は無視して考える。特に、TDC2-4 は上述したように cut 条件として用いるのみであるため calibration は行わず、TDC1 のみ行う。さて、calibration であるが、これは本実験とは別に start の信号に 100 ns, 200 ns, 400 ns, 800 ns の delay をかけた信号を TDC で測定することで行った。ここで delay の大きさはオシロスコープで信号を直接確認することで調節した。表 5.4 に測定結果を記す。

表 5.3: TDC1 count と時間の関係

Time [ns]	100	200	400	800
TDC1	463.1	860.7	1666	3218

この結果を直線 fitting することにより、次式が得られた。

$$\text{Time [ns]} = -0.2541 \times \text{TDC1} \quad (5.2)$$

ここで、本実験のセットアップでは start と stop の時間順序が逆であるため -1 を乗じた。

5.3 TQ 補正

5.3.1 TQ 補正とは

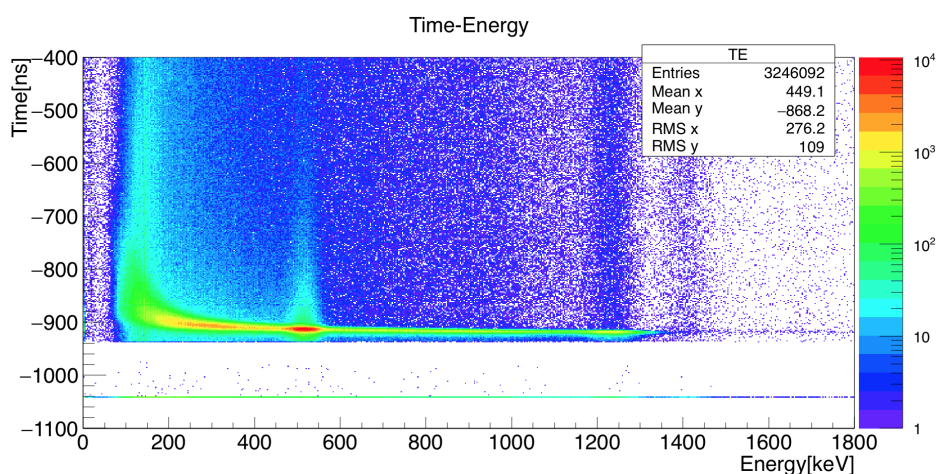


図 5.5: NaI2 に対する Time-Energy 分布

図 5.5 は NaI2 に対する Time-Energy 分布である。これを見ると、本来ほぼ同時刻に来ているはずの p-Ps 崩壊による信号 (511 keV の γ 線及びその Compton 散乱) が、エネルギーが低いほどやや遅れて観測されていることが分かる。この原因は discriminator の特性によるものである。図 6.3 を参照していただきたい。

discriminator は、アナログ信号が shreshold を超えた時にデジタル信号へと変換するものであるが、アナログ信号の大きさ (すなわち γ 線の全エネルギー) によって threshold を超えるまでの遅延時間が異なる。このために、時間とエネルギーの相関に “ずれ” が生じてしまう。この “ずれ” を修正するのが TQ 補正である。

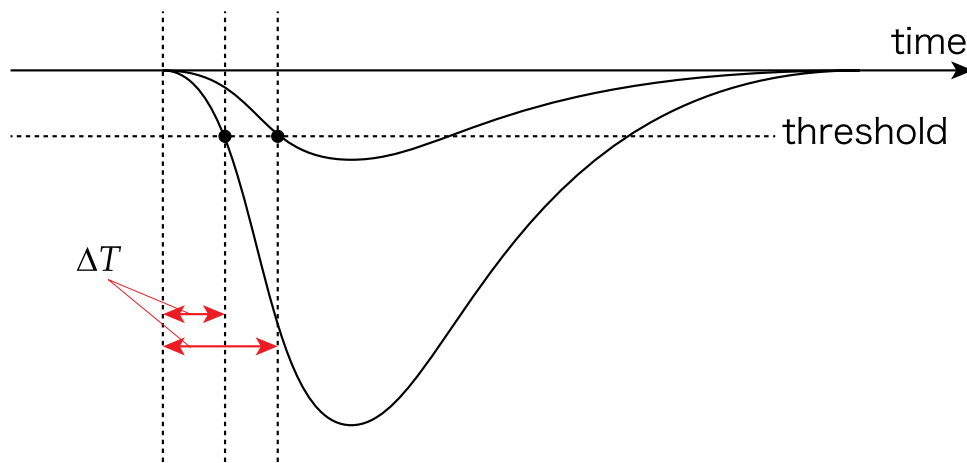


図 5.6: TQ 補正の概念図

5.3.2 TQ 補正の方法

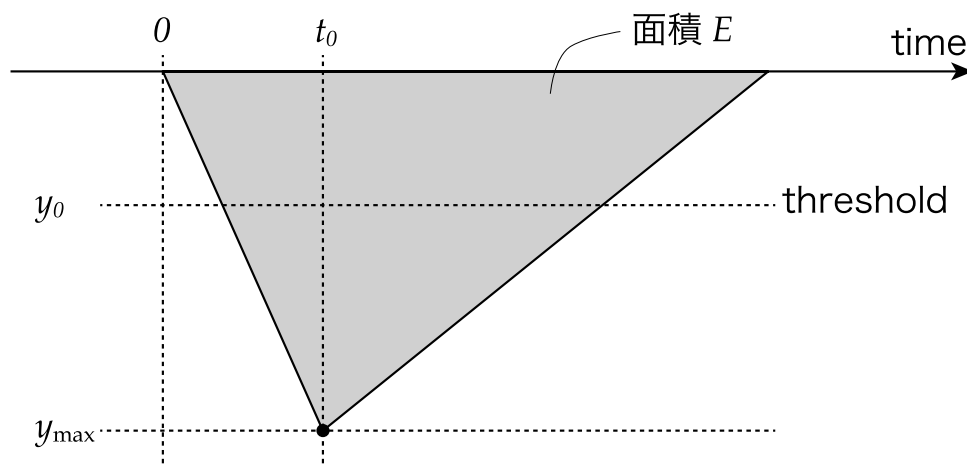


図 5.7: アナログ信号の三角形近似

さて、TQ 補正を行うためには、 γ 線のエネルギー E に対する遅延時間 $\Delta T(E)$ の関数形を求める必要がある。そこで、アナログ信号の波形を三角形に近似し、さらに信号が peak に達するまでの時間 t_0 が E に依らない定数であると仮定する。信号の高さを y_{\max} 、threshold を y_0 とすると (図 5.7 参照)、遅延時間 ΔT は、

$$\Delta T = \frac{y_0 t_0}{y_{\max}} \quad (5.3)$$

とかける。ここで、仮定より $y_0 t_0 = \text{const.}$ であり、 γ 線のエネルギーすなわち三角形の面積 E は y_{\max} に比例

するので、

$$\Delta T(E) \propto \frac{1}{E} \quad (5.4)$$

が成り立つ。しかし、この近似は強すぎるので、パラメータ p_i ($i = 0, 1, 2, 3$) を用いて

$$\Delta T(E) [\text{ns}] = \frac{p_0}{(E [\text{keV}] - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (5.5)$$

を TQ 補正関数とする。パラメータの値は実際の測定データを fitting することにより決定する。ただし、 p_2 は 1 に近い値であることが期待される。

具体的な TQ 補正の手順を以下に記す:

- (1) 160 keV \pm 5 keV の範囲で cut した Time に関する 1 次元ヒストグラムを Gaussian fitting し、その mean の値を 160 keV における ΔT の値とする。
- (2) 460 keV まで 20 keV ごとに同様の操作を繰り返す。
- (3) (1),(2) で得たデータを plot し、TQ 補正関数 (5.5) で fitting してパラメータ p_i を決定する。
- (4) 各エネルギー E に対して Time から $\Delta T(E)$ だけ引いたものを新たに Time と再定義する。

5.3.3 TQ 補正の様子

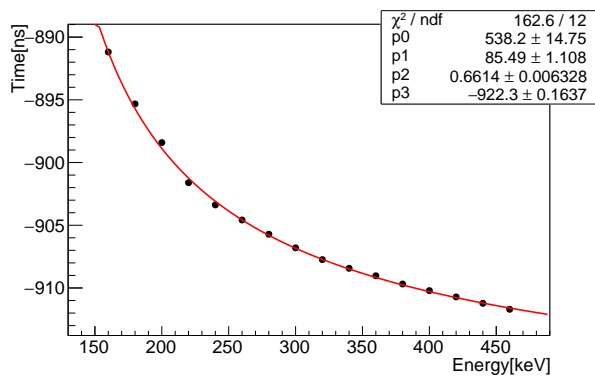
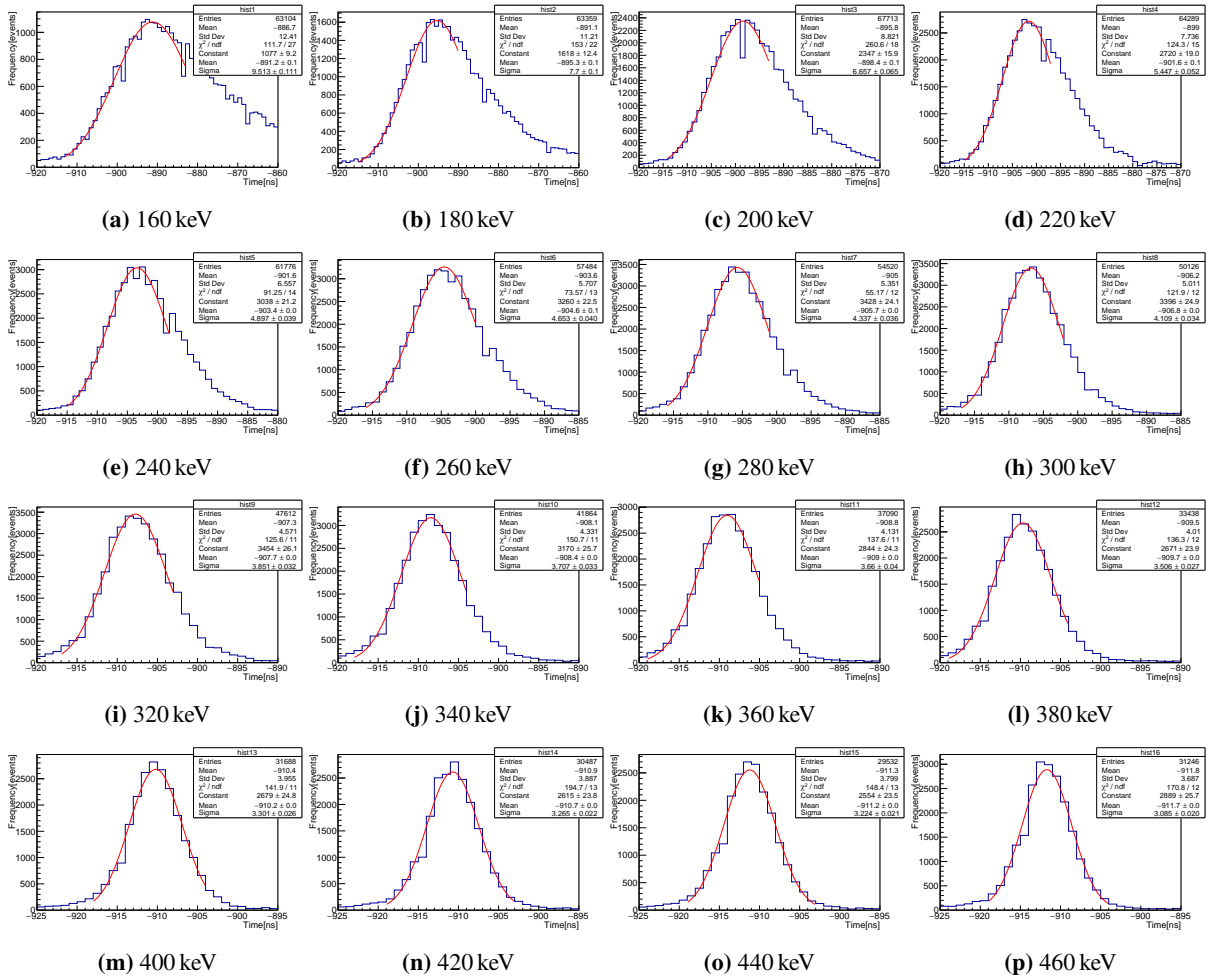
図 5.8 は NaI2 に関する実際の TQ 補正の様子である。

その結果、TQ 補正関数 (5.5) のパラメータ p_i は以下のように求まった:

表 5.4: TQ 補正関数のパラメータ

	p_0	p_1	p_2	p_3
NaI2	538.2	85.49	0.6614	-922.3
NaI3	590.5	75.25	0.6710	-923.1
NaI4	843.1	89.22	0.7734	-921.4

