

2018 年度後期課題演習 A2
オルソポジトロニウムの寿命測定

緒形 直輝 小高 駿平 中島 大 花田 康佑 吉村 宣倅

2019 年 5 月 5 日

概要

ポジトロニウム (Ps) とは電子と陽電子の束縛状態であり、その寿命は QED の摂動計算で求められる。ポジトロニウムは合成スピンの大きさによってオルソポジトロニウム (o-Ps) とパラポジトロニウム (p-Ps) の 2 種類に分けられる。我々は QED を実験的に検証すべく、比較的寿命の長いオルソポジトロニウム (o-Ps) について寿命測定を行った。実験では 3 つの NaI シンチレーターを用いて、機械の特性などの影響を受けて異なる値となった 3 通りの寿命が得られた。これらは $119.5 \pm 5.0 \pm 34.3$ ns, $264.0 \pm 58.7 \pm 242.3$ ns, $108.5 \pm 11.0 \pm 45.8$ ns である。1 番目と 3 番目の値は誤差の範囲で理論値 (ファインマンダイアグラムの one-loop までで 142 ns) と一致しているが、後述の通りこの 2 つの結果は信頼性に欠け、本実験結果は QED の実験的な証拠とはならなかった。

目次

1	序論	4
1.1	理論	4
1.2	実験の原理	6
2	実験	8
2.1	実験原理	8
2.2	実験器具	8
2.3	セットアップ	8
2.4	回路	8
3	結果・解析	11
3.1	calibration	11
3.2	生データ	13
3.3	物理量への変換	15
3.4	TQ 補正	16
4	Pick-Off 補正	22
4.1	Pick-Off 反応とは	22
4.2	イベント数	22
4.3	崩壊幅 Γ	23
4.4	データ処理	25
4.5	崩壊寿命 $\tau_{3\gamma}$ の決定	26
4.6	従来の方法での崩壊寿命 $\tau_{3\gamma}$ の決定	28
5	考察	30
5.1	誤差	30
5.2	考察	34
6	結論	38
付録 A	1.1 の補足	39
A.1	スピン	39
A.2	荷電共役変換	40
A.3	相対論からの要請	43

1 序論

ここでは実験内容の把握に必要な基礎的事項について述べる。

1.1 理論

付録 A にいくつかの補足をしている。これは話の流れを良くするために分割したものである。

1.1.1 ポジトロニウム

ポジトロニウム (Ps) とは、電子と陽電子の束縛状態である。これはスピン 1/2 の粒子の二体系であり、

パラポジトロニウム (p -Ps) スピン一重項 ($S=0$)

オルソポジトロニウム (o -Ps) スピン三重項 ($S=1$)

として分類する。^{*1}特にオルソポジトロニウムについては $S=1$ というだけではスピン状態を指定し尽くせず、

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ + |\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+) \\ |\downarrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ \end{cases} \quad (1.1.1)$$

の互いに独立な 3 つの状態があるが、これらの区別は今後の議論に影響しないので、オルソポジトロニウムの状態ベクトルは、単に $|o\text{-Ps}\rangle$ と表す。パラポジトロニウムの状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ - |\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+) \quad (1.1.2)$$

であり、同様に $|p\text{-Ps}\rangle$ と表す。

ポジトロニウムの軌道角運動量は 0 (方位量子数 $l=0$) とする。このとき、

$$\begin{cases} C |p\text{-Ps}\rangle = |p\text{-Ps}\rangle \\ C |o\text{-Ps}\rangle = -|o\text{-Ps}\rangle \end{cases} \quad (1.1.3)$$

が成立する。^{*2}

簡単には以下のように説明できる。^{*3}

^{*1} A.1 参照。

^{*2} A.2 参照。

^{*3} $l=0$ という仮定ありきで進める。(1.1.4) から (1.1.7) の議論は、(1.1.5) から (1.1.6) への飛躍に注意。 $b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\uparrow)|0\rangle$ から (1.1.7) も同様である。(1.1.5) から (1.1.6) は自明でなく、特に、 \mathbf{p} 依存性を思い出せば当然ながら $b^\dagger(\mathbf{p},\uparrow)d^\dagger(-\mathbf{p},\downarrow)|0\rangle \neq b^\dagger(-\mathbf{p},\uparrow)d^\dagger(\mathbf{p},\downarrow)|0\rangle$ であり、軌道成分の対称性について行間がある。それらを日本語で補足するぐらいなら式で書いた方が早いと思うので、A.2 参照。

$|p\text{-Ps}\rangle$ について考える。今、状態から運動量の依存性を落とし、(あるいは $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ として、) s ($s = \uparrow, \downarrow$) で指定し、式 (1.1.4) を考える。

$$(b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\downarrow) - b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\uparrow))|0\rangle \quad (1.1.4)$$

$Cb^\dagger(s)C^{-1} = d^\dagger(s)$ 及び $C|0\rangle = |0\rangle$ となる荷電共役変換演算子を導入すれば、

$$\begin{aligned} C(b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\downarrow) - b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\uparrow))|0\rangle &= (d^\dagger(\uparrow)b^\dagger(\downarrow) - d^\dagger(\downarrow)b^\dagger(\uparrow))|0\rangle \\ &= (b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\downarrow) - b^\dagger(\downarrow)d^\dagger(\uparrow))|0\rangle \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

なお、二行目への式変形ではフェルミ粒子の生成演算子が反可換であることを用いた。以上より、

$$C|p\text{-Ps}\rangle = |p\text{-Ps}\rangle \quad (1.1.6)$$

全く同様に $b^\dagger(\uparrow)d^\dagger(\uparrow)|0\rangle$ などを考えることで

$$C|o\text{-Ps}\rangle = -|o\text{-Ps}\rangle \quad (1.1.7)$$

も言える。

さて、QED に従えば、ポジトロニウムの電子・陽電子が消滅し複数個の光子が生成されうる。これがポジトロニウムの崩壊であり、ポジトロニウムに寿命を与える。この過程の終状態として考える、 n 個の γ 線の状態を単に $|n\gamma\rangle$ と書く。光子の生成演算子が上で定義された C に対して $Ca_r^\dagger(\mathbf{k})C^{-1} = -a_r^\dagger(\mathbf{k})$ と変換されるとすれば、*4

$$C|n\gamma\rangle = (-1)^n |n\gamma\rangle \quad (1.1.8)$$

が言える。QED のラグランジアンが C 変換で不変*5なために、以上から

$$\begin{aligned} p\text{-Ps} &\rightarrow \text{偶数個の光子} \\ o\text{-Ps} &\rightarrow \text{奇数個の光子} \end{aligned}$$

のみが可能。これを満たすことが、振幅を 0 でない値にするために必要である。さらに 4 元運動量の保存*6のために、 $o\text{-Ps}$ ~~は~~ 一個の光子である。したがって寿命計算における摂動の最低次は

$$\begin{aligned} p\text{-Ps} &\rightarrow 2\gamma \\ o\text{-Ps} &\rightarrow 3\gamma \end{aligned}$$

の過程である。QED の結合定数は $\alpha \approx 0.007$ で十分小さいので、最低次のみを考えればよい。より高次からの寄与は $\sim \alpha^2$ 程度小さい*7ために無視してよく、計算すべきファインマンダイアグラムは以下の図 1 及び図 2 の通りである。

*4 A.2 参照。

*5 同上。

*6 A.3 参照。QED の計算で $\delta^4(P_f^\mu - P_i^\mu)$ から成立。

*7 外線光子は上述の偶奇の制約のために最低二本からしか増やせない。内線を増やす場合も vertex が 2 つから増える。したがって、次に振幅が nonzero となる高次の項は、さらに $\sim \alpha^2$ 程度から小さくなる。

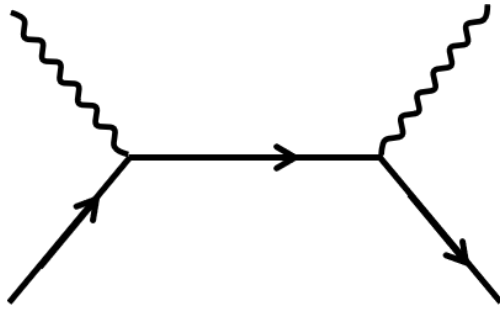


図 1: p -Ps 崩壊の最低次

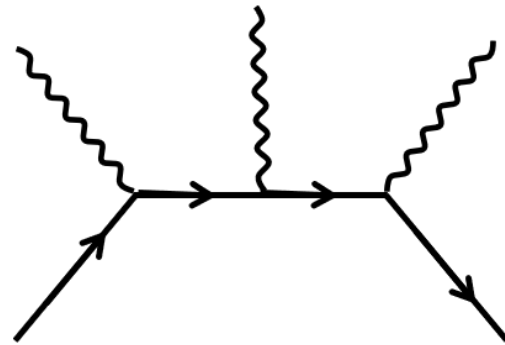


図 2: o -Ps 崩壊の最低次

この具体的な計算はここでは省くこととする。結果として、最低次の計算で p -Ps は 0.124 ns、 o -Ps は 139.9 ns [1] となる。この寿命の差のために、実験では o -Ps の寿命を測定する。より高次の項まで計算すると、 o -Ps の寿命は 142 ns [3] である。光子のもちうるエネルギーの範囲も簡単な計算*8で確かめられ、 p -Ps からの 2γ 線は 511 keV の単一スペクトル、 o -Ps からの 3γ 線は 511 keV 未満の連続スペクトルである。

1.2 実験の原理

ここでは実験内容を簡潔に説明する。実験方法の詳細は 2 章に譲る。

1.2.1 想定する物理的な過程

図 3 のように、線源として用意した $^{22}_{11}\text{Na}$ から崩壊で陽電子が放出され、それがシリカパウダーの電子と束縛状態、つまり Ps を形成し、それが崩壊して光子が放出される、という過程が実現するように実験を行った。

1.2.2 実験方法の概要

図 4 のように、放出される陽電子がシリカパウダーに到達する間にプラスチックシンチレーターを挟み、シリカパウダーのまわりを NaI シンチレーターで覆った。それぞれが陽電子、光子を検出することを想定しており、2 つの検出時間の差で寿命を測定した。

*8 A.3 参照。

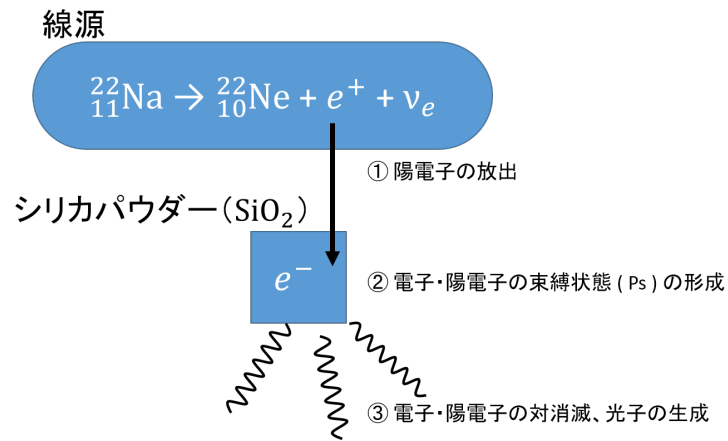


図 3: 実験で考えている過程

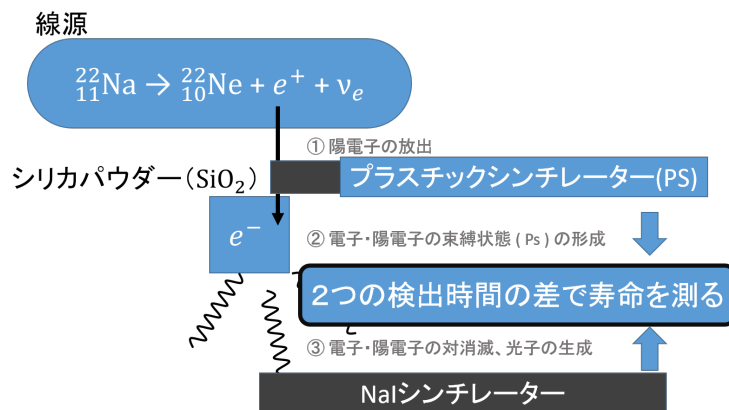


図 4: 実験方法の概要

2 実験

2.1 実験原理

線源 ^{22}Na は β^+ 崩壊をして陽電子 e^+ を放出する。陽電子はシリカパウダー (SiO_2) 内の電子と反応しポジトロニウム (Ps) を形成する。ポジトロニウムは数 ns ののち崩壊して γ 線を放出する。本実験では、線源が放出する陽電子をプラスチックシンチレータ (P.S.) で検出し、ポジトロニウムが放出する γ 線を NaI シンチレータで検出し、その時間差をポジトロニウムの寿命として測定する。解析では、ポジトロニウムが形成されてから、ポジトロニウムが崩壊して γ 線が放出されるまでの時間以外の経過時間は 0 と近似した。

2.2 実験器具

- ^{22}Na :陽電子 e^+ を放出する放射線源
- シリカパウダー (SiO_2):陽電子と反応してポジトロニウム (Ps) を形成する
- プラスチックシンチレータ (P·S·): e^+ を検出するシンチレータ
- NaI シンチレータ: γ 線を検出するシンチレータ
- PMT:シンチレータからの光子を電子に変換し、増幅する
- 鉛ブロック:外部からの放射線を遮断する
- 遮光ビニール:プラスチックシンチレータに光が入らないように全体を覆う

