

# 2017年前期物理学課題演習 A2

## オルソポジトロニウムの寿命測定による QEDの実験的検証

京都大学理学部物理学科3回生

狩谷 泰慶

辻川 吉明

冨野 芳樹

豊田 峻史

中川 耕太郎

中山 悠平

平成29年12月2日

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>イントロダクション</b>	<b>2</b>
1.1	実験の概要	2
1.2	実験の目的	2
<b>第 2 章</b>	<b>理論</b>	<b>3</b>
2.1	ポジトロニウム	3
2.2	ポジトロニウムの崩壊	4
2.3	相互作用表示と S 行列	5
2.4	寿命の理論値	7
<b>第 3 章</b>	<b>実験の原理</b>	<b>9</b>
3.1	実験原理	9
3.2	実験器具	9
3.3	セットアップ	9
3.4	回路図	10
<b>第 4 章</b>	<b>データ解析</b>	<b>12</b>
4.1	生データ	12
4.2	Calibration	13
4.2.1	ADC Calibration	13
4.2.2	TDC Calibration	15
4.3	TQ 補正	17
4.3.1	TQ 補正とは	17
4.3.2	TQ 補正の方法	18
4.3.3	TQ 補正の様子	19
4.3.4	TQ 補正後の寿命	22
4.4	pick-off 反応	23
4.5	具体的な補正方法	23
4.6	fitting 関数の導出	23
4.7	$f(t)$ の導出	23
4.8	$\Delta N_{2\gamma}(t)$ の導出	24
4.9	$f(t)$ 導出の式	25
4.10	プロットの手順	25
<b>第 5 章</b>	<b>誤差の評価</b>	<b>29</b>
5.1	誤差の分類	29
5.2	TDC3 calibration における誤差の評価	29
5.3	TQ 補正関数の誤差の評価	29
5.4	pick-off 補正関数の誤差の評価	30
5.5	系統誤差のまとめ	31
<b>第 6 章</b>	<b>考察・まとめ</b>	<b>32</b>
6.1	考察	32
6.1.1	NaI1 の不具合に関して	32
6.1.2	寿命を求める際の fitting 範囲の妥当性について	34
6.1.3	求めた寿命が理論値よりも長くなったことについて	35

6.1.4	その他	35
6.2	まとめ	35

# 第1章 イントロダクション

## 1.1 実験の概要

まず表題のオルソポジトロニウムとは電子と陽電子から成る電氣的束縛状態の3重項を指し、対消滅によって光子を放出して崩壊する(詳細は次章で述べる). この電子と陽電子の対消滅は量子電磁力学(Quantum ElectroDynamics ; QED)において最も基本的な反応であるといえる.

そこで今回の実験では、 $^{22}\text{Na}$ を $e^+$ の供給源として、またシリカパウダーを $e^-$ の供給源として用いてセットアップを組み、オルソポジトロニウムが生成されてから対消滅するまでの時間を実験的に求め、これと理論値との比較・検証を行った.

## 1.2 実験の目的

(I) オルソポジトロニウムが生成されてから崩壊するまでの寿命を測定し、QED(Quantum ElectroDynamics)による理論値との比較・検証を行う.

(II) 実験を通して各シンチレータや光電子増倍管などの実験器具の扱い方や得られたデータのROOTによる解析手法を学ぶ.

## 第2章 理論

### 2.1 ポジトロニウム

ポジトロニウム (Ps) は電子とその反粒子である陽電子が電磁相互作用により束縛され対になったエキゾチック原子とよばれるものの1つであり、水素原子と似た構造をもつが、電子の換算質量が水素原子のほぼ半分であることから、Ps の Bohr 半径は水素原子の約2倍となっている。

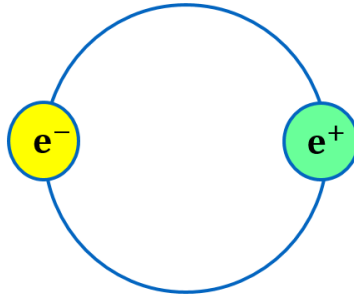


図 2.1.1: Ps の模式図

反粒子とは質量とスピンの向きが等しく、電荷など正負の属性が逆の粒子を指し、陽電子は電子同様スピン  $\frac{1}{2}$  をもつので、Ps は2電子系と同じように合成スピン0の1重項 (singlet) と合成スピン1の3重項 (triplet) に分類できて、前者をパラポジトロニウム (p-Ps)、後者をオルソポジトロニウム (o-Ps) とよぶ。これを数式で書けば  $b^\dagger, d^\dagger$  をそれぞれ電子と陽電子の生成演算子として

$$|p\text{-Ps}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\downarrow) - b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\uparrow))|0\rangle$$
$$|o\text{-Ps}\rangle = \begin{cases} b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\uparrow)|0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\downarrow) + b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\uparrow))|0\rangle \\ b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\downarrow)|0\rangle \end{cases}$$

となる (演算子の右肩の括弧の中身はスピンの向きを表す)。

自然界の4つの力 (電磁気力、弱い力、強い力、重力) のうち、強い力はPsがレプトンの系ゆえ影響せず、弱い力と重力は電磁気力に比べて無視できるほど小さいので、Psに働く力としては電磁気力のみを考慮すればよいことがわかる。

つまりPsは純粋にQEDによって記述され、最終的に電子と陽電子の対消滅によって光子 ( $\gamma$  線) を放出して消滅する。

歴史的にオルソポジトロニウムはQEDの検証によく用いられてきたのだが、その主な利点として以下の3つが挙げられる。

- (i) 実験室で生成しやすいこと
- (ii) 直接測定可能なくらいには寿命が長いこと
- (iii) 純粋にQEDで記述できて、構造がシンプル

## 2.2 ポジトロニウムの崩壊

粒子と反粒子を入れ替える操作である荷電共役変換 (C 変換) を考えると、 $b^\dagger, d^\dagger$  は

$$b^\dagger \xrightarrow{C} d^\dagger, \quad d^\dagger \xrightarrow{C} b^\dagger$$

と変換されるので、反交換関係  $\{b^\dagger, d^\dagger\} = 0$  を用いると p-Ps, o-Ps の C 変換は

$$\begin{aligned} |p\text{-Ps}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\downarrow) - b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\uparrow))|0\rangle \xrightarrow{C} |p\text{-Ps}\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{2}}(d^\dagger(\uparrow)b^\dagger(\downarrow) - d^\dagger(\downarrow)b^\dagger(\uparrow)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\downarrow) - b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\uparrow))|0\rangle = |p\text{-Ps}\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |o\text{-Ps}\rangle &= \begin{cases} b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\uparrow)|0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\downarrow) + b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\uparrow))|0\rangle \\ b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\downarrow)|0\rangle \end{cases} \\ \xrightarrow{C} |o\text{-Ps}\rangle_C &= \begin{cases} d^\dagger(\uparrow)b^\dagger(\uparrow)|0\rangle = -b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\uparrow)|0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(d^\dagger(\downarrow)b^\dagger(\uparrow) + d^\dagger(\uparrow)b^\dagger(\downarrow))|0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\downarrow) + b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\uparrow))|0\rangle \\ d^\dagger(\downarrow)b^\dagger(\downarrow)|0\rangle = -b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\downarrow)|0\rangle \end{cases} = -|o\text{-Ps}\rangle \end{aligned}$$

となり、p-Ps, o-Ps は C 変換に対してそれぞれ偶と奇であることがわかる。

また C 変換に対して 4 元電流密度  $J^\mu$  は

$$J^\mu \xrightarrow{C} -J^\mu$$

のように符号が反対になる ( $\because J^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ )。

電磁場が C 変換対称性を持つ、つまり電磁場の Lagrangian 密度が C 変換に対して不変であることを要請すると、電磁場の Lagrangian 密度が

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

であることから  $A^\mu \xrightarrow{C} -A^\mu$  となることがわかる。

このとき  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  より  $F^{\mu\nu} \xrightarrow{C} -F^{\mu\nu}$  となるので  $\mathcal{L}$  の第 1 項も不変であることが確認できる。ここでゲージ場  $A^\mu$  の Fourier 展開が  $\omega_k = |\mathbf{k}| = k$  として

$$A^\mu = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \sum_\alpha \left\{ a_{\mathbf{k}\alpha} \varepsilon_{\mathbf{k}\alpha}^\mu e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t)} + a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger \varepsilon_{\mathbf{k}\alpha}^{\mu*} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t)} \right\}$$

と与えられることから、光子の生成演算子  $a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger$  と消滅演算子  $a_{\mathbf{k}\alpha}$  は C 変換によって

$$a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger \xrightarrow{C} -a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger, \quad a_{\mathbf{k}\alpha} \xrightarrow{C} -a_{\mathbf{k}\alpha}$$

と変換されることがわかる。

光子が  $n$  個存在している状態を  $|n\gamma\rangle$  と書くと、これは生成演算子  $a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger$  を用いて  $|n\gamma\rangle = a_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n\alpha_n}^\dagger |0\rangle$  と表せるので、この C 変換は

$$|n\gamma\rangle = a_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n\alpha_n}^\dagger |0\rangle \xrightarrow{C} |n\gamma\rangle_C = (-1)^n a_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n\alpha_n}^\dagger |0\rangle = (-1)^n |n\gamma\rangle$$

となる。

したがって  $n$  が奇数のときは C 変換に対して奇であり、 $n$  が偶数のときは C 変換に対して偶であるといえる。

以上をまとめると C 変換に対するそれぞれの変換性は

$$|p\text{-Ps}\rangle \xrightarrow{C} |p\text{-Ps}\rangle, \quad |o\text{-Ps}\rangle \xrightarrow{C} -|o\text{-Ps}\rangle, \quad |n\gamma\rangle \xrightarrow{C} (-1)^n |n\gamma\rangle$$

であり、QED の荷電共役変換対称性、つまりポジトロニウムの崩壊の前後での C 変換性が保存されることから p-Ps は奇数個の光子を、o-Ps は偶数個の光子を放出することがわかる。

また Ps が静止しているとみなす (重心系から見る) と運動量保存則より 1 個の光子への崩壊は禁止されるので o-Ps は 3 個以上の奇数個の光子を放出することがわかる。

p-Ps の  $2\gamma$  への崩壊と o-Ps の  $3\gamma$  への崩壊のファインマン・ダイアグラムは以下ようになる。

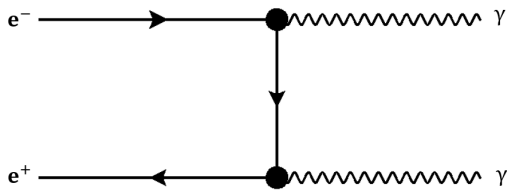


図 2.2.2: p-Ps の  $2\gamma$  への崩壊

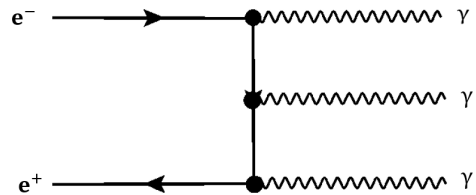


図 2.2.3: o-Ps の  $3\gamma$  への崩壊

ファインマンルールによると、頂点が 1 つ増えるにつれ遷移確率は微細構造定数 ( $\alpha \simeq 1/137$ ) のオーダーだけ小さくなるので、p-Ps の 4 個以上の光子への崩壊および o-Ps の 5 個以上の光子への崩壊が起こる確率は、p-Ps の 2 個の光子への崩壊および o-Ps の 3 個の光子への崩壊が起こる確率に比べて無視できるほど小さいといえる。つまり Ps の 4 個以上の光子への崩壊イベントは無視できて、p-Ps は 2 個の光子に、o-Ps は 3 個の光子に崩壊するとみなせる。

これを踏まえると、p-Ps はエネルギー・運動量保存より 511keV (電子の静止エネルギー) の back-to-back の  $\gamma$  線を放出し、o-Ps は  $3\gamma$  の運動量の和が 0 であればよいからエネルギー・スペクトルは連続となることがわかる。

ここで寿命を  $\tau$ 、単位時間あたりの崩壊確率 (崩壊幅) を  $\Gamma$  とおくと、寿命は次のように定義される。

$$\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$$

崩壊幅  $\Gamma$  は遷移確率に比例する (参考文献 [1] を参照) ので、上の定義式から遷移確率が小さいほど寿命は長くなるといえて、上記のファインマンルールから o-Ps の  $3\gamma$  への遷移確率は p-Ps の  $2\gamma$  への遷移確率より小さいといえるので、o-Ps の寿命は p-Ps の寿命より長いことがわかる。

## 2.3 相互作用表示と S 行列

系の Hamiltonian :  $H$  を自由運動の寄与  $H_0$  と相互作用の寄与 :  $H_{int}$  の 2 つの部分に分割し、 $H = H_0 + H_{int}$  が成り立っているとす。

Hamiltonian は時間に依存しないとして、 $H_0$  を用いて状態ベクトル  $|\psi(t)\rangle$  を

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle \quad (2.1)$$

のように変換した  $|\psi_I(t)\rangle$  について考えていく。

(2.1) の両辺を時間微分して  $i$  をかけると、 $|\psi_I(t)\rangle$  の満たす方程式は

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= i \left\{ iH_0 e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle + e^{iH_0 t} \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right\} \\ &= -H_0 e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle + e^{iH_0 t} H |\psi(t)\rangle = e^{iH_0 t} H_{int} |\psi(t)\rangle \quad (\because H_0 \text{ と } e^{iH_0 t} \text{ は可換}) \\ &= e^{iH_0 t} H_{int} e^{-iH_0 t} |\psi_I(t)\rangle = H_{int}(t) |\psi_I(t)\rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる。ここで

$$H_{int}(t) = e^{iH_0 t} H_{int} e^{-iH_0 t} \quad (2.3)$$

とおいた。

(2.2) は朝永-Schwinger 方程式とよばれるもので、 $|\psi_I(t)\rangle$  を状態ベクトルの相互作用表示という。

相互作用表示の時間発展を表すユニタリー演算子を  $\mathcal{U}_I(t, t_0)$  とおくと

$$|\psi_I(t)\rangle = \mathcal{U}_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle \quad (2.4)$$

と表せて、これに (2.1) を代入すると

$$e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle = \mathcal{U}_I(t, t_0) e^{iH_0 t_0} |\psi(t_0)\rangle$$

となり、これに  $|\psi(t)\rangle$  の時間発展を表す式

$$|\psi(t)\rangle = e^{iH(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle$$

を代入すると  $|\psi(t_0)\rangle$  は任意の状態を表すことから

$$e^{iH_0 t} e^{iH(t-t_0)} = \mathcal{U}_I(t, t_0) e^{iH_0 t_0}$$

$$\therefore \mathcal{U}_I(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} \quad (2.5)$$