TQ 補正後の NaI2 に対する Time-Energy 分布は図 5.9 のようになった。これを見ると、確かに時間の“ずれ”が取り除かれていることが分かる。



(q) TQ 補正関数の fitting

図 5.8: NaI2 に対する TQ 補正の様子

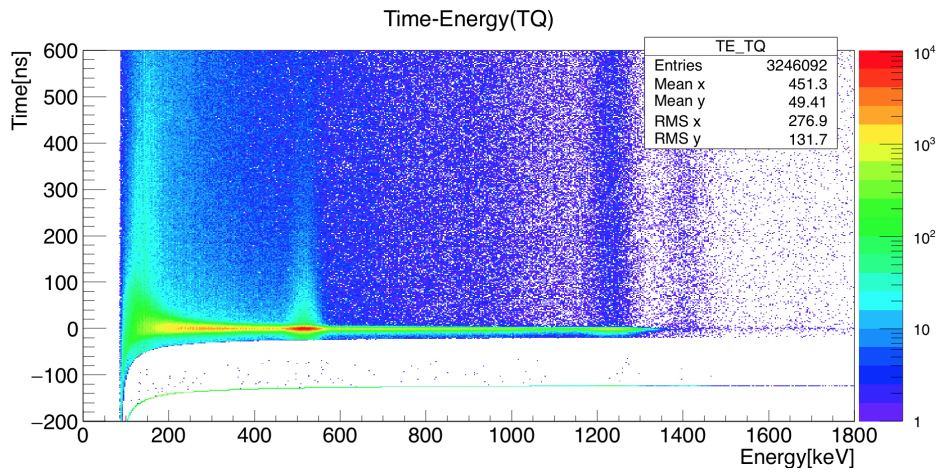


図 5.9: NaI2 に対する TQ 補正後の Time-Energy 分布

5.3.4 TQ 補正後の寿命

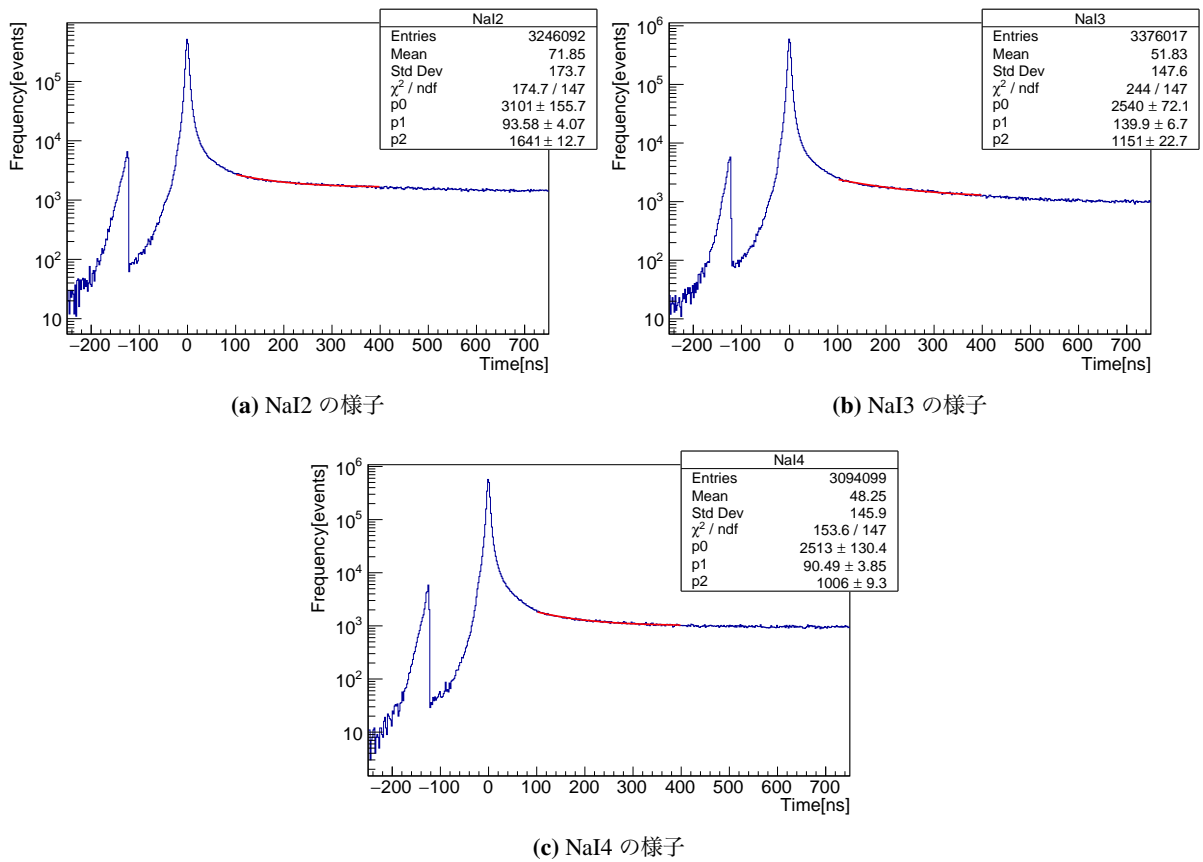


図 5.10: TQ 補正後の o-Ps の寿命 fitting の様子

TQ 補正後の o-Ps の寿命を、関数

$$p_0 \exp\left(-\frac{\text{Time [ns]}}{p_1}\right) + p_2 \quad (5.6)$$

を用いて図 5.10 のように fitting した。ここで、パラメータ p_1 が求めたい寿命であると考えられる。その結果を表 5.5 に記す。

表 5.5: TQ 補正後の o-Ps の寿命

	寿命 [ns]
NaI2	96.3
NaI3	136.6
NaI4	90.1

5.4 Pick-off 補正

5.4.1 Pick-off 反応とは

o-Ps は、以下の相互作用によって p-Ps となり 3γ ではなく 2γ に崩壊することがある:

- (1) 周囲の物質中の電子と衝突する。(pick-off 反応)
- (2) 不対電子を持つ電子と衝突し、スピンを交換する。(スピン交換反応)
- (3) 酸化され電子を奪われ、残った陽電子が対消滅を起こす。(化学反応)

厳密には上記 1 の場合を pick-off 反応と呼ぶが、ここでは簡単のためこれら 3 つを合わせて pick-off 反応と定義する。これらの相互作用により、形成された o-Ps の中に、p-Ps となって本来の o-Ps の寿命よりも早く崩壊するものが現れてしまい、全体として寿命が短く見えてしまう。よってこの崩壊幅 $\Gamma_{\text{pick-off}}$ を考慮に入れる必要がありこの崩壊幅をいかに精密に評価するかが問題となる。

5.4.2 反応の分類

それぞれのイベントが主にどの領域に分布しているか考える。イベントの種類として以下の 6 つのものを考えることができる:

- (1) 1275 keV の γ 線の Compton 散乱
- (2) p-Ps による 511 keV の γ 線
- (3) p-Ps による 511 keV の γ 線の Compton 散乱
- (4) pick-off 反応による 511 keV の γ 線
- (5) pick-off 反応による 511 keV の γ 線の Compton 散乱
- (6) o-Ps による γ 線

観測される最も早い時刻にあるピーク、つまり純粋な p-Ps によるイベントが観測される時刻を t_0 とする。これより寿命の長いイベントは主に o-Ps の崩壊によるものであり、 3γ が 511 keV 未満のエネルギーしか持たないことから、511 keV 付近のイベントは主に pick-off 反応による 2γ への崩壊、511 keV 未満のエネルギーのイ

イベントはその Compton 散乱によるものと o-Ps の 3γ への崩壊によるものであるといえる。それぞれのおおまかな領域を図 5.11 に示す。

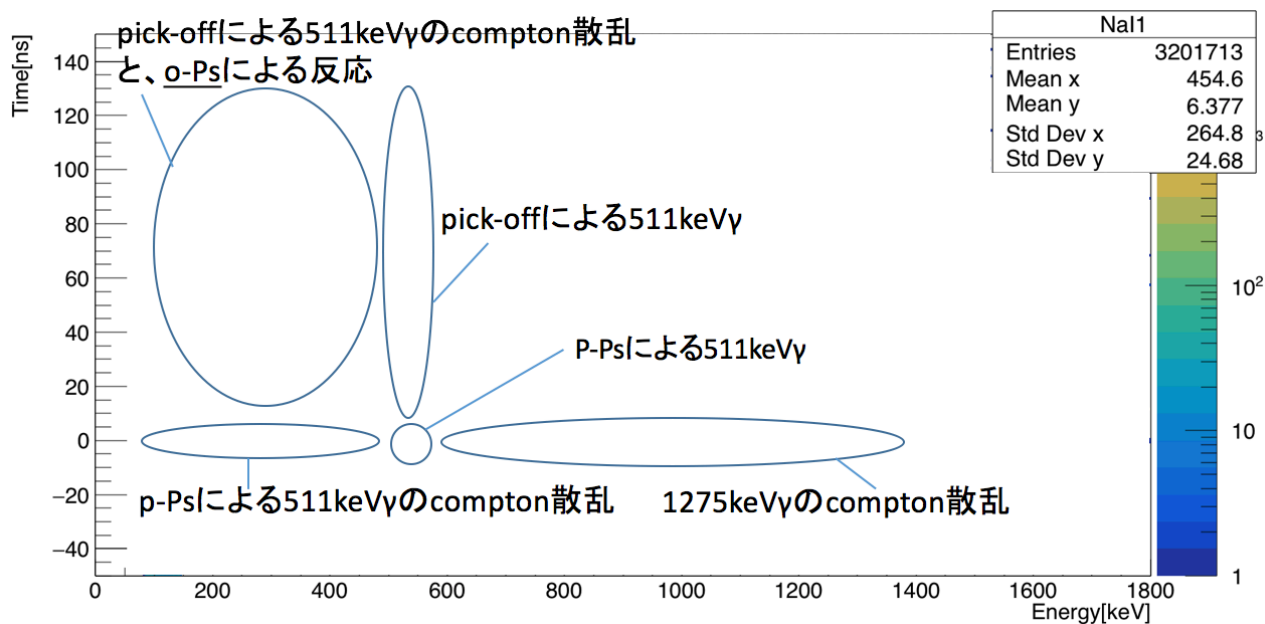


図 5.11: 反応の大まかな分類

次に、 2γ への崩壊によるイベントの分布を詳しく考える。 2γ への崩壊は次の2つの場合が考えられる:

- p-Ps による 2γ への崩壊
- o-Ps が pick-off 反応を起こした結果 2γ へ崩壊

ある時刻での 511 keV のイベントに対する 511 keV 未満のエネルギーのイベントはすべての時刻について同じ確率で分布すると考える。つまり、Compton 散乱の分布はすべての時刻で同じ形であるとする。 t_0 付近はおもに p-Ps の 2γ への崩壊のみのイベントであることから、511 keV ピークに対する Compton 散乱の分布のモデルとしてふさわしい。これで 2γ についての分布が詳しくわかった。

そして、各時刻での総イベント数から 2γ のイベントを差し引くことで、目的である o-Ps の 3γ への直接の崩壊のイベント数が求まる。以下の図 5.12 に以上の規格化の概念図を示す。

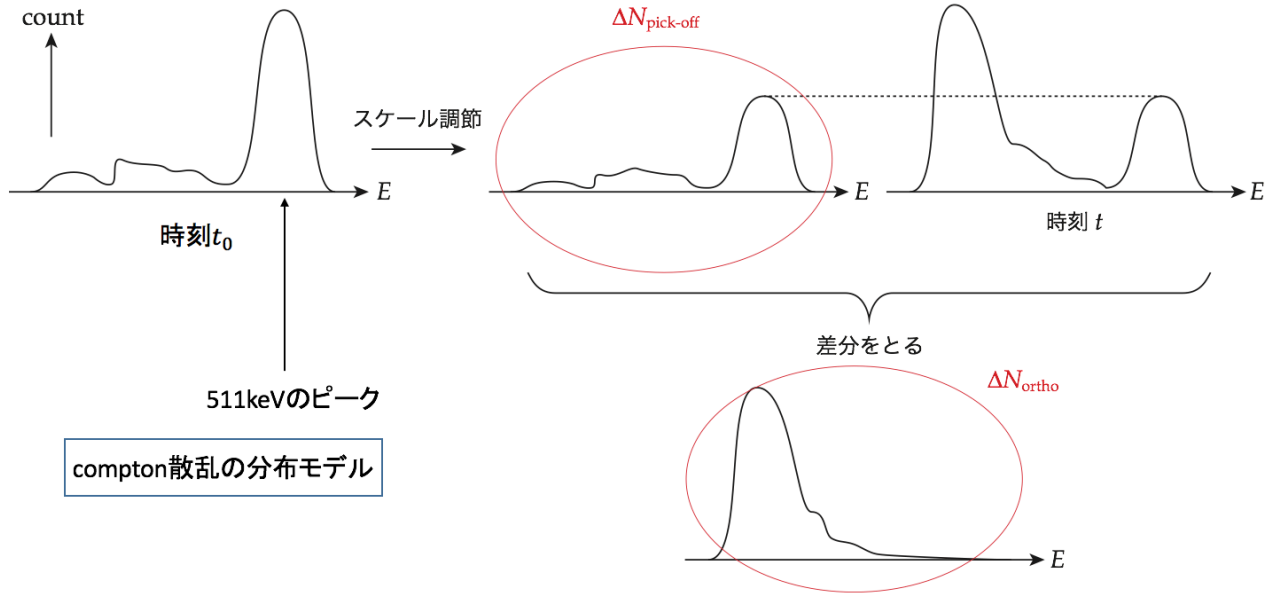


図 5.12: 規格化の概念図

5.4.3 Pick-off 補正の方法

補正方法としては、まず pick-off 補正関数 $f(t)$ を定義する。そしてこれを用いた新たな関数でデータを fitting することで補正後の寿命を求める。

実験で測定できる (TQ 補正までで求まる) 崩壊幅を Γ_{obs} 、o-Ps の 3γ への直接の崩壊幅を Γ_{ortho} 、pick-off 反応による崩壊幅を $\Gamma_{\text{pick-off}}$ とすると、

$$\Gamma_{\text{obs}} = \Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}} \quad (5.7)$$

の関係が成り立つ。時刻 t での o-Ps の pick-off 反応、 3γ への直接の崩壊の検出数をそれぞれ $\Delta N_{\text{pick-off}}(t)$ 、 $\Delta N_{\text{ortho}}(t)$ として、

$$f(t) = \frac{\Gamma_{\text{pick-off}}}{\Gamma_{\text{ortho}}} = \frac{\Delta N_{\text{pick-off}}(t)}{\Delta N_{\text{ortho}}(t)} \quad (5.8)$$

なる関数を考える。時刻 t での 511 keV ピークのイベント数を $y_{\text{peak}}(t)$ 、イベント総数を $S(t)$ とする。前節の考察より、511 keV のピークのイベントを用いて規格化をおこなうことで、

$$\Delta N_{\text{pick-off}}(t) = \frac{y_{\text{peak}}(t)S(t_0)}{y_{\text{peak}}(t_0)} \quad (5.9)$$

となる。よって、

$$f(t) = \frac{\Delta N_{\text{pick-off}}(t)}{S(t) - \Delta N_{\text{pick-off}}(t)} = \frac{y_{\text{peak}}(t)S(t_0)}{y_{\text{peak}}(t_0)S(t) - y_{\text{peak}}(t)S(t_0)} \quad (5.10)$$

