

# 2021 年度前期 a2 課題演習レポート

片岡敬涼, 高原彰吾, 松平広康, 吉岡龍

2021 年 12 月 3 日

## 1 理論

### 1.1 Dirac 場の量子化

\*1QED のラグランジアンは以下の表式によってあたえられる。\*2\*3 $\psi$  を Dirac 場として

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi + eA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1)$$

ただしここで  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  は電磁場テンソルである。

これを量子化して

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_p^s u^s(p) \exp(-ipx) + b_p^{s\dagger} v^s(p) \exp(ipx)) \quad (2)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s (a_p^{s\dagger} \bar{u}^s(p) \exp(ipx) + b_p^s \bar{v}^s(p) \exp(-ipx)) \quad (3)$$

となる。ここで  $u^s(p), v^s(p)$  はフーリエ変換された dirac 方程式の二つの独立解であって、

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \quad (4)$$

$$(-\not{p} - m)v(p) = 0 \quad (5)$$

を満たす。\*4 また、 $a^s(p), b^s(p)$  はそれぞれが運動量  $p$  の電子と陽電子の消滅演算子であり、 $a^{s\dagger}(p), b^{s\dagger}(p)$  はそれぞれが運動量  $p$  の電子と陽電子の生成演算子である。

---

\*1 ここは参考文献 [3] の p.362 を参考にした

\*2 以下、理論のパートでは特に断りが無い限り自然単位系を採用する。

\*3 以下では  $m$  は基本的に陽電子, 電子の質量を表す

\*4 この表式は (2),(3) を dirac 方程式に代入すればわかる

## 1.2 荷電共役変換

荷電共役変換とは一言で表すと電子と陽電子の電荷を入れ替える変換である。荷電共役変換の演算子を  $\mathcal{C}$  として、荷電共役変換の定義に基づいて以下を得る。<sup>\*5\*6</sup>

$$\mathcal{C}a^s(p)\mathcal{C}^{-1} = b^s(p) \quad (6)$$

$$\mathcal{C}b^s(p)\mathcal{C}^{-1} = a^s(p) \quad (7)$$

ここでスピンの  $s_1$  の陽電子とスピンの  $s_2$  である電子からなる状態を  $|s_1, s_2\rangle$  で表すとして (二つの粒子の運動量はそれぞれ0であるとする)

$$|s_1, s_2\rangle = a^{s_1\dagger}(0)b^{s_2\dagger}(0)|0\rangle \quad (8)$$

であるが、この系に荷電共役変換を施すと反交換関係  $\{a^{s_1\dagger}(\mathbf{p}_1), b^{s_2\dagger}(\mathbf{p}_2)\} = 0$  に注意して

$$\begin{aligned} \mathcal{C}|s_1, s_2\rangle &= \mathcal{C}a^{s_1\dagger}(0)\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}b^{s_2\dagger}(0)\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}|0\rangle \\ &= b^{s_1\dagger}(0)a^{s_2\dagger}(0)|0\rangle \\ &= -a^{s_2\dagger}(0)b^{s_1\dagger}(0)|0\rangle \\ &= -|s_2, s_1\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

となる。次に光子の系における荷電共役変換を考えよう。

まず、量子化された電磁場は生成・消滅演算子を用いて以下のように書ける。

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r (a_{\mathbf{p}}^r \epsilon_\mu^r(\mathbf{p}) \exp(-ipx) + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \epsilon_\mu^{*r}(\mathbf{p}) \exp(ipx)) \quad (10)$$

ここで、 $\epsilon_\mu^r(\mathbf{p})$  は偏光ベクトルであり、 $a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}$  は光子の生成・消滅演算子である。また、 $r$  は 1,2 をとる。また、この時電流は以下で定義されている。

$$j^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad (11)$$

$$= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu \quad (12)$$

ここで、荷電共役変換を施すと  $\mathcal{C}j^\nu\mathcal{C}^{-1} = -j^\nu$  となるはずなので、電磁ポテンシャル  $A$  について荷電共役変換を施すと、 $\mathcal{C}A^\mu\mathcal{C}^{-1} = -A^\mu$  となる。

以上の議論から、光子の生成・消滅演算子の荷電共役変換に対する振る舞いは

$$\mathcal{C}a_{\mathbf{p}}^r\mathcal{C}^{-1} = -a_{\mathbf{p}}^r, \mathcal{C}a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}\mathcal{C}^{-1} = -a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \quad (13)$$

となる。よって  $n$  個の光子からなる系の荷電共役変換についての固有値は  $(-1)^n$  となる。

$$a_{\mathbf{p}_1}^{r_1\dagger} \dots a_{\mathbf{p}_n}^{r_n\dagger} |0\rangle = (-1)^n a_{\mathbf{p}_1}^{r_1\dagger} \dots a_{\mathbf{p}_n}^{r_n\dagger} |0\rangle \quad (14)$$

<sup>\*5</sup> ここは参考文献 [3]p.377 を参考にした

<sup>\*6</sup> この  $\mathcal{C}$  は荷電共役行列 (dirac 表示の下で  $C = i\gamma^2\gamma^0$ ) とは異なることに注意  $\mathcal{C}$  は演算子に、 $C$  はスピノルに作用する

### 1.3 ポジトロニウムの性質

ポジトロニウムは電子と陽電子が相互作用し、束縛状態を形成している状態である。電子と陽電子はスピンの合成を行うと一重項状態と三重項状態が生成する。

ここで上向きスピンを $\uparrow$ , 下向きスピンを $\downarrow$ で表す。二粒子系で陽電子と電子それぞれのスピン状態に注目する時は右側に陽電子のスピンを、左側に電子のスピンを表すものとする。

この時スピン3重項状態は

$$|S = 1, s_z = 1\rangle = |\uparrow, \uparrow\rangle \quad (15)$$

$$|S = 1, s_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle) \quad (16)$$

$$|S = 1, s_z = -1\rangle = |\downarrow, \downarrow\rangle \quad (17)$$

である。

スピン3重項状態に対して荷電共役変換を行うと(9)の結果より、表式が $-1$ 倍される。故に3重項状態の荷電共役変換に対する固有値は $-1$ である。

一方でスピン一重項状態は

$$|S = 0, s_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle) \quad (18)$$

であるが、この場合に荷電共役変換を行うと、(9)の結果より、表式は変化しない。故に一重項状態の荷電共役変換に対する固有値は $1$ である。

三重項状態のポジトロニウムをオルソポジトロニウム (以下 o-Ps), 一重項状態のポジトロニウムをパラポジトロニウム (以下 p-Ps) と呼ぶ。ポジトロニウムが崩壊し、光子になる過程を考える。この過程において注目している系の荷電共役変換の固有値は変化しないとする。先の議論から p-Ps は偶数個の光子に、o-Ps は奇数個の光子へと崩壊することがわかる。特に、運動学的条件からポジトロニウムが1個の光子に崩壊するということはあり得ない。<sup>\*7</sup>そのため、最も多く観測される崩壊は以下の二つのパターンである。

- p-Ps が2個の光子に崩壊する (511KeV の単一スペクトルが観測される)
- o-Ps が3個の光子に崩壊する (連続スペクトルが観測される)

以上の二つの崩壊をファイマンダイアグラムに記すと図1,2のようになる。<sup>\*8</sup>

### 1.4 寿命の計算

#### 1.4.1 基礎事項の定義

- S 行列

<sup>\*7</sup> このことを背理法で示そう。まず適当に座標変換を施すことによって系全体の運動量、この場合はポジトロニウムの運動量が0にすることができる。この系を $\Gamma$ 系としよう。もしもポジトロニウムが一つの光子に崩壊するとしよう。この時、光子は相対論の要請からどの系から見たとしても光速 $c$ で運動する。したがって、運動量を必ず有する。よって $\Gamma$ 系から見た時、光子は運動しており $\Gamma$ 系の運動量は0ではない。これは運動量保存則に反し不合理である。したがってポジトロニウムが1個の光子へと崩壊することはあり得ない。

<sup>\*8</sup> ただし以下のダイアグラムでは、光子の入れかえについては同一視している。実際には p-Ps $\rightarrow 2\gamma$  の崩壊では2個のダイアグラムが、o-Ps $\rightarrow 3\gamma$  の崩壊では $3! = 6$ 個のダイアグラムが生じる

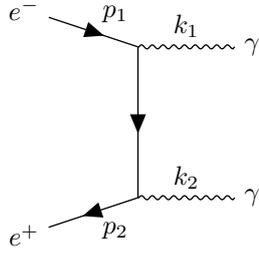


図1 p-Ps $\rightarrow$ 2 $\gamma$ の崩壊

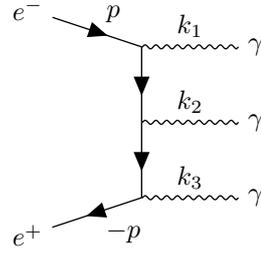


図2 o-Ps $\rightarrow$ 3 $\gamma$ の崩壊

散乱の過程を考える際に計算すべき確率は始状態  $|i\rangle$  から終状態  $|f\rangle$  へと至る確率である。始状態、終状態は時間発展演算子で繋がれるため以下で示す量の絶対値の2乗が求めるべき確率である。

$$\langle i|S|f\rangle$$

このようにして、S 行列を定義する。

ここで、何も反応しないという場合を除いて計算したいので、

$$S = \mathbf{1} + iT$$

とする。

•  $\mathcal{M}$  行列<sup>\*9</sup>

散乱の過程でエネルギー・運動量は保存する。始状態の時の系全体のエネルギー・運動量ベクトルを  $P_i$ 、終状態のときのそれを  $P_f$ 、また始状態における各粒子の運動量ベクトルを  $\mathbf{p}_i$ 、終状態の時のそれを  $\mathbf{k}_f$  とする。このとき、 $|f\rangle = |k_1 \cdots k_m\rangle$ 、 $|i\rangle = |p_1 \cdots p_n\rangle$  である。終状態、始状態においては各々の粒子は互いに十分遠くに離れていて相互作用が無視でき、各粒子の1粒子状態の積で表せるものとする。<sup>\*10</sup>このとき以下で  $\mathcal{M}$  行列を定義する。

$$\left[ \prod_{f=1}^m \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f}} \right] \left[ \prod_{i=1}^n \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i}} \right] \langle i|iT|f\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}(i \rightarrow f) \quad (19)$$

ここで、左辺で各1粒子状態について因子  $\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}}$  を乗じたのは、ケットをローレンツ不変にすることで  $\mathcal{M}$  をローレンツ不変にするためである。

次に、特定の始状態から特定の終状態への遷移が生じる確率  $|\langle i|iT|f\rangle|^2$  を計算する。ここで全時空の超体積を  $[V.T] = \int dx^4$  と記す。また、 $\delta^4(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \exp(ip \cdot 0) = \frac{[V.T]}{(2\pi)^4}$  に注意する。

$$\begin{aligned} |\langle i|iT|f\rangle|^2 &= \frac{1}{\left[ \prod (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f} \right] \left[ \prod (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i} \right]} (2\pi)^8 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}(i \rightarrow f) \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}^*(i \rightarrow f) \\ &= \frac{1}{\left[ \prod (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f} \right] \left[ \prod (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i} \right]} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}(i \rightarrow f) (2\pi)^4 \delta^4(0) \mathcal{M}^*(i \rightarrow f) \\ &= \frac{1}{\left[ \prod (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f} \right] \left[ \prod (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i} \right]} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |\mathcal{M}(i \rightarrow f)|^2 [V.T] \end{aligned} \quad (20)$$