と表せることがわかる。

また、(2.4) の両辺を時間微分すると (2.2) と (2.4) から

$$\frac{1}{i} H_{int}(t) |\psi_I(t)\rangle = \frac{\partial \mathcal{U}_I(t, t_0)}{\partial t} |\psi_I(t_0)\rangle \iff \frac{1}{i} H_{int}(t) \mathcal{U}_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle = \frac{\partial \mathcal{U}_I(t, t_0)}{\partial t} |\psi_I(t_0)\rangle$$

$$\therefore i \frac{\partial \mathcal{U}_I(t, t_0)}{\partial t} = H_{int}(t) \mathcal{U}_I(t, t_0) \quad (2.6)$$

のように  $\mathcal{U}_I(t, t_0)$  についての方程式が得られ、この (2.6) の両辺を時間で積分すると

$$i \left( \mathcal{U}_I(t, t_0) - \mathcal{U}_I(t_0, t_0) \right) = \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}(t_1) \mathcal{U}_I(t_1, t_0)$$

となり、(2.5) から  $\mathcal{U}_I(t, t_0)$  が初期条件  $\mathcal{U}_I(t_0, t_0) = 1$  を満たすことが確認できるので

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}(t_1) \mathcal{U}_I(t_1, t_0) \quad (2.7)$$

が得られる。

この右辺の  $\mathcal{U}_I(t_1, t_0)$  に関係式 (2.7) を適用すると

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_I(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}(t_1) \left\{ 1 - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_2) \mathcal{U}_I(t_2, t_0) \right\} \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \mathcal{U}_I(t_2, t_0) \end{aligned}$$

となり、この操作を繰り返すと

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_I(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \\ &\quad + \cdots + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \cdots H_{int}(t_n) + \cdots \\ &\simeq \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \cdots H_{int}(t_n) \end{aligned} \quad (2.8)$$

と摂動展開表現を得る。(ただし  $n=0$  の項は 1)

ここで異なる時刻における  $H_{int}(t)$  は一般に非可換であるので (2.8) の右辺に現れる演算子の順序を入れ替えることはできないことと

$$t \geq t_1 \geq t_2 \cdots \geq t_n \geq t_0$$

であることに注意する。

ステップ関数  $\theta(x)$  を用いた時間順序積とよばれる新たな関数

$$\begin{aligned} &T[H_{int}(t_1), H_{int}(t_2), \cdots, H_{int}(t_n)] \\ &= \sum_{\{m_i\}} H_{int}(t_{m_1}) H_{int}(t_{m_2}) \cdots H_{int}(t_{m_n}) \theta(t_{m_1} - t_{m_2}) \theta(t_{m_2} - t_{m_3}) \cdots \theta(t_{m_{n-1}} - t_{m_n}) \end{aligned}$$

( $\{m_i\}$  は  $m_i \in \mathbb{N}, 1 \leq m_i \leq n$  として全ての  $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$  の組み合わせを表す)



を用いると (2.8) は

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T[H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)\cdots H_{int}(t_n)] \quad (2.9)$$

と書ける.

相互作用 Hamiltonian:  $H_{int}$  は Hamiltonian 密度を用いると  $H_{int}(t) = \int d^3x \mathcal{H}_{int}(x^\mu)$  と書けるから (2.9) は

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \cdots \int d^4x_n T[\mathcal{H}_{int}(x_1^\mu)\mathcal{H}_{int}(x_2^\mu)\cdots\mathcal{H}_{int}(x_n^\mu)] \quad (2.10)$$

と書けて、これを Dyson の公式とよぶ.

また、(2.9) において  $t \rightarrow \infty, t_0 \rightarrow -\infty$  の極限をとった

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{U}_I(\infty, -\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)\cdots H_{int}(t_n)] \\ &= 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots + S^{(n)} + \cdots \end{aligned} \quad (2.11)$$

を S 演算子とよぶ.

これを用いると  $|\psi_I(\infty)\rangle$  は  $|\psi_I(\infty)\rangle = S|\psi_I(-\infty)\rangle$  と表せて、始状態  $|\psi_I(-\infty)\rangle$  を  $|i\rangle$  とおくと終状態にある状態  $|f\rangle$  を見出す確率は

$$|\langle f|\psi_I(\infty)\rangle|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2 = |S_{fi}|^2$$

と書けて、この確率振幅  $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$  を S 行列とよぶ.

次に自由 Dirac 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

と書けて、電磁相互作用も含めた Lagrangian 密度は  $e$  を電荷として上式にゲージ変換  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$  を行ったものとして得られるので

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

となり、相互作用 Lagrangian 密度は  $\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_0 = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$  となるのがわかる.

したがって Hamiltonian 密度が  $\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L}$  ( $\pi$  は  $\psi$  に正準共役な運動量) で与えられるので、相互作用 Hamiltonian 密度:  $\mathcal{H}_{int}$  は

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (2.12)$$

と書けることがわかる.

## 2.4 寿命の理論値

p-Ps の 2 光子への崩壊では始状態と終状態はディラック場と電磁場の真空をそれぞれ  $|0^{(D)}\rangle, |0^{(E)}\rangle$  とあらわすと

$$\begin{aligned} |i\rangle &= b^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1)d^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2)|0^{(D)}\rangle \otimes |0^{(E)}\rangle \\ |f\rangle &= a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2, \lambda_2)|0^{(E)}\rangle \otimes |0^{(D)}\rangle \end{aligned}$$

と書けて、近似として (2.11) の  $n = 2$  の項のみを考えた

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-i)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle f|\mathcal{H}_{int}(x_1^\mu)\mathcal{H}_{int}(x_2^\mu)|i\rangle \\ &= (-e)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle f|\bar{\psi}(x_1^\nu)\gamma^\mu\psi(x_1^\nu)A_\mu(x_1^\nu)\bar{\psi}(x_2^\nu)\gamma^\mu\psi(x_2^\nu)A_\mu(x_2^\nu)|i\rangle \\ &= e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle 0^{(D)}|\bar{\psi}(x_1^\nu)\gamma^\mu\psi(x_1^\nu)\bar{\psi}(x_2^\nu)\gamma^\mu\psi(x_2^\nu)b^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1)d^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2)|0^{(D)}\rangle \\ &\quad \times \langle 0^{(E)}|a(\mathbf{k}_1, \lambda_1)a(\mathbf{k}_2, \lambda_2)A_\mu(x_1^\nu)A_\mu(x_2^\nu)|0^{(E)}\rangle \end{aligned}$$

を計算すればよいと思われる.

本質的ではない (レポート締切までの時間...) のでここで具体的な計算は行わないが、崩壊幅と S 行列の関係に

については参考文献 [1] を、具体的な計算方法などについては [4] を参照されたい。  
高次の項も含めた詳細な計算の結果 ([3] を参照) のみを記すと以下のようになる。

$$\left( \begin{array}{l} \text{p-Ps の寿命 : 約 } 0.123[\text{ns}] \\ \text{o-Ps の寿命 : 約 } 142[\text{ns}] \end{array} \right.$$

## 第3章 実験の原理

### 3.1 実験原理

線源  $^{22}\text{Na}$  の  $\beta^+$  崩壊により放出される陽電子  $e^+$  とシリカパウダーの中の電子  $e^-$  によって p-Ps, o-Ps が形成され、これが電子陽電子対消滅すると  $\gamma$  線が放出される。Ps の崩壊時間を計測するにあたって、まず線源  $^{22}\text{Na}$  とシリカパウダーの間にプラスチックシンチレータ (以下 P.S. と表記) を設置し、 $e^+$  を検出する。そして、シリカパウダー内で Ps が対消滅し放出された  $\gamma$  線を NaI シンチレータ (以下 NaI と表記) で検出する。P.S. で  $e^+$  が検出された時刻と NaI で  $\gamma$  線が検出された時刻との時間差を Ps の崩壊時間とする。またこの際に、 $e^+$  が P.S. を通過した時刻と Ps が形成された時刻、Ps が崩壊した時刻と  $\gamma$  線が NaI で検出された時刻をそれぞれ同時とみなして解析を行った。(実際、 $^{22}\text{Na}$  からの  $e^+$  は光速に近く  $e^+$  と  $\gamma$  線の飛行時間は o-Ps の崩壊時間に比べ十分短い。このため、十分妥当な近似である。)

### 3.2 実験器具

- $^{22}\text{Na}$  :  $\beta^+$  崩壊によって  $e^+$  を放出する線源。
- P.S. :  $e^+$  を検出する。
- NaI :  $\gamma$  線を検出する。
- シリカパウダー (主成分  $\text{SiO}_2$ ) :  $e^-$  を多く有し、 $e^+$  を受けて Ps を形成する。o-Ps の維持に役立つ低密度の多孔質構造をしている。
- 鉛ブロック (Pb) : 線源  $^{22}\text{Na}$  から NaI への直接  $\gamma$  線を遮蔽する。
- 遮光用ビニール : 直接光 (蛍光灯や日光) による P.S. の破損を防ぎ、またノイズを減らすために、セットアップ全体を覆うように使用。

### 3.3 セットアップ

各実験装置は図 3.3.1 のように配置した。線源とシリカパウダーの間の鉛ブロックには穴が開いており、 $e^+$  が通過できるようになっている。

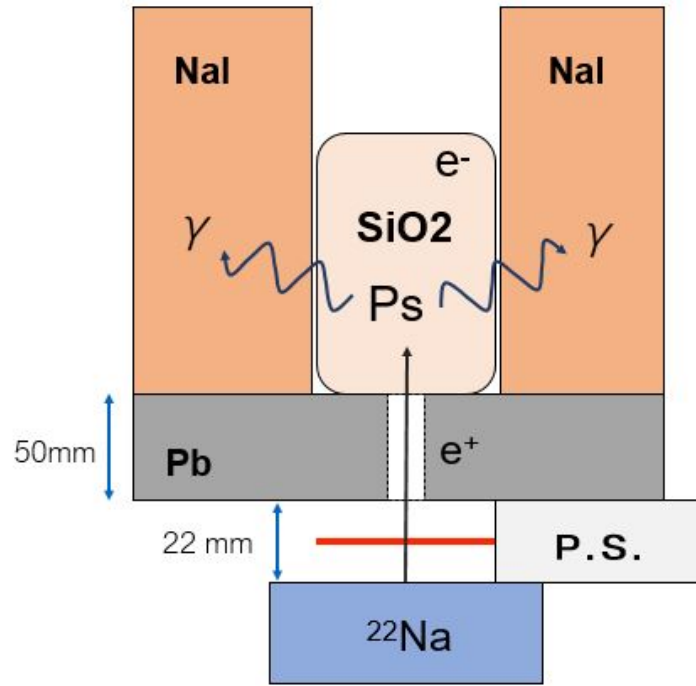
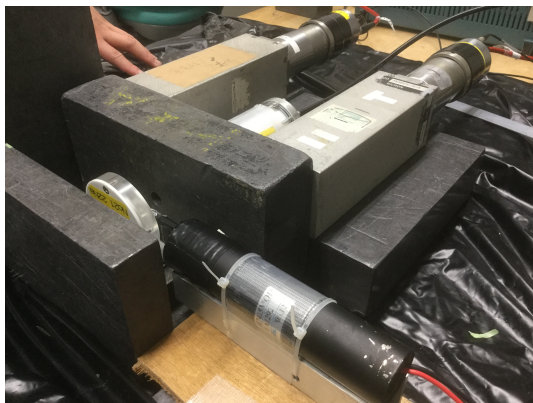


図 3.3.1: セットアップの模式図 (真上から見た図)



(a) 斜め上から見た配置



(b) 真上から見た配置

図 3.3.2: 実際のセットアップ

### 3.4 回路図

回路は図 3.4.3 のように組んだ。また信号の概念図を図 3.4.4 に示した。現象の時系列は、 $e^+$  が P.S. を通過してから Ps が形成・崩壊し、 $\gamma$  線が放出され NaI に検出される、という順になっている。ゆえに P.S. の信号の方が先に来るので、P.S. の信号を TDC の start に、NaI の信号を TDC の stop にするのが理想的である。しかしながら、P.S. を通過した  $e^+$  が必ずしも Ps を形成するとは限らない。これを考慮して、Ps が形成されなかったイベントを除く (より少なくする) ために次のような一連の操作を行う (図 3.4.4 参照)。P.S. の信号から gate を生成し gate と NaI の信号で coincidence をとり、これを TDC の start とする。なおここでは、gate 生成と同時に veto により引

き続き P.S. にやってくる  $e^+$  の信号を受け付けなくし、また Ps の崩壊イベントをより確実に見るために gate を開く時間は  $o$ -Ps の寿命より十分長い時間をとっている。この coincidence をとる操作により、TDC の start を決めるのは NaI の信号となったので、Ps の崩壊時間を計測するには P.S. の信号を TDC の stop としなければならない。しかし、このままでは時系列が逆転してしまうので、P.S. の信号を遅らせることでこれを解消する。この遅延時間は、崩壊時間が遅い Ps も測定できるように 945ns と多くとった。図 3.4.4 より Ps の崩壊時間は、遅延時間から TDC の値を引くことで求まる。

以下、使用した各種モジュール・機能についての説明を挙げる。

#### モジュールについての説明

- discriminator : 入力された信号が threshold という閾値を超えた時 NIM 信号を出力する。
- coincidence : 全ての出力端子に同時に信号が来た場合のみ NIM 信号を出力する。
- FAN : いずれかの入力端子に信号が来た場合に NIM 信号を出力する。
- gate generator : 信号が入力された時一定の時間幅の NIM 信号を出力する。
- TDC : start に信号が入ってから stop に信号が入るまでの時間に比例した値を出力する。
- ADC : gate が開いている間に来た信号の時間積分である電荷に比例した値を出力する。