となる。

5.4.4 Pick-off 補正の様子

実際に得たデータをもとに、 t_0 のデータとして -1 ns から 1 ns のイベントを採用し、 75 ns から 475 ns までを 50 ns 刻みで計算しプロットした。そのプロットを以下の図 5.13 に示す。

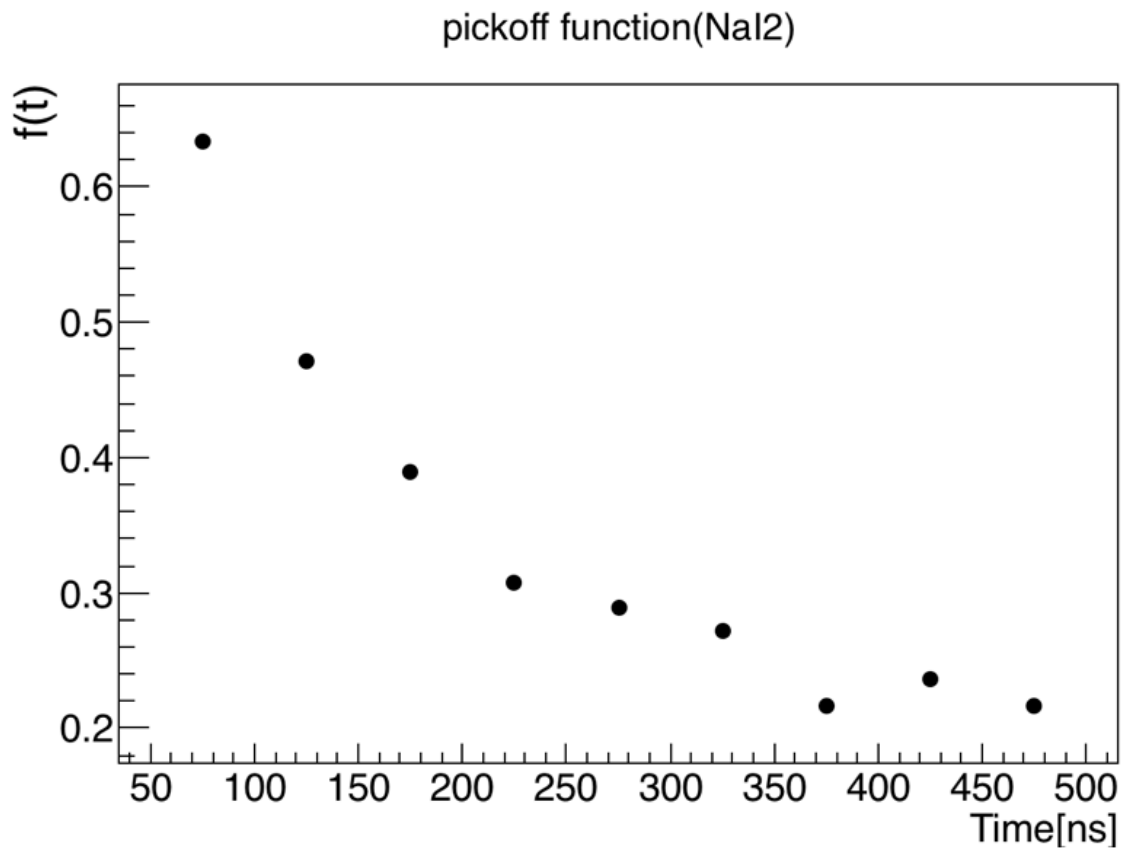


図 5.13: $f(t)$ のグラフへのプロット

このプロットから $f(t)$ の形を見積もる。時間が経つにつれて減少し徐々に一定値に近づいているように見えること、さらに過去の実験の経験をもとにして、fitting する式として

$$f(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 \quad (5.11)$$

を採用する。 p_0 、 p_1 、 p_2 は parameter である。これを用いて実際にフィッティングした結果を以下に示す。

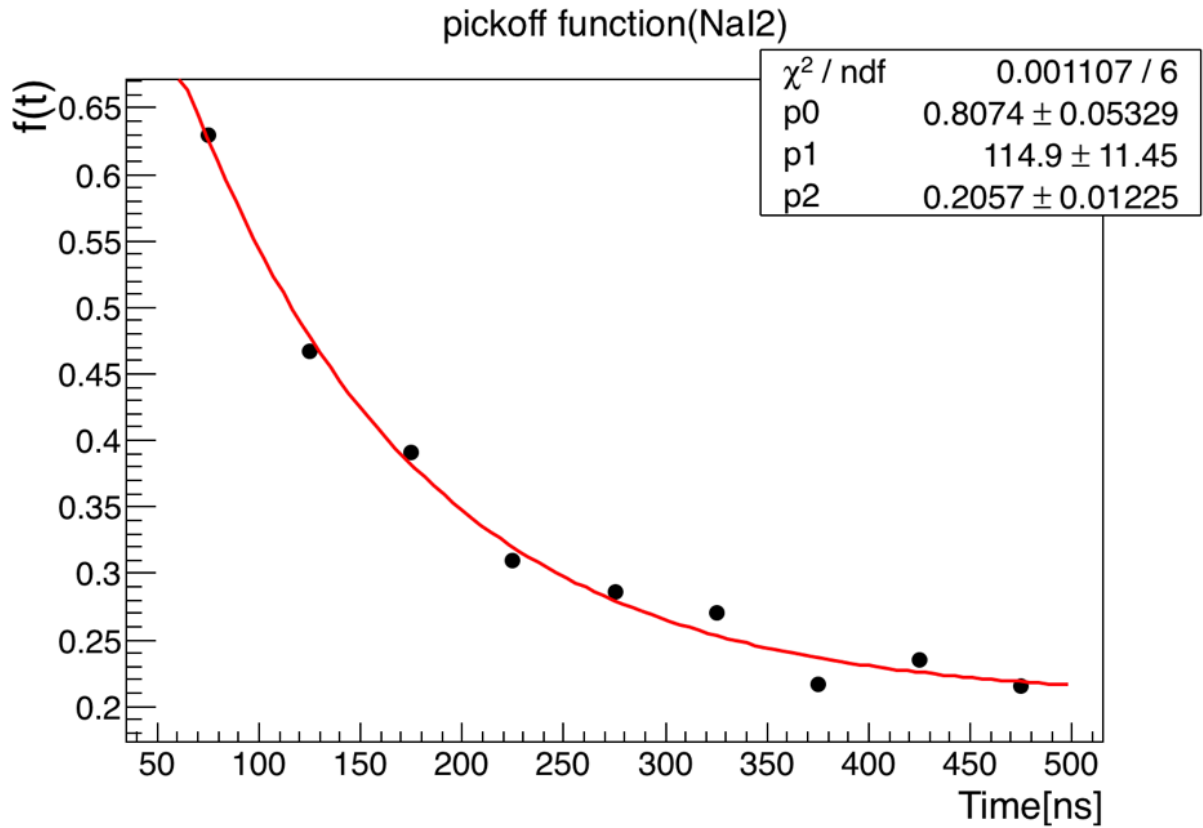


図 5.14: pick-off 補正関数の fitting

表 5.6: pick-off 補正関数の fitting 結果

	p_0	p_1	p_2
NaI2	0.807	114.9	0.206
NaI3	0.981	112.9	0.250
NaI4	0.704	231.0	0.240

5.4.5 Pick-off 補正後の寿命

o-Ps の 3γ への崩壊寿命を τ_{ortho} とし、pick-off 補正関数 $f(t)$ を用いて、

$$\Gamma_{\text{obs}} = \Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}} = \Gamma_{\text{ortho}}(1 + f(t)) = \frac{1 + f(t)}{\tau_{\text{ortho}}} \quad (5.12)$$

であるので、時刻 t における o-Ps の数を $N(t)$ とすると、

$$-\frac{dN(t)}{dt} = -N(t)(\Gamma_{\text{ortho}} + \Gamma_{\text{pick-off}}) \quad (5.13)$$

が成立する。式 (5.12)、(5.13) から $f(t)$ を実際に代入して求めると、寿命の fitting 関数は

$$q_0 \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \exp\left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\}\right] + q_2 \quad (5.14)$$

のように求めることができ、パラメータ q_1 が pick-off 補正後の求めるべき寿命である。

この式を用いて実際に fitting を行った結果を様子を図 5.15 に示す。

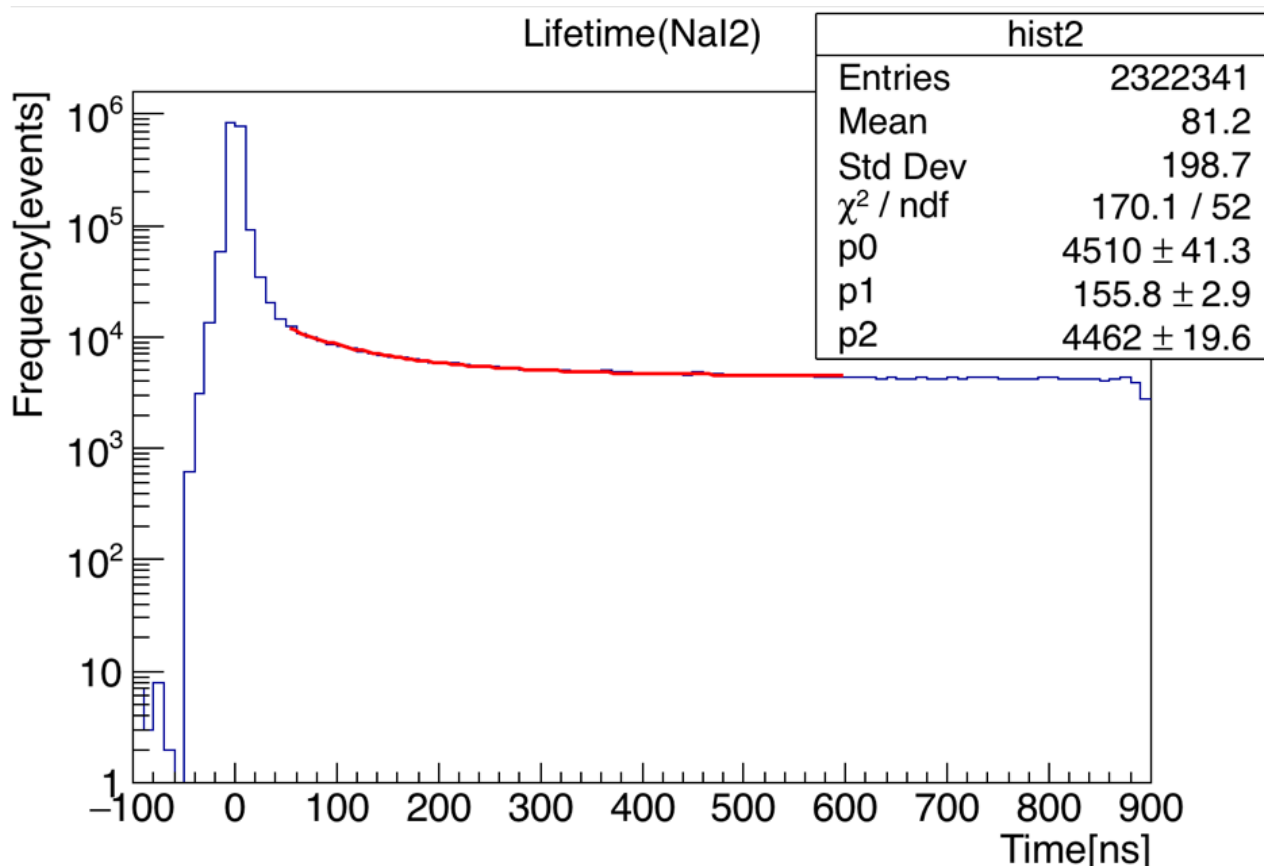


図 5.15: pick-off 補正後の寿命 fitting

この結果、各 NaI に対する pick-off 補正後の寿命は表 5.7 のように求まった。

表 5.7: pick-off 補正後の寿命

	寿命 [ns]
NaI2	155.8 ± 2.9
NaI3	253.7 ± 5.1
NaI4	124.6 ± 1.7

第 6 章

結果・考察・まとめ

6.1 結果

解析の結果、o-Ps の寿命は誤差を含めて以下の表 6.1 のようになった。

表 6.1: 解析の結果得た寿命とその誤差

	寿命 [ns]
NaI2	155.8±2.9
NaI3	253.7±5.1
NaI4	124.6±1.7

しかし、ここで求めた結果は最後の寿命 fitting の際の誤差のみを考慮しているため以下では TQ 補正関数、pick-off 補正関数の誤差も考慮して o-Ps の寿命の誤差を評価する。

6.2 考察

6.2.1 TDC1 の calibration 関数の誤差の評価

o-Ps の寿命 fitting の際には TDC の値を時間に変換する必要があるため、TDC1 の calibration 関数の傾きの誤差は寿命に直接影響する。ROOT を用いて誤差まで求めると、TDC1 の calibration 関数は以下のようになる。

$$\text{Time [ns]} = (0.2541 \pm 0.001565) \times \text{TDC1} \quad (6.1)$$

ここで、誤差が +0.001565、-0.001565 の時の o-Ps の寿命をそれぞれ τ_+ 、 τ_- とおくと、fitting によって求められた値は以下の表 6.2 のようになる。

表 6.2: TDC1 の calibration 関数の誤差を考慮した時の o-Ps の寿命

	τ_+ [ns]	τ [ns]	τ_- [ns]
NaI2	155.5±2.9	155.8±2.9	156.4±2.9
NaI3	257.2±5.3	253.7±5.1	256.0±5.2
NaI4	122.9±1.6	124.6±1.7	123.5±1.7

したがって表 6.2 より TDC1 の calibration 関数の傾きの誤差により数 % の誤差が発生することが分かる。

6.2.2 TQ 補正関数の誤差の評価

TQ 補正関数、

$$\Delta T(E) [\text{ns}] = \frac{p_0}{(E [\text{keV}] - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (6.2)$$

のパラメータ p_0, p_1, p_2, p_3 は fitting により求めることができるが、一定の幅の誤差を持つため、このパラメータを用いて求めた o-Ps の寿命にも誤差が生じると考えられる。 p_0, p_1, p_2, p_3 の誤差をそれぞれ $\delta p_0, \delta p_1, \delta p_2, \delta p_3$ とおくと fitting によって求められた値は以下の表 6.3 のようになる。