2.3 セットアップ

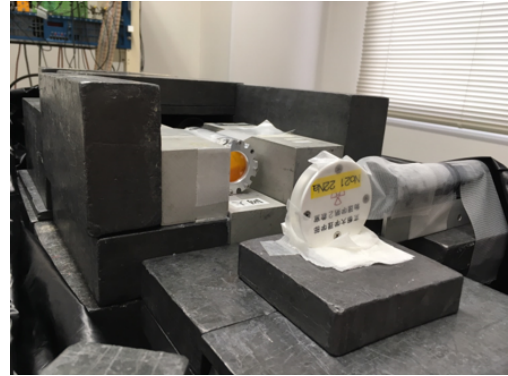
実験器具は図 5 のように配置した。模式図を図 6 に示す。点線は鉛ブロックに開けられた穴で、そこを通り陽電子はシリカパウダーに入る。シリカパウダー内で生成されたポジトロニウムが余計な反応をしないために、シリカパウダーを加熱して水分を飛ばし、容器に入れて真空にした。検出効率がよくなるように、シリカパウダーからの立体角が最も大きくなるように真ん中に設置した。

2.4 回路

回路は図 7 のように組んだ。実験における信号の概念図を図 8 に示す。本実験では、 e^+ が P·S· を通過したのちにポジトロニウムが崩壊し γ 線を放出し、NaI がそれを検出するので、P·S· の信号を TDC の start、NaI の信号を TDC の stop にすることが理想である。しかし、通過した e^+ が必ずしもポジトロニウムを生成するとは限らないので、目的の現象の検出効率が悪くなる。そこで、P·S· の信号から gate を生成し、その gate と NaI の信号で coincidence をとったものを TDC の start とする。そして P·S· の信号に適当な delay をかけたものを TDC の stop とする。なお、gate を生成するときにあとからやってくる陽電子による P·S· の信号を無視できるように veto をとつ



(a) 装置の配置 1



(b) 装置の配置 2

図 5: 実際の配置

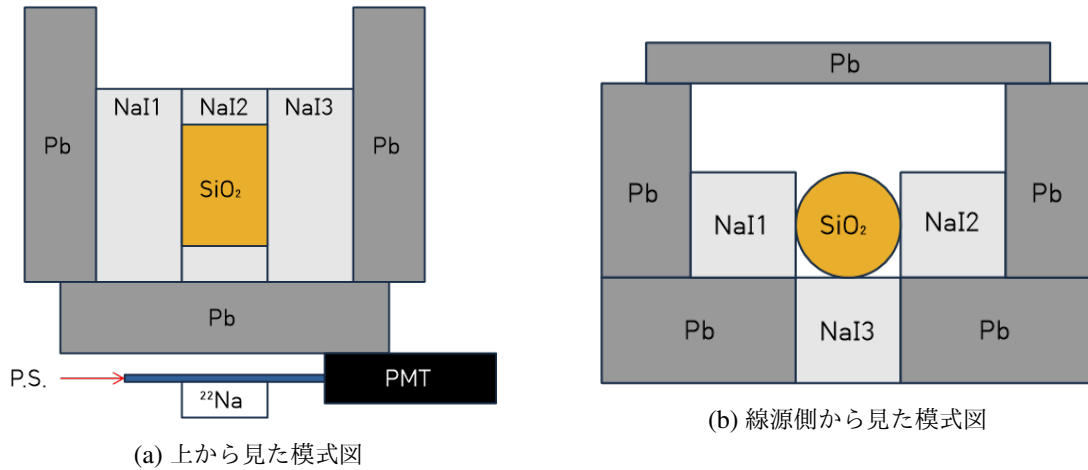


図 6: セットアップの模式図

ている。P・S・の信号にかけた delay の値から TDC の値から計算される時間を引いたものが求めたい崩壊寿命である。次に、実験で用いたモジュール及びその機能について説明する。

- Discriminator: 入力された信号が threshold を超えた時 NIM 信号を出力する
- Coincidence: 入力された NIM 信号の and をとって出力する
- FAN: 入力された NIM 信号の or をとって出力する
- Gate Generator: 信号が入力されたとき一定の時間幅の NIM 信号を出力する
- Veto: gate の信号が出力されている間は次の信号が入力されないようにする
- TDC: start に信号が入力されてから stop に信号が入力されるまでの時間に比例した値を出力する
- ADC: gate が開いている間に来た信号の時間積分である電荷に比例した値を出力する

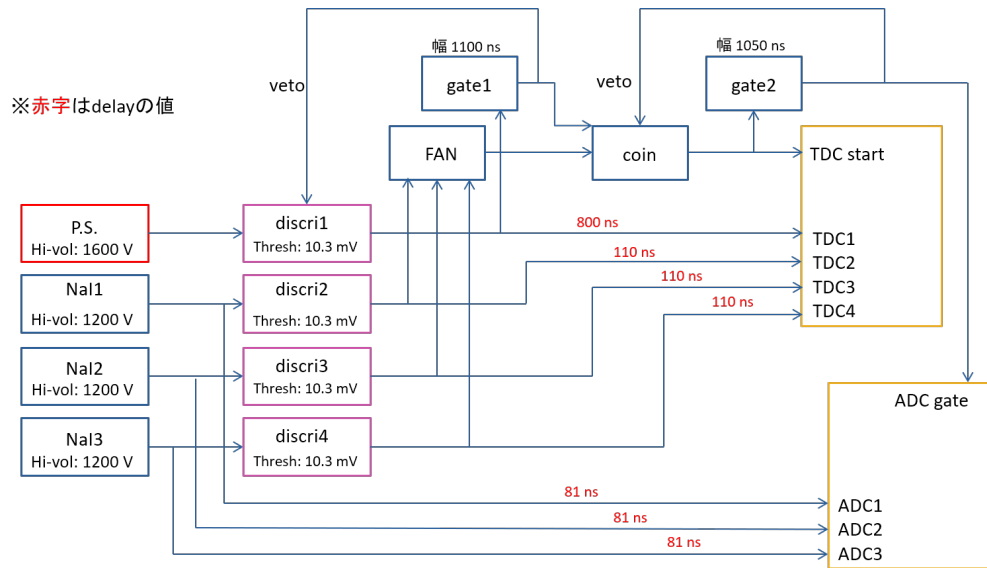


図 7: 回路図

信号の概念図

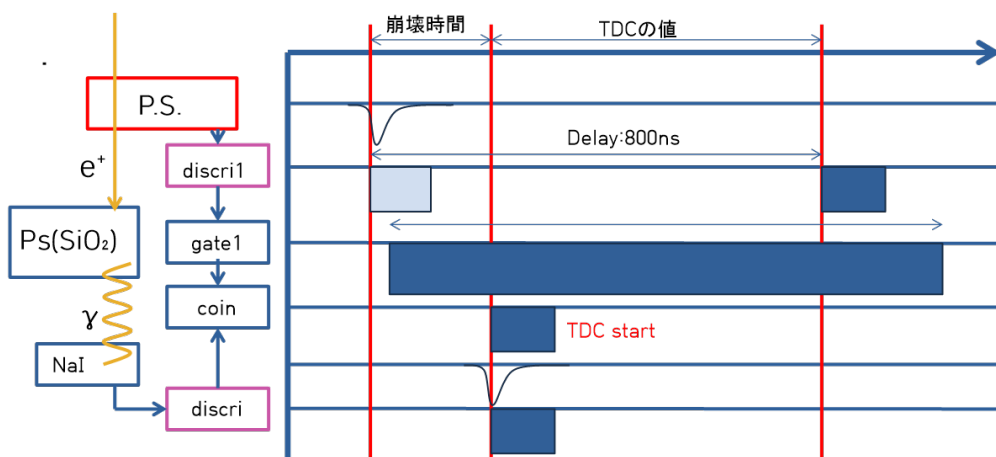


図 8: 信号の概念図

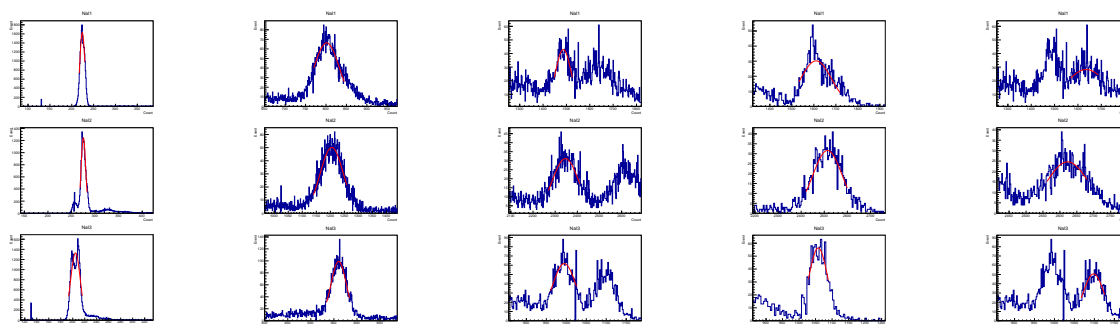
3 結果・解析

3.1 calibration

解析をするためには、測定して得られた ADC count や TDC count を実際のエネルギーや時間に対応させる必要がある。よって、本実験を始める前に放射されるエネルギーが既知である線源や delay を利用して calibration を行った。

3.1.1 ADC calibration

^{22}Na と ^{60}Co の二つの線源を使い、それぞれに対して測定した。図 9 は各 NaI に対して ADC 値のピークを Gaussian fitting している様子である。この時 fitting の範囲は半値全幅とした。この Gaussian fitting で得られた平均値を対応するエネルギーに対してまとめたものが表 1 である。ここで pedestal とは、信号が来なくても観測される暗電流等によるピークである。



(a)0 keV(pedestal) (b)511 keV(^{22}Na) (c)1173.2 keV(^{60}Co) (d)1275 keV(^{22}Na) (e)1332.5 keV(^{60}Co)

図 9: 各 NaI に対する Gaussian fitting

各 NaI に対して、図 10 のように横軸を ADC count、縦軸をエネルギーとしてプロットし直線 fitting すると次の ADC calibration の式が得られた。

表 1: 各エネルギーにおける ADC count

Energy[keV](source)	NaI1	NaI2	NaI3
0(pedestal)	224.193	275.198	204.566
511(²² Na)	801.555	1205.05	560.258
1173.2(⁶⁰ Co)	1486.68	2346.26	994.983
1275(²² Na)	1610.12	2513.98	1058.18
1332.5(⁶⁰ Co)	1635.41	2622.63	1097.92

$$\text{Energy1[keV]} = 0.937865 \times \text{ADC1} - 221.698 \quad (3.1.1)$$

$$\text{Energy2[keV]} = 0.570417 \times \text{ADC2} - 164.203 \quad (3.1.2)$$

$$\text{Energy3[keV]} = 1.49757 \times \text{ADC3} - 314.528 \quad (3.1.3)$$

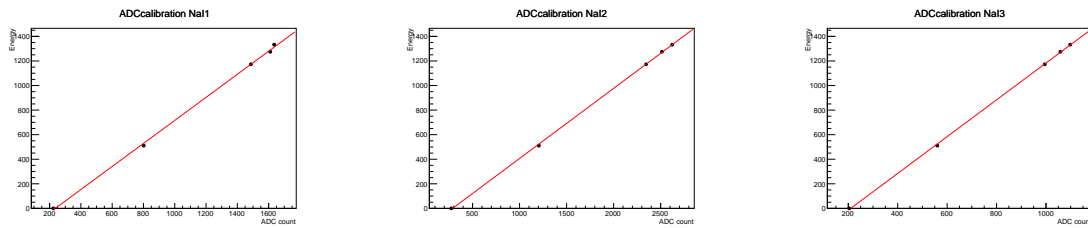


図 10: ADC calibration

3.1.2 TDC calibration

TDC calibration ではある信号を start に入れるものと delay をかけてから stop に入れるものに分けて、その時の TDC 値を測定した。図 11 は各 delay に対して、TDC 値のピークを Gaussian fitting している様子である。この Gaussian fitting で得られた平均値を対応する delay に対してまとめたものが表 2 である。delay の大きさは実際にオシロスコープを用いて確認した。

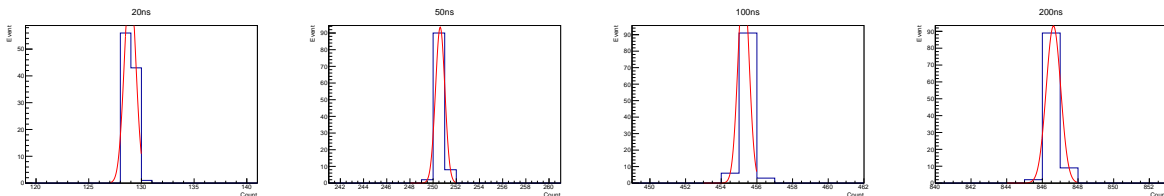


図 11: 各 delay に対する Gaussian fitting

表 2: 各 delay における TDC count

Time[ns]	TDC
20	128.923
50	250.611
100	455.252
200	846.624

図 12 のように横軸を TDC count、縦軸を Time としてプロットし直線で fitting すると次の TDC calibration の式が得られた。

$$\text{Time[ns]} = 0.250888 \times \text{TDC} - 12.9647 \quad (3.1.4)$$

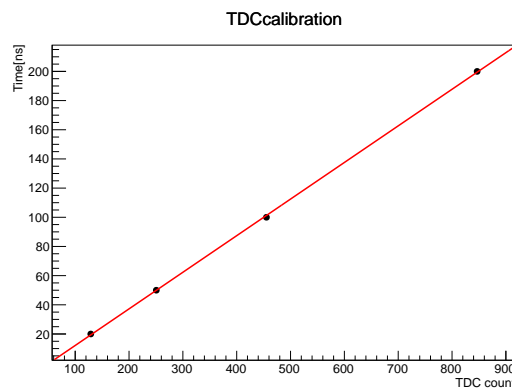


図 12: TDC calibration

3.2 生データ

今回の実験では 3 週間にわたってデータを取得した。図 13 は各 ADC count と TDC count の実際の時間変動の様子を示している。なお ADC1,2,3 と TDC1,2,3 は NaI1,2,3 に対応している。これを見ればどの時間帯でもデータ取得は正常に行われていたことがわかる。したがって以降では、3 つ全ての NaI から得られたデータを用いて解析していくことにする。