#### 機能についての説明

- veto : gate の信号が来ている間は、次の信号が入力されないようにする。

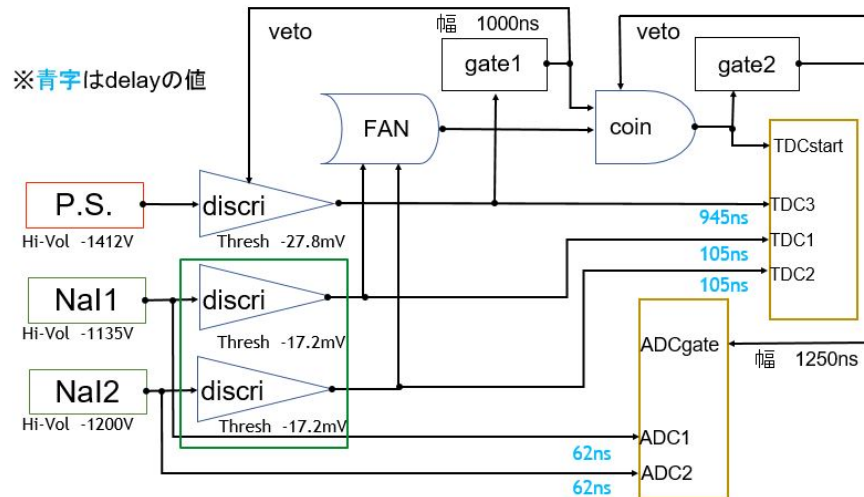


図 3.4.3: 回路図

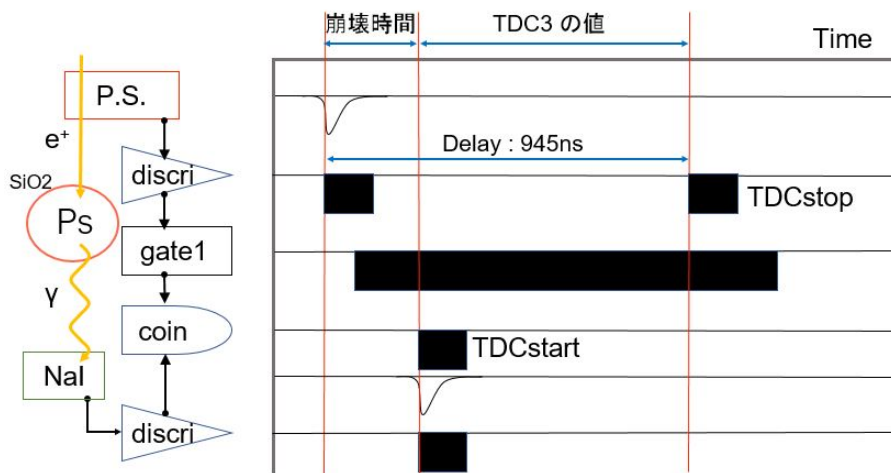


図 3.4.4: 信号の概念図

# 第4章 データ解析

## 4.1 生データ

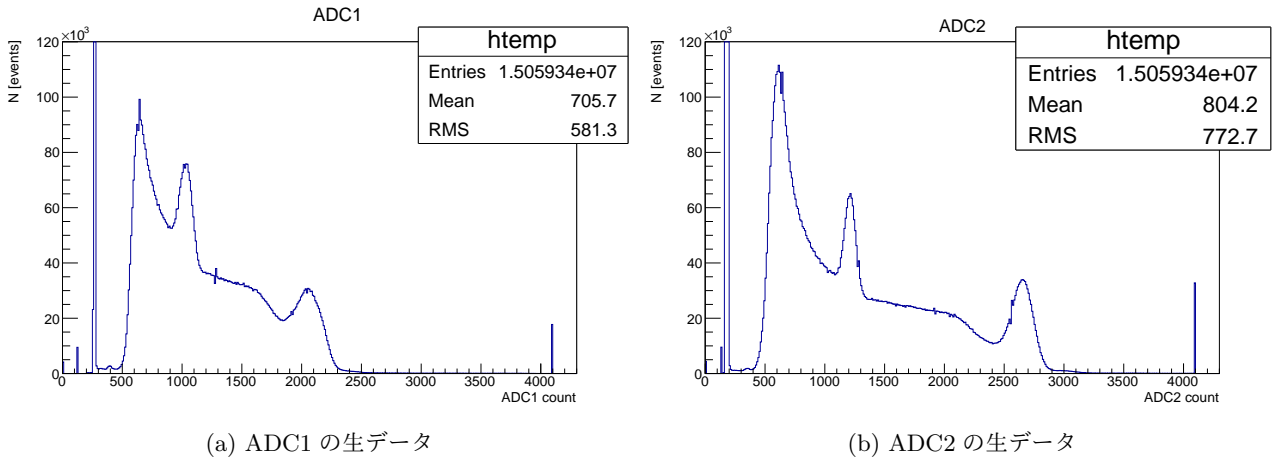


図 4.1.1: 各 ADC の生データ

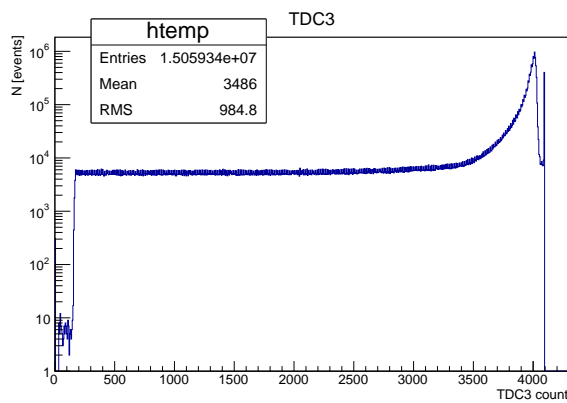
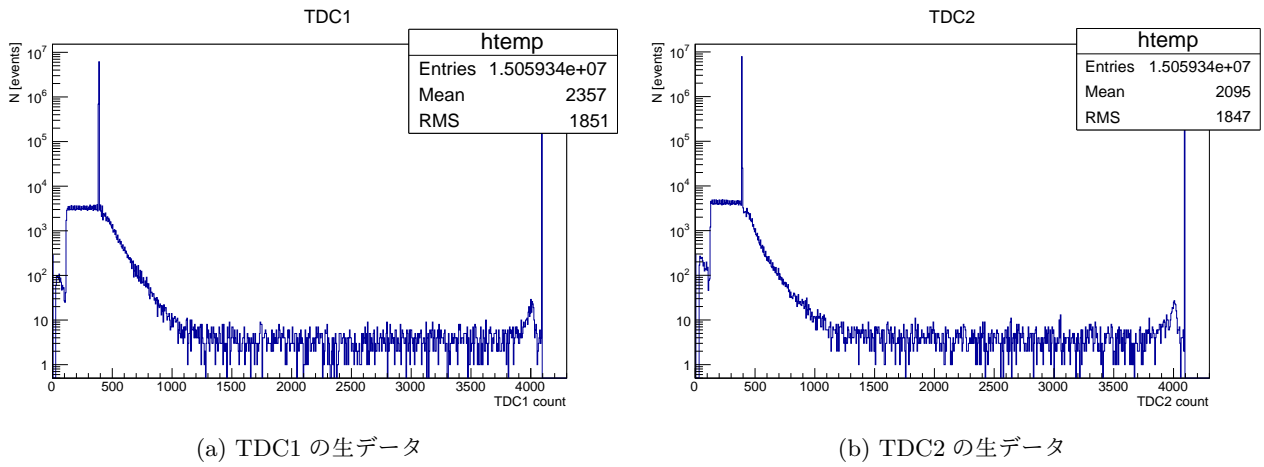


図 4.1.2: 各 TDC の生データ

最初に、本実験で実際に得られた生データのヒストグラムを記載する。図 4.1.1 は各 ADC1,2 の生データである。なお、ADC1,2 はそれぞれ NaI1,2 に対応している。この図より、511 keV、1275 keV のピーク、及びそれらのコンプトン散乱のピークが確認できる。また、どちらの ADC においても 300 count と 4000 count 付近に鋭いピークが確認できるが、これはそれぞれ暗電流と ADC の測定限界によるものである。

図 4.1.2 は各 TDC1,2,3 の生データである。TDC1,2 はそれぞれ NaI1,2 に対応している。TDC3 は P.S. に対応しており、Ps の寿命に直接的に関係している。また、TDC3 のデータで start と stop の時間順序の逆転が起こっていることに注意する。4000 count 付近にピークがあり、count が小さくなる方向に指数関数的に減衰している様子が見て取れるが、これが時間順序の逆転を表す。また、4200 count 付近でのデータの途切れは、“崩壊時間 = 0”に対応するものだと考えられる。

TDC1,2 のデータには、どちらも 400 count 付近に鋭いピークが確認できるが、これらは各 NaI が Ps 崩壊による  $\gamma$  線を検出したことを表している。このことを、図を用いて説明する。まず、P.S. において  $e^+$  を検出した時、その信号は coincidence の gate を開く。その後、Ps が生成、崩壊し、その  $\gamma$  線をいずれかの NaI、例えば NaI1 が検出するとする。この時、その信号は、gate が先に開いているため、coincidence を即座に通過し、TDC start に入る。一方 TDC1 には、回路依存の delay の後に信号が入る。以上の流れより、Ps の  $\gamma$  線を検出した場合の TDC1 count は一定の値を取ると考えられる。

以下の解析においては、各 NaI が Ps 崩壊における  $\gamma$  線を検出した時のデータを主に扱いたい。そこで、先ほどの議論より、TDC1,2 のデータを、その判定のための cut 条件として用いる。

表 4.1: 各 NaI が Ps 崩壊による  $\gamma$  線を検出した条件

	cut 条件
NaI1	$385 < t1 < 390$
NaI2	$414 < t2 < 418$

実際に使用した cut 条件は上の表 4.1 のとおりである。

## 4.2 Calibration

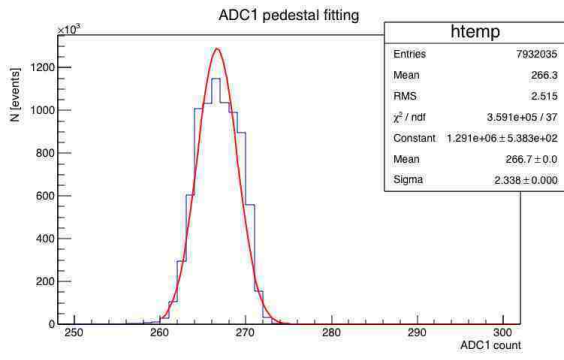
次に、calibration と呼ばれる操作を行う。この操作は、測定された ADC count、及び TDC count の値を、実際の  $\gamma$  線のエネルギースケール、及びタイムスケールに変換する操作である。

### 4.2.1 ADC Calibration

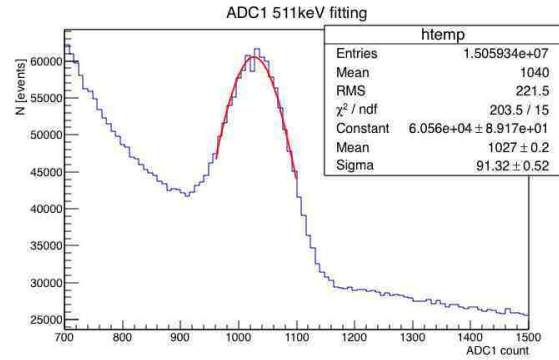
まずは、ADC の calibration を行う。ADC は、入力されたアナログ信号のエネルギーに応じて 0 から 4095 までの整数値を返す機器である。ここで、先ほど図 4.1.1 で確認したように、信号の入力がなくても、暗電流等の影響で、ほぼ一定の pedestal と呼ばれる値を返すことが特徴としてあげられる。calibration を行うために、まず、 $\gamma$  線のエネルギーと ADC count の相関が直線的であると仮定する。また、図 4.1.1 において、ADC1 のデータでは、1100 count 付近のピークが 511 keV に、2000 count 付近のピークが 1275 keV に対応すると仮定する。同様に、ADC2 のデータでは、1200 count 付近のピークが 511 keV に、2700 count 付近のピークが 1275 keV に対応すると仮定する。さらに、pedestal をとる count を 0 keV と考える。この仮定のもとで、図 4.2.3、図 4.2.4 のように Gaussian fitting を行った結果、各 ADC に対する 0 keV、511 keV、1275 ke の値は表 4.2 のようになった。

表 4.2: 各 ADC count とエネルギーの関係

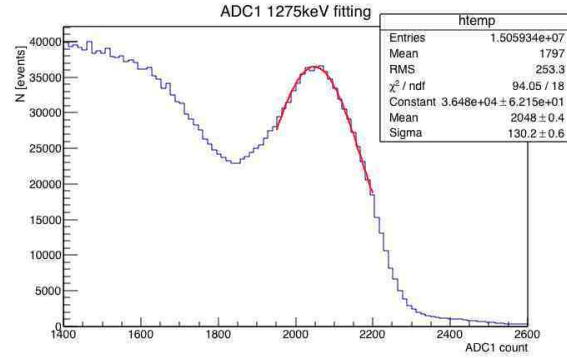
	0 keV	511 keV	1275 keV
ADC1	266.7	1027	2048
ADC1	181.0	1208	2649