<sup>\*9</sup> ここは参考文献 [4] の第五章を参考にした。

<sup>\*10</sup> すなわち生成・消滅演算子と真空ケットを用いて  $|f\rangle = a^\dagger(k_1) \cdots a^\dagger(k_m) |0\rangle$  と書ける。始状態についても同様。

- Decay width

単位時間あたりに一つの粒子が複数の粒子へと崩壊する確率  $\Gamma$  を求める。まず単位時間あたりの崩壊確率は、 $\int dt = T$  として、

$$\Gamma = \frac{1}{T} (\text{崩壊が生じる確率})$$

であり、崩壊が生じる確率については、終状態での粒子の運動量について  $|\langle i | iT | f \rangle|^2$  を積分すればよい。また、崩壊する粒子の質量を  $M$  として、重心系においては  $E_p = M$  である。ただし、このままでは始状態と終状態のケットが規格化されていない。そのため  $V = \int d^3x$  として全体を  $\frac{V}{(2\pi)^3}$  で割る必要がある。<sup>\*11</sup> また、 $VT = [V.T]$  である。よって (20) を用いて  $\Gamma$  は重心系において

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{(2\pi)^3}{VT} \int \left[ \prod_{f=1}^m \frac{d^3\mathbf{k}_f}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f}} \right] \frac{1}{(2\pi)^3 2E_p} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |\mathcal{M}(i \rightarrow f)|^2 [V.T] \\ &= \int \left[ \prod_{f=1}^m \frac{d^3\mathbf{k}_f}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f}} \right] \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)}{2M} |\mathcal{M}(i \rightarrow f)|^2 \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、この  $\Gamma$  を崩壊の種類について足し上げたものを崩壊率 (decay rate) と呼ぶ。以上より単位時間あたりの崩壊確率として崩壊率が求まるので、この逆数を取ることによって寿命が求まる。

## 1.5 束縛状態の取り扱い

束縛系への対処は難しい、今回の場合は参考文献 [1] の 5.3 の議論に従って、非相対論極限での結果を用いることにする。まず質量が等しい2つの物体から成る系は重心座標と相対座標の組み合わせで記述される。そして、2つの物体間に働く力のポテンシャルが既知である時、非相対論的極限の下で相対座標の Schrödinger 方程式を解けばよい。この時の解を  $\psi(\mathbf{r})$  とする。この解を運動量表示で書けば以下ようになる。

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{r} | \psi \rangle \\ &= \int d^3\mathbf{k} \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \psi \rangle \\ &= \int d^3\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$  は”相対運動量が  $\mathbf{k}$  である確率”を表しているともみなせる。よって  $P_s$  のスピン状態を  $|spin\rangle$  で表せば<sup>\*12</sup>、束縛状態  $|P_s\rangle$  は非相対論極限の下で

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2M}} |P_s\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) |spin\rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} |spin\rangle \end{aligned} \quad (23)$$

<sup>\*11</sup>  $|\mathbf{k}\rangle$  を系の運動量が  $\mathbf{k}$  である状態として、 $\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = \delta^3(0)$  であるが、 $\delta^3(0) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \exp(+ix \cdot 0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$  であるから。

<sup>\*12</sup>  $|spin\rangle$  には (15)~(18) のいずれかが代入される

となる。ここで  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  は電子, 陽電子の相対運動量である。また、 $M$  は束縛状態であるポジトロニウムの質量であり、今回は  $2m$  である。加えて、非相対論極限の近似として質量  $m$  の物体のエネルギーを  $E = m$  と近似している。<sup>\*13</sup>。よって崩壊後の状態を  $|n\gamma\rangle$  として、束縛状態が  $|n\gamma\rangle$  へと崩壊する際の  $\mathcal{M}$  行列は<sup>\*14</sup>

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(Ps \rightarrow n\gamma) &= \langle n\gamma | Ps \rangle \\ &= \sqrt{2M} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} \mathcal{M}(\text{spin} \rightarrow n\gamma) \\ &= \frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{2m}\sqrt{2m}} \mathcal{M}(\text{spin} \rightarrow n\gamma) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^*(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{0}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{M}} \mathcal{M}(\text{spin} \rightarrow n\gamma) \psi^*(0)\end{aligned}\quad (24)$$

ここで、3行目から4行目の変換については  $\mathbf{r} = 0$  とした際の、 $\psi(\mathbf{r})$  を運動量空間へ展開した表式を用いている。

最後にパラポジトロニウムの decay width を計算しよう<sup>\*15</sup>。一般的に質量が  $m$ 、運動量が  $p$  の物体が、質量が  $m_1$ 、運動量が  $p_1$  の物体と質量が  $m_2$ 、運動量が  $p_2$  の物体へと分裂する場合の decay width を求める。まず必要な記号を定義する。<sup>\*16</sup>

$$\begin{aligned}p &= (m, 0), p_1 = (E_1, \mathbf{k}_1), p_2 = (E_2, \mathbf{k}_2) \\ E_1 &= \frac{1}{2m} M(m, m_1, m_2), E_2 = \frac{1}{2m} M(m, m_2, m_1) \\ |\mathbf{k}_1| &= \frac{1}{2m} \lambda^{\frac{1}{2}}(m, m_1, m_2), |\mathbf{k}_2| = \frac{1}{2m} \lambda^{\frac{1}{2}}(m, m_2, m_1) \\ M(a, b, c) &= a^2 + b^2 - c^2 \\ \lambda^{\frac{1}{2}}(a, b, c) &= \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2}\end{aligned}$$

decay width  $\Gamma$  はこのとき

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_1}} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2) |\mathcal{M}|^2 \quad (25)$$

ここで

$$\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_2}} = d^4 p_2 \theta(p_2^0) \delta(p_2^2 - m_2^2)$$

より、

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{2m(2\pi)^2} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_{\mathbf{k}_1}} d^4 p_2 \theta(p_2^0) \delta(p_2^2 - m_2^2) \delta^4(p - p_1 - p_2) |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{2m(2\pi)^2} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_{\mathbf{k}_1}} \delta((p - p_1)^2 - m_2^2) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}\quad (26)$$

<sup>\*13</sup> (23) の左辺に登場する  $\sqrt{2M}$  は Lorentz 不変にするための因子を同様に近似したために登場する

<sup>\*14</sup> ここでは、 $\mathcal{M}(Ps \rightarrow n\gamma)$  は (23) に登場する  $\mathbf{k}$  によらないものと仮定している

<sup>\*15</sup> 以下の計算は参考文献 [6] を参考にした

<sup>\*16</sup>  $E_1, E_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  については、エネルギー・運動量保存則と  $m_1^2 = p_1^2, m_2^2 = p_2^2$  を連立することで求まる。

また、重心系を取れば  $\mathbf{p} = 0$  であり  $E=m$  となるので

$$\begin{aligned}\delta((p-p_1)^2 - m_2^2) &= \delta(m^2 - 2E\sqrt{(m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2)} + m_1^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}) \\ &= \delta(m^2 - 2E\sqrt{(m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2)} + m_1^2) \\ &= \frac{\delta(|\mathbf{p}_1| - |\mathbf{k}_1|)}{2\frac{E|\mathbf{p}_1|}{E_1}} \\ &= \frac{\delta(|\mathbf{p}_1| - |\mathbf{k}_1|)E_1}{2m|\mathbf{p}_1|}\end{aligned}$$

となり、この結果と併せて (26) の積分を立体角積分にすると

$$\Gamma = \frac{1}{(2m)^3 2\pi} \lambda^{\frac{1}{2}}(m, m_1, m_2) |\mathcal{M}|^2 \quad (27)$$

を得る。よって今回求めるべき decay width は

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2m)^3 2\pi} \lambda^{\frac{1}{2}}(m, m_1, m_2) |\mathcal{M}(Ps \rightarrow 2\gamma)|^2 \\ &= \frac{|\psi(0)|^2}{64\pi m^2} |\mathcal{M}(spin \rightarrow 2\gamma)|^2\end{aligned} \quad (28)$$

である。このとき  $\frac{1}{n!}$  を乗じているが、これは終状態の光子が区別されないためである。

## 1.6 p-Ps の $\mathcal{M}$ 行列の計算



p-Ps へは、上記の 2 つの feynman diagram が寄与する。これに基づいて  $\mathcal{M}$  行列を feynman 則に基づいて計算する。<sup>\*17</sup>まず、入射粒子、放出される光子の運動量、並びに光子の偏光ベクトルを以下のように定義する。

$$\begin{aligned}p_1 = p_2 &= (m, 0, 0, 0), k_1 = (m, 0, 0, m), k_2 = (m, 0, 0, -m) \\ \varepsilon_\mu(k_1, +) &= (0, 1, 0, 0), \varepsilon_\mu(k_1, -) = (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon_\mu(k_2, +) &= (0, -1, 0, 0), \varepsilon_\mu(k_2, -) = (0, 0, -1, 0)\end{aligned} \quad (29)$$

ここで、入射粒子の角度依存性については、我々が扱うのが positronium という単一粒子が 2 つの光子に崩壊する現象を扱うため、考慮しなくてもよい。また、偏光ベクトルの基底については、 $\varepsilon \cdot k = 0$  という条件を基

<sup>\*17</sup> ここは参考文献 [5] に従って計算している。

に設定した。また、非相対論極限の近似の下で電子、陽電に対応する dirac 方程式の2つの独立解は、2成分波動関数を用いて以下のように記述される。ここで、 $\xi, \xi'$  はそれぞれ  $|+\rangle, |-\rangle$  つまり、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を取る。

$$\bar{v}(p_2) = \sqrt{m}(-\xi^\dagger, \xi^\dagger), u(p_1) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi' \\ \xi' \end{pmatrix}$$

以上の設定を用いて  $\mathcal{M}$  行列を計算すると、

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -e^2 \varepsilon_\mu^*(k_2) \varepsilon_\nu^*(k_1) \bar{v}(p_2) \left( \gamma^\mu \frac{(k_2^\mu - p_2^\mu + m)}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \gamma^\nu + \gamma^\mu \frac{(k_1^\mu - p_2^\mu + m)}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \gamma^\nu \right) u(p_1) \\ &= \frac{e^2}{2m} \varepsilon_\mu^*(k_2) \varepsilon_\nu^*(k_1) (-\xi^\dagger, \xi^\dagger) (\gamma^\mu (k_2^\mu - p_2^\mu + m) \gamma^\nu + \gamma^\mu (k_1^\mu - p_2^\mu + m) \gamma^\nu) \begin{pmatrix} \xi' \\ \xi' \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^2}{2} \varepsilon_\mu^*(k_2) \varepsilon_\nu^*(k_1) (-\xi^\dagger, \xi^\dagger) (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^3 \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^3 \gamma^\mu) \begin{pmatrix} \xi' \\ \xi' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで最後の行の変形においては、(29) の値を代入した。また、(30) を pauli 行列を用いて書き下せば、