図 14 は実験で得られた各 ADC の生データを、図 15 は実験で得られた各 TDC の生データを示している。なお今回の実験において測定値 Time として用いるのは TDC0 のデータのみで、TDC1,2,3 のデータは ADC1,2,3 のデータの cut 条件として用いる。すなわち、以降の解析で扱いたいのは各 NaI が Ps の崩壊により出てきた γ 線を検出した時のデータであるが、現状ではそれ以外の様々な要因によるデータを含んでしまっている。そこで TDC1,2,3 の生データを元に目的のデータを選び出すことを考える。ここでは TDCcount = 400 付近に見えるピークが、各 NaI が Ps

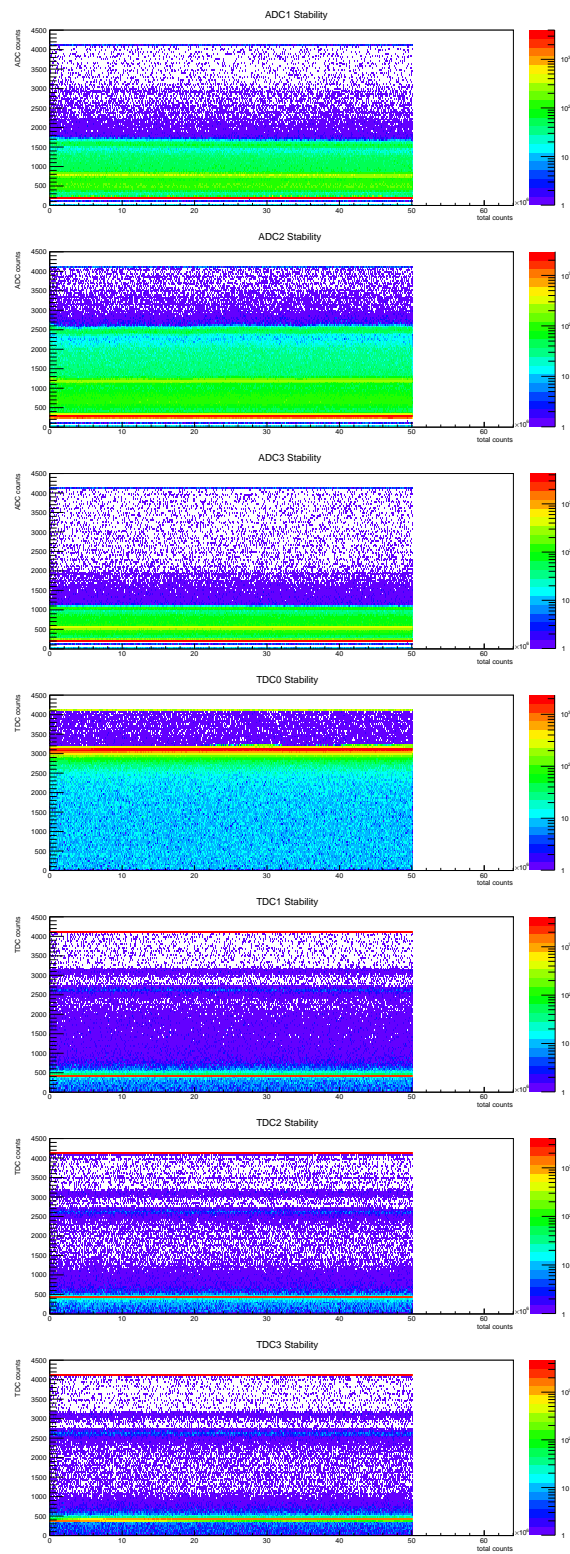


図 13: 各 ADC count と各 TDC count の時間変動

の崩壊により出てきた γ 線を検出したことを表している。そこで、表 3 のように各 NaI に対して cut 条件を求めた。

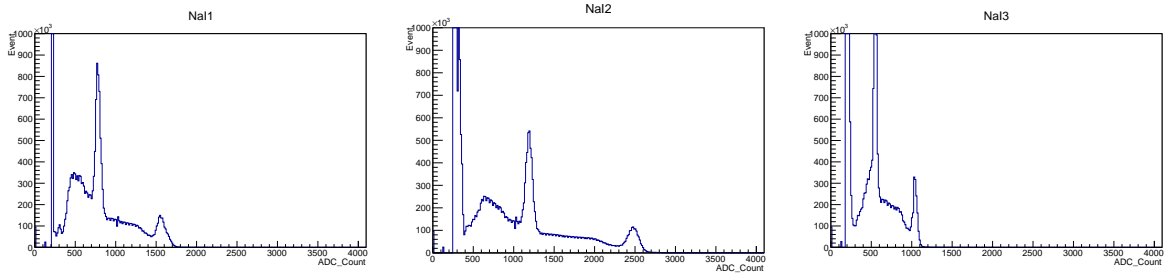


図 14: 各 ADC の生データ

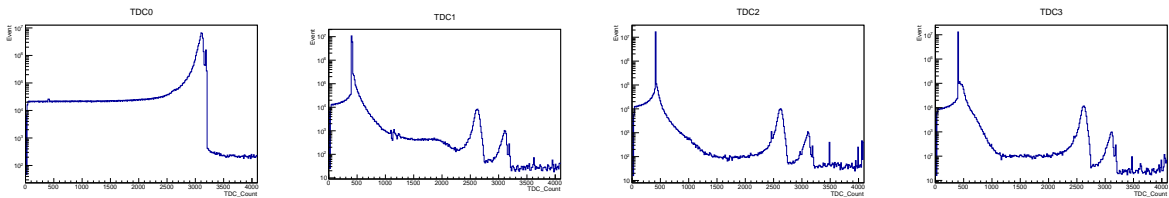


図 15: 各 TDC の生データ

表 3: 各 NaI が Ps の崩壊による γ 線を検出した条件

	cut 条件
NaI1	$406 \leq \text{TDC1} \leq 410$
NaI2	$410 \leq \text{TDC2} \leq 414$
NaI3	$402 \leq \text{TDC3} \leq 406$

3.3 物理量への変換

これまでに示した calibration の式と TDC1,2,3 から得られた cut 条件を用いて、TDC0 と ADC1,2,3 の生データをそれぞれ Time や Energy といった物理量へと変換する。変換後の各 NaI に対する Energy を図 16 に示している。また、図 17 は各 NaI に対して縦軸を Time、横軸を Energy として描いた 2 次元ヒストグラムである。なお、TDC0 count を Time に変換する際に用いた式は、

$$\text{Time}[\text{ns}] = -0.250888 \times \text{TDC0} + 12.9647 \quad (3.3.5)$$

であり、以前得られた TDC calibration の式とは符号が反転している。これは実際の物理現象の時系列に対して TDC の start と stop が逆転していることに対応している。

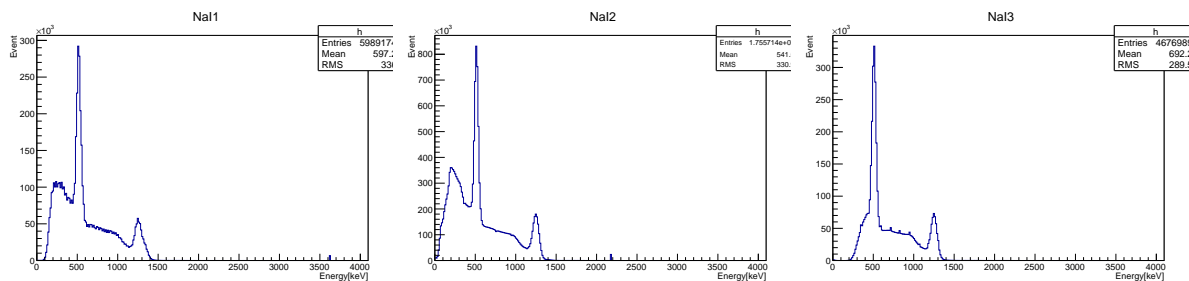


図 16: 各 NaI に対する Energy

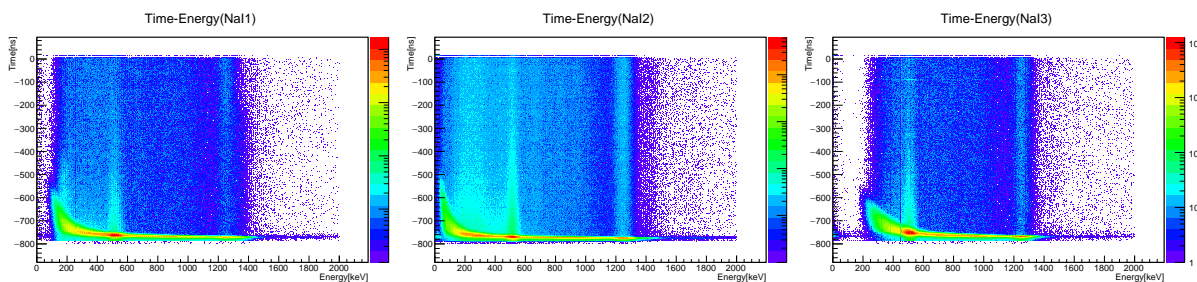


図 17: 各 NaI に対する Time-Energy 分布

3.4 TQ 補正

図 17 を見ると、Ps の崩壊による 511 keV の γ 線とその Compton 散乱の信号が、Energy が低いほど Time が大きく観測されていることがわかる。しかしこの信号は実際には同時刻に観測されるはずであって、このずれは測定装置である discriminator の特性によっている。このずれを補正するためにこれから TQ 補正というもの考える。

3.4.1 TQ 補正の理論

まずはなぜこのようなずれが生じるのかを解説する。図 18 を参照せよ。discriminator とは入力された信号が threshold を越えた時に NIM 信号を出力するものである。図 18 は同時刻に到達したエネルギーの異なる二つの入力信号を模式的に表したものであるが、エネルギーの小さい入力信号の方が、エネルギーの大きい入力信号に比べて立ち上がりが遅いことがわかる。すなわち、エネルギーが小さいほど信号が threshold に到達するまでの時間 ΔT が大きくなるのである。これがまさに、Energy が低いほど Time が大きく観測されてしまう原因となっている discriminator の特性である。

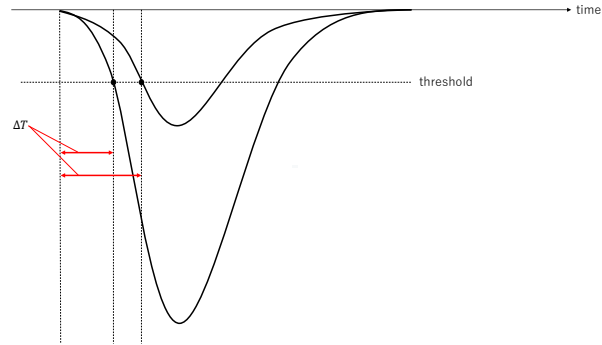


図 18: discriminator によるずれ

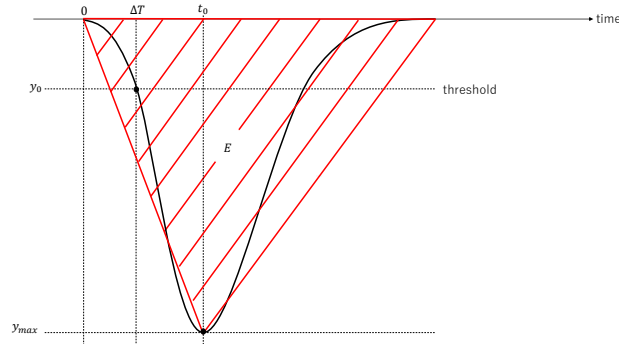


図 19: TQ 補正の考え方

さて、このずれを補正するためには threshold に到達するまでの時間 ΔT が入力信号のエネルギー E に対してどのように変化するかを知る必要がある。すなわちエネルギー E の関数として $\Delta T = \Delta T(E)$ の関数形を求めなければならない。まずは粗い近似によってこの問題を考えてみる。図 19 を見よ。ここでは入力信号の波形を三角形に近似して考える。ここで t_0 は信号がピークに達するまでの時間、 y_0, y_{max} はそれぞれ threshold, ピークの高さである。さらに t_0 を E に依存しない定数と仮定すると、

$$\Delta T : t_0 = y_0 : y_{max} \quad (3.4.6)$$

$$\therefore \Delta T = \frac{t_0 y_0}{y_{max}} \propto \frac{1}{E} \quad (3.4.7)$$

これはかなり粗い近似によって得られた式であるから、これを元に TQ 補正関数を

$$\Delta T(E)[ns] = \frac{p_0}{(E[keV] - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (3.4.8)$$