表 6.3: fitting によって求めた TQ 補正関数のパラメータおよびその誤差

	p_0	δp_0	p_1	δp_1	p_2	δp_2	p_3	δp_3
NaI2	468.0	20.08	88.42	1.244	0.631	0.010	-922.8	0.230
NaI3	590.5	18.25	75.25	1.292	0.671	0.007	-923.1	0.183
NaI4	837.5	36.50	89.33	1.233	0.732	0.009	-921.4	0.180

ここで、計測値を x_i 、計測値を用いた計算結果を y とすると、 y は関数 f を用いて次式で表すことができる。

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

そして計測値を用いた計算結果 y の誤差 δy は、 x_i の測定誤差 δx_i を用いて誤差伝播の法則より次式で計算できる。

$$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \delta x_n\right)^2} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial p_0} = \frac{1}{(E - p_1)^{p_2}} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial p_1} = \frac{p_0 p_2}{(E - p_1)^{p_2+1}} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial p_2} = \frac{-p_0 \ln(E - p_1)}{(E - p_1)^{p_2}} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial p_3} = 1 \quad (6.7)$$

を用いると、TQ 補正関数の誤差 $\delta\Delta T(E)$ は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\delta\Delta T(E) &= \sqrt{\sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial\Delta T}{\partial p_i} \delta p_i \right)^2} \\ &= \sqrt{\left\{ \frac{1}{(E-p_1)^{p_2}} \delta p_0 \right\}^2 + \left\{ \frac{p_0 p_2}{(E-p_1)^{p_2+1}} \delta p_1 \right\}^2 + \left\{ \frac{-p_0 \ln(E-p_1)}{(E-p_1)^{p_2}} \delta p_2 \right\}^2 + (\delta p_3)^2} \\ &= \frac{1}{(E-p_1)^{p_2}} \sqrt{(\delta p_0)^2 + \left(\frac{p_0 p_2}{E-p_1} \delta p_1 \right)^2 + (p_0 \ln(E-p_1) \delta p_2)^2 + \{(E-p_1)^{p_2} \delta p_3\}^2}\end{aligned}\quad (6.8)$$

解析では TQ 補正関数を $\Delta T(E)$ として o-Ps の寿命を求めたが、求めた誤差 $\delta\Delta T(E)$ を含めると TQ 補正関数は $\Delta T(E) \pm \delta\Delta T(E)$ で与えられると考えられるので、 $\Delta T(E) + \delta\Delta T(E)$ と $\Delta T(E) - \delta\Delta T(E)$ の 2 通りで o-Ps の寿命を求めて誤差の影響を評価する。補正関数が $\Delta T(E) + \delta\Delta T(E)$, $\Delta T(E)$, $\Delta T(E) - \delta\Delta T(E)$ と表される時の o-Ps の寿命をそれぞれ $\tau_{\Delta T + \delta\Delta T}$ [ns], $\tau_{\Delta T}$ [ns], $\tau_{\Delta T - \delta\Delta T}$ [ns] とおくと結果は以下の表 6.4 のようになる。

表 6.4: TQ 補正関数の誤差を考慮した時の o-Ps の寿命

	$\tau_{\Delta T + \delta\Delta T}$ [ns]	$\tau_{\Delta T}$ [ns]	$\tau_{\Delta T - \delta\Delta T}$ [ns]
NaI2	161.3±3.1	155.8±2.9	151.0±2.7
NaI3	262.2±5.5	253.7±5.1	237.2±4.6
NaI4	130.6±1.8	124.6±1.7	120.3±1.6

6.2.3 pick-off 補正関数の誤差の評価

解析のところで説明のあったように pick-off 補正関数 $f(t)$ 、寿命 fitting の式 $g(t)$ は以下のように表される。

$$f(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}g(t) &= q_0(1 + f(t)) \exp\left(-\frac{1}{q_1} \int^t (1 + f(t')) dt'\right) + q_2 \\ &= q_0 \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \times \exp\left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\}\right] + q_2\end{aligned}\quad (6.10)$$

$f(t)$ のパラメータ p_0, p_1, p_2 にも誤差 $\delta p_0, \delta p_1, \delta p_2$ が生じるので TQ 補正関数の時と同様に誤差の伝搬法則を用いてこの誤差の o-Ps の寿命への影響を調べる。fitting によって求めた pick-off 補正関数 $f(t)$ のパラメータの値は以下の表 6.5 のようになる。

表 6.5: fitting によって求めた pick-off 補正関数のパラメータおよびその誤差

	p_0	δp_0	p_1	δp_1	p_2	δp_2
NaI2	0.807	0.053	114.9	11.45	0.206	0.012
NaI3	0.981	0.112	112.9	18.28	0.250	0.025
NaI4	0.704	0.042	231.0	55.15	0.240	0.058

$$\frac{\partial g}{\partial p_0} = q_0 \left[1 + \frac{p_1}{q_1} \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \right] \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\} - \frac{t}{p_1} \right] \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_1} = \frac{q_0 p_0}{p_1} \left[\frac{t}{p_1} + \frac{p_1 + 1}{q_1} \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \right] \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\} - \frac{t}{p_1} \right] \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_2} = q_0 \left(1 - \frac{t}{q_1} \right) \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\} \right] \quad (6.13)$$

以上の式を用いると、寿命 fitting の式の誤差 $\delta g(t)$ は TQ 補正関数の場合と同様に以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \delta g(t) &= \sqrt{\sum_{i=0}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \delta p_i \right)^2} \\ &= q_0 \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\} \right] \sqrt{\left[1 + \frac{p_1}{q_1} \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \right]^2 \exp\left(-\frac{2t}{p_1}\right) (\delta p_0)^2} \\ &\quad + \frac{p_0^2}{p_1^2} \left[\frac{t}{p_1} + \frac{p_1 + 1}{q_1} \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \right]^2 \exp\left(-\frac{2t}{p_1}\right) (\delta p_1)^2 + \left(1 - \frac{t}{q_1} \right)^2 (\delta p_2)^2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

解析では寿命 fitting の式を $g(t)$ として o-Ps の寿命を求めたが、求めた誤差 $\delta g(t)$ を含めると寿命 fitting の式は $g(t) \pm \delta g(t)$ で与えられると考えられるので、 $g(t) + \delta g(t)$ と $g(t) - \delta g(t)$ の 2 通りで o-Ps の寿命を求めて誤差の影響を評価する。寿命 fitting の式が $g(t) + \delta g(t)$, $g(t)$, $g(t) - \delta g(t)$ と表される時の o-Ps の寿命をそれぞれ $\tau_{g+\delta g}[\text{ns}]$, $\tau_g[\text{ns}]$, $\tau_{g-\delta g}[\text{ns}]$ とおくと結果は以下の表 6.6 のようになる。

表 6.6: pick-off 補正関数の誤差を考慮した時の o-Ps の寿命

	$\tau_{g+\delta g}[\text{ns}]$	$\tau_g[\text{ns}]$	$\tau_{g-\delta g}[\text{ns}]$
NaI2	160.0±3.0	155.8±2.9	151.3±2.8
NaI3	270.2±5.7	253.7±5.1	238.8±4.7
NaI4	131.4±1.8	124.6±1.7	114.6±1.6

6.2.4 寿命 fitting の誤差の評価

TQ 補正関数と pick-off 補正関数の誤差以外にも、最後に寿命 fitting する際にも誤差が発生する。この誤差を σ_{fitting} とおくと以下の表 6.7 のようになる。

表 6.7: 寿命 fitting の際に生じる誤差

	$\sigma_{\text{fitting}}[\text{ns}]$
NaI2	2.9
NaI3	5.1
NaI4	1.7

6.2.5 TQ 補正、pick-off 補正、寿命 fitting の誤差のまとめ

ここまでは他の誤差を考慮せずにそれぞれの誤差を求めてきたが、すべての誤差を考慮して最終的に o-Ps の寿命の誤差を求めるべきである。TQ 補正の誤差のみを考慮した場合の寿命の誤差を σ_{TQ} 、pick-off 補正の誤差のみを考慮した場合の寿命の誤差を $\sigma_{\text{pick-off}}$ 、寿命 fitting の誤差のみを考慮した場合の寿命の誤差を σ_{fitting} とおくと、全ての誤差を考慮した場合の誤差 σ は以下の式より求められる。

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_{\text{TQ}})^2 + (\sigma_{\text{pick-off}})^2 + (\sigma_{\text{fitting}})^2} \quad (6.15)$$

これまで求めてきた σ_{TQ} 、 $\sigma_{\text{pick-off}}$ 、 σ_{fitting} 、そして σ をまとめると以下の表 6.8 のようになる。

表 6.8: 各 NaI に対する σ_{TQ} 、 $\sigma_{\text{pick-off}}$ 、 σ_{fitting} 、 σ の値

	$\sigma_{\text{TQ}}[\text{ns}]$	$\sigma_{\text{pick-off}}[\text{ns}]$	$\sigma_{\text{fitting}}[\text{ns}]$	$\sigma[\text{ns}]$
NaI2	5.5	4.5	2.9	7.7
NaI3	16.5	16.5	5.1	23.9
NaI4	6.0	10.0	1.7	11.8

6.2.6 系統誤差の評価

pick-off 補正を行った後に寿命 fitting の式 $g(t)$ を fitting して寿命を求める際にどこを fitting の範囲に指定しても最終的に得られる寿命の値はあまり変わらないはずだが、実際に fitting の範囲を変えると以下の表 6.9 のように寿命の値は変化する。

表 6.9: fitting の範囲を変更した時の寿命の値

	50 ns~600 ns	75 ns~600 ns	100 ns~600 ns	125 ns~600 ns
NaI2	155.8±2.9	177.7±4.6	189.4±7.1	208.6±11.6
NaI3	253.7±5.1	309.7±9.3	378.5±18.9	436.7±31.4
NaI4	124.6±1.7	157.8±3.0	186.2±5.4	193.8±7.2

Fitting の範囲の開始時刻を早くすればするほど o-Ps の寿命が短くなるのは pick-off 補正により取り除けなかった p-Ps の影響が残っているためだと考えられる。

6.3 まとめ

最終的に得られる寿命の値と誤差は以下の表 6.10 のようになる。

表 6.10: 最終的な寿命とその誤差

	寿命 [ns]
NaI2	155.8±7.7
NaI3	253.7±23.9
NaI4	124.6±11.8

NaI2、NaI4 は o-Ps の寿命の理論値 142 ns に対して誤差を含めると肯定的な結果が得られたが、NaI3 については理論値よりかなり大きくなってしまった。その原因として考えられるのは以下の 2 点である。

- ・立体配置の違い
- ・ADC3 (NaI3) の pedestal が分裂していて ADC calibration が上手くいっていない

NaI 同士を入れ替えて同じ測定を行うことで以上の 2 点を検証すべきだったが、解析の問題点を明らかにするのに時間がかかってしまい今回は出来なかった。

謝辞

今回実験を進めるにあたり、半年間丁寧に指導・助言してくださった隅田土詞さんに感謝いたします。また実験・解析にお付き合い頂き、手助けして頂いた TA の中桐洸太さん、森正光さんに感謝いたします。

付録 A

ポジトロニウムの寿命計算

ここでは、場の量子論に基づいて、ポジトロニウムの寿命を計算していく。計算に使う道具は最低限説明をしていくが、途中、計算が長いところは適宜省略していく。

A.1 単位系、メトリック、記法

以下では式が簡単になるため、 $c = \hbar = 1$ という自然単位系を用い、電磁気の単位系としてはヘヴィサイド-ローレンツ単位系を用いる。また、ミンコフスキー空間の計量符号を $(-, +, +, +)$ とする。行列の形で書くと、

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

である。また、4元ベクトルの内積 $a \cdot b$ を

$$a \cdot b := \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = -a^0 b^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.2})$$

と定める。また、後述のガンマ行列と4元ベクトルの縮約を

$$\not{a} := \gamma^\mu a_\mu \quad (\text{A.3})$$

と定める。ただし、上ではアインシュタインの和の規約を使っており、ギリシャ文字については0から4まで和をとり、ローマ文字については空間成分(1から3)の和をとることにする。なお、ディラックスピノルの成分についてもローマ文字を使うが、その際は1から4まで和をとるものとする。

A.2 ポジトロニウムの構造

非相対論的近似の下で、ポジトロニウムは水素原子によく似た構造をしていることを以下で簡単に見てみる。

電子の電荷を $-e < 0$ とすると、陽電子の電荷は $e > 0$ であり、質量は同じ (m とする) なので、古典的ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_-^2 + \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_+^2 + \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+|} \quad (\text{A.4})$$

である。ただし、 $-$ は電子、 $+$ は陽電子を表すものとし、外場はかかっていないとする。

ここで、相対運動と重心運動に分離するために次のものを導入する。

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_- + \mathbf{r}_+}{2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+ \quad (\text{A.5})$$

これを逆に解けば、

$$\mathbf{r}_- = \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_+ = \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r} \quad (\text{A.6})$$

これをラグランジアンに代入して整理すると、

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e^2}{4\pi|\mathbf{r}|} + m\dot{\mathbf{R}}^2 \quad (\text{A.7})$$

となる。明らかに (A.7) 式は \mathbf{R} によらないので、オイラーラグランジュ方程式より

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \right) = m \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{R}} \quad (\text{A.8})$$

なので、 $\dot{\mathbf{R}}$ が時間によらないことがわかる。つまり重心は等速直線運動をしていることが分かるので、改めて重心を原点にとりなおす (ガリレイ変換)。その際、相対位置ベクトル \mathbf{r} は変わらないことに注意すると、

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e^2}{4\pi|\mathbf{r}|} \quad (\text{A.9})$$

となる。つまり、質量 $m/2$ 、電荷 $-e$ の粒子が、原点に固定された点電荷 (電荷 e) に束縛されている状況であるので、非相対論的な近似では、ポジトロニウムの波動関数は水素原子の波動関数とほとんど同じ形で書ける。質量を半分 (あるいはボーア半径を2倍) にすればよい。それを、

$$R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)\chi(-, +) \quad (\text{A.10})$$