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \frac{e^2}{2} \varepsilon_\mu^*(k_2) \varepsilon_\nu^*(k_1) \xi^\dagger (-\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu - \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\mu \sigma^3 \sigma^\nu - \sigma^\nu \sigma^3 \sigma^\mu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu + \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^3 \bar{\sigma}^\mu + \bar{\sigma}^\mu \sigma^3 \bar{\sigma}^\nu) \xi' \\ &= e^2 \varepsilon_\mu^*(k_2) \varepsilon_\nu^*(k_1) \xi^\dagger (\sigma^\mu \sigma^3 \sigma^\nu - \sigma^\nu \sigma^3 \sigma^\mu) \xi' \\ &= e^2 \varepsilon_\mu^*(k_2) \varepsilon_\nu^*(k_1) \text{Tr}[\xi' \xi^\dagger (\sigma^\mu \sigma^3 \sigma^\nu - \sigma^\nu \sigma^3 \sigma^\mu)] \end{aligned} \quad (31)$$

となる。ここで1行目から2行目に於ける変形では、偏光ベクトルの第0成分が0であることから、今回の場合に限り  $\sigma^\mu = -\bar{\sigma}^\mu$  とできることを利用している。ここで、スピン一重項状態に於いては  $\xi' \xi^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} I$  となるので、

$$i\mathcal{M} = \frac{e^2}{\sqrt{2}} \varepsilon_\mu^*(k_2) \varepsilon_\nu^*(k_1) \text{Tr}[\sigma^\mu \sigma^3 \sigma^\nu - \sigma^\nu \sigma^3 \sigma^\mu]$$

となる。

よって  $\mathcal{M}$  の各成分は

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{++} &= \frac{e^2}{\sqrt{2}} \varepsilon_\mu^*(k_2, +) \varepsilon_\nu^*(k_1, +) \text{Tr}[\sigma^\mu \sigma^3 \sigma^\nu - \sigma^\nu \sigma^3 \sigma^\mu] \\ &= -\frac{e^2}{\sqrt{2}} \text{Tr}[\sigma^1 \sigma^3 \sigma^1 - \sigma^1 \sigma^3 \sigma^1] \\ &= 0 \\ i\mathcal{M}_{+-} &= 2\sqrt{2}ie^2, i\mathcal{M}_{-+} = -2\sqrt{2}ie^2, i\mathcal{M}_{--} = 0 \end{aligned}$$

となる。<sup>\*18</sup>

よって散乱後の偏光のパターンについて足し合わせたものが、(28) に登場する  $|\mathcal{M}(\text{spin} \rightarrow 2\gamma)|^2$  であるので、

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(\text{spin} \rightarrow 2\gamma)|^2 &= |\mathcal{M}_{++}|^2 + |\mathcal{M}_{+-}|^2 + |\mathcal{M}_{-+}|^2 + |\mathcal{M}_{--}|^2 \\ &= 16e^4 \end{aligned} \quad (32)$$

と  $|\mathcal{M}|^2$  が求まった。

<sup>\*18</sup> ここでは ++ 成分のみを明示的に計算したが、他の成分についても同様である

## 1.7 p-Ps の寿命計算

p-Ps を計算する時に (28) に登場する  $\psi(0)$  であるが、これは電子と陽電子が一重項状態で束縛系をなしている時の波動関数である。この波動関数は、基底状態 ( $n=1, l=0, m=0$ ) の水素原子の波動関数の質量を弄ることで得られる。基底状態における水素原子の電子についての波動関数は

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right), a_0 = \frac{1}{\mu\alpha} \quad (33)$$

において、 $\mu = m$  とすると水素原子の電子についての波動関数になる。一方で電子と陽電子の束縛状態についての波動関数を得るためには、現在我々は相対運動を扱っているので  $\mu$  には相対質量を代入せねばならない。即ち、 $\mu = \frac{m}{2}$  とすれば良い。

以上より (28) を用いれば、p-Ps の崩壊幅は

$$\Gamma = \frac{m\alpha^5}{2}$$

となる。我々の単位系において  $\Gamma$  の逆数の値、すなわち p-Ps の寿命は一次の摂動まで採ったときに  $1.25 \times 10^{-10}[\text{sec}]$  となる。

## 1.8 o-Ps の寿命について

図 (2) に示された o-Ps の崩壊についての feynman diagram は、p-Ps のそれよりも vertex が 1 個多い。このことから、p-Ps の計算を踏まえれば o-Ps の寿命は p-Ps の寿命  $\alpha$  の逆数倍程度になるであろう。p-Ps の時と本質的には変わらない計算をすれば o-Ps の寿命は求まるが計算すべき diagram が 6 個もあるため、非常に計算は煩雑である。このためここでは参考文献 [2] の結果のみ示す。

$$(o - Ps \text{ の寿命}) = 1.39 \times 10^{-7}[\text{sec}]$$

### 参考文献

- [1] M.Peskin,D.Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. New york, Addisom Wesley,1995.
- [2] A.Ore and J.L.Powell. *Three-Photon Annihilation of an Electron-Positron Pair*. The American Physical Society,1949.
- [3] 坂本真人『場の量子論-不変性と自由場を中心にして』裳華房
- [4] 坂本真人『場の量子論 (II)- ファインマン・グラフとくりこみを中心にして』裳華房
- [5] 知乎\*<sup>19</sup>:Peskin 量子场论 -Chapter5, 知乎,  
URL:[https://www.zhihu.com/column/c\\_1243586679371104256](https://www.zhihu.com/column/c_1243586679371104256)(参照日:2021 年 9 月 29 日)
- [6] 知乎: 级联衰变的运动学与相空间积分表达式, 知乎,  
URL:<https://zhuanlan.zhihu.com/p/309294725> (参照日:2021 年 9 月 29 日)

---

\*19 "知乎"は web サイト名です

## 2 実験

### 2.1 実験器具

- $^{22}\text{Na}$   
 $\beta^+$  崩壊によって  $e^+$  を放出する線源
- シリカパウダー  
 $e^-$  の供給源\*<sup>20</sup>
- プラスチックシンチレーター (P.S.)  
 $e^+$  が通過したとき信号を発する検出器
- NaI シンチレーター  
 $\gamma$  線が通過したとき信号を発する検出器
- 鉛ブロック  
 $^{22}\text{Na}$  から直接放出される  $\gamma$  線を遮断し、NaI が検出するのを防ぐもの
- 遮光用ビニール  
室内灯などがあたり  $e^+$  が検出できなくなるのを防ぐため、装置全体を覆うもの

### 2.2 セットアップ

各実験装置は図 3 に示す写真のように配置した。線源である  $^{22}\text{Na}$  とシリカパウダーの間においてある鉛ブロックには中央に小さな穴が開いており  $e^+$  が通る道が確保されている。

### 2.3 回路

時系列としては、”  $\beta^+$  崩壊により  $^{22}\text{Na}$  から  $e^+$  が放出される → シリカパウダーに衝突し Ps が生成される → Ps の崩壊により  $\gamma$  線が放出される ” であるので、 $e^+$  を検出する P.S. を TDC の start に、 $\gamma$  線を検出する NaI を TDC の stop に接続したいところである。しかし、これでは Ps 生成に無関係な  $\gamma$  線を NaI が感知したり、そもそも P.S. を通過した  $e^+$  が必ずしも Ps を形成するとは限らないため Ps の寿命測定には無関係な信号が送られてくることになる。この不安を P.S. と NaI 両検出器に coincidence をかけることで解消する。P.S. の信号を受け取った後に gate generator を開き事前に設定した時間幅の信号を coincidence に出力する。この coincidence をとる操作により P.S. と NaI の信号の時系列が逆転してしまうため、P.S. のもう一方の信号を Ps の寿命に比べ十分大きい delay にかけた後それを TDC の stop 信号として、また coincidence から出力された信号を TDC の start 信号として出力する。このように回路を組むことで

$$(\text{delay}) - (\text{TDC 測定値})$$

という式で Ps の寿命が測定できるようになる。図 4 でこの時系列を視覚的に示している。

---

\*<sup>20</sup> シリカパウダーの主成分は  $\text{SiO}_2$  であり構造上多くの  $e^-$  を含んでいるためこのように用いる。また pick-off 反応 (4.4.1 参照) を防ぐため、レンジで加熱し水分を飛ばしている。

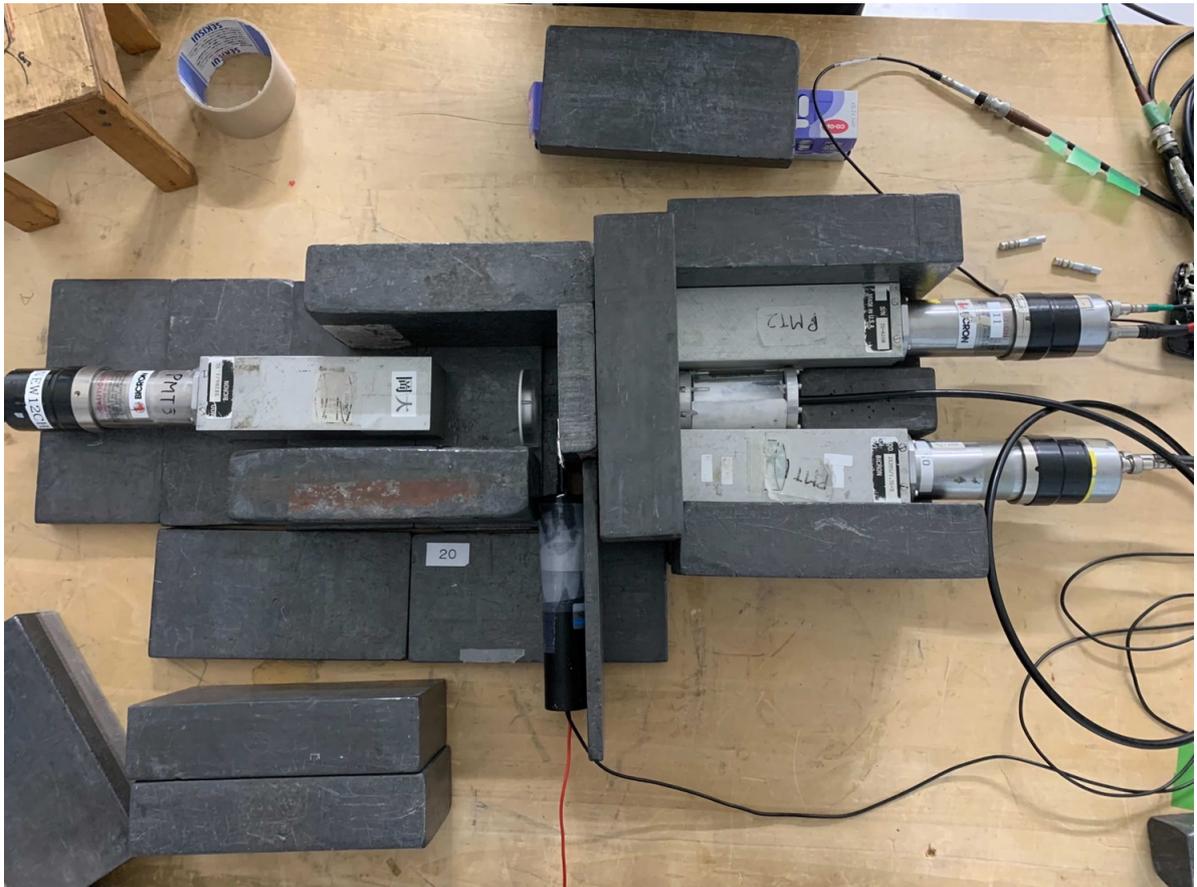


図3 実験器具の配置

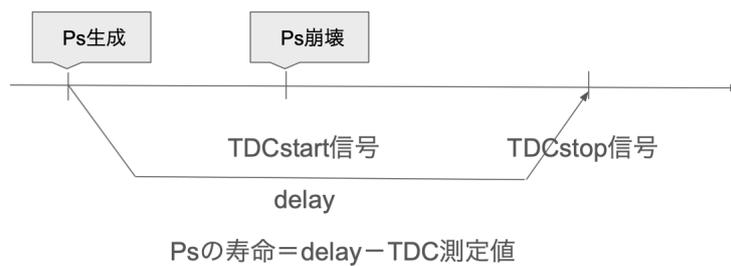


図4

実際に組んだ回路図は図5のようになっている。  
回路図の中で用いている略語は以下の通りである。

- ・ NaI NaI シンチレーター の略。
- ・ P.S. プラスチックシンチレーター の略。
- ・ div divider の略。入力された信号を2つに分ける。
- ・ disc discriminator の略。入力された信号が threshold を超えたとき NIM 信号を出力する。