と仮定する。ここで $p_i (i = 0, 1, 2, 3)$ はパラメータであり、実際のデータに対する fitting を行って決定する。

NaI1 についての具体的な TQ 補正の手順は以下の通りである：

1. 160 keV \pm 5 keV の範囲で cut した Time に関するヒストグラムを Gaussian fitting して、その平均値を 160 keV における ΔT とする。
2. 20 keV ごとに 460 keV までの 16 点で同様の操作を繰り返す。
3. 得られた ΔT の値を Energy に対してプロットして、TQ 補正関数 (3.4.8) で fitting すると各パラメータ p_i が決まり、TQ 補正関数 (3.4.8) が確定する。
4. 各 Energy E に対して Time - $\Delta T(E)$ を改めて Time と再定義する。

ここで ΔT を求める Energy を 160 keV から 460 keV としているが、図 17 を見て補正が必要だと思われる Energy の範囲を選んだ。以上が NaI1 についての TQ 補正の手順であるが、NaI2, NaI3 についても同様に図 17 を見て 160 keV からではなくそれぞれ 80 keV, 240 keV からの 20 点, 12 点で ΔT を求めた。

3.4.2 TQ 補正の実践

図 20, 図 21, 図 22 および図 23 に各 NaI についての実際の TQ 補正の様子を示した。この結果、各 NaI に対する TQ 補正関数 (3.4.8) のパラメータ p_i は表 4 のように求まった。

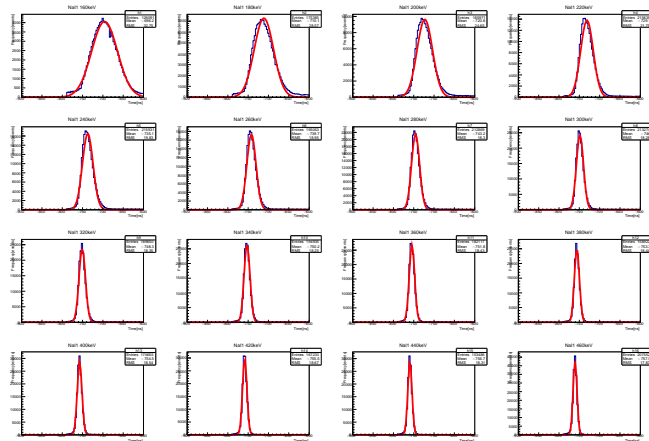


図 20: NaI1 に対して ΔT を求めるための Gaussian fitting

表 4: 各 NaI に対する TQ 補正関数のパラメータ

	p_0	p_1	p_2	p_3
NaI1	59065.4	50.9266	1.41713	-770.743
NaI2	152681	-12.5478	1.69511	-770.912
NaI3	53030.5	35.2141	1.09595	-815.389

このようにして得られた TQ 補正関数 (3.4.8) によって、各 NaI に対して再定義された Time $\text{Time} - \Delta T(E)$ のヒストグラムを図 24 に示した。また図 25 は、この新しい Time を縦軸、Energy

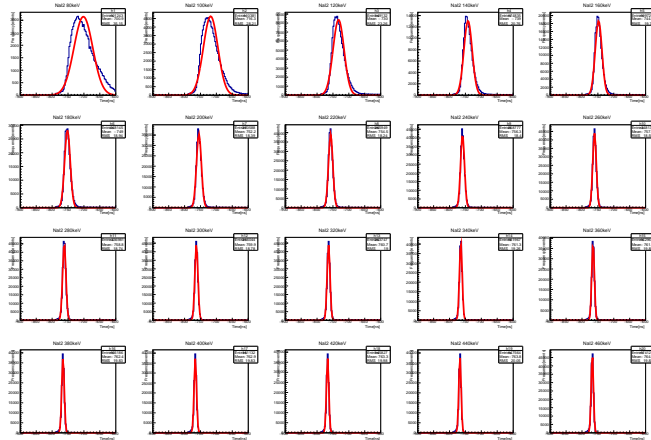


図 21: NaI2 に対して ΔT を求めるための Gaussian fitting

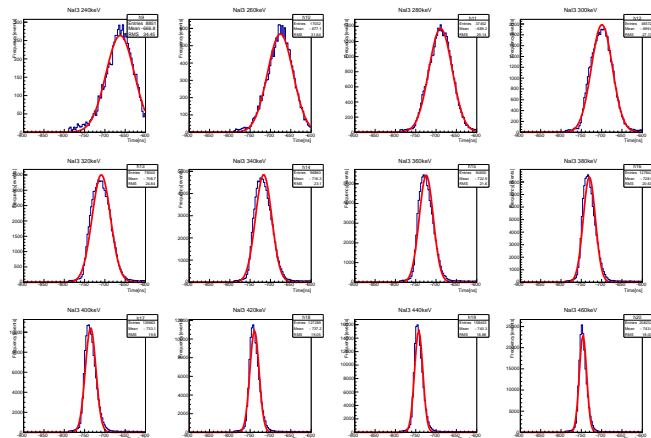


図 22: NaI3 に対して ΔT を求めるための Gaussian fitting

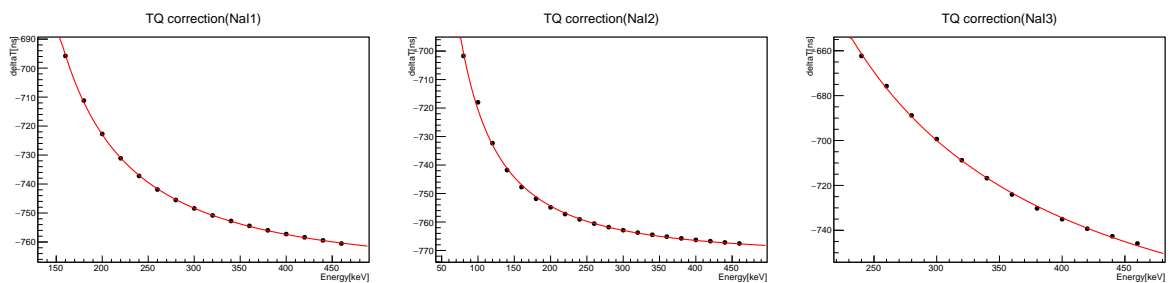


図 23: 各 NaI に対する TQ 補正関数による fitting

を横軸として描いた2次元ヒストグラムである。図 17 と図 25 を比較すると確かに、エネルギーによる時間のずれがなくなり TQ 補正されていることがわかる。

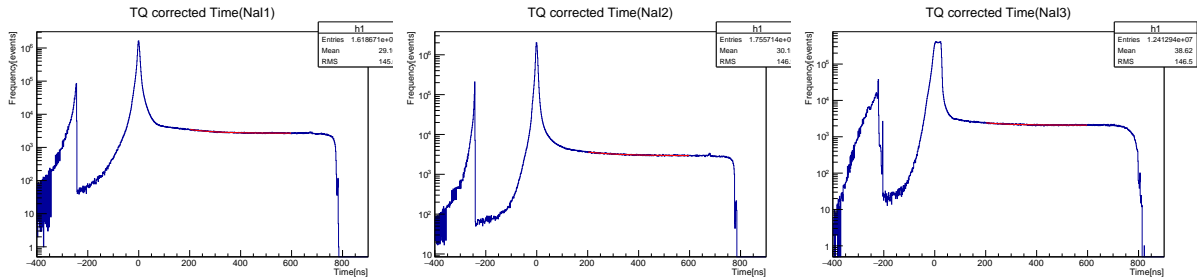


図 24: 各 NaI に対する TQ 補正後の Time

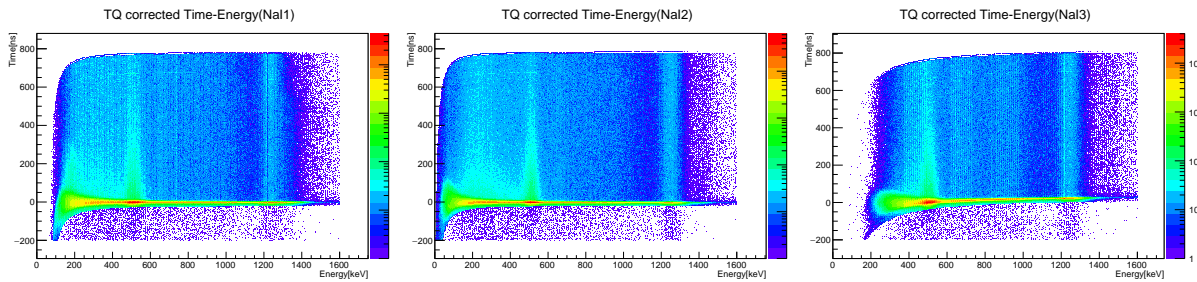


図 25: 各 NaI に対する TQ 補正後の Time-Energy 分布

3.4.3 TQ 補正後の寿命

TQ 補正後の新しい Time を関数

$$p_0 \exp\left(-\frac{t[\text{ns}]}{p_1}\right) + p_2 \quad (3.4.9)$$

で fitting したものが図 24 の赤線である。ただし $p_i (i = 0, 1, 2)$ はこの関数におけるパラメータであり、TQ 補正関数のものとは関係ない。この fitting により各パラメータ p_i は表 5 のように決定した。

表 5: 各 NaI に対する Time fitting 関数のパラメータ

	p_0	p_1	p_2
NaI1	7108 ± 654.2	91.5 ± 3.5	2682 ± 6.7
NaI2	3742 ± 335.6	119.7 ± 6.2	2924 ± 10.0
NaI3	2478 ± 413.4	100.6 ± 7.8	2082 ± 6.4

ここで、パラメータ p_1 が本実験で求めたい Ps の崩壊寿命と考えられる。そこで改めて p_1 だけを抜粋して表 6 にまとめると、各 NaI での TQ 補正後の Ps の崩壊寿命は次のようになる。

表 6: 各 NaI に対する TQ 補正後の寿命

	寿命 [ns]
NaI1	91.5 ± 3.5
NaI2	119.7 ± 6.2
NaI3	100.6 ± 7.8

4 Pick-Off 補正

4.1 Pick-Off 反応とは

オルソポジトロニウム (o -Ps) は以下の反応により 3 γ ではなく 2 γ を放出することがある

- Pick-Off 反応 o -Ps の持つ陽電子が他の原子の持つ電子と衝突して対消滅を起こす
- スピン交換反応 物質を構成する不対電子を持つ分子の電子と o -Ps の電子がスピンを入れ替えて p -Ps となる
- 化学反応 o -Ps が酸化されて電子が奪われ残った陽電子が対消滅する

これらの反応がおこなわれてからすぐに 2 γ が放出されるため、TQ 補正後の崩壊寿命は本来の o -Ps が 3 γ 線に崩壊する崩壊寿命よりも小さくなっていると考えられる。以降はこれら Pick-Off 反応の影響を除くことを考える。

4.2 イベント数

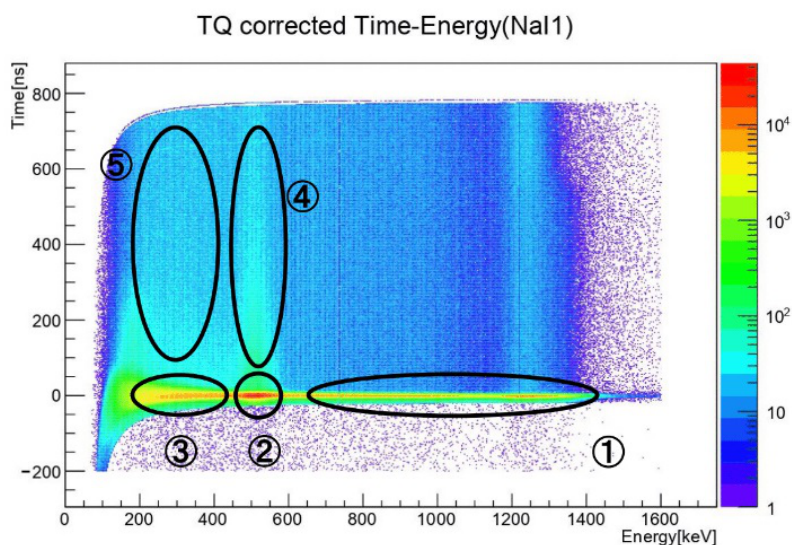


図 26: TQ 補正後の Time-Energy ヒストグラム

- ① 1275keV の γ 線の光電効果とコンプトン散乱
- ② p -Ps の 511keV の 2 γ 線の光電効果
- ③ p -Ps の 511keV の 2 γ 線のコンプトン散乱
- ④ Pick-off 反応による 511keV の 2 γ 線の光電効果
- ⑤ o -Ps の 3 γ 線 + Pick-off 反応による 511keV の 2 γ 線のコンプトン散乱

o-Ps の 3 γ 線は 511keV 未満である。*p*-Ps の寿命と比べて *o*-Ps は即座に崩壊する。よって Time=0[ns] において *p*-Ps の光電効果とそのコンプトン散乱だけが現れる。

- $\Delta N_{3\gamma}(t)$ *o*-Ps の 3 γ 線
- $\Delta N_{2\gamma}(t)$ Pick-off 反応による 511keV の 2 γ 線
- $\Delta N_{2\gamma_under511}(t)$ Pick-off 反応による 511keV の 2 γ 線のコンプトン散乱
- $\Delta N_{under511}(t)$ ⑤の領域 (511keV 未満) の γ 線の総数
- $\Delta N(t)$ ④+⑤の領域 (全体) の γ 線の総数

$$\Delta N_{under511}(t) = \Delta N_{3\gamma}(t) + \Delta N_{2\gamma_under511}(t) \quad (4.2.1)$$

$$\Delta N(t) = \Delta N_{3\gamma}(t) + \Delta N_{2\gamma}(t) = \Delta N_{under511}(t) + (\Delta N_{2\gamma}(t) - \Delta N_{2\gamma_under511}(t)) \quad (4.2.2)$$