と書くことができる (適当な量子力学の入門書を参照。例えば文献 [1])。ただし、 Y_{lm} は球面調和関数、 χ はスピン関数である。

A.3 相互作用表示と時間発展

ディラックの記法を用いると、シュレディンガー方程式は

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad H = H_0 + H_{\text{int}} \quad (\text{A.11})$$

とかける。 H_0 は自由粒子のハミルトニアン、 H_{int} は相互作用を表すハミルトニアンとする。また、簡単のため、ハミルトニアンは時間に依存しないとする。

ここで、状態ベクトルの相互作用表示を次で定める。

$$|\psi_{\text{I}}(t)\rangle := e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle \quad (\text{A.12})$$

以下ではこの表示を使っていくことにする。この表示の方が、散乱問題を扱う際には見通しが良いからである。

時間微分すると、

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi_{\text{I}}(t)\rangle &= i \left\{ iH_0 e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle + e^{iH_0 t} \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right\} \\ &= e^{iH_0 t} (-H_0 |\psi(t)\rangle + H |\psi(t)\rangle) \\ &= e^{iH_0 t} H_{\text{int}} |\psi(t)\rangle \\ &= H_{\text{int}}(t) |\psi_{\text{I}}(t)\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

となる。ここで、

$$H_{\text{int}}(t) := e^{iH_0 t} H_{\text{int}} e^{-iH_0 t} \quad (\text{A.14})$$

とした。(A.13) 式は、朝永シュウィンガー方程式と呼ばれる。

ここで、相互作用表示における時間発展を表すユニタリー演算子 $U(t, t_0)$ を

$$|\psi_I(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle \quad (\text{A.15})$$

で定める。(A.15) 式の両辺を t で微分すると、

$$\frac{1}{i} H_{\text{int}}(t) |\psi_I(t)\rangle = \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} |\psi_I(t_0)\rangle \quad (\text{A.16})$$

さらに左辺に (A.15) 式を使うと、演算子としての方程式

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H_{\text{int}}(t) U(t, t_0) \quad (\text{A.17})$$

が成り立つ。

初期条件 $U(t_0, t_0) = 1$ の下で形式的に (A.17) 式を積分すると、

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_{\text{int}}(t') U(t', t_0) \quad (\text{A.18})$$

となる。右辺にも U 演算子が現れているので、繰り返し上式を代入していくことで、次が得られる。

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{int}}(t_1) \cdots H_{\text{int}}(t_n) \quad (\text{A.19})$$

ここで、時間順序積 T という記法を導入する。これは、引数の時間が大きいもの（より未来にあるもの）を左から順に並べていく演算子で、例えば

$$T[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & (t_1 > t_2) \\ B(t_2)A(t_1) & (t_2 > t_1) \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

である。これを使うと、(A.19) 式は次のように書ける。

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T[H_{\text{int}}(t_1) \cdots H_{\text{int}}(t_n)] \quad (\text{A.21})$$

このように、相互作用表示での状態ベクトルの時間発展は、形式的には相互作用ハミルトニアン H_{int} の T 積の無限和で書ける。なお、ここで導入した演算子 $U(t, t_0)$ の詳しい性質は文献 [1] を参照。

A.4 S 行列とダイソンの公式

散乱問題を考えるうえで重要な S 行列 (S 演算子) は、(A.21) 式において $t \rightarrow +\infty, t_0 \rightarrow -\infty$ の極限をとったものとして定義される (いくつか同値な定義はある。文献 [1])。

$$S := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[H_{\text{int}}(t_1) \cdots H_{\text{int}}(t_n)] \quad (\text{A.22})$$

また、場の理論において、ハミルトニアンは

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.23})$$

とかかれるので、これを代入すると、次の公式が得られる。

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T [\mathcal{H}_{\text{int}}(x_1) \cdots \mathcal{H}_{\text{int}}(x_n)] \quad (\text{A.24})$$

ただし、 $\mathcal{H}_{\text{int}}(x)$ は相互作用表示でのハミルトニアン密度であり、引数の x は t, \mathbf{x} をまとめて書いている ($x^\mu = (t, \mathbf{x})$)。 (A.24) 式はダイソンの公式と呼ばれる。

ここで、散乱問題において S 演算子がなぜ重要なのかを簡単に述べておく。演算子 U の定義 (A.15) より、

$$|\psi_I(t = \infty)\rangle = S |\psi_I(t = -\infty)\rangle = S |i\rangle \quad (\text{A.25})$$

である。始状態 ($t = -\infty$) を $|i\rangle$ であらわした。よって、終状態 ($t = \infty$) に、ある状態 $|f\rangle$ を見出す確率振幅は、

$$\langle f | \psi_I(t = \infty) \rangle = \langle f | S | i \rangle =: S_{fi} \quad (\text{A.26})$$

つまり、散乱による遷移確率を計算するためには、 S 演算子の行列要素である S 行列を計算すればよい。なお、ダイソンの公式の右辺第 1 項の 1 は、なにも相互作用しない状況に対応しており、実際には第 2 項を考えていく。また、相互作用表示を採用したおかげで、ダイソンの公式は相互作用の摂動展開になっていることが分かる。

A.5 場の量子化

電子はディラック場で、光子は電磁場で記述される粒子である。この節では、簡単な例として以下でも使う実スカラー場の量子化についてまずは簡単に述べ、その後、ディラック場と電磁場の量子化について大まかに見ていく。より詳しいことは、適当な教科書を参照するように (例えば、文献 [2],[3])。なお、ここではすべて自由場を考える。

A.5.1 実スカラー場の量子化

ここでは、一番簡単な実スカラー場の量子化を議論する。なぜスカラー場を考えるかということ、すべての相対論的共変性を持った自由場は、自由スカラー場が満たす方程式 (クラインゴールドン方程式) を満たすことが要請されるからである。

実スカラー場 $\phi(x)$ のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = - \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 \right) \quad (\text{A.27})$$

で与えられる。なお、ハミルトニアンが正定値になるように符号を選んでいる。この \mathcal{L} を ϕ について変分して得られる方程式が

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - m^2 \right) \phi(x) = 0 \quad (\text{A.28})$$

であり、クラインゴールドン方程式と呼ばれる。相対論的共変性は明らかである。

$\phi(x)$ の共役量 $\pi(x)$ は

$$\pi(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi(x) \quad (\text{A.29})$$

である。量子化の手続きとして、同時刻交換関係

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{A.30})$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (\text{A.31})$$

を要請する。さらに、場 $\phi(x)$ をフーリエ展開し、クラインゴルドン方程式に代入してやると、

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}V}} \left(a(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} \right) \quad (\text{A.32})$$

という形が得られる。ただし、 $k = (k^0, \mathbf{k})$ において、 $k^0 = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ であり、系の大きさを一辺の長さ L の立方体に限り、周期境界条件を課すことで、

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3) \quad (\text{A.33})$$

と波数（運動量）を離散化しておく。以下もこれにならう。ただし、 V は十分大きいものとし、適宜

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (\text{A.34})$$

とすることもある。

また、(A.32) 式の係数演算子 $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ は、 $\phi(x)$ がエルミートとなるように選んでいる。これを逆に解き、同時刻交換関係 (A.30) 式を用いると、

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p})] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \quad (\text{A.35})$$

という交換関係が得られる。この交換関係と調和振動子の類推から、演算子 $a(\mathbf{k})$ を消滅演算子、 $a^\dagger(\mathbf{k})$ を生成演算子と呼ぶ。また、最低エネルギー状態である真空 $|0\rangle$ は、すべての \mathbf{k} に対し

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad (\text{A.36})$$

が成り立つ状態として定義される。

A.5.2 ディラック場の量子化

ここでは、自由ディラック場の量子化について、主に後の計算で使う事項について簡単に述べる。

自由ディラック場のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(x) (\not{\partial} + m) \psi(x) \quad (\text{A.37})$$

で与えられる。ただし、 $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$ 、 $\not{\partial} := \gamma^\mu \partial_\mu$ であり、 ψ は 4 成分スピノルである。これを $\bar{\psi}$ について変分すると、ディラック方程式

$$(\not{\partial} + m) \psi(x) = 0 \quad (\text{A.38})$$

が得られる。なお、 ψ の共役量は

$$\pi_a(x) := \frac{\partial}{\partial (\partial_0 \psi_a)} \mathcal{L} = -\bar{\psi}_a(x) \gamma^0 = \psi_a^\dagger(x) \quad (\text{A.39})$$

である*1。なお、添え字の $a(= 1, 2, 3, 4)$ はスピノルの成分を表す。

量子化の手続きとして、同時刻反交換関係

$$\{\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{A.40})$$

$$\{\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b(\mathbf{y}, t)\} = \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (\text{A.41})$$

を要求する。

ディラック場は、やはりクラインゴルドン方程式を満たさなければならない。よって、フーリエ展開として次の表式が得られる。

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\pm} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}V}} [b(\mathbf{k}, s)u(\mathbf{k}, s)e^{ik \cdot x} + d^\dagger(\mathbf{k}, s)v(\mathbf{k}, s)e^{-ik \cdot x}] \quad (\text{A.42})$$

ただし、 $k^0 = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ とする。また、スピノル u, v はそれぞれ、正エネルギー解、負エネルギー解であり、上の表式をディラック方程式に代入すれば分かる通り、

$$(i\not{k} + m)u(\mathbf{k}, s) = 0 \quad (\text{A.43})$$

$$(-i\not{k} + m)v(\mathbf{k}, s) = 0 \quad (\text{A.44})$$

を満たす。さらに、演算子 b, d^\dagger は、次の反交換関係を満たすことが分かる。

$$\{b(\mathbf{k}, s), b^\dagger(\mathbf{p}, r)\} = \{d(\mathbf{k}, s), d^\dagger(\mathbf{p}, r)\} = \delta_{sr}\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \quad (\text{A.45})$$

詳しいことは省略するが、 b^\dagger は電子の生成演算子、 d^\dagger は陽電子の生成演算子であり、引数の \mathbf{k}, s は運動量とスピンを指定するものである。なお、ディラック場における真空は、任意の \mathbf{k}, s に対し

$$b(\mathbf{k}, s)|0\rangle = d(\mathbf{k}, s)|0\rangle = 0 \quad (\text{A.46})$$

を満たす状態として定義される。これより、次の関係式が成り立つ。

$$\langle 0|\psi_a(x)|e^-(\mathbf{k}, s)\rangle = \langle 0|\psi_a(x)b^\dagger(\mathbf{k}, s)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}V}}u_a(\mathbf{k}, s)e^{ik \cdot x} \quad (\text{A.47})$$

$$\langle 0|\bar{\psi}_a(x)|e^+(\mathbf{k}, s)\rangle = \langle 0|\bar{\psi}_a(x)d^\dagger(\mathbf{k}, s)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}V}}\bar{v}_a(\mathbf{k}, s)e^{ik \cdot x} \quad (\text{A.48})$$

これは、1粒子波動関数を表している。

自由ディラック場の解 u, v はいくつか大事な性質をもつが、のちに使うのは、完全性の条件

$$\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm} u_a(\mathbf{k}, s)\bar{u}_b(\mathbf{k}, s) = \left(\frac{-i\not{k} + m}{2E_{\mathbf{k}}} \right)_{ab} \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \sum_{s=\pm} v_a(\mathbf{k}, s)\bar{v}_b(\mathbf{k}, s) = \left(\frac{-i\not{k} - m}{2E_{\mathbf{k}}} \right)_{ab} \quad (\text{A.50})$$

である。これを使うことで、スピノル u, v の具体的表式に言及することなくスピンについての和をとることができる。

*1 厳密には、微分演算子がどちらから作用するかをきちんと議論する必要がある。ここでは、「右微分」で定義している

A.5.3 電磁場の量子化

ここでは電磁場の量子化について述べる。ただし、厳密な議論をここで展開するつもりはない。あくまで目的はポジトロニウムの寿命を計算し、実験値と比較することだからである。したがって以下では、相対論的共変性が明白ではないクーロンゲージを採用し、のちの計算に必要なことだけを簡潔にまとめることを了承していただきたい。なお、クーロンゲージでの量子化は文献 [1] を、より相対論的共変性が明白な形での量子化は文献 [2],[3] を参照のこと。

というわけで、突然であるが、電磁場^{*2} $A_\mu(x)$ のフーリエ展開の表式をいきなり与えることにする。

$$A_\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} \left[a(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (\text{A.51})$$

ただし、 $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ であり、 $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2$) は横波に対応した 2 つの独立な偏極ベクトルで、

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$\epsilon_0^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0 \quad (\text{A.53})$$

を満たす。また、演算子 $a(\mathbf{k}, \lambda), a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ は、交換関係

$$[a(\mathbf{k}, \lambda), a^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (\text{A.54})$$

$$[a(\mathbf{k}, \lambda), a(\mathbf{k}', \lambda')] = [a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda), a^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')] = 0 \quad (\text{A.55})$$

を満たすもので、それぞれ、運動量 \mathbf{k} 、偏極 λ の光子の生成・消滅演算子である。なお、電磁場における真空も、すべての \mathbf{k}, λ について

$$a(\mathbf{k}, \lambda) |0\rangle = 0 \quad (\text{A.56})$$

を満たす状態として定義される。これより、1 粒子波動関数は

$$\langle \gamma(\mathbf{k}, \lambda) | A_\mu(x) | 0 \rangle = \langle 0 | a(\mathbf{k}, \lambda) A_\mu(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} \epsilon_\mu^{(\lambda)*} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{A.57})$$

となることが分かる。

偏極ベクトルは、独立という条件から、以下を満たすことが確かめられる。

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} & (\mu, \nu \text{ が } \mathbf{k} \text{ とともに空間成分}) \\ 0 & (\mu = 0 \text{ または } \nu = 0) \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

後の計算のために、これを以下のように (面倒だが) 書き換えておくと便利である。

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) = \eta_{\mu\nu} + \frac{k^0 k_\mu n_\nu + k^0 k_\nu n_\mu - k_\mu k_\nu + k^2 n_\mu n_\nu}{|\mathbf{k}|^2} \quad (\text{A.59})$$

先ほどの条件と一致することは、 μ, ν に具体的に値を代入すれば確かめられる。

^{*2} 本来は、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを並べたものなので電磁ポテンシャル、あるいはゲージ不変性の観点からはゲージ場と呼ぶべきだろうが、ここでは簡単に電磁場と呼ぶことにする。