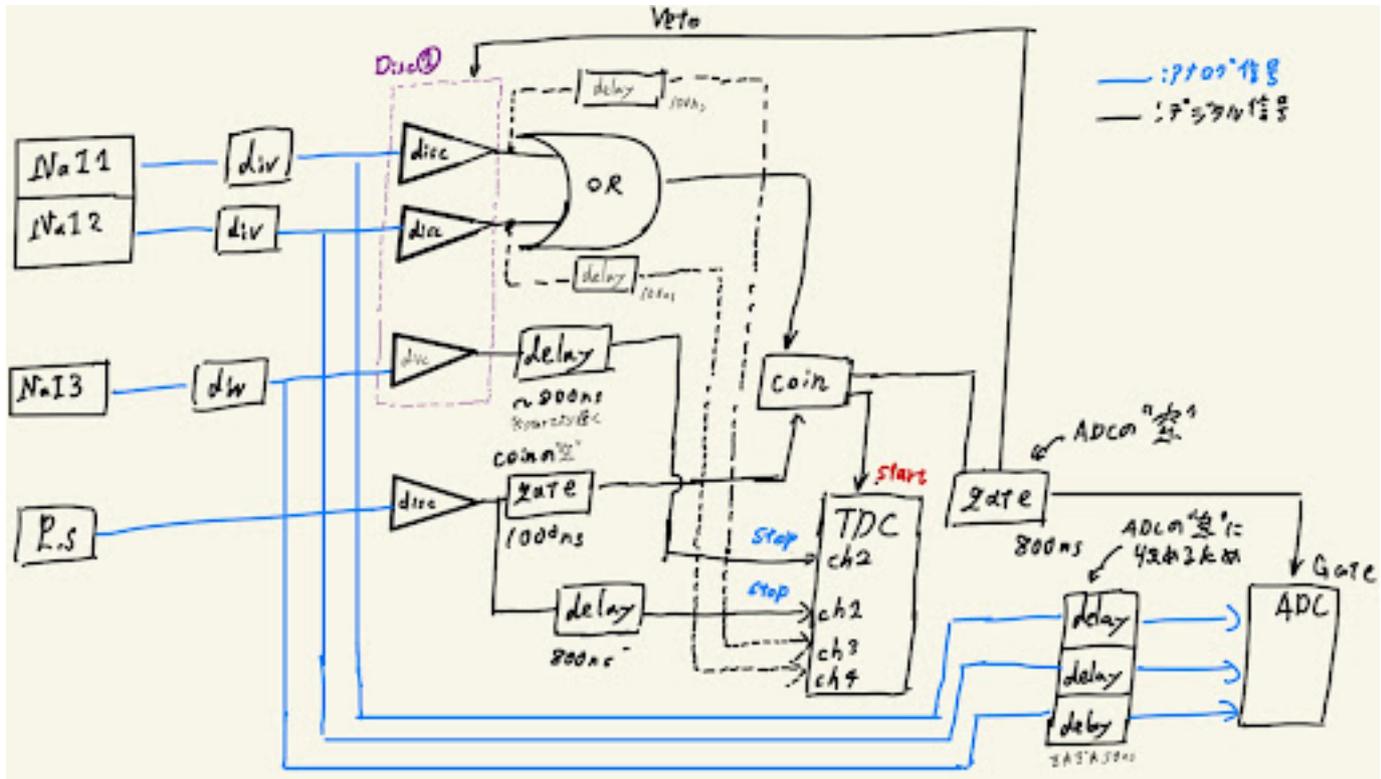


図5 回路図

- gate gate generator の略。信号が入力されたとき設定した時間幅の NIM 信号を出力する。
- delay 入力された信号を設定した時間だけ遅らせて出力する
- coin coincidence の略。接続した入力端子すべてに同時に信号が送られたときのみ信号を出力する。
- ADC Analog to Digital Converter の略。gate が開いている間に入力された信号の総和（積分）に比例した値を出力する。
- TDC Time to Digital Converter の略。start に信号が入力されてから stop に信号が入力されるまでの時間に比例した値を出力する。

### 3 結果・解析

#### 3.1 生データ

今回の実験では、7月27日から9月13日にかけてデータを取得した。以下の図は TDC、ADC の較正や補正を行っていない生データである。横軸が TDC または ADC の値、縦軸がイベント数である。

#### 3.2 Caribration

TDC や ADC はそれぞれ実際の時間やエネルギーに対応した整数値を返すものである。実際の時間やエネルギーのほうが TDC の値や ADC の値よりも扱いやすいのでデータ解析の一步目として TDC、ADC と実際の時間やエネルギーの関係を求めたい。

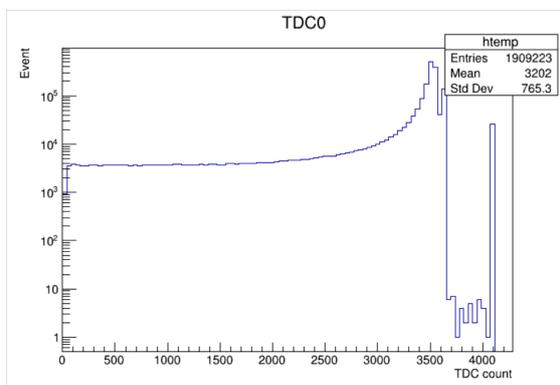


図6 TDC0 の生データ

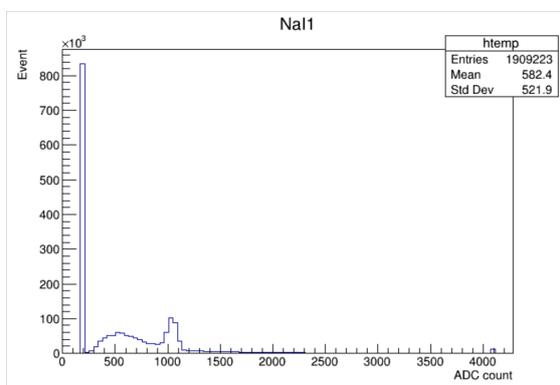


図7 ADC1 の生データ

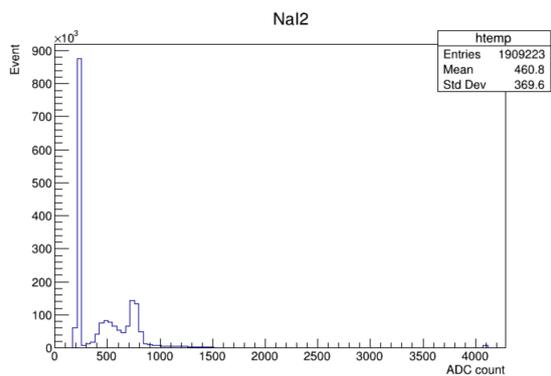


図8 ADC2の生データ

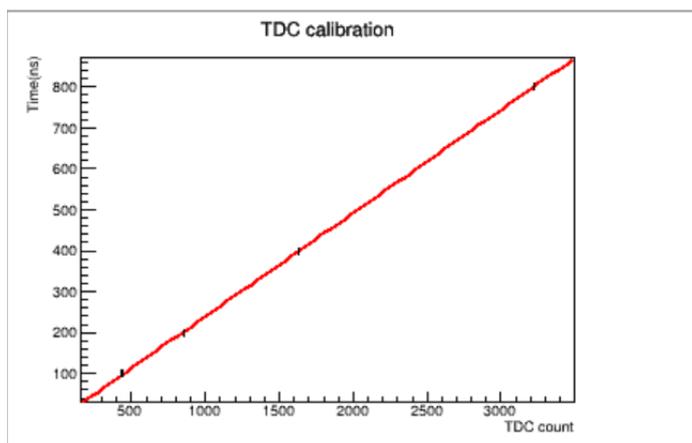


図9 TDC較正

### 3.2.1 TDC較正

TDC較正とは実際の時間と観測されたTDCの値の関係を求めることである。今回の実験では、オシロスコープの信号をdividerで分け、片方は直接startへもう片方はケーブルでdelayをかけてstopに接続した。4種類の長さを持つケーブルを用いてそれぞれ計測した。delayの長さはそれぞれ100ns、200ns、400ns、800nsである。次のグラフは100ns、200ns、400ns、800nsのそれぞれのケーブルの場合でのTDCの値を一次関数でFittingしたものである。

$$Time[ns] = 10.5623 - 0.252566 \times TDC0 \quad (34)$$

これにより TDC0 と実際の時間との関係を上の式になった。本実験では実際の時系列と TDC の START、STOP が逆になっていることから係数を負にした。

### 3.2.2 ADC 較正

ADC 較正とは実際のエネルギーと観測された ADC の値の関係を求めることである。今回の実験ではポジトロニウム崩壊によって放出する 511keV に対応するピークと 0keV に対応する値を見つけ出しこの 2 点で一次関数の Fitting を行った。対応するピークは以下の図のようにガウス関数でピークの周りを Fitting することで求めた。また 1275keV に対応するピークを Fitting に利用しなかったのはピークが小さく、同定が難しいと判断したためである。