(a) ADC1 の pedestal fitting

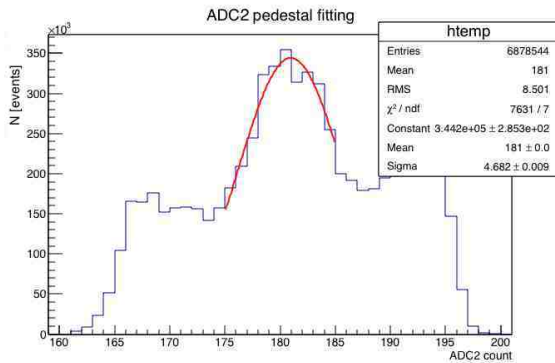


(b) ADC1 の 511 keV fitting

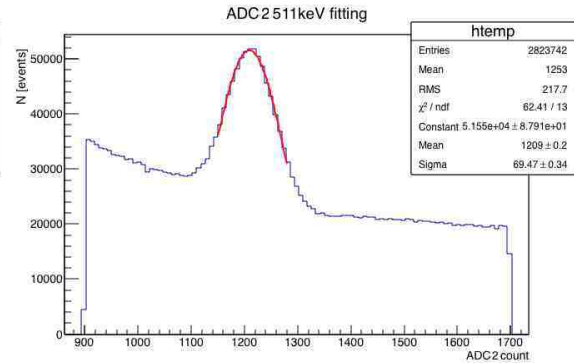


(c) ADC1 の 1275 keV fitting

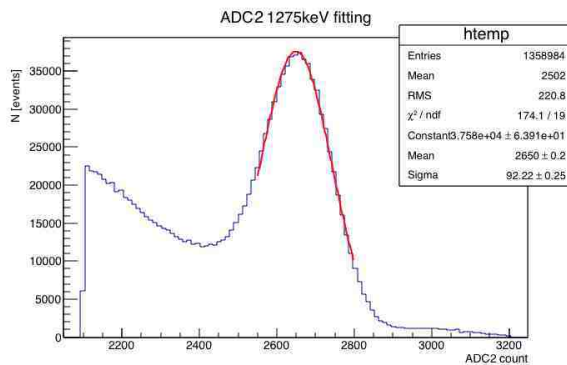
図 4.2.3: ADC1 calibration fitting



(a) ADC2 の pedestal fitting



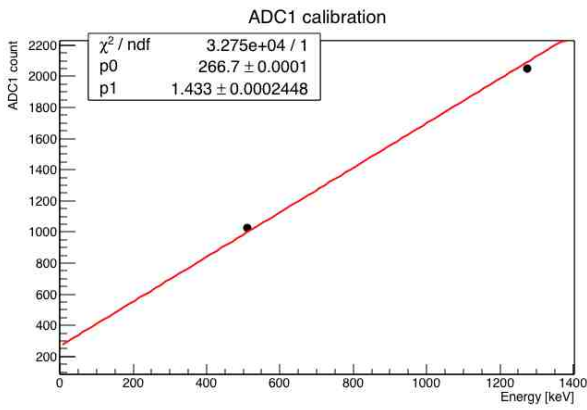
(b) ADC2 の 511 keV fitting



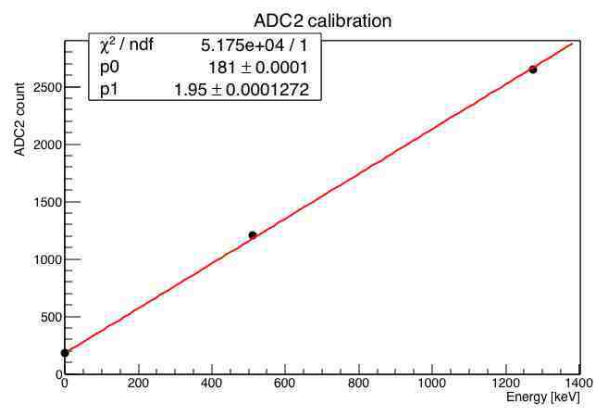
(c) ADC2 の 1275 keV fitting

図 4.2.4: ADC2 calibration fitting





(a) ADC1 の calibration



(b) ADC2 の calibration

図 4.2.5: ADC calibration

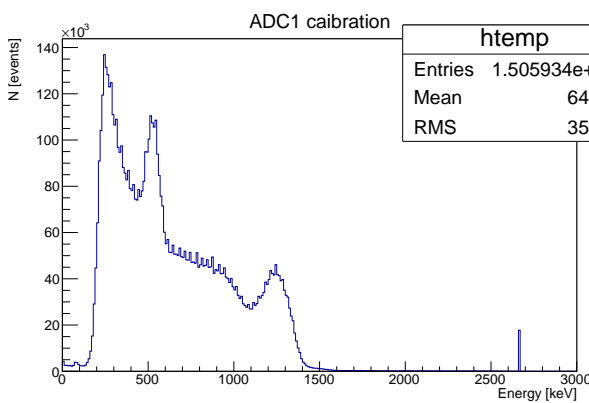
この結果を図 4.2.5 のように plot して直線 fitting したところ、以下の式が得られた:

$$E_1 \text{ [keV]} = (a_1 - 266.7)/1.43 \quad (4.1a)$$

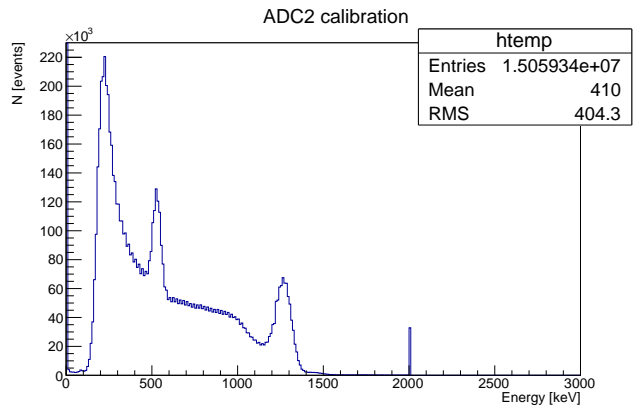
$$E_2 \text{ [keV]} = (a_2 - 181.0)/1.95 \quad (4.1b)$$

ここで、 $E_1$ 、 $E_2$  はそれぞれ NaI1、NaI2 の Energy [keV] を表す。

この (4.1a)(4.1b) 式で、ADC count を Energy [keV] に変換した後のヒストグラムは、次の図 4.2.6 のようになる。



(a)  $E_1$  [keV] のデータ



(b)  $E_2$  [keV] のデータ

図 4.2.6: Calibration 後のデータ

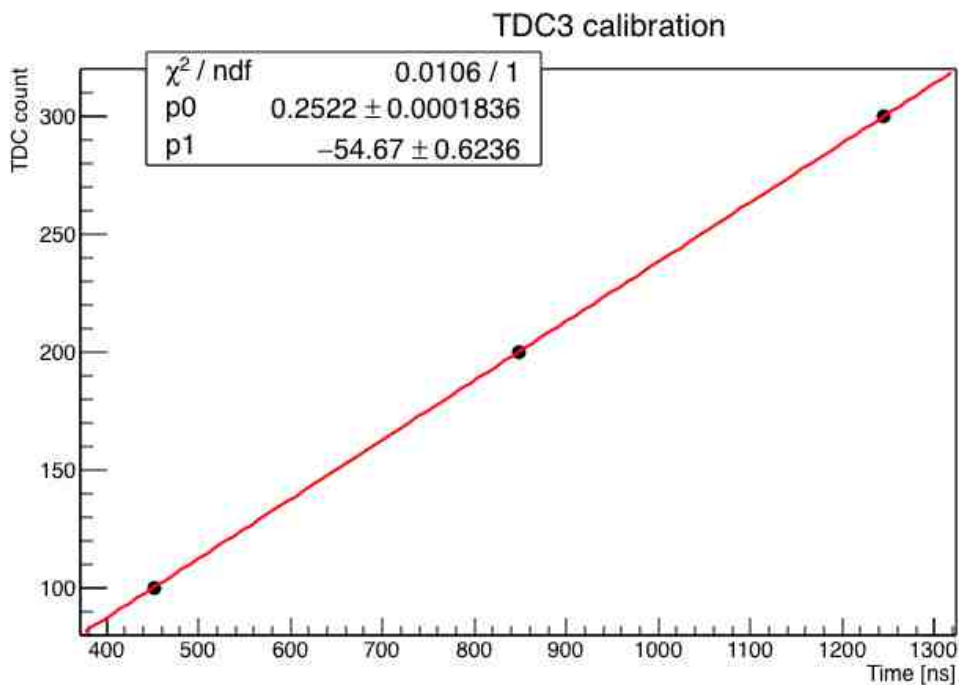
## 4.2.2 TDC Calibration

続いて、TDC の calibration を行う。TDC とは、start に信号が入力されてから各 ch に信号が入力されるまでの時間に応じて 0 から 4095 の値を返す機器である。ADC と同様、時間と TDC count の相関が直線的であると仮定するが、Ps の寿命としては反応の減衰時間が問題となり、時間原点は重要ではないので、定数項は無視して考える。また、前述の通り、TDC1,2 は cut 条件としてのみ用いるため、実際に calibration を行うのは、TDC3 のみである。TDC3 の calibration を行うため、まず、本実験とは別に、start に入れる信号に 100 ns, 200 ns, 300 ns の delay をかけた信号を測定した。この delay は、オシロスコープで信号を直接確認し調節を行った。

その結果が以下の表 4.3 である。

表 4.3: TDC3 count と時間の関係

	100 ns	200 ns	300 ns
TDC3	451	848	1244



(a) TDC3 の calibration

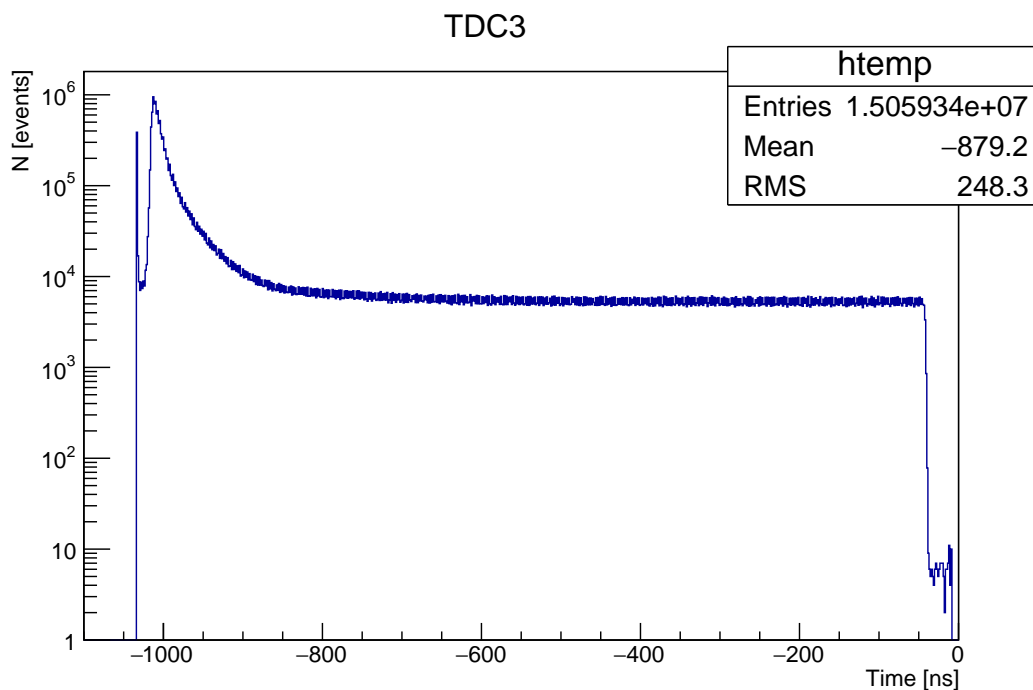
図 4.2.7: TDC calibration

この結果を図 4.2.7 のようにプロットして直線 fitting することで、次の式が得られた。

$$T_{ps} [\text{ns}] = -0.2522 \times t_1 \quad (4.2)$$

$T_{ps}$  は時間の変数とする。この式では、係数に  $-1$  を乗じた。これは、セットアップにおける時間順序の逆転を修正するためのものである。さらに、定数項は寿命指定について影響しないため無視した。

この (4.2) 式で、TDC count を Time [ns] に変換した後のヒストグラムは、次の図 4.2.8 のようになる。



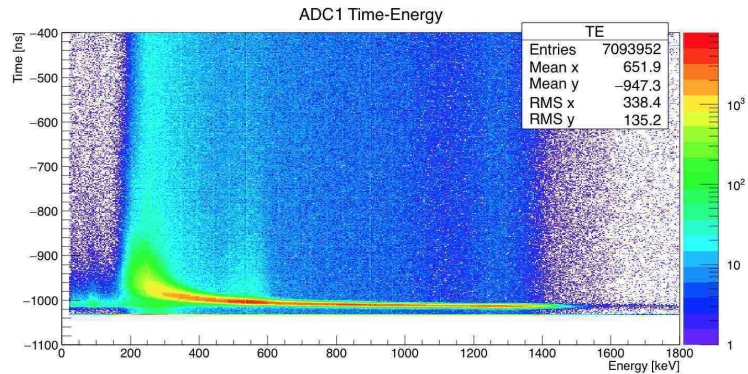
(a)  $T_{ps}$  [ns] のデータ

図 4.2.8: Calibration 後のデータ

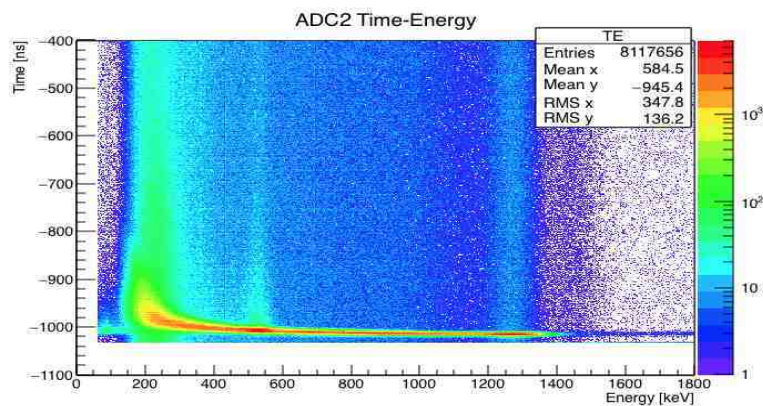
## 4.3 TQ補正

### 4.3.1 TQ補正とは

Calibrationの結果求められた  $T_{ps}$  [ns] と  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) [keV] で、各 NaI の2次元プロットを作成すると、次のようになった。



(a) NaI1 の Time-Energy 分布



(b) NaI2 の Time-Energy 分布

図 4.3.9: Time-Energy 分布

図 4.3.9 を見ると、実験の原理で考えたように、本来ほぼ同時刻に来ているはずの p-Ps 崩壊による信号 (511 keV の  $\gamma$  線及びその Compton 散乱) が、低エネルギーになるほどやや遅れて届いていることが分かる。これは、discriminator の特性によるものである。図 4.3.10 を用いて説明する。discriminator は、アナログ信号を、その信号が threshold を超えた時にデジタル信号へと変換するものであるが、アナログ信号の大きさ、すなわち  $\gamma$  線の全エネルギーの大きさによって、threshold を超えるまでの遅延時間に差が生まれる。これが、前述の時間の“ずれ”の正体である。この“ずれ”を修正するため、TQ 補正というものを導入する。

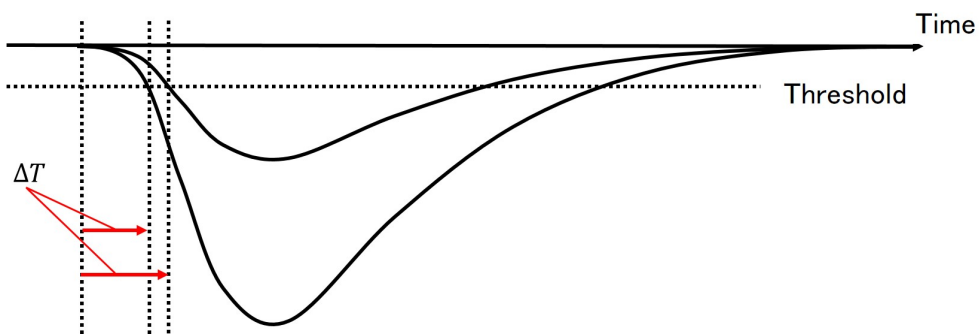


図 4.3.10: TQ 補正の概念図

### 4.3.2 TQ 補正の方法

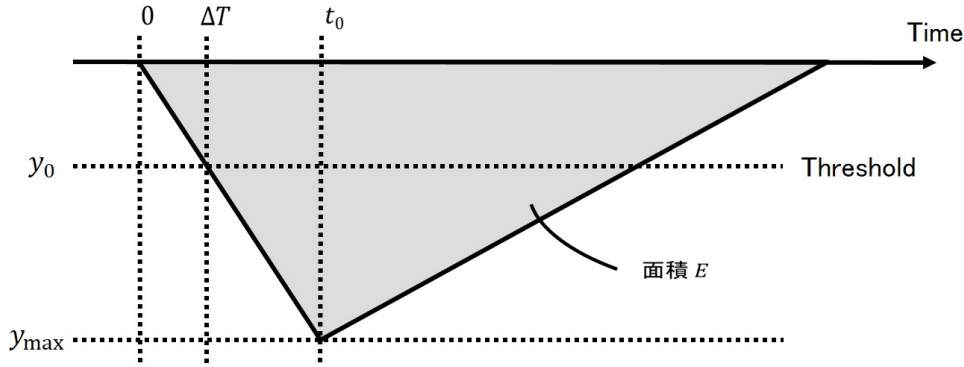


図 4.3.11: アナログ信号の三角形近似

さて、TQ 補正を行うためには、 $\gamma$  線のエネルギー  $E$  に対する遅延時間  $\Delta T(E)$  の関数形を求める必要がある。そこで、まずアナログ信号の波形を三角形に近似し、関数の概形を考えてみる。仮定として、信号が peak に達するまでの時間  $t_0$  が  $E$  に依らない定数であるとおく。図 4.3.11 のように、信号の高さを  $y_{\max}$ 、threshold を  $y_0$  とすると、遅延時間  $\Delta T$  は、

$$\Delta T = \frac{y_0 t_0}{y_{\max}} \quad (4.3)$$

とかける。

仮定より  $y_0 t_0 = \text{const.}$  であり、また、 $\gamma$  線のエネルギーすなわち三角形の面積  $E$  は  $y_{\max}$  に比例することから、

$$\Delta T(E) \propto \frac{1}{E} \quad (4.4)$$

が成り立つ。

この近似は、先ほどアナログ信号の形を三角形に近似した結果であるが、実際の信号は曲線であるため、パラメータ  $p_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) を用いて

$$\Delta T(E)[\text{ns}] = \frac{p_0}{(E[\text{keV}] - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (4.5)$$