時刻 0[ns] において *p*-Ps の反応が支配的なことから

$$\Delta N_{under511}(0) = \Delta N_{2\gamma_under511}(0) \quad (4.2.3)$$

時刻 *t* における *p*-Ps の反応はこの時刻 0[ns] のものを 511keV のイベント数でスケール調節したしたものであるとする。時刻 *t* における 511keV のイベント数を $Z(t)$ とすると

$$\Delta N_{2\gamma_under511}(t) = \frac{Z(t)}{Z(0)} \Delta N_{2\gamma_under511}(0) = \frac{Z(t)}{Z(0)} \Delta N_{under511}(0) \quad (4.2.4)$$

4.3 崩壊幅 Γ

崩壊幅 Γ とは 1 個の粒子の単位時間当たりの崩壊確率で、時刻 *t* における粒子数を $N(t)$ としたとき、単位時間当たりの崩壊数は粒子数に比例するので

$$dN(t) = -\Gamma N(t) dt \quad (4.3.5)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma N(t) \quad (4.3.6)$$

となる。崩壊寿命 τ は $\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$ で定義される。

- Γ 測定された崩壊幅
- $\Gamma_{3\gamma}$ *o*-Ps の 3 γ への崩壊幅
- $\Gamma_{2\gamma}$ *o*-Ps の 2 γ への崩壊幅

とすると、 $f(t) \equiv \frac{\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} \left(= \frac{\frac{dN_{2\gamma}(t)}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}(t)}{dt}} = \frac{\Delta N_{2\gamma}(t)}{\Delta N_{3\gamma}(t)} \right)$ を導入することで、*o*-Ps の 3 γ への崩壊寿命 $\tau_{3\gamma}$ は最終的に求める寿命である

$$\Gamma = \Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma} = \Gamma_{3\gamma}(1 + f(t)) = \frac{1 + f(t)}{\tau_{3\gamma}} \quad (4.3.7)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma N(t) = -(\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma})N(t) \quad (4.3.8)$$

この微分方程式を解くと、

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\int^t (\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma}) dt'\right) \quad (4.3.9)$$

となる (N_0 は定数)。またここで

$$\frac{dN_{2\gamma_under511}(t)}{dt} = \alpha(t) \frac{dN_{2\gamma}(t)}{dt} \quad (4.3.10)$$

とすると

$$\begin{aligned} \frac{dN_{under511}}{dt} &= \frac{d(N_{3\gamma} + N_{2\gamma_under511})}{dt} = \frac{dN_{3\gamma}}{dt} + \alpha(t) \frac{dN_{2\gamma}}{dt} \\ &= -(\Gamma_{3\gamma} + \alpha(t)\Gamma_{2\gamma})N(t) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

4.3.1 フィッティング関数 $f_\alpha(t)$

$f_\alpha(t)$ を導入する

$$f_\alpha(t) \equiv \frac{\alpha(t)\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} = \frac{\alpha(t) \frac{dN_{2\gamma}(t)}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}(t)}{dt}} \quad (4.3.12)$$

o -Ps の 3 γ への崩壊寿命 $\tau_{3\gamma}$ は

$$\begin{aligned} \frac{dN_{under511}(t)}{dt} &= -(\Gamma_{3\gamma} + \alpha(t)\Gamma_{2\gamma})N(t) \\ &= -(\Gamma_{3\gamma} + \alpha(t)\Gamma_{2\gamma})N_0 \exp\left(-\int^t (\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma}) dt'\right) \\ &= -\Gamma_{3\gamma}(1 + f_\alpha(t))N_0 \exp\left(-\int^t \Gamma_{3\gamma} \left(1 + \frac{f_\alpha(t')}{\alpha(t')}\right) dt'\right) \\ &= -\frac{1 + f_\alpha(t)}{\tau_{3\gamma}} N_0 \exp\left(-\int^t \frac{1 + \frac{f_\alpha(t')}{\alpha(t')}}{\tau_{3\gamma}} dt'\right) \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

これをフィッティングすることで求められる。

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) &= \frac{\alpha(t)\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} = \frac{\alpha(t) \frac{dN_{2\gamma}(t)}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}(t)}{dt}} = \frac{\frac{dN_{2\gamma_under511}(t)}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}(t)}{dt}} = \frac{\Delta N_{2\gamma_under511}(t)}{\Delta N_{3\gamma}(t)} \\ &= \frac{\Delta N_{2\gamma_under511}(t)}{\Delta N_{under511}(t) - \Delta N_{2\gamma_under511}(t)} = \frac{Z(t)\Delta N_{under511}(0)}{Z(0)\Delta N_{under511}(t) - Z(t)\Delta N_{under511}(0)} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

4.4 データ処理

150[ns] から 700(650)[ns] までの 50[ns] おきの各時刻において Δt [ns] の範囲にあるようなイベントで、511keV を中心としてのイベント全体を $\pm\Delta a$ の範囲でガウシアン近似する (Δt や Δa の値は後述の影響によりすべて同じ値をとることができなかった)。そしてピークのイベント数を $Z(t)$ とした。

また、このとき 0keV から 450keV までの各時刻におけるイベント数の合計を $\Delta N_{\text{under}511}(t)$ とし、 $Z(0)$ と $\Delta N_{\text{under}511}(0)$ の値も求めた。

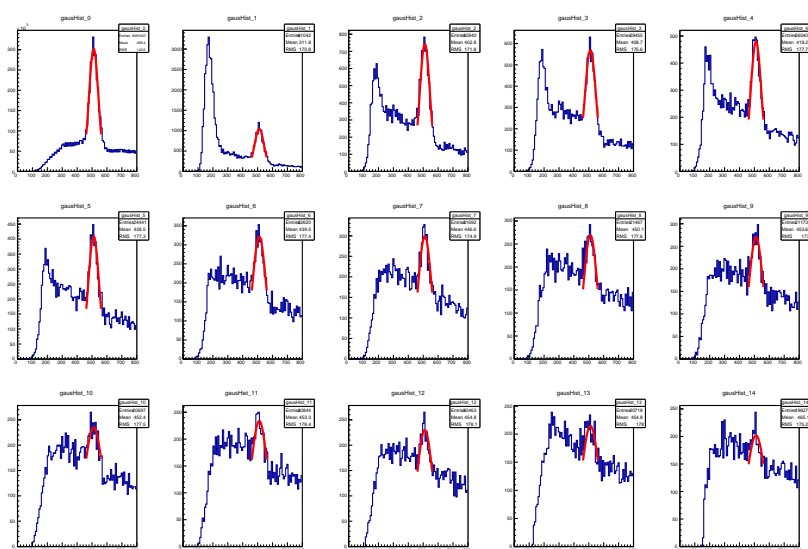


図 27: Na11 の Gaussian Fitting

$\Delta t = 2$ [ns] $\Delta a = 50$ keV 150 [ns] から 700 [ns] まで

$$f_{\alpha}(t) = \frac{Z(t)\Delta N_{\text{under}511}(0)}{Z(0)\Delta N_{\text{under}511}(t) - Z(t)\Delta N_{\text{under}511}(0)} \quad (4.4.15)$$

を各時刻で計算しプロットして、例年にならない

$$f_{\alpha}(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 \quad (4.4.16)$$

でフィッティングする (p_0, p_1, p_2 の初期値は全て (0.5, 115, 0.2))。

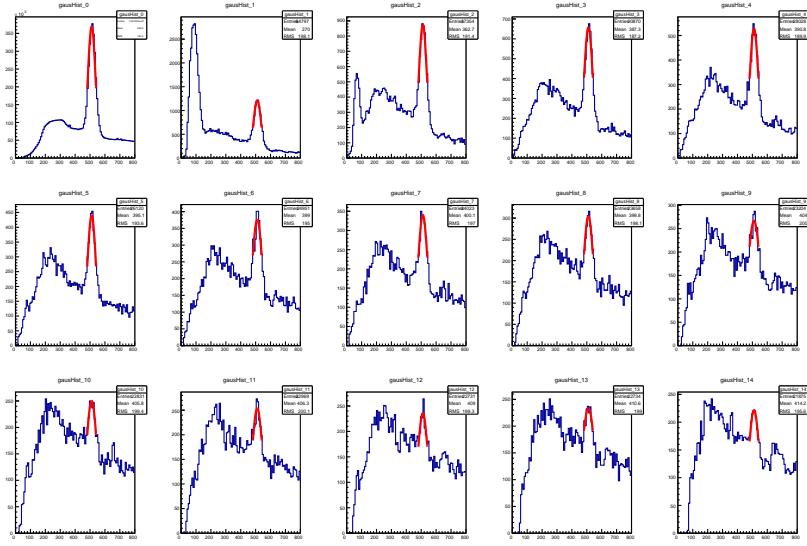


図 28: NaI2 の Gaussian Fitting

$\Delta t = 2$ [ns] $\Delta a = 35$ keV 150 [ns] から 650 [ns] まで

表 7: $f_a(t)$ のフィッティングにおける各パラメータ値

	p_0	p_1	p_2
NaI1	0.3603 ± 0.05281	546.0 ± 232.6	0.1600 ± 0.07330
NaI2	1.166 ± 0.07207	186.6 ± 15.21	0.2891 ± 0.01396
NaI3	0.4911 ± 0.06001	206.2 ± 38.03	0.1401 ± 0.01534

4.5 崩壊寿命 $\tau_{3\gamma}$ の決定

$$\frac{dN_{\text{under511}}(t)}{dt} = -\frac{1 + f_a(t)}{\tau_{3\gamma}} N_0 \exp\left(-\int^t \frac{1 + f_a(t)}{\tau_{3\gamma}} dt\right) \quad (4.5.17)$$

の式に先ほどフィッティングした $f_a(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2$ を代入すると

$$\frac{dN_{\text{under511}}(t)}{dt} = -\frac{N_0}{\tau_{3\gamma}} \left(p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right) \exp\left(-\int^t \frac{1}{\tau_{3\gamma}} \left(\frac{p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right)}{\alpha} + \frac{p_2}{\alpha} + 1 \right) dt\right)$$

となるので、エネルギーが 0keV から 450keV の領域における $\Delta N_{\text{under511}}(t)$ を 150[ns] から 500[ns] までの時刻で $g(t)$ でフィッティングする (簡単のために $\alpha(t)$ を定数とする)(q_0, q_1, q_2, q_3 の初期値は全て (200,160,170,10))。

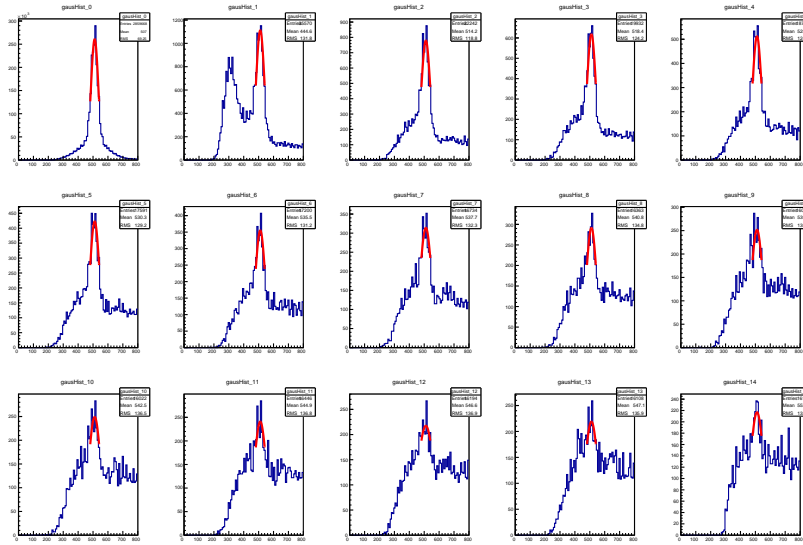


図 29: NaI3 の Gaussian Fitting

$\Delta t = 2$ [ns] $\Delta a = 55$ keV 150 [ns] から 700 [ns] まで

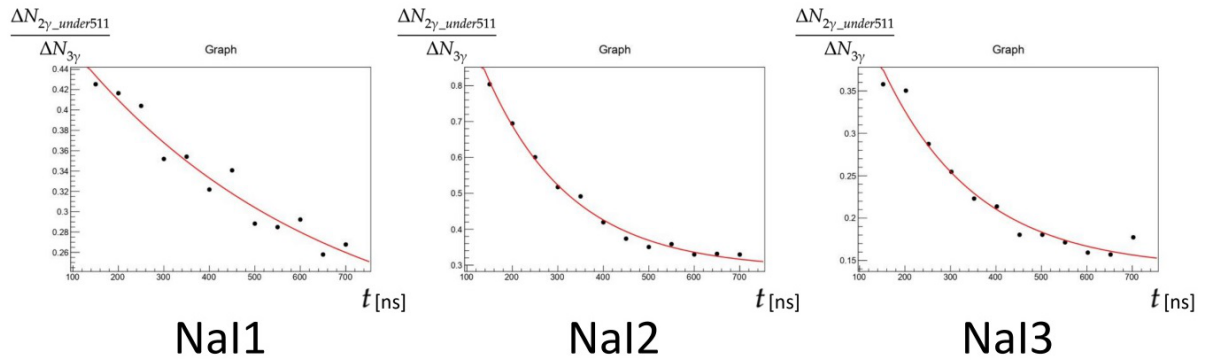


図 30: $f_{\alpha}(t)$ のプロット

$$g(t) = q_0 \left(p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right) \exp\left(-\frac{1}{q_1} \left(\frac{-p_0 p_1 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right)}{q_3} + \left(\frac{p_2}{q_3} + 1\right)t \right)\right) + q_2$$