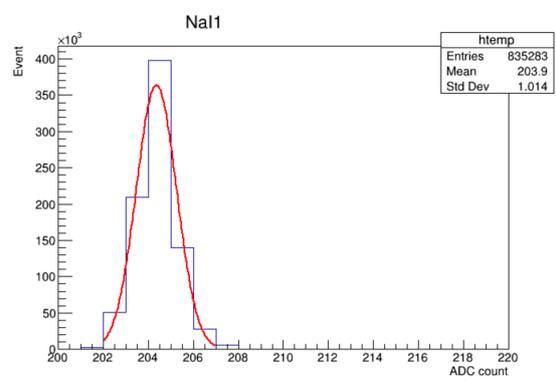


図 10 ADC1 0keV

これにより ADC とエネルギーを一次関数で fitting したのが上の図である。縦軸がエネルギー、横軸が ADC の値である。またこの fitting 関数が以下の式である。

$$energy = 0.611368ADC1 - 124.933 \tag{35}$$

$$energy = 0.949146ADC2 - 203.930 \tag{36}$$

この関係式を用いて時間とエネルギーの関係を示したのが図 10、図 11 である。

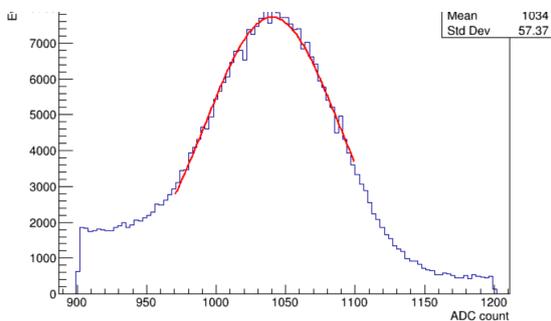


図 11 ADC1 511keV

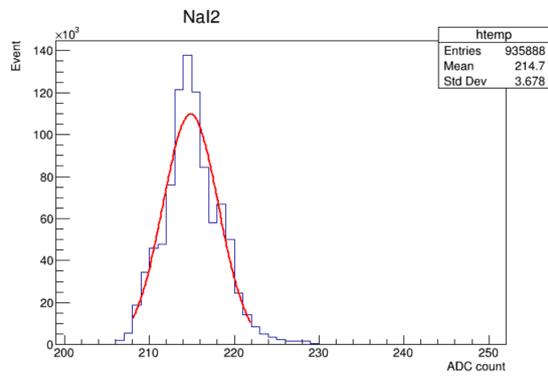


図 12 ADC2 0keV

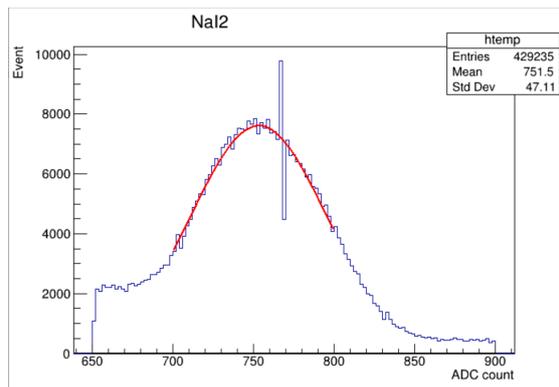


図 13 ADC2 511keV

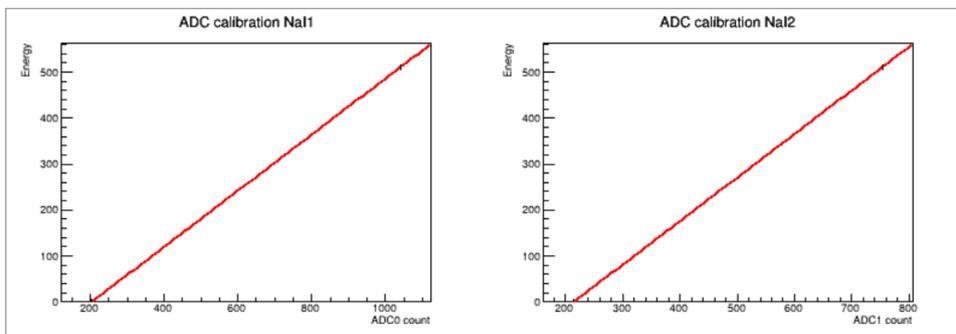


図 14 ADC の較正

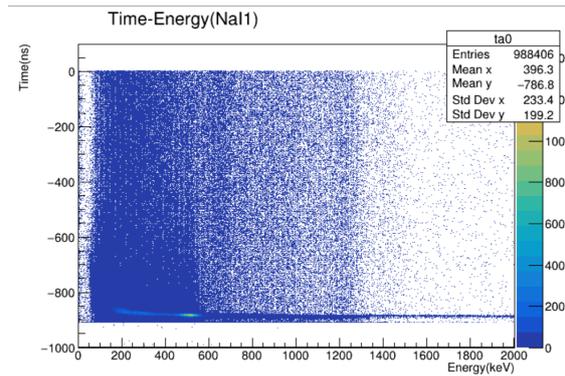


図 15 NaI1

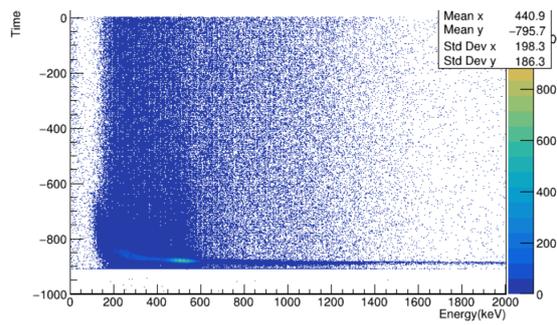


図 16 NaI2

### 3.3 TQ 補正

寿命を求める際、TQ 補正と pick-off 補正という二つの補正を行う必要がある。まずは TQ 補正から見ていく。図 15 と図 16 を見てみると、p-Ps の崩壊で出た 511keV の  $\gamma$  線とその Compton 散乱によって色が濃くなっている部分がある。そこで Energy が小さいほど Time が大きく観測されていることが分かる。本来同時刻に観測されるものであるが、これは discriminator の特性から起こる現象であって、このずれを補正しようとするのが TQ 補正である。

#### 3.3.1 TQ 補正の原理

Time のずれが起きる仕組みを解説する。discriminator とは信号が threshold を超えた時に NIM 信号を出すというものである。図 17 にエネルギーの異なる二つの信号が来たときの様子を模式的に示した。エネルギー

の小さい信号ほど threshold を超えるまでに時間 (図でいう  $\Delta T$ ) が大きいことが見て取れる。これにより実際の時間より  $\Delta T$  の分だけ観測される時間がずれてしまう。そしてこのずれは信号のエネルギーに依存する。以上が discriminator の特性である。

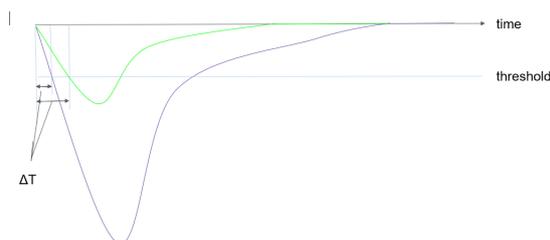


図 17 discriminator による時間のずれ

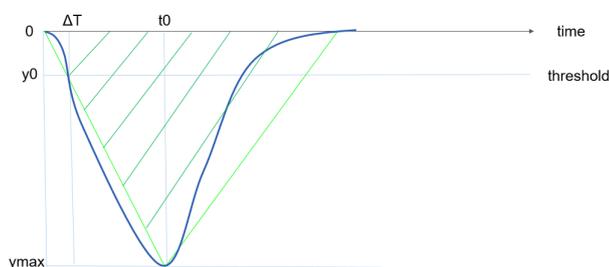


図 18 TQ 補正の考え方

図 17 で見て分かるように時間のずれ  $\Delta T$  は信号のエネルギー  $E$  に依る。そのため  $\Delta T$  をエネルギーの関数  $\Delta T = \Delta T(E)$  として決定する必要がある。議論を簡単にするために粗い近似を用いて考える。図 18 を見てわかるように信号の波形を三角形として近似する。 $t_0$  を信号がピークに達するまでの時間、 $y_0$  を threshold,  $y_{max}$  をピークの高さとする。ここで、 $t_0$  と  $y_0$  は定数と仮定すると  $\Delta T$  について、

$$\Delta T : t_0 = y_0 : y_{max} \quad (37)$$

$$\Delta T = \frac{t_0 y_0}{y_{max}} \propto \frac{1}{E} \quad (38)$$

この関数は最も簡単な近似から得られた式なので、関数の骨組みを残しつつ実際の TQ 補正関数として

$$\Delta T(E)[ns] = \frac{p_0}{(E[keV] - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (39)$$

とおく。ここで、 $p_i (i = 0, 1, 2, 3)$  はフィッティングパラメータで、fitting により決定する。これから fitting をして各パラメータを取り出す作業に入る。次に具体的な TQ 補正の手順 (NaI1) を示す。

1.  $160 \pm 5\text{keV}$  の範囲でカットした Time のヒストグラムを Gaussian で fitting し、その mean を  $160\text{keV}$  における  $\Delta T$  とする。
2. 同様の手順を  $20\text{keV}$  ごとに行い、 $460\text{keV}$  まで行う。(全部で 16 個のデータを取る。)
3. 得られた  $\Delta T$  を縦軸、Energy を横軸としてプロットし、TQ 補正関数で fitting する。各パラメータ  $p_i$  を取り出し TQ 補正関数を決定する。
4. Time- $\Delta T$  を TQ 補正を施した後の時間として new Time と定義する。

ここで fitting する Energy の範囲は図 15 と図 16 を見て、補正が必要である範囲を取った。そのため、NaI2 については  $200\text{keV}$  から  $460\text{keV}$  までの範囲を取り、14 個のデータを取った。

### 3.3.2 TQ 補正の実行

図 19 と図 20 に NaI1 と NaI2 について Time のヒストグラムを Gaussian で fitting した様子を示す。

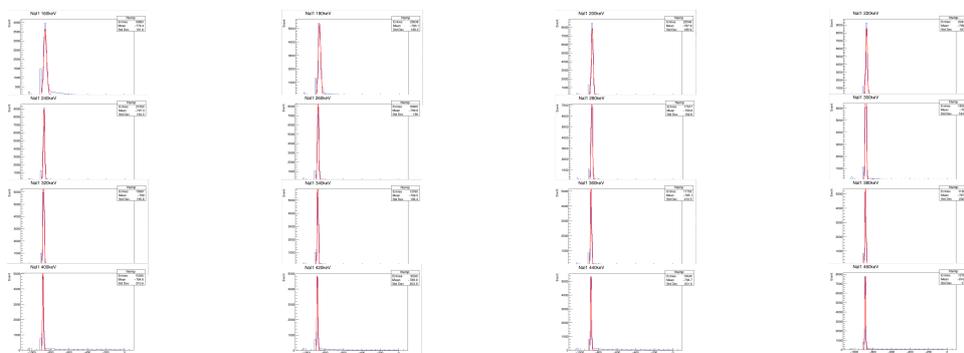


図 19  $\Delta T$  を求めるための Gaussian fitting (NaI1)

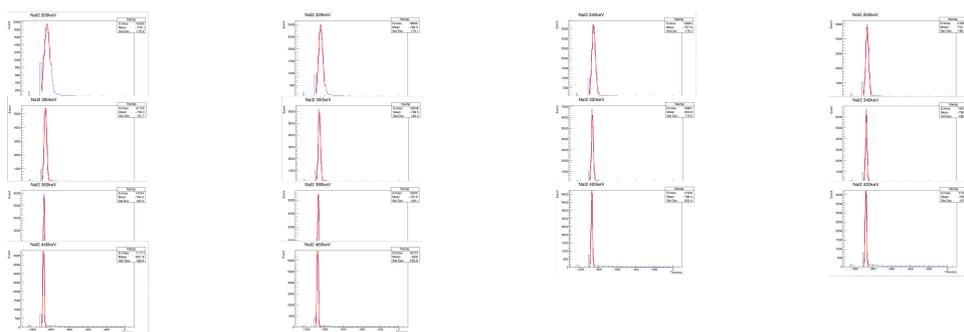


図 20  $\Delta T$  を求めるための Gaussian fitting (NaI2)