となった式 (4.5) を TQ 補正関数とする。パラメータの値は実際の測定データを fitting することにより決定する。具体的な TQ 補正の手順を、NaI1 を例に以下に記す：

1.  $E_1$  が  $220 \text{ keV} \pm 5 \text{ keV}$  の範囲にある  $T_{ps}$  に関して、cut 条件を加えながら、図 4.3.12 のようなヒストグラムを描く。
2. このヒストグラムを Gaussian fitting し、その mean 値を求める。
3. この mean 値を、 $220 \text{ keV}$  における  $\Delta T$  の値とする。
4. (1) (3) までの手順を、 $460 \text{ keV}$  まで  $E_1$  を  $20 \text{ keV}$  ずつ動かしながら繰り返す。
5. 求めた  $\Delta T$  を plot し、TQ 補正関数 (4.5) による fitting でパラメータ  $p_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) を決定する。
6. 各エネルギー  $E_1$  に対する  $T_{ps}$  から  $\Delta T(E)$  だけ引いたものを新たな  $T_{ps}$  と再定義する。

NaI2 でも、以上の手順を  $200 \text{ keV}$  から  $440 \text{ keV}$  まで  $E_2$  を動かしながら行った。

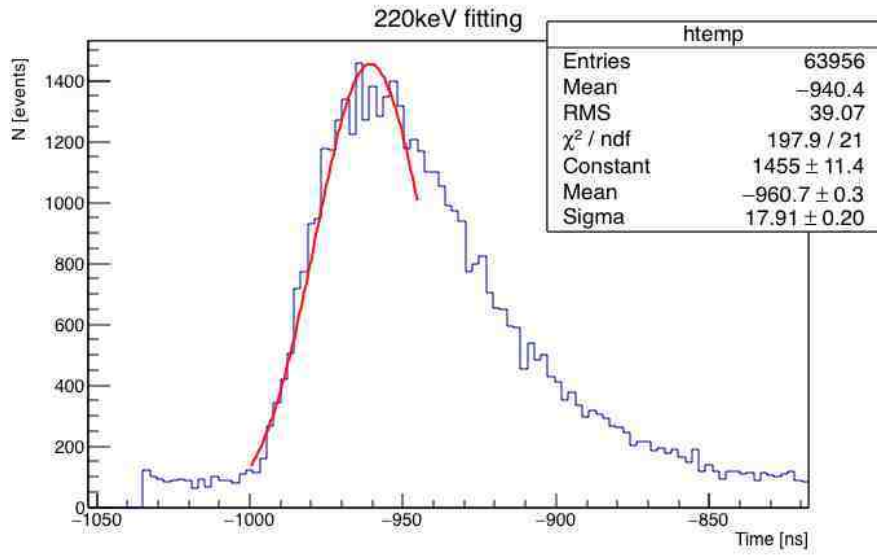


図 4.3.12: NaI1 220 keV での TQ 補正の様子

### 4.3.3 TQ 補正の様子

図 4.3.13、図 4.3.14 は、それぞれ NaI1、2 に関する実際の TQ 補正の様子である。

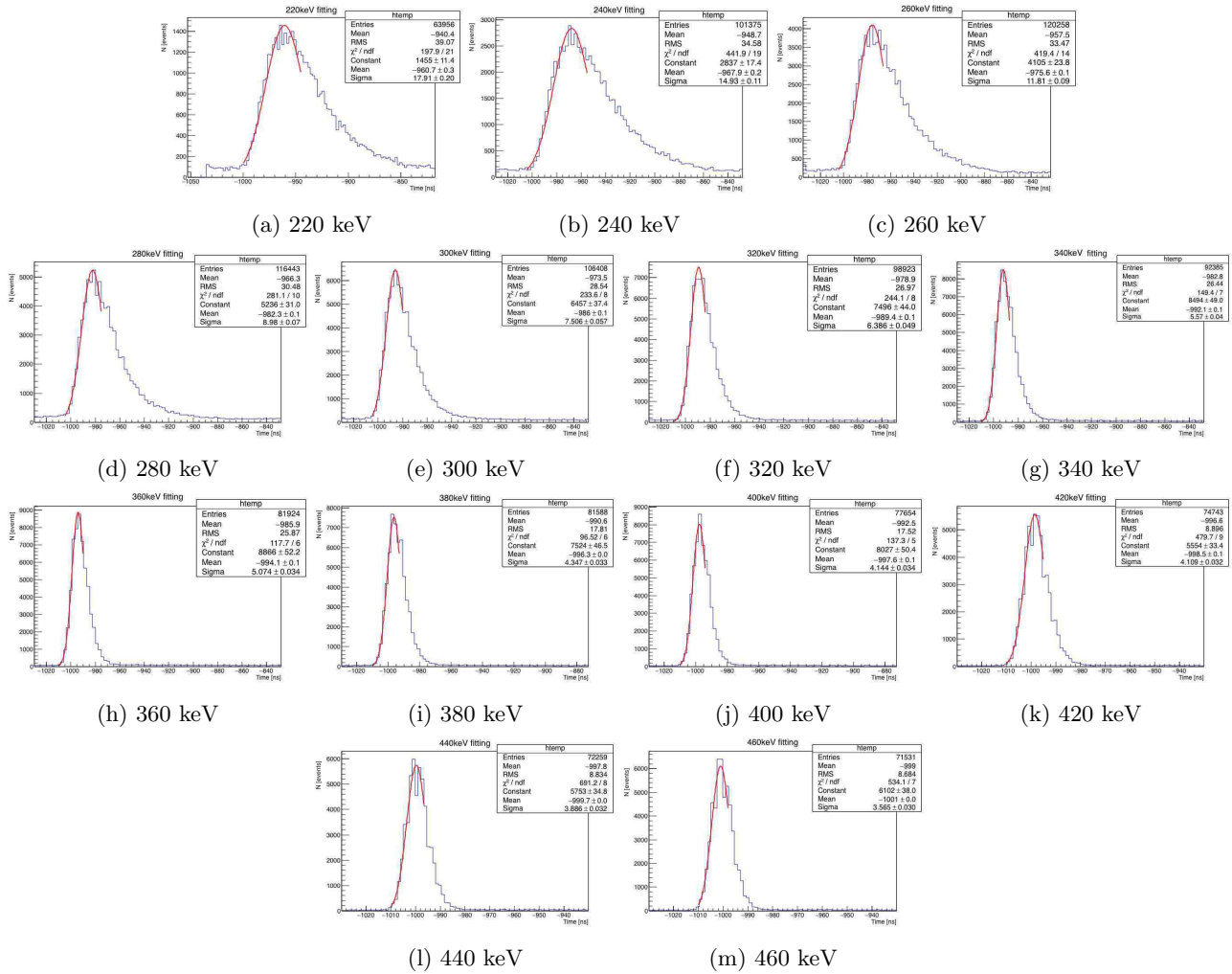


図 4.3.13: NaI1 に対する TQ 補正の様子

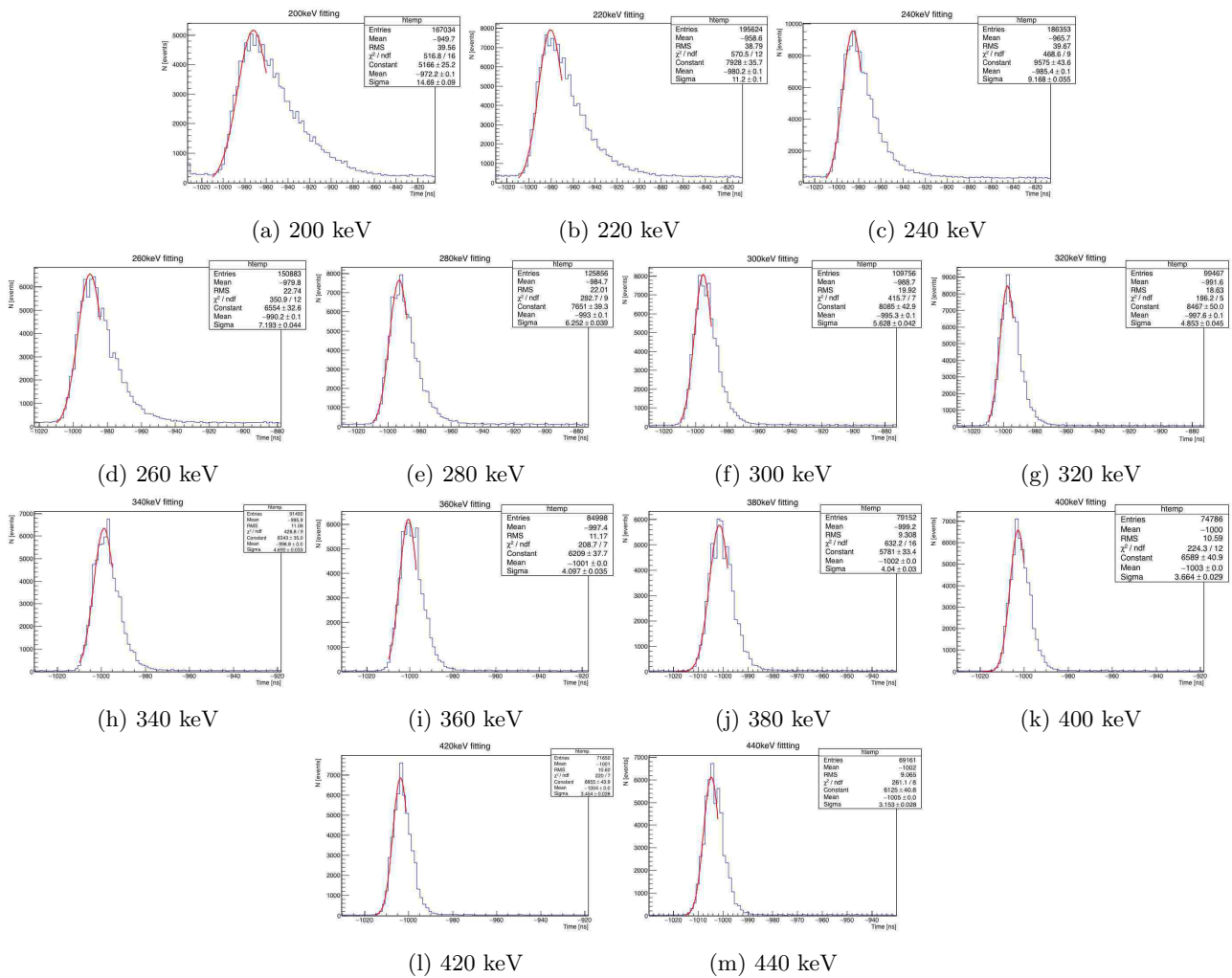


図 4.3.14: NaI2 に対する TQ 補正の様子

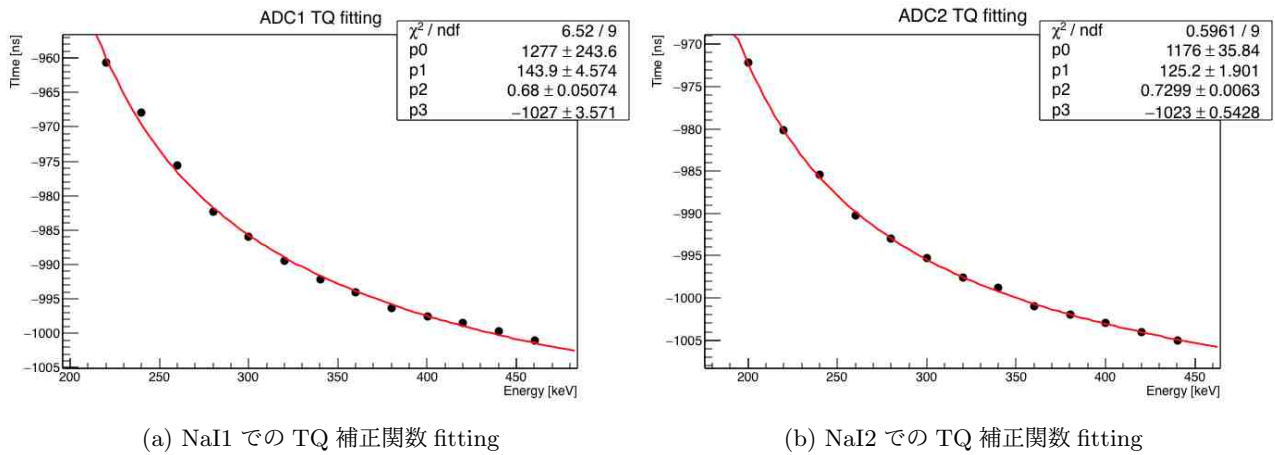


図 4.3.15: NaI に対する TQ 補正 fitting

図 4.3.15 は、求めた mean 値を TQ 補正関数で fitting したグラフである。その結果、TQ 補正関数 (4.5) のパラメータ  $p_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) は以下のように求まった:

表 4.4: TQ 補正関数のパラメータ

	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
NaI1	1277	143.9	0.68	-1027
NaI2	1176	125.2	0.7299	-1023