ここにおいて、崩壊寿命 $\tau_{3\gamma}$ は q_1 の値である。また、 α は q_3 の値である。

この結果、各 NaI に対する pick-off 補正後の o -Ps の寿命は表のように求まった。

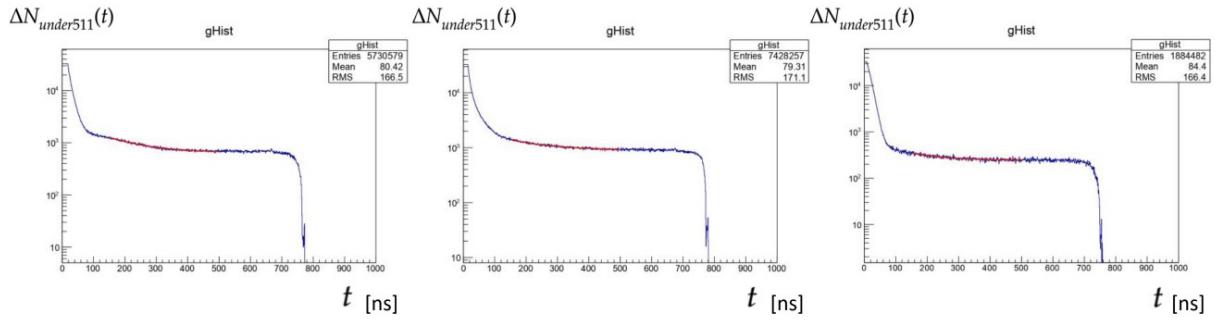


図 31: $\Delta N_{\text{under}511}(t)$ -Time ヒストグラム

表 8: $\Delta N_{\text{under}511}(t)$ -Time ヒストグラムへのフィッティングにおける各パラメータ値

	q_0	q_1	q_2	q_3
NaI1	161.7 ± 1.412	119.5 ± 5.088	647.3 ± 1.272	$1.691 \times 10^6 \pm 1.414$
NaI2	460.0 ± 83.65	264.0 ± 58.68	874.7 ± 9.667	0.7268 ± 0.3689
NaI3	318.3 ± 47.09	108.5 ± 11.01	242.2 ± 2.805	268.2 ± 142.8

表 9: pick-off 補正後の寿命

寿命 [ns]	
NaI1	119.5 ± 5.1
NaI2	264.0 ± 58.7
NaI3	108.5 ± 11.0

4.6 従来の方法での崩壊寿命 $\tau_{3\gamma}$ の決定

従来は全ての領域 (④+⑤) のグラフを 511keV 未満の領域 (④) の $\Delta N_{\text{under}511}(t)$ -Time ヒストグラムにフィッティングしていた。

$$\begin{aligned}
 \frac{dN(t)}{dt} &= -(\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma})N(t) \\
 &= -(\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma})N_0 \exp\left(-\int^t (\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma}) dt'\right) \\
 &= -\Gamma_{3\gamma}(1 + f(t))N_0 \exp\left(-\int^t \Gamma_{3\gamma}(1 + f(t)) dt'\right) \\
 &= -\frac{1 + f(t)}{\tau_{3\gamma}}N_0 \exp\left(-\int^t \frac{1 + f(t)}{\tau_{3\gamma}} dt'\right)
 \end{aligned} \tag{4.6.18}$$

これは新しい方法で $\alpha=1$ のときと同じである。これでフィッティングすると

表 10: $\Delta N_{\text{under511}}(t)$ -Time ヒストグラムへのフィッティングにおける各パラメータ値

$\Delta t = 5$ [ns] 150 [ns] から 700 [ns] まで

	q_0	q_1	q_2	Δa
NaI1	514.0 ± 5.788	169.3 ± 5.230	642.7 ± 5.661	50 keV
NaI2	429.8 ± 8.678	270.1 ± 17.36	870.8 ± 10.91	30 keV
NaI3	188.3 ± 18.12	146.1 ± 15.31	240.9 ± 3.072	30 keV

従来の方法での pick-off 補正後の o -Ps の寿命は

表 11: pick-off 補正後の寿命

寿命 [ns]	
NaI1	169.3 ± 5.2
NaI2	270.1 ± 17.4
NaI3	146.1 ± 15.3

5 考察

5.1 誤差

今与えられている誤差は最後のフィッティングによる統計誤差のみである。しかし、今回の実験の解析では数回のフィッティングを行って寿命を求めたため、各フィッティングに起因する誤差、すなわち系統誤差についても考慮し評価する必要がある。

5.1.1 誤差評価の方法

誤差の伝搬則を利用する。複数個のフィッティングパラメーター p_i を用いてフィッティング関数が $U(p_i)$ と書けるとき、その誤差 δU は、

$$\delta U = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial p_i} \sigma_{p_i} \right)^2 + \sum_{i>j} \left(2\sigma_{p_i p_j} \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{\partial U}{\partial p_j} \right)} \quad (5.1.1)$$

と表せる。ただし、 $\sigma_{p_i p_j}$ は共分散で、2つのパラメーター $p_i, p_j (i \neq j)$ が互いに独立のとき $\sigma_{p_i p_j} = 0$ である。

一般に各フィッティングパラメーターは独立ではなく、したがって共分散も 0 でない値を持つと思われる。しかし、それを考慮して誤差を求めると計算が煩雑となり難しいため、今回はすべてのフィッティングパラメーターは互いに独立であると仮定して誤差を評価する。したがって今回、フィッティング関数の誤差は、

$$\delta U = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial p_i} \sigma_{p_i} \right)^2} \quad (5.1.2)$$

として、 $U \pm \delta U$ なる新しいフィッティング関数で再度フィッティングを行い、それにより求まる寿命が τ_{\pm} のとき、フィッティングによる誤差を、

$$\sigma_U = \max\{|\tau - \tau_+|, |\tau - \tau_-|\} \quad (5.1.3)$$

として求める。

5.1.2 TDC calibration による誤差

TDC calibration 関数は

$$Time[ns] = ax + b \quad (5.1.4)$$

と書けた。ただし x は TDC count の数値。したがって、式 5.1.2 により、

$$\delta Time[ns] = \sqrt{\sigma_a^2 x^2 + \sigma_b^2} \quad (5.1.5)$$

となる。これにより求まる $Time \pm \delta Time[ns]$ を用いて Pick-off 補正まで行い、そこから誤差を求める。結果は表 13、14 となった。

表 12: パラメーターの平均値と誤差

a	σ_a	b	σ_b
-12.96	0.98	0.25	0.0019

表 13: TDC calibration による誤差 (q_3 あり)

	TQ 補正後	Pick-off 補正後	誤差
NaI1	$\tau_+ = 91.4$	$\tau_+ = 153.4$	$\sigma_{calib} = 33.9$
	$\tau = 91.5$	$\tau = 119.5$	
	$\tau_- = 91.0$	$\tau_- = 118.5$	
NaI2	$\tau_+ = 120.1$	$\tau_+ = 215.4$	$\sigma_{calib} = 99.2$
	$\tau = 119.7$	$\tau = 264.0$	
	$\tau_- = 119.2$	$\tau_- = 164.8$	
NaI3	$\tau_+ = 99.5$	$\tau_+ = 137.7$	$\sigma_{calib} = 29.2$
	$\tau = 100.6$	$\tau = 108.5$	
	$\tau_- = 101.9$	$\tau_- = 107.6$	

表 14: TDC calibration による誤差 ($q_3 = 1$)

	TQ 補正後	Pick-off 補正後	誤差
NaI1	$\tau_+ = 91.4$	$\tau_+ = 169.3$	$\sigma_{calib} = 6.1$
	$\tau = 91.5$	$\tau = 169.3$	
	$\tau_- = 91.0$	$\tau_- = 175.4$	
NaI2	$\tau_+ = 120.1$	$\tau_+ = 275.4$	$\sigma_{calib} = 20.2$
	$\tau = 119.7$	$\tau = 270.1$	
	$\tau_- = 119.2$	$\tau_- = 290.3$	
NaI3	$\tau_+ = 99.5$	$\tau_+ = 146.1$	$\sigma_{calib} = 3.0$
	$\tau = 100.6$	$\tau = 146.1$	
	$\tau_- = 101.9$	$\tau_- = 143.1$	

5.1.3 TQ 補正による誤差

TQ 補正関数は

$$\Delta T(E) = \frac{p_0}{(E - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (5.1.6)$$

と書けたので、これも式 5.1.2 により、

$$\begin{aligned}\delta\Delta T(E) &= \sqrt{\sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial\Delta T}{\partial p_i} \sigma_{p_i} \right)^2} \quad (5.1.7) \\ &= \frac{1}{(E-p_1)^{p_2}} \sqrt{\sigma_{p_0}^2 + \left(\frac{p_0 p_2}{E-p_1} \sigma_{p_1} \right)^2 + (p_0 \ln(E-p_1) \sigma_{p_2})^2 + ((E-p_1)^{p_2} \sigma_{p_3})^2} \quad (5.1.8)\end{aligned}$$

これにより $\Delta T \pm \delta\Delta T$ を用いて寿命、および誤差を求めた結果が表 16、17 である。

表 15: パラメーターの平均値と誤差

	p_0	σ_{p_0}	p_1	σ_{p_1}	p_2	σ_{p_2}	p_3	σ_{p_3}
NaI1	53885.2	4150.57	52.2402	1.7703	1.40042	0.0125535	-772.262	0.231658
NaI2	132441	30076.9	-12.5152	3.56357	1.66081	0.0425221	-772.467	0.512242
NaI3	56235.2	10327.9	40.3471	8.50643	1.11691	0.0386355	-813.01	5.0856

表 16: TQ 補正による誤差 (q_3 あり)

	TQ 補正後	Pick-off 補正後	誤差
	$\tau_+ = 89.6$	$\tau_+ = 116.6$	
NaI1	$\tau = 91.5$	$\tau = 119.5$	$\sigma_{TQ} = 4.7$
	$\tau_- = 91.9$	$\tau_- = 124.2$	
	$\tau_+ = 118.9$	$\tau_+ = 147.8$	
NaI2	$\tau = 119.7$	$\tau = 264.0$	$\sigma_{TQ} = 116.2$
	$\tau_- = 118.1$	$\tau_- = -$	
	$\tau_+ = 95.3$	$\tau_+ = 143.7$	
NaI3	$\tau = 100.6$	$\tau = 108.5$	$\sigma_{TQ} = 35.2$
	$\tau_- = 100.0$	$\tau_- = 123.4$	

5.1.4 Pick-off 補正による誤差

Pick-off 補正関数は

$$g(t) = q_0 \left\{ p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 + 1 \right\} \exp\left[-\frac{1}{q_1} \left\{ -\frac{p_0 p_1}{q_3} \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + \left(\frac{p_2}{q_3} + 1\right) t \right\}\right] + q_2 \quad (5.1.9)$$

と書けたので、これも式 5.1.2 により、

$$\delta g(t) = \sqrt{\sum_{i=0}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \sigma_{p_i} \right)^2} \quad (5.1.10)$$

表 17: TQ 補正による誤差 ($q_3 = 1$)

	TQ 補正後	Pick-off 補正後	誤差
Na1	$\tau_+ = 89.6$	$\tau_+ = 169.5$	$\sigma_{TQ} = 2.9$
	$\tau = 91.5$	$\tau = 169.3$	
	$\tau_- = 91.9$	$\tau_- = 166.4$	
Na2	$\tau_+ = 118.9$	$\tau_+ = 304.6$	$\sigma_{TQ} = 60.3$
	$\tau = 119.7$	$\tau = 270.1$	
	$\tau_- = 118.1$	$\tau_- = 209.8$	
Na3	$\tau_+ = 95.3$	$\tau_+ = 151.8$	$\sigma_{TQ} = 5.7$
	$\tau = 100.6$	$\tau = 146.1$	
	$\tau_- = 100.0$	$\tau_- = 146.7$	

で $\delta g(t)$ が求まる。ただし

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial p_0} &= q_0 \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ \frac{p_0 p_1}{q_3} \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + \left(\frac{p_2}{q_3} + 1 \right) t \right\} \right] \\ &\times \left[1 + \frac{p_1}{q_1 q_3} \left\{ p_0 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + p_2 + 1 \right\} \right] \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial p_1} &= q_0 \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ \frac{p_0 p_1}{q_3} \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + \left(\frac{p_2}{q_3} + 1 \right) t \right\} \right] \\ &\times \frac{p_0}{p_1} \left[\frac{t}{p_1} + \frac{p_1 + t}{q_1 q_3} \left\{ p_0 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + p_2 + 1 \right\} \right] \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial p_2} &= q_0 \exp \left[-\frac{1}{q_1} \left\{ \frac{p_0 p_1}{q_3} \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + \left(\frac{p_2}{q_3} + 1 \right) t \right\} \right] \\ &\times \left[1 - \frac{t}{q_1 q_3} \left\{ p_0 \exp \left(-\frac{t}{p_1} \right) + p_2 + 1 \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

である。以上により求まる $g(t) \pm \delta g(t)$ でフィッティングし、それにより決まる q_1 を誤差に寿命とする。結果は表 19、20 である。

表 18: パラメーターの平均値と誤差

	p_0	σ_{p_0}	p_1	σ_{p_1}	p_2	σ_{p_2}
Na1	0.3603	0.05281	546.0	232.6	0.1600	0.07330
Na2	1.166	0.07207	186.6	15.21	0.2891	0.01396
Na3	0.4911	0.06001	206.2	38.03	0.1401	0.01534