次に求めた  $\Delta T$  を Energy についてプロットし、それを TQ 補正関数で fitting した様子を図 21 に示す。

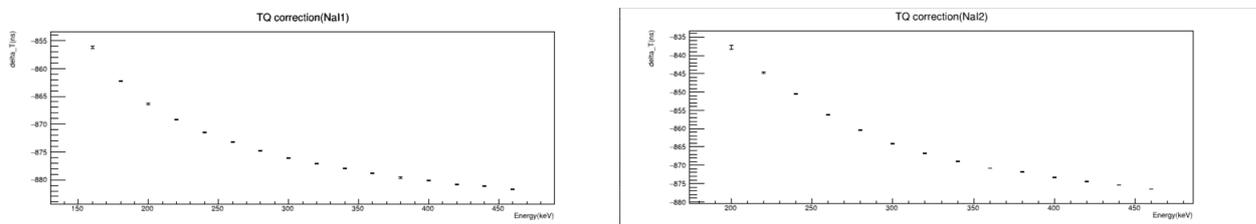


図 21 NaI1,NaI2 について TQ 補正関数による fitting

この fitting で得られたパラメータを表 1 に示す。

表 1 NaI1,NaI2 について TQ 補正関数のフィッティングパラメータ

	$p0$	$p1$	$p2$	$p3$
NaI1	-417.230	145.137	-0.0192060	-416.133
NaI2	-767.802	185.170	-0.0180226	-27.3704

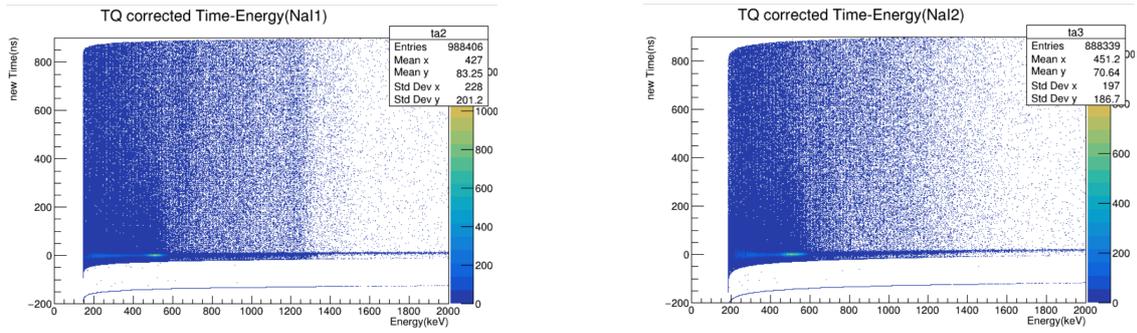


図 22 Na1,Na2 の new Time-Energy 2次元分布図

このようにして得られたパラメータを用いて TQ 補正関数  $\Delta T(E)$  を決定することができた。そして、新しく定義した new Time(Time- $\Delta T$ ) を縦軸、Energy を横軸として 2 次元の分布図を図 22 に示す。この図から TQ 補正されて Energy による時間のずれがなくなっていることが分かる。

### 3.3.3 TQ 補正後の寿命の導出

TQ 補正が終わった段階での寿命を求めてみる。Ps は時間とともに指数関数的に減少していくと考えられる。(詳細は次節の崩壊幅のところ述べる。) これより TQ 補正後の new Time についてのヒストグラムを関数

$$p_0 \exp\left(-\frac{t[ns]}{p_1}\right) + p_2 \quad (40)$$

でフィッティングすることを考える。ここで  $p_i (i = 0, 1, 2)$  はフィッティングパラメータである。(但し先の TQ 補正関数のパラメータ  $p_i (i = 0, 1, 2, 3)$  とは別物である。) 図 23 にフィッティングした様子を示す。

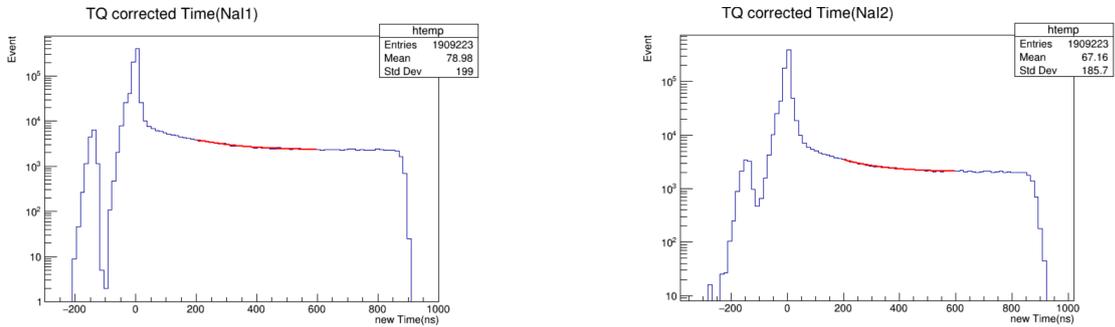


図 23 Na1,Na2 について new Time ヒストグラムの fitting

この fitting で得られたパラメータを表 2 に示す。

	$p_0$	$p_1$	$p_2$
NaI1	$7289.15 \pm 781.70$	$131.994 \pm 9.310$	$2259.35 \pm 34.01$
NaI2	$7129.75 \pm 874.88$	$124.770 \pm 9.318$	$2041.56 \pm 30.45$

表 2 Na1,Na2 について寿命のフィッティングパラメータ

ここで、パラメータ  $p_1$  が求めたい Ps の崩壊寿命であると考えられる。なので  $p_1$  のみを取り出して TQ 補正後の崩壊寿命を表 3 に示す。

	寿命 [ns]
NaI1	131.994 ± 9.310
NaI2	124.770 ± 9.318

表 3 NaI1,NaI2 について TQ 補正後の Ps の崩壊寿命

### 3.4 pick-off 補正

#### 3.4.1 pick-off 反応とその他の反応

今回求めたいのはオルソポジトロニウム (o-Ps) の寿命であり崩壊して 3  $\gamma$  を出す。しかし、次の反応によって 3  $\gamma$  ではなく 2  $\gamma$  を出すことがある。

- pick-off 反応 o-Ps の陽電子が他の原子が持つ電子と衝突し、対消滅する。
- スピン交換反応 o-Ps の電子が周囲の電子とスピンを交換して p-Ps になる。
- 化学反応 o-Ps が酸化されて (電子が奪われ) 残った陽電子が対消滅する。

p-Ps は寿命がとても短くすぐに崩壊するので上の 3 つの反応を含めて Ps の寿命を考える (TQ 補正のみを施した寿命を考える) と純粋な o-Ps の 3  $\gamma$  の崩壊寿命よりも小さくなってしまう。なのでこれらの反応による影響を除外しようとするのが pick-off 補正である。

#### 3.4.2 各領域でのイベント

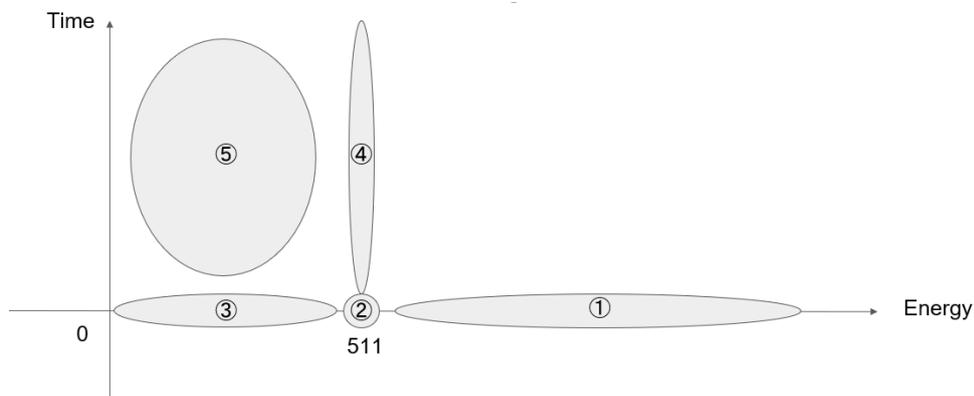


図 24 new Time-Energy 分布図の各領域と対応するイベント

- ① 1275keV の  $\gamma$  線の光電効果とその Compton 散乱
- ② p-Ps の 2  $\gamma$  (511keV) の光電効果
- ③ p-Ps の 2  $\gamma$  (511keV) の Compton 散乱
- ④ pick-off 反応で o-Ps から p-Ps になったものが崩壊、2  $\gamma$  の光電効果
- ⑤ pick-off 反応で o-Ps から p-Ps になったものが崩壊、2  $\gamma$  の Compton 散乱と o-Ps の崩壊による 3  $\gamma$

以上が各領域とイベントの対応である。

### 3.4.3 pick-off 補正の考え方

上で述べた⑤の領域では o-Ps の 3  $\gamma$  の崩壊と pick-off 反応による 2  $\gamma$  (511keV) の Compton 散乱が混在している。ここから pick-off による影響を除くことを考える。各時刻における 511keV のピークと Compton 散乱の分布は相似であると仮定する。また  $t=0$  (new Time=0) では全て p-Ps の崩壊だと考えても問題ない。そこで  $t=0$  での分布を求めてそれを拡大、縮小したものを各時刻の分布から引く。そうすることで各時刻の o-Ps の 3  $\gamma$  の分布のみを取り出すことができる。これが pick-off 補正の考え方である。図 25 に pick-off 補正の概略図を示す。

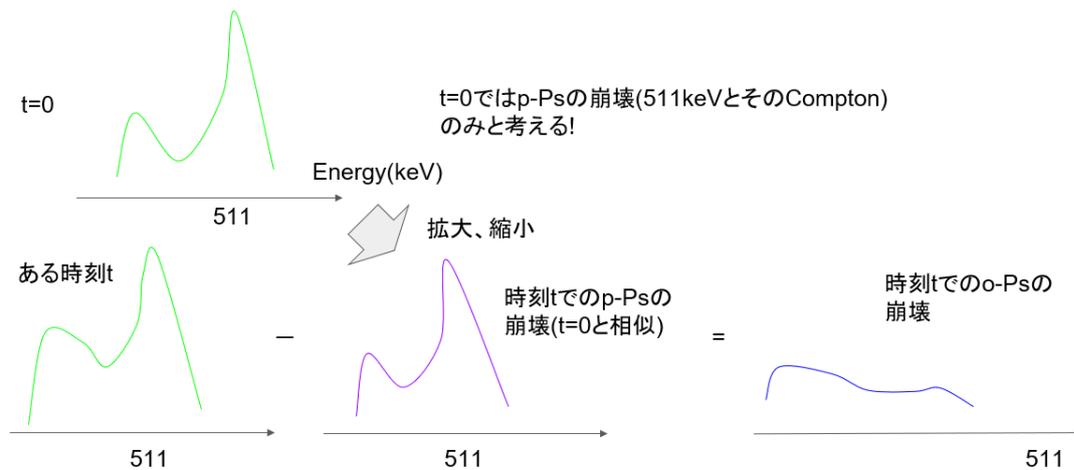


図 25 pick-off 補正の考え方

各  $\gamma$  線に名称をつける。

- $\Delta N_{3\gamma}(t)$  o-Ps の崩壊による 3  $\gamma$  の総数
- $\Delta N_{2\gamma}(t)$  pick-off 反応による 2  $\gamma$  (511keV) の総数
- $\Delta N_{2\gamma\text{ under}}(t)$  pick-off 反応による 2  $\gamma$  (511keV) の Compton 散乱の総数
- $\Delta N_{\text{under}}(t)$  ⑤の領域の  $\gamma$  線の総数
- $\Delta N_{\text{total}}(t)$  ④ + ⑤の領域の  $\gamma$  線の総数