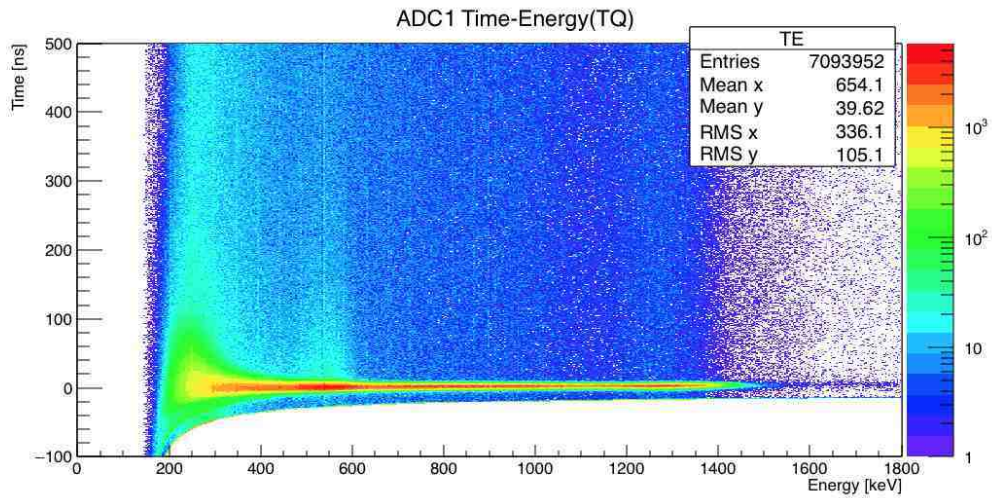


図 4.3.16: NaI1 に対する TQ 補正後の Time-Energy 分布

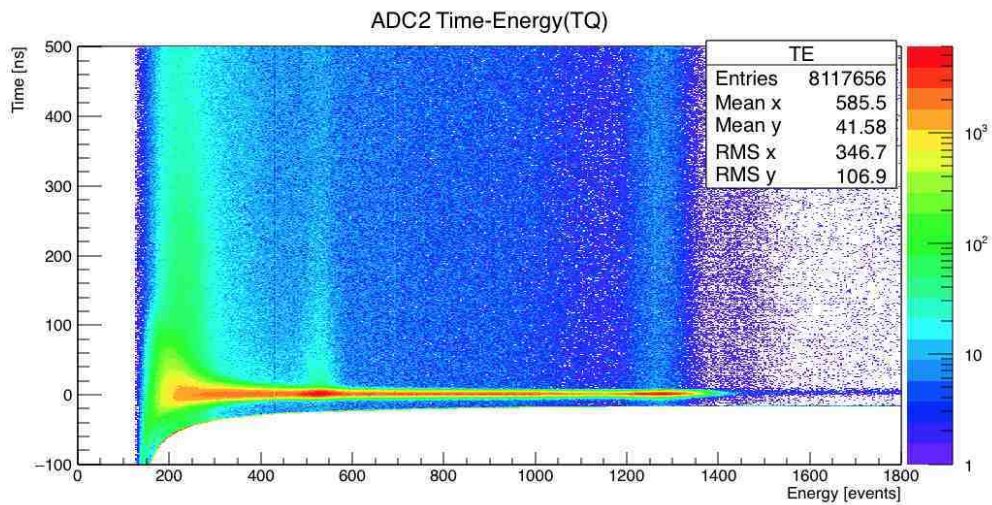
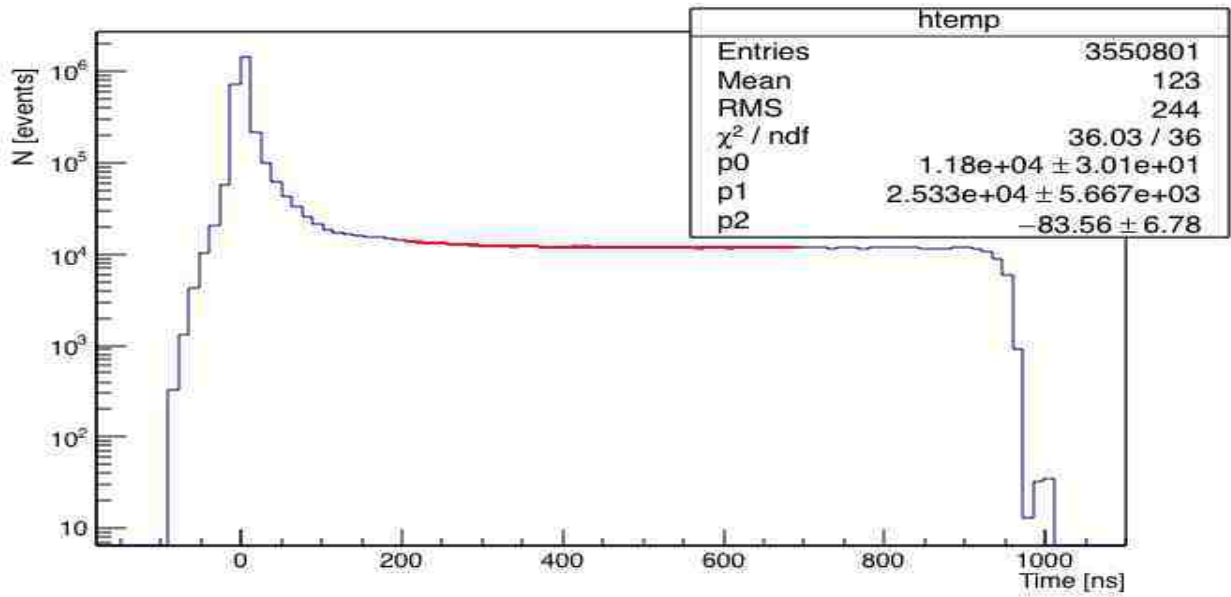


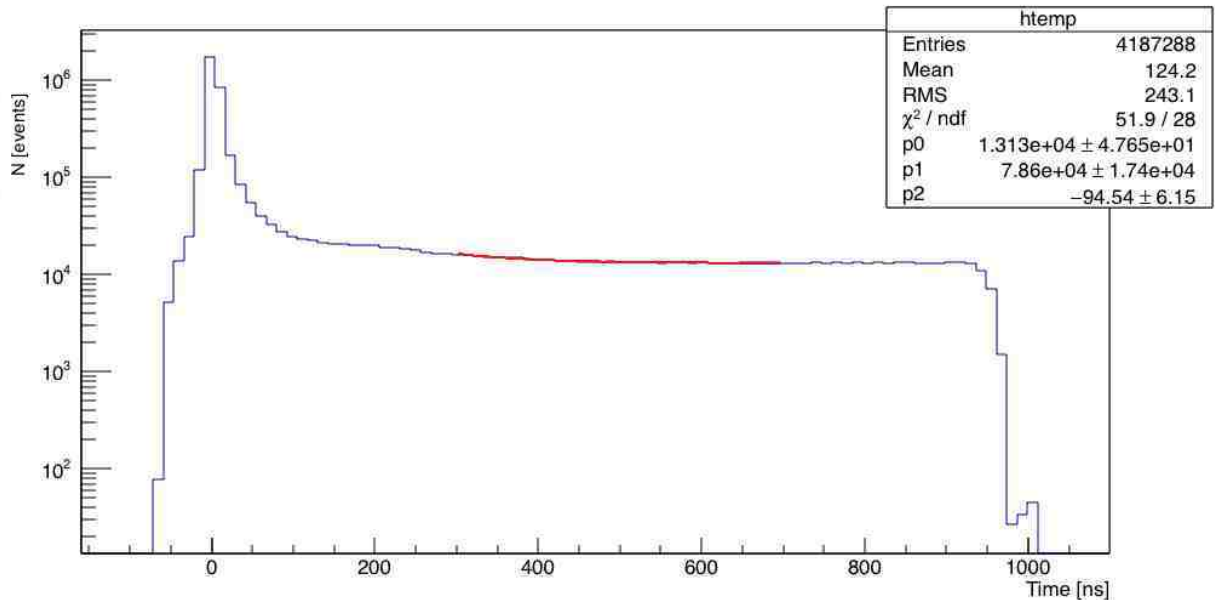
図 4.3.17: NaI2 に対する TQ 補正後の Time-Energy 分布

TQ 補正後の NaI1、2 に対する Time-Energy 分布は、それぞれ図 4.3.16、図 4.3.17 のようになった。これを見ると、確かに時間の“ずれ”が取り除かれていることが分かる。

#### 4.3.4 TQ 補正後の寿命



(a) NaI1 の様子



(b) NaI2 の様子

図 4.3.18: TQ 補正後の o-Ps の寿命 fitting の様子

TQ 補正後の o-Ps の寿命を、関数

$$p_0 \exp\left(-\frac{\text{Time [ns]}}{p_1}\right) + p_2 \quad (4.6)$$

を用いて図 4.3.18 のように fitting した。ここで、パラメータ  $p_1$  が求めたい寿命であると考えられる。その結果を表 4.5 に記す。

表 4.5: TQ 補正後の o-Ps の寿命

	寿命 [ns]
NaI1	83.6
NaI2	96.0



## 4.4 pick-off 反応

o-Ps は周囲の物質中の電子と衝突するなどして、o-Ps の寿命より早く  $2\gamma$  に崩壊することがある。この反応を pick-off 反応という。得られたデータの中には、これらの  $2\gamma$  も観測されているので、それを考慮して寿命を求めていかなくてはならない。

## 4.5 具体的な補正方法

崩壊幅  $\Gamma$  は、時刻  $t$  における粒子の個数を  $N(t)$  とすると、

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \Gamma N(t) \quad (4.7)$$

で定義される。そして、崩壊寿命  $\tau$  は崩壊幅の逆数として定義される。実験で測定された崩壊幅を  $\Gamma_{obs}$ 、p-Ps の  $3\gamma$  への崩壊幅を  $\Gamma_{3\gamma}$ 、 $2\gamma$  への崩壊幅を  $\Gamma_{2\gamma}$  とすると

$$\Gamma_{obs} = \Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma} \quad (4.8)$$

である。いま関数  $f(t)$  を

$$f(t) = \frac{\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} \quad (4.9)$$

と定義すると、o-Ps の  $3\gamma$  への崩壊寿命を  $\tau_{3\gamma}$  として

$$\Gamma_{obs} = \Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma} = \Gamma_{3\gamma}(1 + f(t)) = \frac{1 + f(t)}{\tau_{3\gamma}} \quad (4.10)$$

## 4.6 fitting 関数の導出

崩壊幅の定義より、時刻  $t$  における o-Ps の数を  $N(t)$  とすると、

$$-\frac{dN(t)}{dt} = N(t) \Gamma_{obs} = N(t) \frac{1 + f(t)}{\tau_{3\gamma}} \quad (4.11)$$

$f(t)$  の原始関数を  $F(t)$  として、これを解くと

$$g(t) = \frac{dN(t)}{dt} = q_0 \left( -\frac{1 + f(t)}{\tau_{3\gamma}} \right) \exp\left( -\frac{t + F(t)}{\tau_{3\gamma}} \right) \quad (4.12)$$

となる。これを関数  $g(t)$  とした。この  $g(t)$  を fitting 関数として  $\tau_{3\gamma}$  にあたる係数を求めれば、pick-off 反応分の影響を考慮した寿命を求めることができる。つまり  $f(t)$  を求めればよいということである。

## 4.7 $f(t)$ の導出

時刻  $t$  での o-Ps の  $2\gamma$  への崩壊の検出数と、 $3\gamma$  への直接の崩壊の検出数を、それぞれ  $\Delta N_{2\gamma}(t)$ 、 $\Delta N_{3\gamma}(t)$  とすると

$$\Delta N_{2\gamma}(t) = N(t) \Gamma_{2\gamma} \quad (4.13)$$

$$\Delta N_{3\gamma}(t) = N(t) \Gamma_{3\gamma} \quad (4.14)$$

と表される。 $\Delta N_{2\gamma}(t)$  を  $\Delta N_{3\gamma}(t)$  で割ると

$$f(t) = \frac{\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} = \frac{\Delta N_{2\gamma}(t)}{\Delta N_{3\gamma}(t)} \quad (4.15)$$

となる。

各時刻における  $\Delta N_{2\gamma}(t)$  や  $\Delta N_{3\gamma}(t)$  をプロットすることができれば、関数  $f(t)$  の概形がわかる。

## 4.8 $\Delta N_2 \gamma(t)$ の導出

得られたデータの中には、今観測したい o-Ps の 3  $\gamma$  以外のイベントも含まれている。

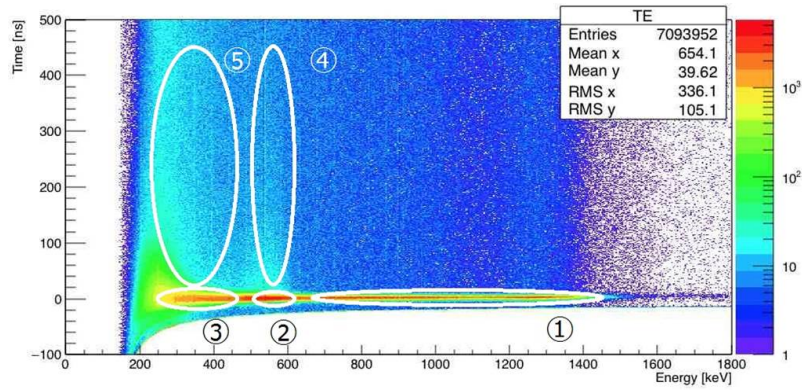


図 4.8.19: 反応の分類

- ①1275keV の  $\gamma$  線のコンプトン散乱
- ②p-Ps の 511keV の  $\gamma$  線の光電効果
- ③p-Ps の 511keV の  $\gamma$  線のコンプトン散乱
- ④pick-off 反応による  $\gamma$  線の光電効果
- ⑤o-Ps の  $\gamma$  線の反応 + pick-off 反応による  $\gamma$  線のコンプトン散乱

511keV の  $\gamma$  線の光電効果のイベント数とコンプトン散乱のイベント数の分布が、各時刻において等しいと仮定する

o-Ps の崩壊の影響が無視できる  $t = 0ns$  を基準として、各時刻の 511keV のイベント数を比較することによって、その時刻における  $\Delta N_{2\gamma}$  と  $\Delta N_{3\gamma}(t)$  を求める。