表 19: Pick-off 補正による誤差 (q_3 あり)

	TQ 補正後	Pick-off 補正後	誤差
NaI1	$\tau = 91.5$	$\tau_+ = 121.5$	$\sigma_{Pick-off} = 2.0$
		$\tau = 119.5$	
		$\tau_- = 117.2$	
NaI2	$\tau = 119.7$	$\tau_+ = 452.0$	$\sigma_{Pick-off} = 188.0$
		$\tau = 264.0$	
		$\tau_- = 296.9$	
NaI3	$\tau = 100.6$	$\tau_+ = 110.7$	$\sigma_{Pick-off} = 2.9$
		$\tau = 108.5$	
		$\tau_- = 105.6$	

表 20: Pick-off 補正による誤差 ($q_3 = 1$)

	TQ 補正後	Pick-off 補正後	誤差
NaI1	$\tau = 91.5$	$\tau_+ = 174.0$	$\sigma_{Pick-off} = 7.3$
		$\tau = 169.3$	
		$\tau_- = 162.0$	
NaI2	$\tau = 119.7$	$\tau_+ = 280.9$	$\sigma_{Pick-off} = 11.8$
		$\tau = 270.1$	
		$\tau_- = 258.3$	
NaI3	$\tau = 100.6$	$\tau_+ = 150.3$	$\sigma_{Pick-off} = 4.9$
		$\tau = 146.1$	
		$\tau_- = 141.2$	

5.1.5 系統誤差のまとめ

以上により 3 つのフィッティングによる誤差が求まったので、これらを次の式

$$\sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{calib}^2 + \sigma_{TQ}^2 + \sigma_{Pick-off}^2} \quad (5.1.14)$$

によりまとめる。結果は表 21 である。

5.2 考察

解析の結果求められたオルソポジトロニウムの寿命は、NaI1 や NaI3 では比較的良好な値ではあるが、誤差や解析途中のフィッティングの様子を考えるといささか信頼性に欠けるものである。以下

表 21: フィッティングによる系統誤差

	σ_{calib}	σ_{TQ}	$\sigma_{Pick-off}$	σ_{total}
NaI1	33.9	4.7	2.0	34.3
NaI2	99.2	116.2	188.0	242.3
NaI3	29.2	35.2	2.9	45.8

では今回の実験、および解析手法について、特に注目した次の点

- NaI2 での測定結果が他に比べて長い点
- NaI3 でコンプトン散乱がほぼ観測できなかった点
- バックグラウンドノイズ
- Pick-off 補正の問題点

について考察する。

5.2.1 NaI2 での測定

結果を見ると、NaI2 で算出される寿命は NaI1 や NaI3 のそれと比べても有意に長く、何か原因があると思われるが特定することはできなかった。しかし次に考察する NaI3 に関する問題点と同等の理由で HIGH VOLTAGE POWER SUPPLY の値を調整して実験をすればいくらか改善された可能性はあると思われる。

5.2.2 NaI3 での測定

NaI3 にて測定したデータは図 32 を見て分かるようにコンプトン散乱による検出がほとんどされていない。これは HIGH VOLTAGE POWER SUPPLY の値を調節することで改善されると思われる。すなわち ADC calibration の結果を見ると、NaI3 シンチレーターはエネルギー変換効率が他に比べて悪いことが分かる。そのため、コンプトン散乱による小さなエネルギー領域のデータがほとんど Discriminator の threshold 以下になってしまい検出されなかったと考えられる。今回 Discriminator の threshold は最低にしているので、HIGH VOLTAGE POWER SUPPLY の値を大きくして低エネルギー領域もきちんと検出されるようにすべきであった。

前述の NaI2 にも共通して言えるが、HIGH VOLTAGE POWER SUPPLY の値を 3 つのシンチレーターで統一したのは不適切であったと思われる。そうではなく、ADC calibration の結果がほとんど同じになるように HIGH VOLTAGE POWER SUPPLY の値を調節するのが望ましい。

5.2.3 バックグラウンドノイズ

データには 1275keV の γ 線のコンプトン散乱等によるバックグラウンドノイズが含まれている。Time の小さいうちはそれらは無視できるが、time が大きくなるにつれイベント数は少なくな

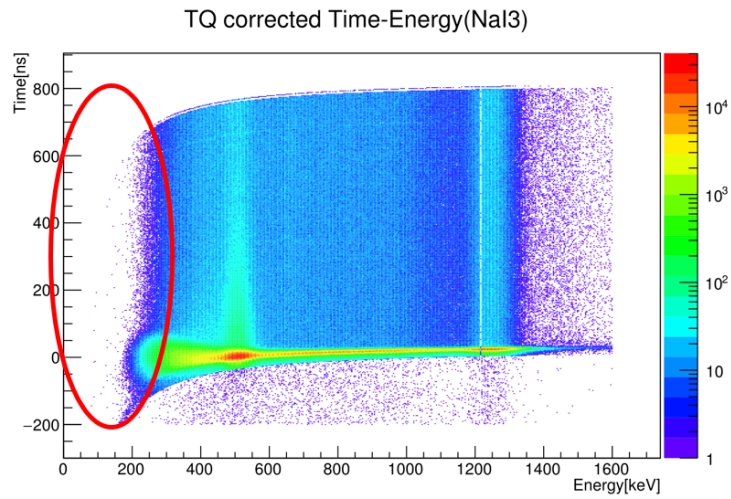


図 32

り、次の Pick-off 補正の問題でも述べるようにそれらの影響が出てしまう。ただ、Pick-off 補正で行うような、 $Time = 0$ において 511keV のガンマ線とそのコンプトン散乱のみの分布と見なして $Time > 0$ の領域でそれらを差し引く、といった操作はバックグラウンドノイズのみと見なせる分布が無いと難しい。バックグラウンドノイズの影響を差し引く方法を確立するのは今後の課題となる。

5.2.4 Pick-off 補正の問題点

Pick-off 補正にはいくつか問題がある。これらについて考察を行う。

1. $f(t)$ 値の不正確さ

図 33 のように、 $Time$ が大きくなるにしたがって 511keV のピークはノイズに埋もれてしまう。このためガウシアンによるフィッティングは不正確となり、したがって $f(t)$ の値も図 34 のように、予想されるきれいな単調減少をしないこともしばしばである。

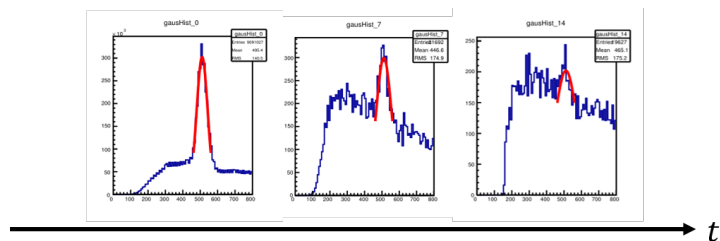


図 33

本来 511keV のイベント数をフィッティングしたガウシアン面積比をそのまま用いて $f(t)$

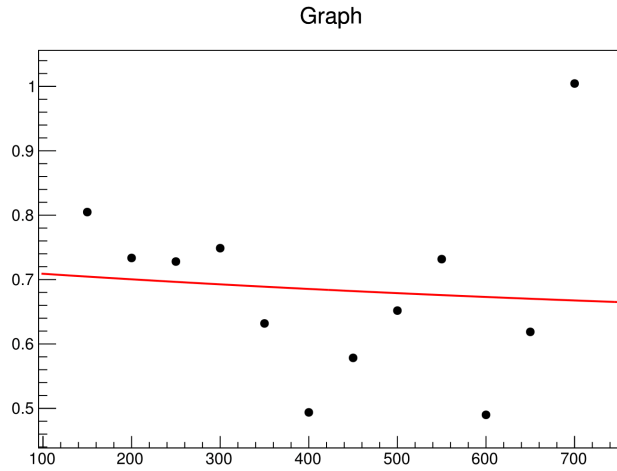


図 34: ガウシアン面積比を用いた時の $f(t)$ プロットの失敗例

を求めるが、これだと t が大きくなるほど不正確になってしまう。そこで今回はガウシアン標準偏差は変化しないと仮定する、すなわち解析の実装的にはガウシアンの高さの比のみを使って $f(t)$ を求める、という方法を取った。これを仮定せずに純粋な面積比を用いるならばバックグラウンドノイズを差し引くなどの工夫が必要となるであろう。

2. $g(t)$ のフィッティングの不安定さ

$f(t)$ のプロット数やその間隔、あるいは $g(t)$ の初期値などを妥当と思われる範囲でわずかに変化させるだけでも、フィッティングの結果得られるパラメーターの値は大きく変わってしまう。1、2桁のオーダー単位で値が変化することも珍しくはない程であった。 q_3 を導入し、パラメーターを増やすとこの問題はさらに顕著になる。以上の理由で Pick-off 補正後の値には信頼性が欠けていると言わざるを得ない。

3. q_3 について Pick-off 補正のフィッティング関数に導入した q_3 というパラメーターについて、その妥当性を考察する。まず、その元の定義は $\alpha(t)$ であり

$$\frac{dN_{2\gamma\text{under}511}}{dt} = \alpha(t) \frac{dN_{2\gamma}}{dt} \quad (5.2.15)$$

である。また、ここに

$$N_{2\gamma}(t) \equiv N_{2\gamma\text{under}511}(t) + N_{2\gamma\text{pass}}(t) \quad (5.2.16)$$

である。これは

Pick-off で生成されて届く 2γ 線の数

≡ 左辺の内コンプトン散乱したもの数 + コンプトン散乱されず届く数

である。ここで $N_{2\gamma\text{under}511}(t)$ と $N_{2\gamma\text{pass}}(t)$ は減少関数と仮定する。これは実験のデータからも妥当と思われる。すると、

$$N_{2\gamma}(0) - N_{2\gamma}(t) > N_{2\gamma\text{under}511}(0) - N_{2\gamma\text{under}511}(t) > 0 \quad (5.2.17)$$

が成立。ここで式 5.2.15 の $\alpha(t)$ を定数 q_3 として、両辺を t で積分して整理すると

$$q_3 \{N_{2\gamma}(0) - N_{2\gamma}(t)\} = \{N_{2\gamma\text{under}511}(0) - N_{2\gamma\text{under}511}(t)\} \quad (5.2.18)$$

となり、したがって式 5.2.17 よりおおよそ $0 < q_3 < 1$ であると推定できる。ところが、実際にフィッティングで得られた値は NaI1 NaI3 で $1.691 \times 10^6 \pm 1.414$ 、 0.7268 ± 0.3689 、 268.2 ± 142.8 であり、NaI1 と NaI3 に関してはかなり大きな値となっており、上の考察に反している。すなわち $\alpha(t)$ を定数としたことや、 $\alpha(t)$ の定義自体が妥当でない可能性がある。

6 結論

表 22: 最終的な寿命

	寿命 [ns](q_3 あり)	寿命 [ns]($q_3 = 1$)
NaI1	$\tau = 119.5 \pm 5.0 \pm 34.3$	$\tau = 169.3 \pm 5.2 \pm 9.9$
NaI2	$\tau = 264.0 \pm 58.7 \pm 242.3$	$\tau = 270.1 \pm 17.4 \pm 64.7$
NaI3	$\tau = 108.5 \pm 11.0 \pm 45.8$	$\tau = 146.1 \pm 15.3 \pm 8.1$

本実験では NaI1、NaI3 のシンチレーターによる結果などで部分的に QED を肯定し得る値を得たが、データの補正によるフィッティングの様子などを考慮すると信頼性に欠ける結果であった。

付録 A 1.1 の補足

以下、基本的に [4] の記法に従っている。

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (\text{A.0.1})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.2})$$

A.1 スピン

スピンは

$$[j_i, j_j] = i\varepsilon_{ijk} j_k \quad (\text{A.1.3})$$

の代数に従う。

電子・陽電子はスピンを持ち、 $j = \frac{1}{2}$ が知られている。

$$j_+ |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle = 0 \quad (j_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 \pm ij_2) \quad m \text{ は } j_3 \text{ の固有値}) \quad (\text{A.1.4})$$

j と可換な $[j'_i, j'_j] = i\varepsilon_{ijk} j'_k$ に対し、 $J_i := j_i + j'_i$ を用いて

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k \quad (\text{A.1.5})$$

が成立するので、粒子 1, 粒子 2 の合成スピンを考える。 J_3 の固有値が最大の状態は

$$|J = 1, M = 1\rangle = |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle_2 \quad (M \text{ は } J_3 \text{ の固有値}) \quad (\text{A.1.6})$$

である。 J_- を繰り返し用いることで、 $|J = 1, M = 0\rangle$ と $|J = 1, M = -1\rangle$ を得る。一般に

$$j_- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle \quad (\text{A.1.7})$$

を約束して、

$$\begin{aligned} J_- |J = 1, M = 1\rangle &= (j_-^{(1)} + j_-^{(2)}) |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle_1 \otimes |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle_2 \\ \sqrt{2} |J = 1, M = 0\rangle &= |j = \frac{1}{2}, m = \frac{-1}{2}\rangle_1 |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle_2 + |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle_1 |j = \frac{1}{2}, m = \frac{-1}{2}\rangle_2 \\ |J = 1, M = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|j = \frac{1}{2}, m = \frac{-1}{2}\rangle_1 |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle_2 + |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle_1 |j = \frac{1}{2}, m = \frac{-1}{2}\rangle_2 \right) \end{aligned}$$