A.6 スピン状態によるポジトロニウムの崩壊の違い

本文で簡単に述べたように、基底状態では、パラポジトロニウムは偶数個の光子に、オルソポジトロニウムは奇数個の光子に崩壊する。ここでは、場の理論の言葉を使ってそのことを見ていく。

A.6.1 荷電共役変換

C を、荷電共役変換を表すユニタリー変換とする。荷電共役変換は、粒子と反粒子を入れ替える操作を意味し、スピン状態や運動量状態は変えないものとする。ここでは、真空の不変性

$$C|0\rangle = |0\rangle \quad (\text{A.60})$$

を要請する。また、位相を適当にとることにより

$$C^2 = 1 \quad (\text{A.61})$$

とできる (文献 [2] 参照)。このとき、 C はユニタリーであり、かつエルミートでもある。

A.6.2 電磁場の荷電共役変換性

量子電磁力学は、相互作用が荷電共役変換に対して不変な理論である。すなわち、

$$C^{-1}\mathcal{H}_{\text{int}}(x)C = \mathcal{H}_{\text{int}}(x) \quad (\text{A.62})$$

である。 $\mathcal{H}_{\text{int}}(x) = -j_\mu(x)A^\mu(x)$ を採用すると、電流密度 $j_\mu(x)$ は荷電共役変換に対して符号が反転するので、それは電磁場 $A^\mu(x)$ の符号が反転することを意味する。すなわち、

$$C^{-1}A^\mu(x)C = -A^\mu(x) \quad (\text{A.63})$$

である*3。すると、電磁場のフーリエ展開の表式 (A.51) より、

$$C^{-1}a(\mathbf{k}, \lambda)C = -a(\mathbf{k}, \lambda) \quad (\text{A.64})$$

$$C^{-1}a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)C = -a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \quad (\text{A.65})$$

が成り立たなければならない。このことから、 n 光子状態 $|n\gamma\rangle := a^\dagger(1)a^\dagger(2)\cdots a^\dagger(n)|0\rangle$ (運動量や偏極はあらわには書かなかった) の変換性は次のようになる。

$$\begin{aligned} C|n\gamma\rangle &= Ca^\dagger(1)a^\dagger(2)\cdots a^\dagger(n)|0\rangle \\ &= Ca^\dagger(1)C^{-1}Ca^\dagger(2)C^{-1}\cdots Ca^\dagger(n)C^{-1}C|0\rangle \\ &= (-1)^n |n\gamma\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

つまり、荷電共役変換に対して、奇数個の光子は奇、偶数個の光子は偶である。

*3 このとき、電荷をもつディラック粒子に対するディラック方程式は荷電共役変換不変性をもつ。

A.6.3 ディラック場の荷電共役変換性

荷電共役変換に対するディラック方程式の不変性から、電子と陽電子の生成消滅演算子 $b, b^\dagger, d, d^\dagger$ は次を満たすことが示せる。

$$C^{-1}b(\mathbf{k}, s)C = d(\mathbf{k}, s), \quad C^{-1}d(\mathbf{k}, s)C = b(\mathbf{k}, s) \quad (\text{A.67})$$

$$C^{-1}b^\dagger(\mathbf{k}, s)C = d^\dagger(\mathbf{k}, s), \quad C^{-1}d^\dagger(\mathbf{k}, s)C = b^\dagger(\mathbf{k}, s) \quad (\text{A.68})$$

このことを用いると、パラポジトロニウムとオルソポジトロニウムの荷電共役変換性が以下のように分かる。

パラポジトロニウム ($S = 0$) のスピン部分の状態ベクトルは、(2.1) を参考にして、

$$|p\text{-Ps}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b^\dagger(\mathbf{k}, \uparrow)d^\dagger(-\mathbf{k}, \downarrow) - b^\dagger(\mathbf{k}, \downarrow)d^\dagger(-\mathbf{k}, \uparrow) \right) |0\rangle \quad (\text{A.69})$$

と書ける。ただし、重心系で考えている。したがって、演算子の反可換性に注意すると、

$$\begin{aligned} C|p\text{-Ps}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(d^\dagger(\mathbf{k}, \uparrow)b^\dagger(-\mathbf{k}, \downarrow) - d^\dagger(\mathbf{k}, \downarrow)b^\dagger(-\mathbf{k}, \uparrow) \right) |0\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(b^\dagger(-\mathbf{k}, \downarrow)d^\dagger(\mathbf{k}, \uparrow) - b^\dagger(-\mathbf{k}, \uparrow)d^\dagger(\mathbf{k}, \downarrow) \right) |0\rangle \\ &= -P_x P_\sigma |p\text{-Ps}\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

となる。ここで、 P_x は2粒子の座標を入れ替える演算子を表し、 P_σ はスピンの入れ替えを表す。パラポジトロニウムはスピンの入れ替えに対して反対称な状態なので、 $P_\sigma |p\text{-Ps}\rangle = -|p\text{-Ps}\rangle$ である。また、2粒子の入れ替えについては、A.2での議論においては、相対ベクトル \mathbf{r} を反転させることに対応する。よって、球面調和関数のパリティ $(-1)^l$ に対応して

$$P_x |p\text{-Ps}\rangle = (-1)^l |p\text{-Ps}\rangle, \quad P_x |o\text{-Ps}\rangle = (-1)^l |o\text{-Ps}\rangle \quad (\text{A.71})$$

である。なお、スピン状態はここでは関係ないので、オルソポジトロニウムでも成立する。したがって、基底状態 ($l = 0$) では

$$C|p\text{-Ps}\rangle = |p\text{-Ps}\rangle \quad (\text{A.72})$$

となり、パラポジトロニウムは荷電共役変換に対して偶である。

オルソポジトロニウムでもまったく同じようにして、

$$C|o\text{-Ps}\rangle = -|o\text{-Ps}\rangle \quad (\text{A.73})$$

となることが示せる。

A.6.4 崩壊の違い

この節の議論より、パラポジトロニウムとオルソポジトロニウムの崩壊の違いが理解できる。

ハミルトニアン¹⁾の荷電共役不変性 (A.62) 式と、ダイソンの公式 (A.24) 式より、

$$C^{-1}SC = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n C^{-1}T[\mathcal{H}_{\text{int}}(x_1) \cdots \mathcal{H}_{\text{int}}(x_n)]C = S \quad (\text{A.74})$$

となる。つまり S 行列も荷電共役不変である。

以上より、 $|p\text{-Ps}\rangle$ から $|n\gamma\rangle$ への遷移確率を考えてみると

$$\begin{aligned}\langle n\gamma|S|p\text{-Ps}\rangle &= \langle n\gamma|C^{-1}SC|p\text{-Ps}\rangle \\ &= (-1)^n \langle n\gamma|S|p\text{-Ps}\rangle\end{aligned}\tag{A.75}$$

となり、 n が奇数の場合はゼロになることが分かる。よって、基底状態のパラポジトロニウムは奇数個の光子への崩壊が禁止される。

同じようにして、

$$\begin{aligned}\langle n\gamma|S|o\text{-Ps}\rangle &= \langle n\gamma|C^{-1}SC|o\text{-Ps}\rangle \\ &= (-1)^{n+1} \langle n\gamma|S|o\text{-Ps}\rangle\end{aligned}\tag{A.76}$$

となり、基底状態にあるオルソポジトロニウムは偶数個の光子への崩壊が禁止される。ただし、1 個の光子への崩壊は、運動量保存則に矛盾するので禁止される。

A.7 伝播関数（プロパゲーター）

この節では、場の理論での摂動計算において重要な、伝播関数（プロパゲーター）について簡単にまとめる。

A.7.1 不変関数と実スカラー場のファインマン伝播関数

前節で、実スカラー場には同時刻交換関係を要請した。それから得られたフーリエ展開 (A.32) 式と、生成消滅演算子の交換関係 (A.35) 式を用いると、非同時刻交換関係が以下のようにして計算できる。

$$\begin{aligned}[\phi(x), \phi(y)] &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}V}} \{ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} + [a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{p})] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2E_{\mathbf{k}}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) \\ &:= i\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\end{aligned}\tag{A.77}$$

なお、連続極限をとって和を積分にしている。上で定義される関数 $\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ を不変デルタ関数と呼ぶ。いくつか重要な性質をもつが、ここでは特に使わないので言及はしない。例えば文献 [3] 参照。

詳しくは次節で述べるが、摂動計算では、場の T 積の真空期待値を計算することが何度かある。それに関連して、実スカラー場のファインマン伝播関数 $\Delta_F(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ は以下で定義される。

$$\begin{aligned}\Delta_F(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &:= \langle 0|T[\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})]|0\rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0|\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})|0\rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0|\phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x})|0\rangle\end{aligned}\tag{A.78}$$

ここで、 $\theta(x^0 - y^0)$ は階段関数で

$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 1 & (x^0 - y^0 > 0) \\ 0 & (x^0 - y^0 < 0) \end{cases}\tag{A.79}$$

で定義される。この $\Delta_F(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ はクラインゴールドン演算子のグリーン関数であることが示せる。すなわち、

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - m^2 \right) \Delta_F(x) = i\delta^{(4)}(x)\tag{A.80}$$

を満たす。また、前節の実スカラー場について述べたいいくつかの事実と、階段関数の積分表示

$$\theta(x^0 - y^0) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z + i\epsilon} dz \quad (\text{A.81})$$

$$\theta(y^0 - x^0) = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)}}{z - i\epsilon} dz \quad (\text{A.82})$$

を用いて少し計算すると、ファインマン伝播関数の積分表示

$$\Delta_F(x - y) = \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (x - y)}}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (\text{A.83})$$

が得られる。なお、上で出てきた微小な正の数 ϵ は、被積分関数の極をずらす（積分経路を変更する）ために導入しており、計算の最後には $\epsilon \rightarrow +0$ とする。

最後に、自由実スカラー場のファインマン伝播関数の物理的描像について述べておく。たとえば $x^0 - y^0 > 0$ としてみると、 $\Delta_F(x - y)$ の定義より、

$$\Delta_F(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (\text{A.84})$$

である。これに、フーリエ展開の表式 (A.32) 式を代入することを考えると、真空の定義より、 $\phi(x)$ は $\langle 0 |$ により消滅演算子 $a(\mathbf{k})$ のみが残る、 $\phi(y)$ は $|0\rangle$ により $a^\dagger(\mathbf{k}')$ のみが残る。つまり、自由実スカラー場で記述される粒子が時刻 y^0 に、ある位置 \mathbf{y} で生成され、時空を伝わっていき、時刻 x^0 に位置 \mathbf{x} で消滅するという描像が得られる。このように、粒子（場）の伝わる様子を記述するため、伝播関数（プロパゲーター）と呼ばれる。

A.7.2 ディラック場のファインマン伝播関数

ディラック場のファインマン伝播関数 $S_F(x - y)$ は、次で定義される。

$$\begin{aligned} S_F(x - y)_{ab} &:= \langle 0 | T [\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)] | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

ディラック場の反交換関係により、第2項の符号がマイナスになっていることに注意。これに、(A.42) を代入して計算していく。その際、(A.45)、(A.49)、(A.50) 式を用い、さらに

$$\gamma^\mu \partial_\mu \left\{ \theta \left(\pm (x^0 - y^0) \right) e^{\pm ik \cdot (x - y)} \right\} = \pm \gamma^0 \delta(x^0 - y^0) e^{\pm ik \cdot (x - y)} \pm i \theta \left(\pm (x^0 - y^0) \right) \not{k} e^{\pm ik \cdot (x - y)} \quad (\text{A.86})$$

という式を使うと、

$$\begin{aligned} S_F(x - y) &= (-\not{\partial} + m) \Delta_F(x - y) \\ &= \frac{1}{i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i\not{k} + m) e^{ik \cdot (x - y)}}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

という積分表示が得られる。なお、実スカラー場のファインマン伝播関数 $\Delta_F(x - y)$ の積分表示 (A.83) 式を用いた。

ディラック場のファインマン伝播関数についても、物理的描像を読みとることができる。スカラー場の時と同じように $x^0 - y^0 > 0$ で考えてみる。定義より、

$$S_F(x - y)_{ab} = \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle \quad (\text{A.88})$$

である。真空の定義 (A.46) 式と自由ディラック場のフーリエ展開の表式 (A.42) 式から、 $\psi_a(x)$ の方は $b(\mathbf{k}, s)$ のみ残り、 $\bar{\psi}_b(y)$ の方は $b^\dagger(\mathbf{k}', s')$ のみ残る。つまり、時刻 y^0 で位置 \mathbf{y} に生成された電子が、時刻 x^0 に位置 \mathbf{x} で消滅するという描像が得られることが分かる。

一方で、 $y^0 - x^0 > 0$ を考えてみると、

$$S_F(x-y)_{ab} = \langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle \quad (\text{A.89})$$

であり、今度は $\bar{\psi}_b(y)$ の方は $d(\mathbf{k}, s)$ のみ残り、 $\psi_a(x)$ の方は $d^\dagger(\mathbf{k}', s')$ のみが残る。つまり、時刻 x^0 に位置 \mathbf{x} で生成された陽電子が、時刻 y^0 に位置 \mathbf{y} で消滅すると読み取れる。このことから分かるように、電子が時間に沿って伝播していくのに対し、電子の反粒子である陽電子は時間に逆行して伝播していく。このことは、図 2.1, 2.2, 2.3 にも反映されている。

A.8 正規積とウィックの定理

S 行列を計算していく際に重要になるウィックの定理を説明することがこの節の目的である。

A.8.1 正規積 (normal ordered product)

ウィックの定理に入る前に、正規積についてまとめておく。A.5 では、自由場の量子化についてまとめたが、それぞれの場のフーリエ展開をみるとわかるように、正振動部分と負振動部分に分けることができる。たとえば、実スカラー場の場合は、

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \quad (\text{A.90})$$

$$\phi^{(+)}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}V}} a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{A.91})$$

$$\phi^{(-)}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}V}} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{A.92})$$

である。+, - で、正振動と負振動を表す*4。

さらに真空 $|0\rangle$ の定義から、

$$\phi^{(+)}(x) |0\rangle = \langle 0 | \phi^{(-)}(x) = 0 \quad (\text{A.93})$$

が成り立つ。このことは、ディラック場と電磁場についても言える。

ここで、正規積 $:\phi(x)\phi(y):$ を次で定義する。

$$:\phi(x)\phi(y): := \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(+)}(y)\phi^{(-)}(x) \quad (\text{A.94})$$