下はそのイメージ図である。

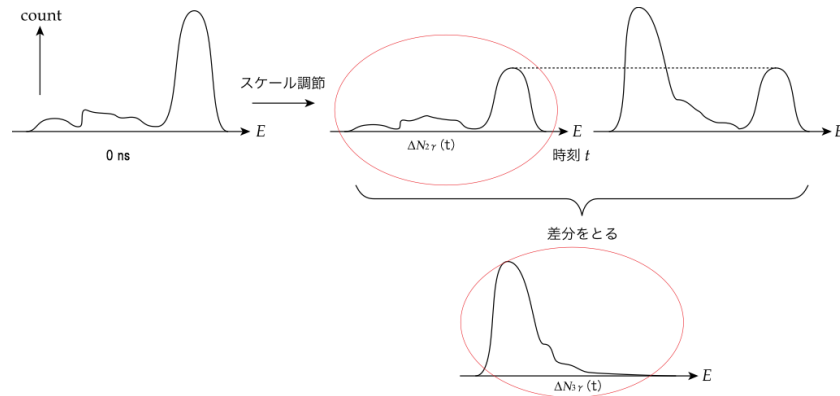


図 4.8.20:  $\Delta N_{2\gamma}(t)$  の導出の概念図

## 4.9 $f(t)$ 導出の式

時刻  $t$  での 511keV ピークのイベント数を  $y_{peak}(t)$ 、イベントの総数を  $S(t)$  とすると、

$$\Delta N_{2\gamma}(t) = \frac{y_{peak}(t)}{y_{peak}(0)} S(0) \quad (4.16)$$

$$S(t) = \Delta N_{2\gamma}(t) + \Delta N_{3\gamma}(t) \quad (4.17)$$

$$f(t) = \frac{\Delta N_{2\gamma}(t)}{\Delta N_{3\gamma}(t)} = \frac{\Delta N_{2\gamma}(t)}{S(t) - \Delta N_{2\gamma}(t)} = \frac{y_{peak}(t)S(0)}{y_{peak}(0)S(t) - y_{peak}(t)S(0)} \quad (4.18)$$

となる。これを測定したデータから実際に値を計算し、プロットしていく

## 4.10 プロットの手順

a2 に対し 75ns から 300ns までの 25ns おきの各時刻において、 $\pm 5ns$  の範囲にあるようなイベントで、測定されたエネルギーが 250keV から 600keV の範囲にあるようなイベントを抽出する。

抽出したイベントの総数を見ることによって  $S(t)$  が、抽出したイベントのヒストグラムに対し、511keV のピークを見ることによって  $y_{peak}(t)$  が求まる。

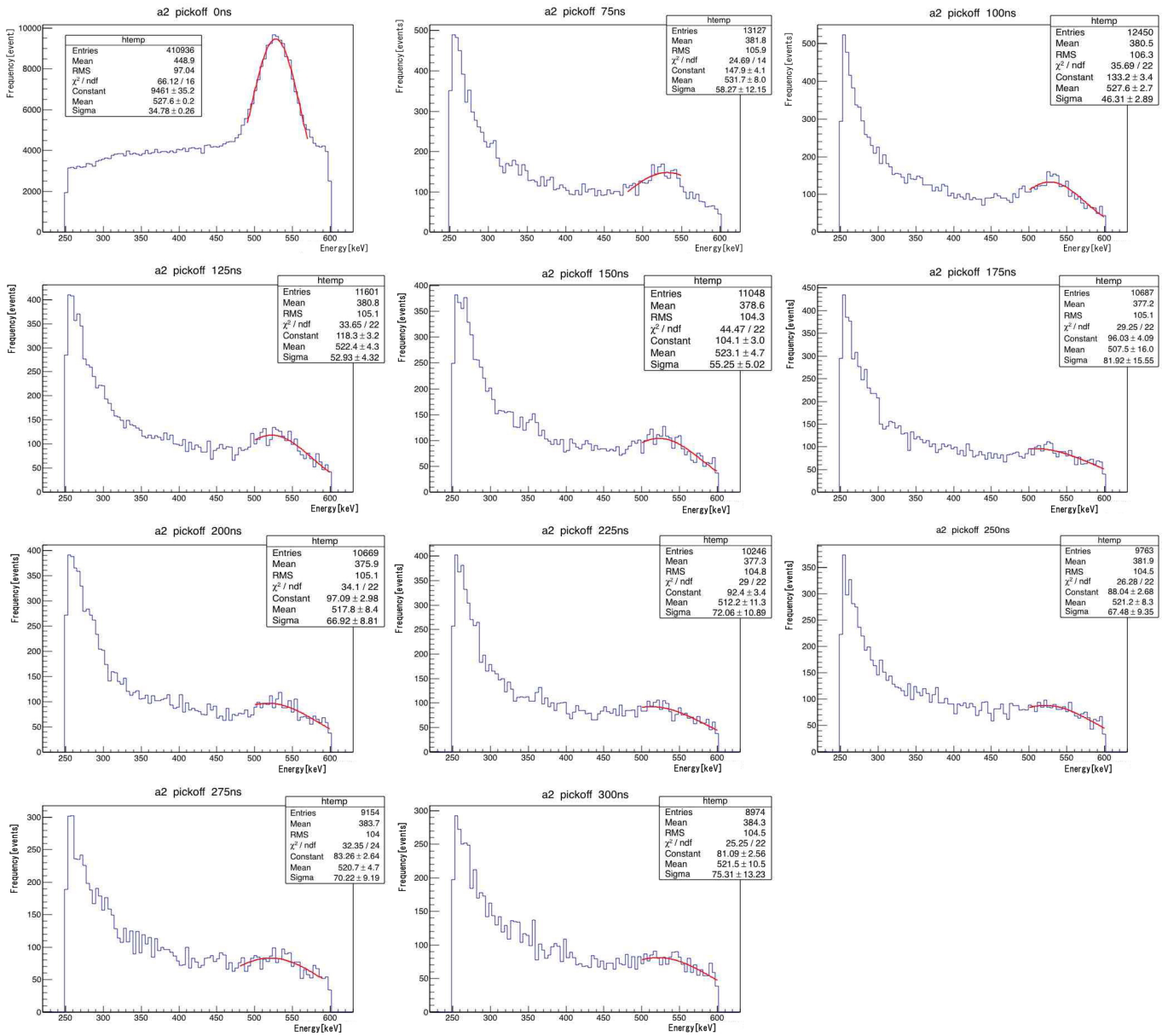


図 4.10.21: 各時刻での NaI2 のエネルギー分布

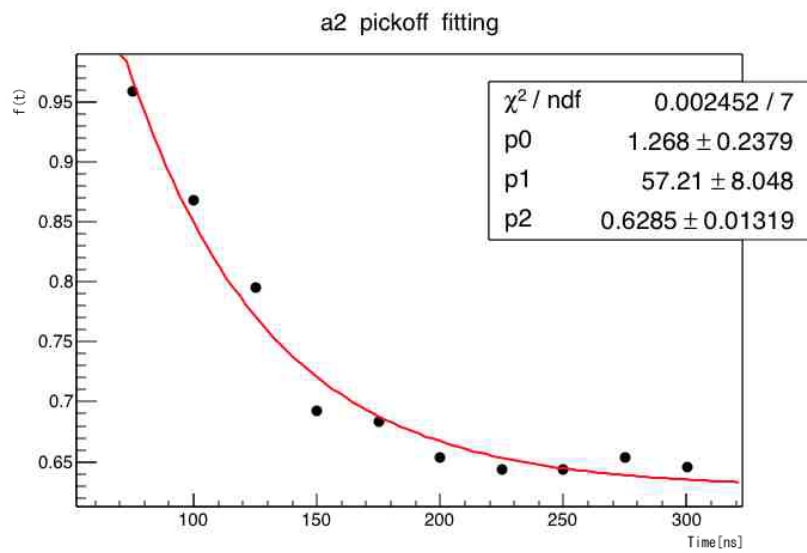


図 4.10.22:  $f(t)$  のグラフへのプロット

上の図は実際に  $f(t)$  をプロットした図である。Fitting する関数として

$$f(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 \quad (4.19)$$

を採用した。

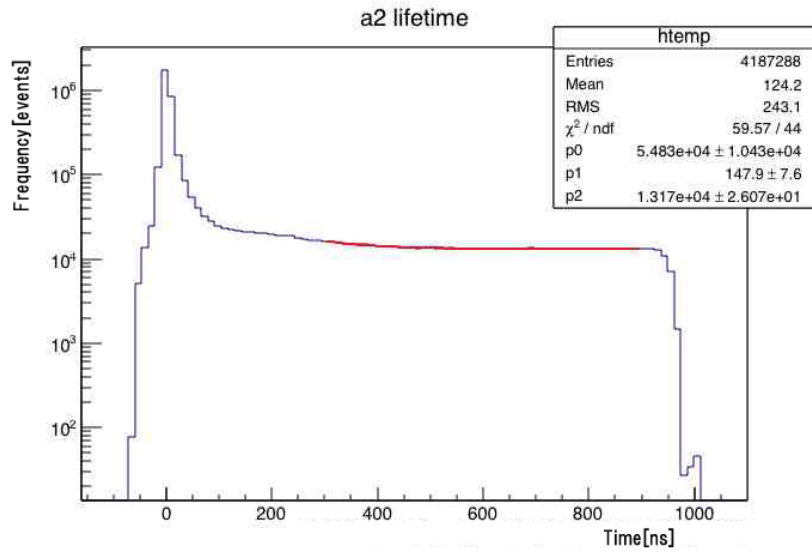


図 4.10.23: pick-off 補正後の寿命 fitting

$$g(t) = q_0 \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \exp\left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\}\right] + q_2 \quad (4.20)$$

で fitting した。寿命は

$$175.2 \pm 5.4[\text{ns}] \quad (4.21)$$

である。

# 第5章 誤差の評価

## 5.1 誤差の分類

フィッティングで寿命を求めた際に ROOT が出力した誤差  $\pm 5.4$  は統計誤差であるとする。さらに以下の3つを系統誤差であるとし、この章で評価する。

- TDC3 calibration 由来の誤差
- TQ 補正関数由来の誤差
- pick-off 補正関数由来の誤差

## 5.2 TDC3 calibration における誤差の評価

TDC3 の calibration における誤差は寿命に影響するため、ここで考慮しておく。誤差付きの calibration 関数は以下の通りである：

$$\text{Time[ns]} = -(0.2522 \pm 0.0001836) \times t_{\text{ps}} \quad (5.1)$$

誤差の上端と下端をとって計算した o-Pos の寿命をそれぞれ  $\tau_+, \tau_-$  とおき、

$$\sigma_{\text{calib}} := \max\{|\tau_+ - \tau|, |\tau_- - \tau|\} \quad (5.2)$$

と定義する。このとき表 5.1 に示す結果を得る。

表 5.1: TDC3 calibration における誤差を考慮した寿命

	$\tau_+$ [ns]	$\tau$ [ns]	$\tau_-$ [ns]	$\sigma_{\text{calib}}$
NaI2	177.6	175.2	176.6	2.4

## 5.3 TQ 補正関数の誤差の評価

すでに示したように、我々の解析では TQ 補正関数として

$$\Delta T(E)[\text{ns}] = \frac{p_0}{(E[\text{keV}] - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (5.3)$$

を用いた。 $p_0, p_1, p_2, p_3$  の各パラメータはフィッティングにより決定するため、そこにも誤差が生ずる。この誤差の寿命への影響を評価する。 $p_i$  の誤差を  $\delta p_i$  とおくと、フィッティングの結果は表 5.2 のようになった。

表 5.2: TQ 補正関数のパラメータおよびその誤差

	$p_0$	$\delta p_0$	$p_1$	$\delta p_1$	$p_2$	$\delta p_2$	$p_3$	$\delta p_3$
NaI2	1176	35.84	125.2	1.901	0.7299	0.0063	-1023	0.5428

ここで各パラメーターが独立であると仮定すると<sup>1</sup>、誤差伝播則から TQ 補正関数自体の誤差は

$$\begin{aligned}\delta T(E) &= \sqrt{\sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial p_i} \delta p_i \right)^2} \\ &= \frac{1}{(E - p_1)^{p_2}} \sqrt{(\delta p_0)^2 + \left( \frac{p_0 p_2}{E - p_1} \delta p_1 \right)^2 + (p_0 \log(E - p_1) \delta p_2)^2 + \{(E - p_1)^{p_2} \delta p_3\}^2}\end{aligned}\quad (5.4)$$

と計算される。ここで、TQ 補正関数を  $T(E) \pm \delta T(E)$  として計算した寿命をそれぞれ  $\tau_{\text{TQ}\pm}$  とおき、

$$\sigma_{\text{TQ}} := \max\{|\tau_{\text{TQ}+} - \tau|, |\tau_{\text{TQ}-} - \tau|\}\quad (5.5)$$

と定義する。このとき表 5.3 に示す結果を得る。

表 5.3: TQ 補正関数の誤差を考慮した寿命

	$\tau_{\text{TQ}+}$ [ns]	$\tau$ [ns]	$\tau_{\text{TQ}-}$ [ns]	$\sigma_{\text{TQ}}$
NaI2	175.9	175.2	174.9	0.7

## 5.4 pick-off 補正関数の誤差の評価

これもすでに示したように、寿命フィッティングの式  $g(t)$  は以下ようになる：

$$g(t) = q_0 \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \cdot \exp\left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_1 p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\}\right] + q_2 \quad (5.6)$$

TQ 補正関数と同様、 $p_0, p_1, p_2$  の各パラメーターはフィッティングにより決定するため誤差が生ずる。この誤差の寿命への影響を評価する。 $p_i$  の誤差を  $\delta p_i$  とおくと、フィッティングの結果は表 5.4 のようになった。

表 5.4: pick-off 補正関数のパラメーターおよびその誤差

	$p_0$	$\delta p_0$	$p_1$	$\delta p_1$	$p_2$	$\delta p_2$
NaI2	1.268	0.2379	57.21	8.048	0.6285	0.01319

ここで各パラメーターが独立であると仮定すると<sup>2</sup>、誤差伝播則から寿命フィッティング関数自体の誤差は

$$\begin{aligned}\delta g(t) &= \sqrt{\sum_{i=0}^2 \left( \frac{\partial g}{\partial p_i} \delta p_i \right)^2} \\ &= q_0 \exp\left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -p_1 p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + (p_2 + 1)t \right\}\right] \sqrt{\sum_{i=0}^2 g_i(t) (\delta p_i)^2}\end{aligned}\quad (5.7)$$

$$g_0(t) = \left[ 1 + \frac{p_1}{q_1} \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \right]^2 \exp\left(-\frac{2t}{p_1}\right) \quad (5.8)$$

$$g_1(t) = \frac{p_0^2}{p_1^2} \left[ \frac{t}{p_1} + \frac{p_1 + t}{q_1} \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \right]^2 \exp\left(-\frac{2t}{p_1}\right) \quad (5.9)$$

$$g_2(t) = \left\{ 1 - \frac{t}{q_1} \left( p_0 e^{-t/p_1} + p_2 + 1 \right) \right\}^2 \quad (5.10)$$