$|J = 1, M = -1\rangle$ はさらに J_- をかけて同様の方法で得られる。

$|\uparrow\rangle := |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle$ 及び $|\downarrow\rangle := |j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle$ として、電子、陽電子の区別を-,+ の記号でつけると、式 (1.1.1) を得る。

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ + |\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+) \\ |\downarrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ \end{cases}$$

この三組に対して $|J = 0, M = 0\rangle$ のみが独立である。この条件から、次式を得る。

$$|J = 0, M = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ - |\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+)$$

このようにしてスピン $\frac{1}{2}$ の 2 粒子の合成スピンの独立な状態をすべて求められる。特に $J = 1$ (式 (1.1.1)) のものをスピン三重項、 $J = 0$ (式 (1.1.2)) のものをスピン一重項と呼ぶ。これらは前者がスピンについて対称であり、後者が反対称である。オルソポジトロニウムは前者である。他の章・節では、軌道角運動量との区別を明確にするため j の代わりに s を用いる。

A.2 荷電共役変換

A.2.1 ポジトロニウムの変換

運動量 \mathbf{p} , スピン s をもつ自由な電子、陽電子の生成演算子をそれぞれ $b^\dagger(\mathbf{p}, s)$, $d^\dagger(\mathbf{p}, s)$ とする。Dirac 場に対し、 C 変換を $\psi \xrightarrow{C} \psi^C = -i\gamma^2(\psi^\dagger)^T$ で定義する。なお、 $C|0\rangle = |0\rangle$ とする。ユニタリーでもあるとする。今、

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{s=\pm} \{b(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s)e^{-ipx} + d^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s)e^{ipx}\} \quad (\text{A.2.8})$$

ここで、 $(\not{p}-m)u(\mathbf{p}, s) = 0$ 及び $v(\mathbf{p}, s) := -i\gamma^2 u^*(\mathbf{p}, s)$ としている。ちなみにこれは $(\not{p}+m)v(\mathbf{p}, s) = 0$ を満たしている。こうすることで、

$$\psi^C(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{s=\pm} \{d(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s)e^{-ipx} + b^\dagger(\mathbf{p}, s)v(\mathbf{p}, s)e^{ipx}\} \quad (\text{A.2.9})$$

したがって、

$$Cd^\dagger(\mathbf{p}, s)C^{-1} = b^\dagger(\mathbf{p}, s) \quad (\text{A.2.10})$$

が成立。

束縛状態は良い近似として、非相対論的なシュレディンガー方程式の解の波動関数で重み付けして記述できる。ポジトロニウムは、 $b^\dagger(\mathbf{p}, s)$ と $d^\dagger(\mathbf{p}, s)$ を用いて、

$$|Ps\rangle = \int d^3p \sum_{s,s'} f(|\mathbf{p}|^2) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \sigma_{s,s'} b^\dagger(\mathbf{p}, s) d^\dagger(-\mathbf{p}, s') |0\rangle \quad (\text{A.2.11})$$

と書ける。 $\sigma_{s,s'}$ はスピンの波動関数で、 p -Ps のとき反対称、 o -Ps のとき対称。ハットは単位ベクトルを意味し、方向の依存性であることを明示するためにつけている。左から C をかけると、

$$\begin{aligned}
C|\text{Ps}\rangle &= \int d^3p \sum_{s,s'} f(|\mathbf{p}|^2) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \sigma_{s,s'} d^\dagger(\mathbf{p}, s) b^\dagger(-\mathbf{p}, s') |0\rangle \\
&= - \int d^3p \sum_{s,s'} f(|\mathbf{p}|^2) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \sigma_{s,s'} b^\dagger(-\mathbf{p}, s') d^\dagger(\mathbf{p}, s) |0\rangle \\
&= - \int d^3p \sum_{s,s'} f(|\mathbf{p}|^2) Y_{lm}(-\hat{\mathbf{p}}) \sigma_{s,s'} b^\dagger(\mathbf{p}, s') d^\dagger(-\mathbf{p}, s) |0\rangle \\
&= (-1)(-1)^{S+1}(-1)^l \int d^3p \sum_{s,s'} f(|\mathbf{p}|^2) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \sigma_{s,s'} b^\dagger(\mathbf{p}, s) d^\dagger(-\mathbf{p}, s') |0\rangle \\
&= (-1)^{S+l} |\text{Ps}\rangle
\end{aligned} \tag{A.2.12}$$

本実験とは直接関係しないが、 P 変換 も定義し、固有値を考える。ユニタリーな P 変換は、

$$\begin{cases} P b^\dagger(\mathbf{p}, s) P^{-1} = b^\dagger(-\mathbf{p}, s) \\ P d^\dagger(\mathbf{p}, s) P^{-1} = d^\dagger(-\mathbf{p}, s) \end{cases}$$

を同時に満たし $\psi(x)$ にうまく (そうあってほしいように) 作用するようには定義できない。 P 変換で位相 η 分の変化があるとして

$$\begin{cases} P b(\mathbf{p}, s) P^{-1} = \eta_b b(-\mathbf{p}, s) \\ P d(\mathbf{p}, s) P^{-1} = \eta_d d(-\mathbf{p}, s) \end{cases} \tag{A.2.13}$$

を考えると、

$$\begin{aligned}
P\psi(x)P^{-1} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_s \left(\eta_b b(-\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{-ipx} + \eta_d^* d^\dagger(-\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{ipx} \right) \\
\tilde{\mathbf{p}} &:= (p^0, -\mathbf{p}) \text{ とすると、} \begin{cases} u(\mathbf{p}, s) = \gamma^0 u(\tilde{\mathbf{p}}, s) \\ v(\mathbf{p}, s) = -\gamma^0 v(\tilde{\mathbf{p}}, s) \end{cases} \quad \text{なので} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_s \left(\eta_b b(\tilde{\mathbf{p}}, s) \gamma^0 u(\tilde{\mathbf{p}}, s) e^{-i\tilde{\mathbf{p}} \cdot (t, -\mathbf{x})^T} - \eta_d^* d^\dagger(\tilde{\mathbf{p}}, s) \gamma^0 v(\tilde{\mathbf{p}}, s) e^{i\tilde{\mathbf{p}} \cdot (t, -\mathbf{x})^T} \right) \tag{A.2.14} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_s \left(\eta_b b(\tilde{\mathbf{p}}, s) \gamma^0 u(\tilde{\mathbf{p}}, s) e^{-i\tilde{\mathbf{p}} \cdot (t, -\mathbf{x})^T} - \eta_d^* d^\dagger(\tilde{\mathbf{p}}, s) \gamma^0 v(\tilde{\mathbf{p}}, s) e^{i\tilde{\mathbf{p}} \cdot (t, -\mathbf{x})^T} \right) \tag{A.2.15}
\end{aligned}$$

パリティ変換で形を保つには $\eta_d^* = -\eta_b$ とすればよく、

$$P\psi(x)P^{-1} = \eta_b \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) \tag{A.2.16}$$

これを P 変換の定義とする。

$\eta_d^* = -\eta_b$ を変形すれば

$$\eta_b \eta_d = -1 \tag{A.2.17}$$

これは電子と陽電子が逆の内部パリティをもつことを意味する。

$$\begin{aligned}
P|\text{Ps}\rangle &= (-1)^l \eta_b^* \eta_d^* |\text{Ps}\rangle \\
&= (-1)^{l+1} |\text{Ps}\rangle
\end{aligned} \tag{A.2.18}$$

ポジトロニウムの P 固有値には、軌道角運動量からの寄与 $(-1)^l$ に加えて内部パリティからの寄与 (-1) があり、 P の固有値は -1 である。 $l = 0$ であっても、パリティ演算子の固有値が 1 とは限らない。

A.2.2 ラグランジアンと光子の変換

$$\begin{aligned} C\psi C^{-1} &= -i\gamma^2(\psi^\dagger)^T \\ &= -i(\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T \end{aligned} \quad (\text{A.2.19})$$

$$\begin{aligned} C\psi^\dagger C^{-1} &= i(\psi)^T\gamma^{2\dagger} \\ &= -i(\gamma^2\psi)^T \end{aligned} \quad (\text{A.2.20})$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned} C\bar{\psi}\psi C^{-1} &= (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T(-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T \\ &= (\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2\psi)^T \\ &= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2\psi \\ &= \bar{\psi}\psi \end{aligned} \quad (\text{A.2.21})$$

1 行目から 2 行目ではフェルミ粒子が反可換であること、3 行目から 4 行目では γ 行列の性質を用いた。

$$\begin{aligned} C\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi C^{-1} &= (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T\gamma^\mu\partial_\mu(-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T \\ &= ((\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^0\gamma^2(\gamma^\mu)^T\gamma^0\gamma^2\psi)^T \quad (\because \text{フェルミオンは反可換。}) \\ &= (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^0\gamma^2(\gamma^\mu)^T\gamma^0\gamma^2\psi \\ &= -(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi \quad (\because \text{成分ごとの計算}) \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \end{aligned} \quad (\text{A.2.22})$$

も言える。全微分項は作用に影響しない \mathcal{L} の不定性で落とせるから、以上より自由 Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad (\text{A.2.23})$$

は C 変換で不変。(A.2.21) と同様に

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\psi C^{-1} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{A.2.24})$$

QED のラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{A.2.25})$$

$A_\mu C^{-1} = -A_\mu(x)$ と定義すると、 \mathcal{L}_{QED} が C 変換で不変。

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{r=0}^3 \left(a^r(\mathbf{k})\epsilon_\mu^r(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^{r\dagger}(\mathbf{k})\epsilon_\mu^{r*}(\mathbf{k})e^{ikx} \right) \quad (\text{A.2.26})$$

ここで ϵ_μ^r は偏極ベクトルで、 r は基底のラベル。以上より

$$C a_r^\dagger(\mathbf{k}) C^{-1} = -a_r^\dagger(\mathbf{k}) \quad (\text{A.2.27})$$

また、 $\mathcal{L}_{int} = -e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ が C 変換で不変となることから S 行列は C と可換となり、

$$\begin{cases} C |f\rangle = (-1)^f |f\rangle \\ C |i\rangle = (-1)^i |i\rangle \end{cases} \quad \text{とすると、}$$

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= \langle f | C^\dagger C S | i \rangle \\ &= (-1)^{i+f} \langle f | S | i \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.2.28})$$

となるので、QED に従う過程において C の固有値は保存する。

A.3 相対論からの要請

始状態を i 、終状態を f としたとき、遷移確率は

$$dw_{fi} = \prod_{i,f} V \left(\frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \left(\frac{1}{2E_i V} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \quad (\text{A.3.29})$$

であり、平面波の積分から現れる $(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)$ のために過程の前後で 4 元運動量が保存する。

2 電子 \rightarrow 1 光子の過程は不可能。

$$p_{i1}^\mu + p_{i2}^\mu = k_f^\mu \quad \text{から、}$$

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_f \\ \sqrt{m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2} + \sqrt{m_2^2 + |\mathbf{p}_2|^2} &= |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2| \end{aligned}$$

二乗して $m_1 > 0$ とすれば、

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_2|^2 + 2|\mathbf{p}_1| \cdot |\mathbf{p}_2| &< |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|^2 = |\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_2|^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \\ |\mathbf{p}_1| \cdot |\mathbf{p}_2| &< \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.3.30})$$

これは矛盾。

p -Ps からの 2γ 線 は 511 keV の単一スペクトル。

始状態の電子・陽電子の運動量は実験室に対して十分小さいとする。 ($|\mathbf{p}| \simeq 0$)

$$p_{i1}^\mu + p_{i2}^\mu = k_{f1}^\mu + k_{f2}^\mu \quad \text{から、}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{m_e^2 + |\mathbf{p}|^2} + \sqrt{m_e^2 + |\mathbf{p}|^2} &= E_\gamma + E_\gamma \\ m_e &\simeq E_\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.3.31})$$

o -Ps からの 3γ 線 は 511 keV 未満の連続スペクトル。

始状態の電子・陽電子の運動量は実験室に対して十分小さいとする。 ($|\mathbf{p}| \approx 0$)

終状態の光子数を N とし、最も大きなエネルギーをもつ光子の運動量を \mathbf{k}_{\max} とすると、*9

$$p_{i1}^\mu + p_{i2}^\mu = \sum_{n=1}^N k_{fn}^\mu \text{ から、}$$

$$\begin{aligned} 2m_e &\approx \sum_n |\mathbf{k}_n| \\ &= |\mathbf{k}_{\max}| + \sum_{\text{other}} |\mathbf{k}_n| \\ &> |\mathbf{k}_{\max}| + \left| \sum_{\text{other}} \mathbf{k}_n \right| \\ &= 2|\mathbf{k}_{\max}| \\ m_e &> |\mathbf{k}_{\max}| \end{aligned} \tag{A.3.32}$$

*9 max でなくてもなんら問題はない。

参考文献

- [1] 2016 年度前期 A2 レポート
<http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/A2/reports/a2report16a.pdf>
- [2] 他年度 A2 レポート
<http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/A2/reports/>
- [3] B.A.Kniehl, A.V.Kotikov and O.L.Veretin: " Orthopositoronium lifetime at $O(\alpha)$ and $O(\alpha^3 \ln \alpha)$ in closed form " ,[arXiv:0909.1431v2[hep-ph]] (2009)
- [4] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder: "An Introduction to Quantum Field Theory" Westview Press (1995)
- [5] 九後汰一郎: 『ゲージ場の量子論 1』培風館 (1989)
- [6] 2018 年度前期 A2 レポート
<http://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/A2/reports/a2report18a.pdf>