ここで、

$$\Delta N_{under}(t) = \Delta N_{3\gamma}(t) + \Delta N_{2\gamma under}(t) \quad (41)$$

$$\Delta N_{total}(t) = \Delta N_{3\gamma}(t) + \Delta N_{2\gamma}(t) = \Delta N_{under}(t) + (\Delta N_{2\gamma}(t) - \Delta N_{2\gamma under}(t)) \quad (42)$$

が成り立つ。時刻  $t=0$  では p-Ps の崩壊が全てであると考えてもよいので、

$$\Delta N_{under}(0) = \Delta N_{2\gamma under}(0) \quad (43)$$

一般に 0 でない時刻  $t$  における p-Ps の反応を考える。時刻  $t$  での 511keV のイベント数 (Gaussian fitting のピーク) を  $Z(t)$  とすると、仮定より

$$\Delta N_{2\gamma under}(t) : \Delta N_{2\gamma under}(0) = Z(t) : Z(0) \quad (44)$$

$$\Delta N_{2\gamma under}(t) = \frac{Z(t)}{Z(0)} \Delta N_{2\gamma under}(0) = \frac{Z(t)}{Z(0)} \Delta N_{under}(0) \quad (45)$$

と書くことができる。

#### 3.4.4 崩壊幅

崩壊幅  $\Gamma$  粒子一個が単位時間当たりに崩壊する確率

時刻  $t$  での粒子数を  $N(t)$  とすると、単位時間当たりの崩壊数は粒子数  $N(t)$  に比例する。よって崩壊幅  $\Gamma$  を用いて

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma N(t) \quad (46)$$

となる。ここで崩壊寿命  $\tau$  は崩壊幅  $\Gamma$  の逆数

$$\tau \equiv \frac{1}{\Gamma} \quad (47)$$

で与えられる。求めたい o-Ps の崩壊寿命を  $\tau_{3\gamma}$  とし、観測される崩壊幅  $\Gamma$  と  $\tau_{3\gamma}$  の関係を出してみる。

- $\Gamma$  観測される崩壊幅
- $\Gamma_{3\gamma}$  o-Ps が  $3\gamma$  を出す崩壊幅
- $\Gamma_{2\gamma}$  p-Ps が  $2\gamma$  を出す崩壊幅

とすると、 $\Gamma = \Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma}$  と表せる。関数

$$f(t) \equiv \frac{\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} = \frac{\frac{dN_{2\gamma}}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}}{dt}} = \frac{\Delta N_{2\gamma}(t)}{\Delta N_{3\gamma}(t)} \quad (48)$$

を用いて式を変形すると、

$$\Gamma = \Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma} = \Gamma_{3\gamma} \left(1 + \frac{\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}}\right) = \frac{1 + f(t)}{\tau_{3\gamma}} \quad (49)$$

となる。

### 3.4.5 pick-off 補正関数の導出

崩壊幅と粒子数に関する微分方程式を解く。

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma N(t) = -(\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma})N(t) \quad (50)$$

$$N(t) = A \exp\left(\int^t -(\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma}) dt'\right) \quad (51)$$

ここで A は積分定数。また、 $\Delta N_{2\gamma \text{ under}}(t)$  が  $\Delta N_{2\gamma}(t)$  の定数倍であるとして、定数  $\alpha$  を用いて

$$\Delta N_{2\gamma \text{ under}}(t) = \alpha \Delta N_{2\gamma}(t) \quad (52)$$

$$\frac{dN_{2\gamma \text{ under}}(t)}{dt} = \alpha \frac{dN_{2\gamma}(t)}{dt} \quad (53)$$

これより

$$\frac{dN_{\text{under}}}{dt} = \frac{d(N_{3\gamma} + N_{2\gamma \text{ under}})}{dt} = \frac{dN_{3\gamma}}{dt} + \alpha \frac{dN_{2\gamma}}{dt} = -(\Gamma_{3\gamma} + \alpha\Gamma_{2\gamma})N(t) \quad (54)$$

pick-off 補正関数  $f_\alpha(t)$  を定義する。

$$f_\alpha(t) \equiv \frac{\alpha\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} = \frac{\alpha \frac{dN_{2\gamma}(t)}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}(t)}{dt}} \quad (55)$$

$f_\alpha(t)$  を変形して最終的な pick-off 補正関数を決定する。

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) &= \frac{\alpha\Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_{3\gamma}} = \frac{\alpha \frac{dN_{2\gamma}(t)}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}(t)}{dt}} = \frac{\frac{dN_{2\gamma \text{ under}}(t)}{dt}}{\frac{dN_{3\gamma}(t)}{dt}} = \frac{\Delta N_{2\gamma \text{ under}}(t)}{\Delta N_{3\gamma}(t)} = \frac{\Delta N_{2\gamma \text{ under}}(t)}{\Delta N_{\text{under}}(t) - \Delta N_{2\gamma \text{ under}}(t)} \\ &= \frac{\frac{Z(t)}{Z(0)} \Delta N_{\text{under}}(0)}{\Delta N_{\text{under}}(t) - \frac{Z(t)}{Z(0)} \Delta N_{\text{under}}(0)} = \frac{Z(t) \Delta N_{\text{under}}(0)}{Z(0) \Delta N_{\text{under}}(t) - Z(t) \Delta N_{\text{under}}(0)} \quad (56) \end{aligned}$$

次に式 (54) を変形する。

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{under}}}{dt} &= -(\Gamma_{3\gamma} + \alpha\Gamma_{2\gamma})N(t) \\ &= -(\Gamma_{3\gamma} + \alpha\Gamma_{2\gamma})A \exp\left(\int^t -(\Gamma_{3\gamma} + \Gamma_{2\gamma}) dt'\right) \\ &= -\Gamma_{3\gamma}(1 + f_\alpha(t))A \exp\left(\int^t -\Gamma_{3\gamma}\left(1 + \frac{f_\alpha(t)}{\alpha}\right) dt'\right) \\ &= -\frac{1 + f_\alpha(t)}{\tau_{3\gamma}}A \exp\left(\int^t -\frac{1 + \frac{f_\alpha(t)}{\alpha}}{\tau_{3\gamma}} dt'\right) \quad (57) \end{aligned}$$

と表すことができる。この関数は pick-off 補正を施した後の o-Ps の崩壊寿命を求める際に寿命の fitting 関数として後ほど使用する。

### 3.4.6 pick-off 補正の実行

pick-off 補正の手順を示す。

1. 200ns から 700ns までで 100ns おきに各時刻で  $\pm 50$ ns の範囲で Energy に関するヒストグラムを書き、511keV の周辺で Gaussian fitting をする。
2. その時のピークを  $Z(t)$  とする。
3. 0keV から 450keV までの各時刻のイベント数の合計を  $\Delta N_{under}(t)$  とする。
4.  $t=0$  の時も同様にして  $Z(0)$  と  $\Delta N_{under}(0)$  を求める。
5. 得られたデータを用いて pick-off 補正関数  $f_{\alpha}(t)$  を各時刻で計算し、 $t$  の関数としてプロットする。
6. これを例年に倣って

$$f_{\alpha}(t) = p0 \exp\left(-\frac{t[ns]}{p1}\right) + p2 \quad (58)$$

でフィッティングする。(今回は  $p0, p1, p2$  の初期値を 0.5, 115, 0.2 とした。)

今回の実験データを見てみた時 pick-off 反応による 511keV の  $2\gamma$  が例年よりもかなり少なくなってしまい、511keV のピークが取りにくい結果となった。これにより本来の手順 (50ns おきに各時刻で  $\pm 2$ ns ほどの小さい時間幅の中でヒストグラムを書き Gaussian fitting をする。) と比べて時間幅をかなり大きくとって少しでも 511keV のピークが取れるようにした。それでもピークが見にくいところがあったので 511keV の周辺 (基本的に 490keV から 530keV の範囲) で無理やり fitting を行った。例年とどう違うのか new Time-Energy 分布図を図 28 で比較して示す。

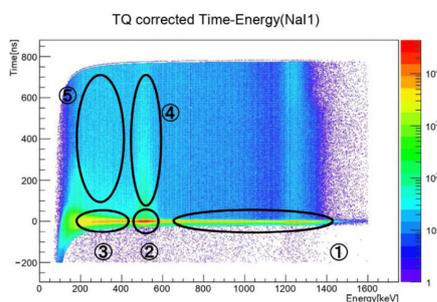


図 26 2018 年度後期レポートより引用した図

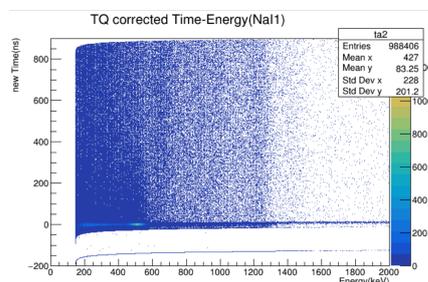


図 27 今回の図

図 28 例年との比較

比較して分かるように例年は④の領域が他の領域より色が濃くなっている。しかし今回の図では④の領域が濃く見えない。これにより 511keV のピークが見えにくくなっている。

図 29 と図 30 に NaI1 と NaI2 について Energy のヒストグラムを Gaussian で fitting した様子を示す。

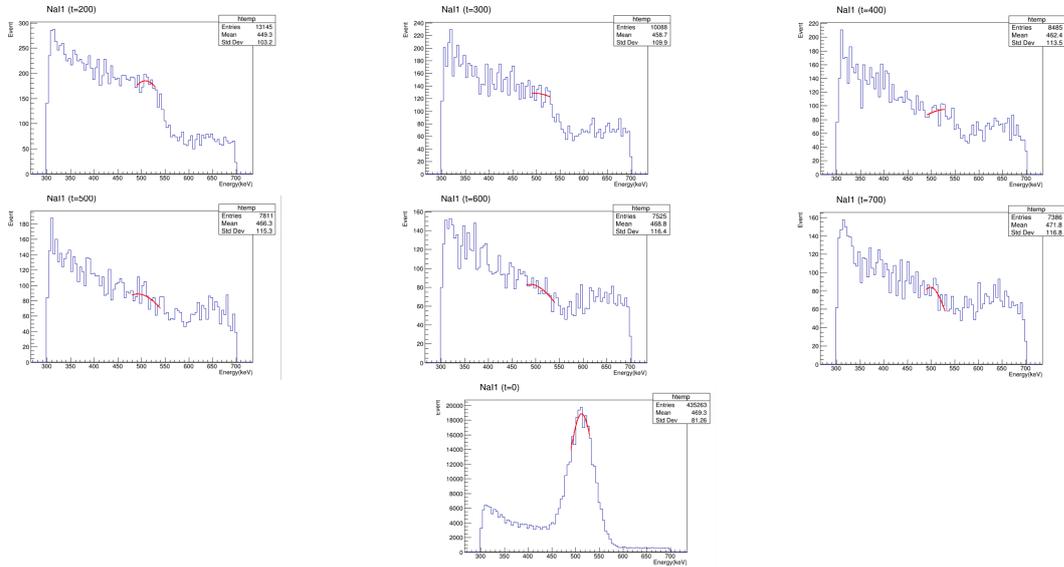


図 29 Z(t) を求めるための Gaussian fitting (NaI1)