つまり、正規積は、負振動を左に、正振動を右になるように並べ替えたものである。このことから、

$$\phi(x)\phi(y) = :\phi(x)\phi(y): + \left[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y) \right] \quad (\text{A.95})$$

となることが容易にわかる。ちなみに、

$$\left[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y) \right] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} =: i\Delta^{(+)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (\text{A.96})$$

*4 ここでいう正負は、演算子 $i\partial/\partial t$ を作用させたときの符号を考えるとよい。

であることが簡単に計算できる。なお、不変デルタ関数 (A.77) の正振動部分を $\Delta^{(+)}(x-y)$ と書いた。

また、正規積の定義より、

$$\langle 0 | : \phi(x) \phi(y) : | 0 \rangle = 0 \quad (\text{A.97})$$

が成り立つ。

A.8.2 ウィックの定理

ここでは、説明がしやすいので実スカラー場を例にとり、ウィックの定理の内容を述べていく。以下の議論は自由ディラック、電磁場にも当てはまる。

先ほど述べたように、ウィックの定理は S 行列を計算するための武器である。そこで、例えば以下のような量を考えてみる。

$$\langle \text{out} | T [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | \text{in} \rangle \quad (\text{A.98})$$

$$| \text{in} \rangle = a^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{k}_i) | 0 \rangle \quad (\text{A.99})$$

$$| \text{out} \rangle = a^\dagger(\mathbf{k}'_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{k}'_f) | 0 \rangle \quad (\text{A.100})$$

これは、 $| \text{in} \rangle$ から $| \text{out} \rangle$ への遷移確率を考える際に計算すべき項である。ただしここでは、 $\{\mathbf{k}_j\}$ たちと $\{\mathbf{k}'_j\}$ たちはどれも異なるものとして話を進める。もし一致するものがあれば、散乱されずに素通りしてくる粒子が存在することになり、僕がしたい計算においては考えなくてよいからである。なお、粒子は本質的的原理的に区別できないので、 $| \text{in} \rangle$ のある粒子が \mathbf{k} の状態にあり、 $| \text{out} \rangle$ では別の粒子が状態 \mathbf{k} にあるといったことを考えることは意味がないことに注意しておく。

この仮定の下では、

$$[a(\mathbf{k}_j), a^\dagger(\mathbf{k}'_m)] = 0 \quad (\text{A.101})$$

である。

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) a^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle &= \langle 0 | [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n), a^\dagger(\mathbf{k})] | 0 \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_{j-1}) [\phi(x_j), a^\dagger(\mathbf{k})] \phi(x_{j+1}) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_{j-1}) \phi(x_{j+1}) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle \langle 0 | \phi(x_j) | \mathbf{k} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

(A.98) 式を計算していく前に、次の計算を見てみる。ただし、一つ目の等号では真空の定義を使っており、三つ目の等号では、

$$[\phi(x), a^\dagger(\mathbf{k})] = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}V}} e^{i\mathbf{k} \cdot x} = \langle 0 | \phi(x) | \mathbf{k} \rangle \quad (\text{A.103})$$

を用いている。これは 1 粒子波動関数であり、行列要素の形で書ける。

(A.102) 式を用いることにより、少し省略するが、

$$\begin{aligned}
& \langle \text{out} | T [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | \text{in} \rangle \\
&= \langle 0 | a(\mathbf{k}'_f) \cdots a(\mathbf{k}'_1) T [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] a^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{k}_i) | 0 \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \langle 0 | a(\mathbf{k}'_f) \cdots a(\mathbf{k}'_1) T [\phi(x_1) \cdots \phi(x_{j-1}) \phi(x_{j+1}) \cdots \phi(x_n)] a^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{k}_{i-1}) | 0 \rangle \times \langle 0 | \phi(x_j) | \mathbf{k}_i \rangle \\
&\vdots \\
&= \sum_{\text{comb-1}} \langle \mathbf{k}'_1 | \phi(x'_1) | 0 \rangle \cdots \langle \mathbf{k}'_f | \phi(x'_f) | 0 \rangle \langle 0 | \phi(x'_{f+1}) | \mathbf{k}_1 \rangle \cdots \langle 0 | \phi(x'_{f+i}) | \mathbf{k}_i \rangle \times \langle 0 | T [\phi(x'_{f+i+1}) \cdots \phi(x'_n)] | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{A.104}$$

と計算できる。ただし、 $\sum_{\text{comb-1}}$ は、 x_1 から x_n の中から $f+i$ 個を選び、選ばなかったものは T 積の中に、選んだものは ϕ の行列要素の方に並べて配置し、そのすべてについて和をとるものとし (項の数は、 ${}_n C_{f+i} \times (f+i)!$ 個)、 x'_j は x_j たちを並べ替えた後のものである。

さらに、先ほど定義した正規積を用いると、(A.104) は次のように書ける。

$$\langle \text{out} | T [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | \text{in} \rangle = \sum_{\text{comb-2}} \langle \text{out} | : \phi(x'_1) \cdots \phi(x'_{f+i}) : | \text{in} \rangle \langle 0 | T [\phi(x'_{f+i+1}) \cdots \phi(x'_n)] | 0 \rangle \tag{A.105}$$

ただし、 $\sum_{\text{comb-2}}$ は、 $x_j (j=1, \dots, n)$ を、 $f+i$ 個とそれ以外に分け、その分け方すべてについて和をとることを意味する。上式は任意の状態 $|\text{in}\rangle, |\text{out}\rangle$ で成り立つので、演算子としての等式

$$T [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] = \sum_{\text{comb-2}} : \phi(x'_1) \cdots \phi(x'_{f+i}) : \langle 0 | T [\phi(x'_{f+i+1}) \cdots \phi(x'_n)] | 0 \rangle \tag{A.106}$$

が成り立つ。そこで次は T 積の真空期待値を考える。T 積に場が 2 つしかない場合は、実スカラー場のファインマン伝播関数の定義そのものである。すなわち、

$$\langle 0 | T [\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \Delta_F(x-y) \tag{A.107}$$

であった。これを繰り返すことにより、

$$\langle 0 | T [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle = \sum_{\text{comb-3}} \Delta_F(x'_1 - x'_2) \cdots \Delta_F(x'_{n-1} - x'_n) \tag{A.108}$$

が成り立つ。ただし、 $\sum_{\text{comb-3}}$ は、1 から n を $n/2$ 個の対に分け、そのすべての分け方について和をとることを意味する。なお、 $\Delta_F(x)$ は偶関数なので、各々の対については、その順序は問わない。また、 n が奇数のときはゼロになることが示せる。

以上をまとめると、実スカラー場については

$$T [\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] = \sum_{\text{comb-4}} : \phi(x'_1) \cdots \phi(x'_j) : \Delta_F(x'_{j+1} - x'_{j+2}) \cdots \Delta_F(x'_{n-1} - x'_n) \tag{A.109}$$

である ($\sum_{\text{comb-4}}$ は、 $\sum_{\text{comb-2}}$ と $\sum_{\text{comb-3}}$ を合わせたもの)。

実スカラー場を使うだけならここまででもいいのだが、ディラック場や電磁場についても使えるような表式に書き換える (本質的には以上で済んでいる。書き方の問題。) ために次のような記号を導入する。

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv \langle 0 | T [\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle \tag{A.110}$$

これをウィックの縮約 (contraction) 記号といい、実スカラー場の場合は $\Delta_F(x-y)$ そのものである。また、ディラック場の縮約は $S_F(x-y)$ そのものである。すなわち、

$$\overline{\psi_a(x)\psi_b(y)} = S_F(x-y)_{ab} \quad (\text{A.111})$$

である。なお、演算子 $b, b^\dagger, d, d^\dagger$ の反交換関係を使えば、

$$\overline{\psi_a(x)\psi_b(y)} = \overline{\psi_a(x)\psi_b(y)} = 0 \quad (\text{A.112})$$

となることも示せる。

このとき、(A.109) 式を見てみると、縮約の個数が $0, 1, 2, \dots$ のものに分けることができる。よって、縮約の個数ごとに和をとるように書くと、次のように書ける。

$$\begin{aligned} T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] &=:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n): \\ &+ \sum_{1\text{contraction}} :\phi(x_1)\cdots\overline{\phi(x_i)\cdots\phi(x_j)}\cdots\phi(x_n): \\ &+ \sum_{2\text{contraction}} :\phi(x_1)\cdots\overline{\phi(x_i)\cdots\phi(x_j)}\cdots\overline{\phi(x_k)\cdots\phi(x_l)}\cdots\phi(x_n): \\ &+ \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

これが一般のウィックの定理の形である。T 積は、縮約の個数ごとに展開して考えればよいということが分かる。

A.9 不変振幅と散乱断面積

ここでも、一般論を展開するのではなく (ほとんど同じだが)、ポジトロニウムの 2γ 崩壊を想定して説明をする。

まず、S 行列を次のように書くことにする。

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) T_{fi} \quad (\text{A.114})$$

ただし、 p_1, p_2 は電子と陽電子の 4 元運動量、 k_1, k_2 は光子の 4 元運動量を想定して書いている。

ここで、始状態 $|i\rangle$ から終状態 $|f\rangle$ への単位時間当たりの遷移確率は

$$w_{i\rightarrow f} = \lim_{\substack{t\rightarrow\infty \\ t_0\rightarrow-\infty}} \frac{|\langle f|U(t, t_0) - 1|i\rangle|^2}{t - t_0} \quad (\text{A.115})$$

である。分子を考えてみると、定義より $U(t, t_0)$ は $t \rightarrow \infty, t_0 \rightarrow -\infty$ で S 行列になるので、

$$\begin{aligned} |\langle f|U(t, t_0) - 1|i\rangle|^2 &\rightarrow |\langle f|S - 1|i\rangle|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |T_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \end{aligned} \quad (\text{A.116})$$

ここで、 V を系の (十分大きな) 体積、 T をマクロなスケールの時間とすると

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x e^{i0\cdot x} = \int dt \int d^3x \sim TV \quad (\text{A.117})$$

と評価でき、さらに $t - t_0 \sim T$ なので、

$$w_{i\rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |T_{fi}|^2 V \quad (\text{A.118})$$

と書ける。ここで、不変散乱振幅を次で定義する。

$$\mathcal{T}_{fi} := \sqrt{2E_{p_1} V 2E_{p_2} V 2\omega_{k_1} V 2\omega_{k_2} V} T_{fi} \quad (\text{A.119})$$

また、定義より、 $w_{i \rightarrow f}$ を入射フラックス $|\mathbf{v}_{\text{rel}}|/V$ で割り、終状態の位相空間について足しあげたものが散乱断面積である。体積 V が十分大きい時

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (\text{A.120})$$

となることに注意すると、散乱断面積 σ は

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4|\mathbf{v}_{\text{rel}}|E_{p_1}E_{p_2}} \int \frac{d^3k_1}{2\omega_{k_1}} \int \frac{d^3k_2}{2\omega_{k_2}} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \quad (\text{A.121})$$

となる。これをメラールの公式という。

なお、始状態の電子、陽電子のスピンは選択的でないので、スピンについての平均をとっておかなければならず、さらに、終状態の光子の偏極は測定しないので、偏極については和をとらなければならない。つまり、不変散乱振幅を

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2 \rightarrow \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \quad (\text{A.122})$$

と修正しなければならない。細かい計算については後に説明する。

A.10 ガンマ行列の種々の公式

散乱問題の具体的計算では、ガンマ行列が絡む計算をしていかなければならない。その際に用いる公式をいくつか述べておく。

まず、ガンマ行列の満たす代数とエルミート性から、

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \begin{cases} -\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger & (\mu = 0) \\ \gamma^j = (\gamma^j)^\dagger & (\mu = j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (\text{A.123})$$

これを用いると、任意の4元ベクトル a に対して

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &:= \gamma^0 \psi^\dagger \gamma^0 \\ &= \gamma^0 (\gamma^j a_j + \gamma^0 a_0)^\dagger \gamma^0 \\ &= \gamma^0 (\gamma^j a_j^* - \gamma^0 a_0^*) \gamma^0 \\ &= \gamma^j a_j^* + \gamma^0 a_0^* \\ &= \psi^* \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

が成り立つ。なお、(A.123) 式を用いている。これから、

$$\overline{\psi \psi} = \psi^* \psi^* \quad (\text{A.125})$$

が成り立つこともすぐわかる。

次節以降の計算では、ガンマ行列（の積）のトレースを計算する機会がたくさんあるので、それに関する公式も述べておく。まず、 N 次正方行列 A に対して、

$$\text{Tr}(A) := \sum_{n=1}^N A_{nn} \quad (\text{A.126})$$

を定義し、これを行列 A のトレースという。 A, B を N 次正方行列、 a, b を複素数とすると、定義から明らかに、

$$\text{Tr}(aA + bB) = a \text{Tr}(A) + b \text{Tr}(B) \quad (\text{A.127})$$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \quad (\text{A.128})$$

が成り立つことが分かる。すると、ガンマ行列が満たす代数 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ から、

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu} \quad (\text{A.129})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \quad (\text{A.130})$$

が成り立つ。

ここで、新たなガンマ行列 γ^5 を次で定義する。

$$\gamma^5 := i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (\text{A.131})$$

この γ^5 は次を満たすことはすぐ確かめられる。

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (\text{A.132})$$

$$\left(\gamma^5\right)^2 = 1 \quad (\text{A.133})$$

すると、

$$\text{Tr}(\text{奇数個のガンマ行列の積}) = 0 \quad (\text{A.134})$$

が成り立つことが以下のようにして示される。 n を正の奇数とすると、

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}) &= \text{Tr}\left(\left(\gamma^5\right)^2 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}\right) \\ &= -\text{Tr}\left(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^5 \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}\right) \\ &= (-1)^n \text{Tr}\left(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5\right) \\ &= -\text{Tr}\left(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \left(\gamma^5\right)^2\right) \quad (n \text{ は奇数、トレースは可換}) \\ &= -\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}) \end{aligned} \quad (\text{A.135})$$