と計算される。ここで、寿命フィッティング関数を  $g(t) \pm \delta g(t)$  として計算した寿命をそれぞれ  $\tau_{g\pm}$  とおき、

$$\sigma_g := \max\{|\tau_{g+} - \tau|, |\tau_{g-} - \tau|\}\quad (5.11)$$

と定義する。このとき表 5.5 に示す結果を得る。

<sup>1</sup>パラメーター間に相関のある場合は、 $\delta p_i$  と  $\delta p_j$  のクロスタームが生じ、その分だけ誤差に変化が生ずる。ここも厳密にはパラメーター間に相関があるが無視している。

<sup>2</sup>ここもパラメーター間の相関を無視している。前注参照のこと。



表 5.5: 寿命フィッティング関数の誤差を考慮した寿命

	$\tau_{g+}$	$\tau$	$\tau_{g-}$	$\sigma_g$
NaI2	174.5	175.2	175.9	0.7

## 5.5 系統誤差のまとめ

以上の系統誤差をすべて考慮した誤差  $\sigma_{\text{sys.}}$  は以下の式で与えられる：

$$\sigma_{\text{sys.}} = \sqrt{(\sigma_{\text{calib}})^2 + (\sigma_{\text{TQ}})^2 + (\sigma_g)^2} \quad (5.12)$$

まとめると表 5.6 のようになる。

表 5.6: 各 NaI に対する  $\sigma_{\text{calib}}, \sigma_{\text{TQ}}, \sigma_g, \sigma_{\text{sys.}}$  の値

	$\sigma_{\text{calib}}$	$\sigma_{\text{TQ}}$	$\sigma_g$	$\sigma_{\text{sys.}}$
NaI2	2.4	0.7	0.7	2.6

したがって、今回の測定で得られた o-Ps の寿命は統計誤差を合わせて書くと

$$175.2 \pm 5.4 \pm 2.6 \text{ [ns]}$$

となった。

## 第6章 考察・まとめ

### 6.1 考察

#### 6.1.1 NaI1 の不具合に関して

TQ 補正後、NaI1 に対しても NaI2 に施したように pick-off 補正を試みた。つまり、NaI1 に対する pick-off 補正関数  $f(t)$  を求めようとした。以下の図 6.1.1 は NaI1 に対する  $f(t)$  を各時刻でプロットしたものである。

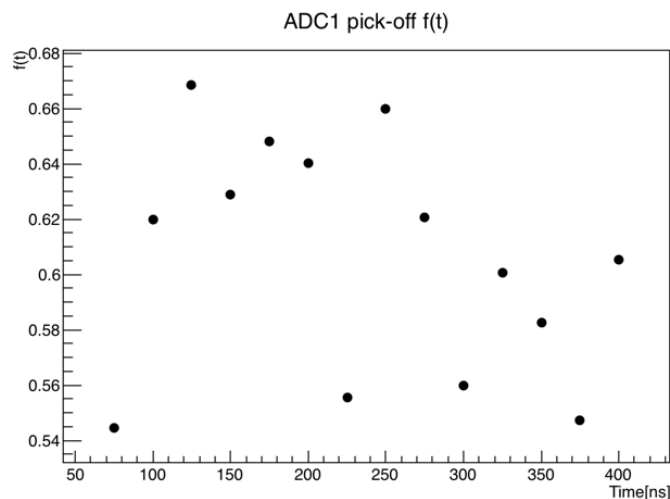


図 6.1.1: NaI1 の各時刻での  $f(t)$

物理的考察より  $f(t)$  は減少関数であるはずだから、明らかに NaI1 のデータがおかしいことがわかる。NaI1 に対する  $f(t)$  が減少関数とならなかった理由は、各時刻におけるエネルギー分布を見れば明らかとなる。図 6.1.2 に 0 ns から 25 ns ごとに 350 ns までのエネルギー分布を、NaI1 は赤で NaI2 は青で描いている。ヒストグラムのタイトルの ADC1,2 の () 内の数字はそのヒストグラムの NaI1,2 のイベント総数である。また、0 ns のヒストグラムは前後 1 ns のイベントを用いて、25 ns から 350 ns は各時刻の前後 5 ns のイベントを用いている。

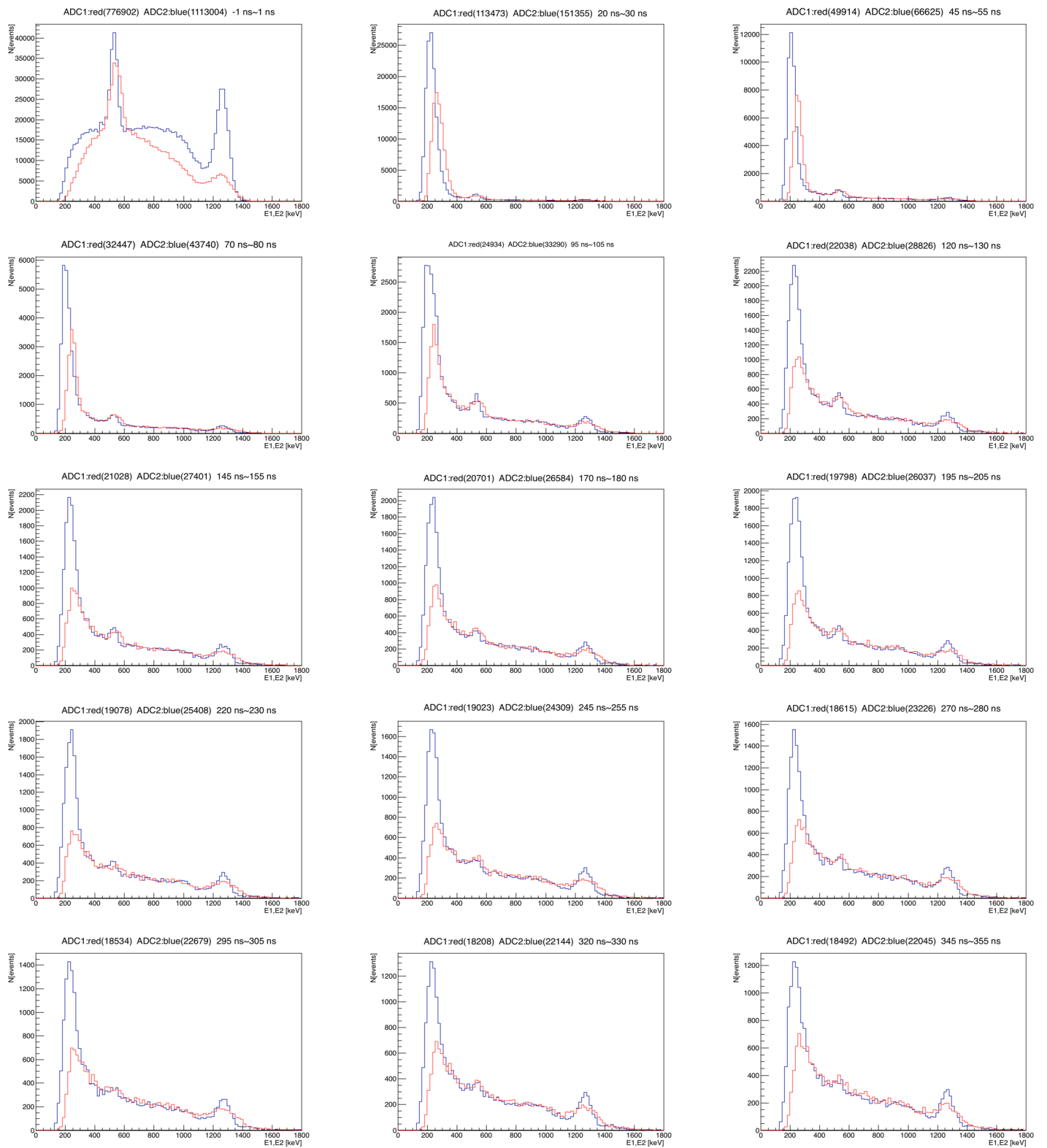


図 6.1.2: 各時刻での NaI<sub>1,2</sub> のエネルギー分布

このヒストグラムよりわかる NaI1,2 の違いとして、ここでは3つ程度上げておく。

1. 0 ns におけるエネルギー分布より、NaI1,2 のどちらも 511 keV のあたりにピークが見えるが、その 511 keV のピークを作っているガンマ線のコンプトン散乱が NaI1 の方はきちんと取れていないことわかる。
2. 100 ns から 350 ns のエネルギー分布を見ると、NaI1 は 2 に比べて 511 keV あたりのピークと 1275 keV あたりのピークがぼやけていることや、エネルギー分布の起伏が少ないことがわかる。
3. 全時刻にわたって、NaI1 は 2 に比べて低エネルギーのガンマ線が取れていないことがわかる。

上にあげた3つの違いのうち、NaI1 の  $f(t)$  がきちんと求めることができなかった主な理由となるのは1つ目と2つ目と考えられる。1つ目の違いより、NaI1 の 0 ns におけるエネルギー分布は 511 keV のガンマ線が生じた時にできる正しいエネルギー分布のモデルとして考えることはできない。また、2つ目の違いより、NaI1 の方がエネルギー分解能が悪いことがわかる。このことから、pick-off 補正関数を作るのに必要な情報である各時刻の 511 keV にできるピークを正しく見積もることが難しくなる。以上のことより、NaI1 に対して pick-off 補正がきちんとできなかったと考えられる。

### 6.1.2 寿命を求める際の fitting 範囲の妥当性について

考えることは、第4章の最後で NaI2 に関して、pick-off 補正後に  $g(t)$  を時間分布に対して fitting する際の fitting 範囲の選び方についてである(つまり、本実験において 235 ns から 800 ns を fitting 範囲に選んだ理由をここで述べる)。本実験では o-Ps の崩壊以外のイベントのデータも取ってしまうので、このことについてきちんと考えなければいけない。例えば、0 ns に非常に近い時刻では p-Ps の崩壊イベントが支配的であるし、時間が十分に立ったところではアクシデンタルなイベントが支配的になってしまう。加えて、TQ 補正を行っても 0 ns に近い時刻かつ低エネルギーの領域では完全に補正しきれていないことが時間とエネルギーに関する二次元ヒストグラムよりわかる。以上のことから、fitting 範囲を正しく選ばなければ、寿命を正確に見積もることはできない。そこで今回は、fitting 範囲の終端を 800 ns に固定して、始端を 100 ns から 10 ns ずつ動かしながら  $g(t)$  を時間分布に fitting して寿命を求めていき、始端が特定の時刻に近づいたら寿命の値がほとんど変わらなくなるはずなので、その時刻を fitting 範囲の始端に選ぶことにした。図 6.1.3 は各始端に対する寿命(とその誤差)を求めたものである。

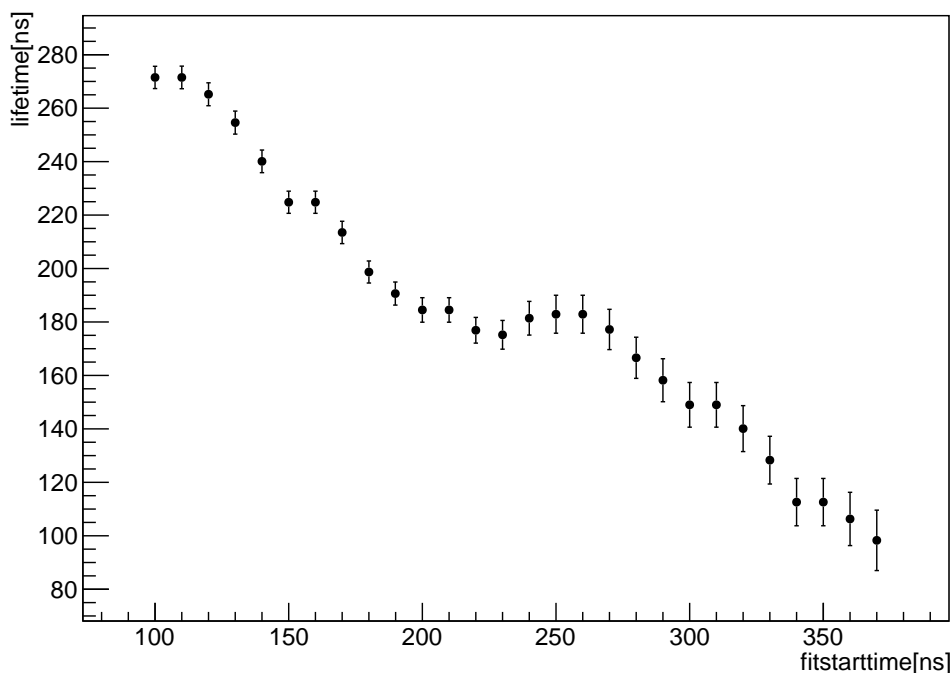


図 6.1.3: NaI2 に対する fitting 範囲の始端による寿命の変化

図 6.1.3 からわかるように、200 ns から 270 ns あたりで寿命がほとんど変化していないので、本実験では、その中央の値である 235 ns を fitting 範囲の始端にした。

### 6.1.3 求めた寿命が理論値よりも長くなったことについて

第4章の最後で求めた寿命は理論値よりも長いものであったが、この理由と考えられることを述べておく。TQ補正後の寿命は理論値よりも短かったが、pick-off補正後では長くなっていたことより、pick-off補正関数を大きく見積もってしまっていることが原因である。また、本実験では放射線源からの直接届くガンマ線をきちんと遮蔽できておらず、本来抑えるべきところまでノイズを抑えられていなかったことも原因と考えられる。

### 6.1.4 その他

本実験を通して感じた反省点をいくつか述べておく。

- ADCのキャリブレーションは実験で用いる放射線源以外にも用いて行った方が、より正確なキャリブレーションの式を得られた可能性がある。
- 乾燥させたシリカパウダーの入っている容器を真空引きして、pick-off反応を減らした場合の結果と本実験の結果を比較してみるのも面白かったかもしれない。
- 放射線源からの直接届くガンマ線をもう少し遮蔽して、ノイズとなる要素を確実に減らした方がよかった。

## 6.2 まとめ

最終的に得られた結果は以下のようなものとなった。

$$175.2 \pm 5.4 \pm 2.6 \text{ [ns]}$$

本実験の結果はQEDに対して肯定的なものとはならなかった。

# 謝辞

今回実験を進めるにあたり、半年間丁寧に指導・助言して下さった隅田土詞さんに感謝いたします。また実験・解析にお付き合い頂き、手助けして頂いた TA の中桐洸太さん、小峯順太さんに感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 日置善郎,『場の量子論-摂動計算の基礎-(改訂版)』(物理学叢書),吉岡書店,1999
- [2] 坂本真人,『場の量子論 不変性と自由場を中心にして』(量子力学選書),裳華房,2014
- [3] B.A.Kniehl,A.V.Kotikov and O.L.Veretin, "Orthopositronium lifetime at  $O(\alpha)$  and  $O(\alpha^3 \ln \alpha)$  in closed form ",[arXiv:0909.1431v2[hep-ph]](2009)
- [4] 過去の A2 レポート,<https://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/a1a2.html>