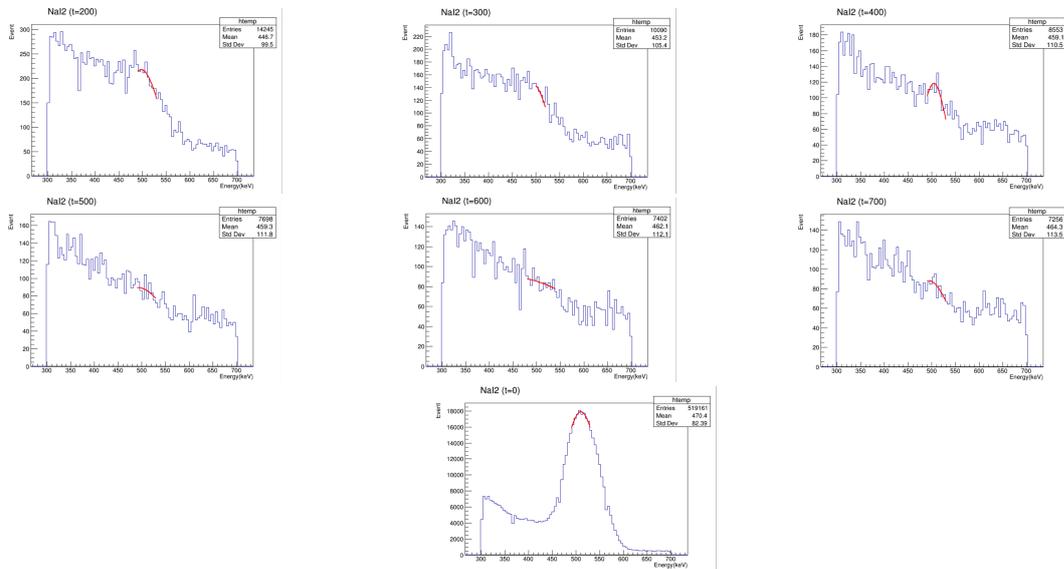


図 30 Z(t) を求めるための Gaussian fitting (NaI2)

次に  $f_{\alpha}(t)$  をプロットし、フィッティングした様子を図 31 で示す。

このフィッティングによって得られたパラメータを表 4 に示す。

### 3.4.7 o-Ps の崩壊寿命 $\tau_{3\gamma}$ の決定

先に求めた式

$$\frac{dN_{\text{under}}(t)}{dt} = -\frac{1 + f_{\alpha}(t)}{\tau_{3\gamma}} A \exp\left(\int^t -\frac{1 + f_{\alpha}(t')}{\tau_{3\gamma}} dt'\right) \quad (59)$$

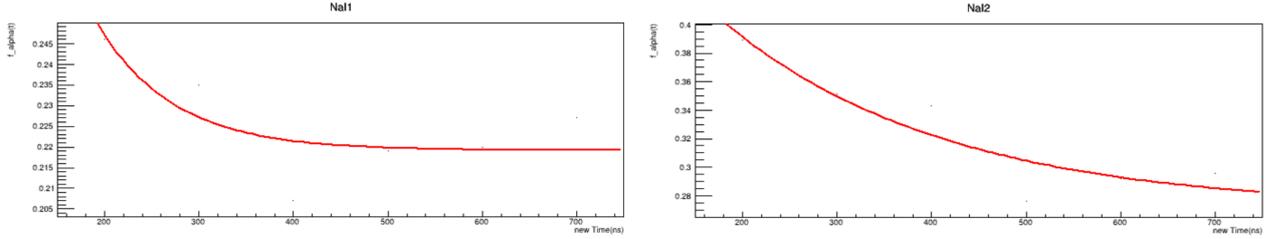


図 31 NaI1,NaI2 について  $f_{\alpha}(t)$  のフィッティング

	$p0$	$p1$	$p2$
NaI1	$0.333093 \pm 0.909055$	$80.6548 \pm 88.4739$	$0.219126 \pm 0.006386$
NaI2	$0.281091 \pm 0.148688$	$237.015 \pm 203.365$	$0.270505 \pm 0.043415$

表 4 NaI1,NaI2 について  $f_{\alpha}(t)$  のフィッティングパラメータ

にフィッティングした関数

$$f_{\alpha}(t) = p0 \exp\left(-\frac{t[ns]}{p1}\right) + p2 \quad (60)$$

を代入する。

$$\frac{dN_{under}(t)}{dt} = -\frac{A}{\tau_{3\gamma}} (p0 \exp\left(-\frac{t}{p1}\right) + p2 + 1) \exp\left(\int^t -\frac{1}{\tau_{3\gamma}} \left(\frac{p0 \exp\left(-\frac{t'}{p1}\right)}{\alpha} + \frac{p2}{\alpha} + 1\right) dt'\right) \quad (61)$$

ここから  $\exp$  の積分の部分を実行し、定数を前に出すと

$$\frac{dN_{under}(t)}{dt} = B (p0 \exp\left(-\frac{t}{p1}\right) + p2 + 1) \exp\left(-\frac{1}{\tau_{3\gamma}} \left(\frac{-p0 p1 \exp\left(-\frac{t}{p1}\right)}{\alpha} + \left(\frac{p2}{\alpha} + 1\right)t\right)\right) \quad (62)$$

となる。(B は定数)

$B=q0$ ,  $\tau_{3\gamma}=q1$ ,  $\alpha=q3$  とパラメータに置き換え、さらに定数項  $q2$  を加える。これによって pick-off 補正後の寿命のフィッティング関数

$$g(t) = q0 (p0 \exp\left(-\frac{t}{p1}\right) + p2 + 1) \exp\left(-\frac{1}{q1} \left(\frac{-p0 p1 \exp\left(-\frac{t}{p1}\right)}{q3} + \left(\frac{p2}{q3} + 1\right)t\right)\right) + q2 \quad (63)$$

を得る。つまりフィッティングパラメータを取り出した時パラメータ  $q1$  として  $\alpha$ -Ps の崩壊寿命を求めることができる。0keV から 450keV の範囲で new Time のヒストグラムを書き、それを  $g(t)$  でフィッティングした様子を図 32 に示す。(今回は  $q0, q1, q2, q3$  の初期値を 100,100,100,100 とした。)

この fitting で得られたパラメータを表 5 に示す。ここで、パラメータ  $q1$  が求めたい  $\alpha$ -Ps の崩壊寿命であると考えられる。なので  $q1$  のみを取り出して pick-off 補正後の崩壊寿命を表 6 に示す。

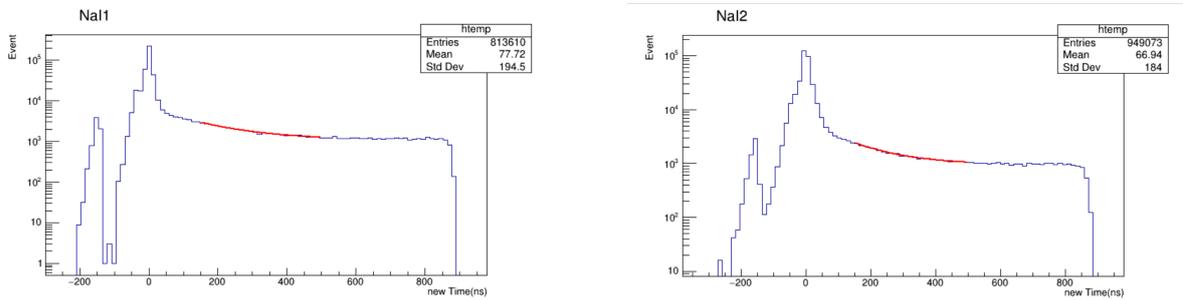


図 32 NaI1,NaI2 について new Time ヒストグラムの fitting (pick-off 補正後)

	$q0$	$q1$	$q2$	$q3$
NaI1	$4059.20 \pm 252.17$	$146.170 \pm 9.297$	$1098.23 \pm 38.77$	$80779.4 \pm 29835700.0$
NaI2	$3242.93 \pm 276.67$	$130.699 \pm 9.474$	$960.259 \pm 30.461$	$-17551.6 \pm 4707590.0$

表 5 NaI1,NaI2 について寿命のフィッティングパラメータ (pick-off 補正後)

	寿命 [ns]
NaI1	$146.170 \pm 9.297$
NaI2	$130.699 \pm 9.474$

表 6 NaI1,NaI2 について pick-off 補正後の o-Ps の崩壊寿命

#### 4 考察

図 33 に示すように、今回の実験結果は 2019 年後期の実験結果と比べて 511keV のピークが明確に現れることがなかった。これは pick-off 反応の割合が少なかったことを意味する。

2019 年後期では、シリカパウダーを容器にできる限り詰め、シリカパウダーの水分を飛ばすという過程を省略した。このためポジトロニウムの周囲にはシリカパウダーやそれに含まれる水分といった、電子の供給源が多く存在し、このために pick-off 反応に起因する 511keV 周辺のピークが強くなった。[1]

今回は過去の実験の反省を踏まえて、シリカパウダーを加熱して水分をしっかりと飛ばし、容器に密にシリカパウダーを積みすぎないようにしたため、ポジトロニウムとシリカパウダーの間で発生する電子の交換の頻度が少なくなり、511keV 周りのピークが見えづらくなったと考えられる。

また、理論値と実験値の比較であるが表 6 にもあるように、NaI1 による結果と NaI2 による結果の範囲内に理論値は収まっている。このため、この実験によって QED の計算の結果は確かめられたということがわかる。

#### 参考文献

[1] 2019 年度後期 物理課題演習 A2 実験レポート,

URL:<https://www-he.scphys.kyoto-u.ac.jp/gakubu/A2/reports/a2report19b.pdf>

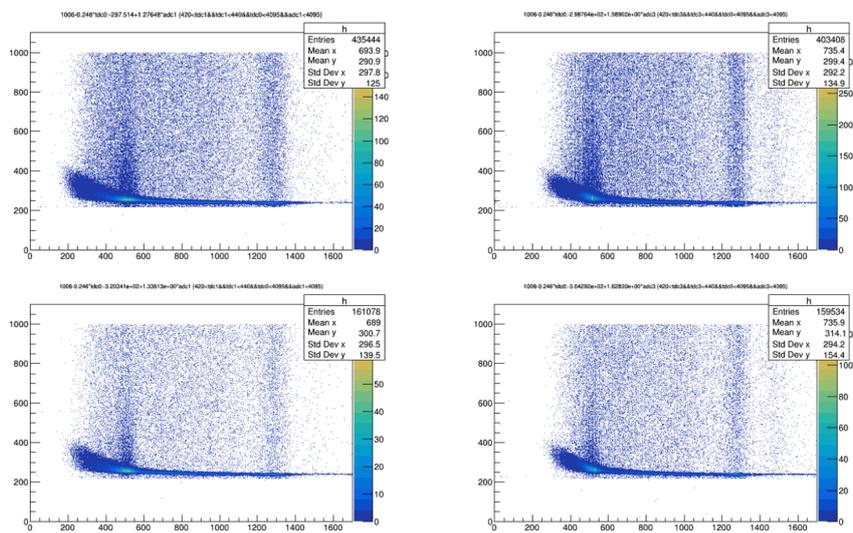


図 33 較正・抽出・TQ 補正済みのデータ。左列が NaI 1、右列が NaI 3、縦軸が時間 [ns]、横軸がエネルギー [KeV]。出典 2019 年度後期 A2 実験レポート図 17[1]