となり、奇数個のガンマ行列の積のトレースはゼロである。

以下の節では、これらの公式を特に言及せずに使うこともある。

A.11 パラポジトロニウムの寿命

少し冗長になったが、以上で準備は終わりである。ここから、パラポジトロニウムの寿命計算を摂動の最低次で行っていく。なお、途中計算はできるだけ省略していく。

まずは S 行列を計算する。始状態 $|i\rangle$ には 4 元運動量 p_1, p_2 の電子と陽電子が、終状態 $|f\rangle$ には 4 元運動量 k_1, k_2 の光子がいる。それを

$$|i\rangle = |e^-(p_1, s_1), e^+(p_2, s_2)\rangle = b^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1)d^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2)|0^{(D)}\rangle \otimes |0^{(E)}\rangle \quad (\text{A.136})$$

$$|f\rangle = |\gamma(k_1, \lambda_1), \gamma(k_2, \lambda_2)\rangle = |0^{(D)}\rangle \otimes a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2, \lambda_2)|0^{(E)}\rangle \quad (\text{A.137})$$

と書く。ここで、真空の $|0\rangle$ の添え字 D,E は、それぞれディラック場、電磁場の真空を表す。適宜省略する。また、始状態と終状態では、場は自由場として扱ってよいので、上のように状態ベクトルは単にそれぞれの場の (テンソル) 積で書けることを用いている。

基底状態のパラポジトロニウムは偶数個の光子に崩壊することは先ほどみた。それを摂動の最低次で扱う際には、ダイソンの公式 (A.24) の $n = 2$ の項

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x \int d^4y T [\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\mathcal{H}_{\text{int}}(y)] \quad (\text{A.138})$$

を S 行列と近似してよい*5。

また、相互作用ハミルトニアンは $\mathcal{H}_{\text{int}}(x) = -j^\mu(x)A_\mu(x)$ だったので、計算すべき S 行列は、

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle &= \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle f|T [\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\mathcal{H}_{\text{int}}(y)]|i\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \langle 0|T [j^\mu(x)j^\nu(y)]|e^-(p_1, s_1), e^+(p_2, s_2)\rangle \langle \gamma(k_1, \lambda_1), \gamma(k_2, \lambda_2)|T [A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.139})$$

である。

ここで、電流密度 $j^\mu(x)$ は、正規積を用いて

$$j^\mu(x) = ie : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) : \quad (\text{A.140})$$

と定義される*6。ウィックの定理を用いて T 積を展開することを考えるが、パラポジトロニウムの 2γ 崩壊に寄与する項だけを書けば以下ようになる。

$$T [j^\mu(x)j^\nu(y)] \rightarrow -e^2 \{ : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu S_F(x-y)\gamma^\nu\psi(y) : + : \bar{\psi}(y)\gamma^\mu S_F(y-x)\gamma^\nu\psi(x) : \} \quad (\text{A.141})$$

$$T [A_\mu(x)A_\nu(y)] \rightarrow : A_\mu(x)A_\nu(y) : \quad (\text{A.142})$$

これに対応したファインマンダイアグラムが図 2.1 だったのである。

(A.141) 式には項が 2 つあるので、対応するファインマンダイアグラムも 2 つある*7。また、(A.141) 式は、 $S^{(2)}$ に代入すると、 $x \leftrightarrow y$ および $\mu \leftrightarrow \nu$ の入れ替えについて対称であるから、 $S^{(2)}$ の計算では、(A.141) 式の第 1 項だけ残して全体を 2 倍すればよい。すると、

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(2)}|i\rangle &= e^2 \int d^4x d^4y \langle 0| : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu S_F(x-y)\gamma^\nu\psi(y) : |e^-(p_1, s_1), e^+(p_2, s_2)\rangle \\ &\quad \times \langle \gamma(k_1, \lambda_1), \gamma(k_2, \lambda_2)| : A_\mu(x)A_\nu(y) : |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.143})$$

*5 $n = 1$ の項は、一つの光子への崩壊なので遷移確率には効かない。

*6 正規積の定義より、 $\langle 0|j^\mu(x)|0\rangle = 0$ 、つまり電流の真空期待値ゼロである。

*7 光子のボース統計性より、2 光子を入れ替えたものも本質的に同じ状態なので、ある種当然のことである。

となる。さらに、演算子の (反) 交換関係と真空の性質を使うと、

$$\langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu S_F(x-y) \gamma^\nu \psi(y) : | e^-(\mathbf{p}_1, s_1), e^+(\mathbf{p}_2, s_2) \rangle \quad (\text{A.144})$$

$$\begin{aligned} &= \langle 0 | \bar{\psi}_a(x) | e^+(\mathbf{p}_2, s_2) \rangle (\gamma^\mu)_{ab} S_F(x-y)_{bc} (\gamma^\nu)_{cd} \langle 0 | \psi_d(y) | e^-(\mathbf{p}_1, s_1) \rangle \\ &\langle \gamma(k_1, \lambda_1), \gamma(k_2, \lambda_2) | : A_\mu(x) A_\nu(y) : | 0 \rangle \quad (\text{A.145}) \\ &= \langle \gamma(k_1, \lambda_1) | A_\mu(x) | 0 \rangle \langle \gamma(k_2, \lambda_2) | A_\nu(y) | 0 \rangle + \langle \gamma(k_2, \lambda_2) | A_\mu(x) | 0 \rangle \langle \gamma(k_1, \lambda_1) | A_\nu(y) | 0 \rangle \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、1 粒子波動関数の表式と、ファインマン伝播関数 $S_F(x-y)$ の積分表示 (A.87) 式を用いて少し計算すると、最終的には、

$$\langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{i e^2 (2\pi)^4}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}_1} V 2E_{\mathbf{k}_2} V 2\omega_{\mathbf{k}_1} V 2\omega_{\mathbf{k}_2} V}} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \bar{v}(\mathbf{p}_2, s_2) \left\{ \not{\epsilon}^{(\lambda_2)*}(\mathbf{k}_2) \frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_1) - m}{(p_1 - k_1)^2 + m^2} \not{\epsilon}^{(\lambda_1)*}(\mathbf{k}_1) + \not{\epsilon}^{(\lambda_1)*}(\mathbf{k}_1) \frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_2) - m}{(p_1 - k_2)^2 + m^2} \not{\epsilon}^{(\lambda_2)*}(\mathbf{k}_2) \right\} u(\mathbf{p}_1, s_1) \quad (\text{A.146})$$

という表式が得られる。なお、 $\not{\epsilon}^{(\lambda)*}(\mathbf{k}) = \gamma^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(\mathbf{k})$ であり、 $\epsilon \rightarrow +0$ としておいた。上の表式の $\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$ が、エネルギー-運動量保存を表している*8。

ここで、この表式を少し簡単にしていく。まず、自由場を考えていることから、質量殻上の条件

$$p^2 + m^2 = 0, \quad k^2 = 0 \quad (\text{A.147})$$

を用いると、

$$(p_1 - k_1)^2 + m^2 = -2p_1 \cdot k_1 \quad (\text{A.148})$$

などが言える。

さらにここで、ターゲットとなる電子の静止系、すなわち実験室系に移る。このとき、

$$p_1 = (m, \mathbf{0}) \quad (\text{A.149})$$

であり、また、クーロンゲージでは 2 つの偏極ベクトル $\epsilon^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2$) は空間成分しか持たないため、

$$p_1 \cdot \epsilon^{(\lambda)} = 0 \quad (\lambda = 1, 2) \quad (\text{A.150})$$

が成り立つ。このことから、

$$\begin{aligned} \not{p}_1 \not{\epsilon}^{(\lambda_1)*} &= \gamma^\mu p_{1\mu} \gamma^\nu \epsilon_\nu^{(\lambda_1)*} \\ &= \epsilon_\nu^{(\lambda_1)*} p_{1\mu} (-\gamma^\nu \gamma^\mu + 2\eta^{\mu\nu}) \\ &= -\not{\epsilon}^{(\lambda_1)*} \not{p}_1 + 2\epsilon^{(\lambda_1)*} \cdot p_1 \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

の第 2 項は消え、さらに $u(\mathbf{p}_1, s_1)$ の満たす方程式 (A.43) 式より、第 1 項も S 行列からは消えてしまう。以上より、不変散乱振幅は以下のように書ける。

$$\mathcal{T}_{fi} = e^2 \bar{v}(\mathbf{p}_2, s_2) A u(\mathbf{p}_1, s_1) \quad (\text{A.152})$$

ただし、

$$A = i \left(\frac{\not{\epsilon}^{(\lambda_1)*} \not{k}_2 \not{\epsilon}^{(\lambda_2)*}}{2p_1 \cdot k_2} + \frac{\not{\epsilon}^{(\lambda_2)*} \not{k}_1 \not{\epsilon}^{(\lambda_1)*}}{2p_1 \cdot k_1} \right) \quad (\text{A.153})$$

*8 分かりやすく、電子と陽電子が完全に静止しているとする、 $p_1 = (E_{\mathbf{p}_1}, \mathbf{p}_1) = (m, \mathbf{0})$, $p_2 = (E_{\mathbf{p}_2}, \mathbf{p}_2) = (m, \mathbf{0})$ なので、

$$\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) = \delta((p_1)^0 + (p_2)^0 - (k_1)^0 - (k_2)^0) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \delta(2m - 2\omega_{\mathbf{k}_1}) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$$

となつて、2 つの光子が反対方向に同じエネルギー (電子の静止エネルギー 511 keV) をもって飛び出してくることが理解できる。

とした ($\epsilon^{(\lambda_1)} = \epsilon^{(\lambda_1)}(\mathbf{k}_1)$) のように、波数の部分は省略する)。

散乱断面積を計算するために、スピン平均をとった $|\mathcal{T}_{fi}|^2$ を計算する。その際、前節のガンマ行列に関する諸性質や、 u, v の完全性の条件 (A.49)、(A.50) 式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{4} \sum_{s_1, s_2} |\bar{v}(\mathbf{p}_2, s_2) A u(\mathbf{p}_1, s_1)|^2 \\ &\vdots \\ &= \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left[(-i\not{p}_2 - m) A (-i\not{p}_1 + m) \bar{A} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.154})$$

となる。ただし、 $\bar{A} = \gamma^0 A^\dagger \gamma^0$ である。このトレースの計算についても、必要な公式は前節でまとめた。ただし、偏極の和については、(A.59) 式を使うのだが、 k_μ や k_ν に比例する項は以下の計算には寄与しないことが分かっている。また、 $k^2 = 0$ であったから結局、偏極の和をとるときには、

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)*} = \eta_{\mu\nu} \quad (\text{A.155})$$

としてよいことを注意しておく。すると、少し計算すると、結局

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2 \rightarrow 2e^4 \left\{ \frac{k_1 \cdot k_2 (2p_1 \cdot p_2 - m^2)}{(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} - \frac{p_2 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_1} - \frac{p_2 \cdot k_2}{p_1 \cdot k_2} \right\} \quad (\text{A.156})$$

を、メラールの公式 (A.121) に代入すればよいことが分かる。

なお、今は実験室系をとっているので、

$$p_1 \cdot k = -m\omega_{\mathbf{k}} \quad (\text{A.157})$$

などが成り立つ。また、入射する陽電子の運動量は十分小さい (ポジトロニウムは静止しているとみなす) とすると、 $p_2 = (E_{\mathbf{p}_2}, \mathbf{p}_2) \approx (m, \mathbf{0})$ と評価できるので

$$p_1 \cdot p_2 \approx -m^2, \quad p_2 \cdot k \approx -m\omega_{\mathbf{k}} \quad (\text{A.158})$$

などが言える。また、運動量保存則より、 $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ である。したがって、陽電子の入射速度 $|\mathbf{v}_{\text{rel}}|$ のゼロ次までで、

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2 \approx 8e^4 \quad (\text{A.159})$$

である。したがって、散乱断面積は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4 |\mathbf{v}_{\text{rel}}| E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}} \int \frac{d^3 k_1}{2\omega_{\mathbf{k}_1}} \int \frac{d^3 k_2}{2\omega_{\mathbf{k}_2}} 8e^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &= \frac{e^4}{4\pi |\mathbf{v}_{\text{rel}}| m^2} \end{aligned} \quad (\text{A.160})$$

である。

ポジトロニウムは基底状態にあるとし、入射陽電子の速度が十分小さいとすると、実験室系と重心系を同一視できるから、入射フラックスは $|\mathbf{v}_{\text{rel}}| |\varphi(\mathbf{0})|^2$ である。ここで、 φ は基底状態のポジトロニウムの波動関数で、

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2}{(2a_0)^{3/2}} e^{-r/2a_0} \quad (\text{A.161})$$

である。ただし、 $a_0 = 4\pi/me^2$ はボーア半径で、最初に考察したように、水素原子の2倍なので係数の2がついていることに注意。このフラックスを散乱断面積にかけたものが崩壊幅（確率） Γ なので、

$$\begin{aligned}\Gamma &= |v_{\text{rel}}| |\varphi(\mathbf{0})|^2 \sigma \\ &= \frac{m\alpha^5}{2}\end{aligned}\tag{A.162}$$

となる。ただし、 $\alpha = e^2/4\pi$ は微細構造定数である。

以上より、パラポジトロニウムの寿命は

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{2}{m\alpha^5} = \frac{2\hbar}{mc^2\alpha^5} = 0.124 \text{ ns}\tag{A.163}$$

と求められる。

以上がパラポジトロニウムの場合だが、オルソポジトロニウムについても本質的には全く同じである。計算が煩雑になるだけである。よって、ここではオルソポジトロニウムの寿命計算を追うようなことはしない*⁹。結果は本文に記したとおりである。

*⁹ あまりにめんどそうだったので全く計算していません。つかれました。

参考文献

- [1] 砂川重信, 『量子力学』, 岩波書店, 1991.
- [2] 西島和彦, 『場の理論』(紀伊國屋数学叢書 27), 紀伊國屋書店, 1987.
- [3] 坂本真人, 『場の量子論 不変性と自由場を中心にして』(量子力学選書), 裳華房, 2014.
- [4] John R.Taylor, 『計測における誤差解析入門』, 林茂雄・馬場涼(訳), 東京化学同人, 2000.
- [5] 2016 年度前期課題演習 A2 レポート.