

課題研究 P1 レポート

2010 年度 P1

酒井俊太郎

佐藤芳紀

杉下宗太郎

野坂朋生

濱田雄太

福田貴則

平成 23 年 3 月 29 日

目次

第 1 章	実験原理と方法	2
第 2 章	Lamb シフト	3
2.0	Notation	3
2.1	量子力学	3
2.2	Fine-structure	4
2.3	量子電気力学	6
2.3.1	高エネルギー項	8
2.3.2	低エネルギー項	9
2.3.3	高エネルギー項 + 低エネルギー項	11
第 3 章	実験装置	12
3.1	全体の配置図	12
3.2	使用した装置	12
3.2.1	真空ポンプ	12
3.2.2	Dissociator	14
3.2.3	電子銃	14
3.2.4	検出器	16
第 4 章	測定	20
4.1	水素原子への解離の確認	20
4.2	測定方法	21
4.3	実験結果	22
第 5 章	考察	24
第 6 章	今後の展望	25
第 7 章	謝辞	26

第1章 実験原理と方法

Lamb シフトとは、Dirac 理論によると縮退しているはずの水素原子の $2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ のエネルギー準位の差であり、量子電気力学によって説明される輻射補正の効果である。本実験では、この Lamb シフトの測定を、主に Lamb と Retherford の原論文に従って行うことを目標とした。

まず、チェンバー内の気圧を十分 (10^{-3} Pa 程度) 下げた後に水素分子流を入れた。その水素分子を熱したタングステンチューブに通すことで、水素原子に解離させた。ここで水素原子が出来ていることを確認し、その後水素原子に十分加速した電子ビームを照射して、 $2S_{1/2}$ 軌道、およびその他の軌道へと励起させた。ここでも水素原子が励起されていることを確かめるため、電子増倍管を用いて観測した。

ここで電子を加速させた後に水素原子に照射したのには以下の2つの狙いがある。1つは水素原子に与えるエネルギーを安定させるためであり、もうひとつは励起水素原子に電場を加えないためである。第一のものは定量的に実験をするために当然であるが、第二のものがより重要である。励起した $2S_{1/2}$ 原子に電場が加わるとそれとは違う準位に遷移してしまうのでそれを避けるためである。

ここまですべて準備であり、ここからが実際の Lamb シフトの測定である。

測定において見たい過程は、 $2S_{1/2}$ 軌道の水素原子に $2S_{1/2} \sim 2P_{1/2}$ 間のエネルギー差に対応した電磁波 (rf) をあてると $2P_{1/2}$ への遷移が起こるというものだ。 $2P_{1/2}$ は不安定 (寿命 1.6×10^{-9} sec) だからすぐに基底状態に落ちてしまう。これをクエンチという。 $2P_{1/2}$ は不安定、 $2S_{1/2}$ は準安定だから、 $2P_{1/2}$ への遷移が起こると増倍管内のプレートにあたる励起原子数が減るので得られる電子流が少なくなる。

よって、 $2S_{1/2}$ に励起した水素原子に周波数を変えながら rf をあて、観測される電子のカウントレートが少なくなる点が Lamb シフトに対応するので、そこからエネルギー差がわかる。

Lamb と Retherford の論文では rf の周波数を変える代わりに磁場を加え、Zeeman 効果によってエネルギースペクトルを変化させて遷移確率を測っていた。というのも、rf の周波数を変える際に rf の強度も変わってしまうので、クエンチの結果が周波数だけでなくその強度にもよることであまり周波数依存性のみを測ることができないからである。

しかし、今回の実験では Lamb シフトを見るまでには至らず水素原子の励起を確認するにとどまった。

第2章 Lambシフト

本章ではLambシフトの量子電気力学による導出を詳述する。

2.0 Notation

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

2.1 量子力学

まず、量子力学における水素原子のエネルギー準位を確認しておこう。エネルギー準位は主量子数 n のみに依存し、

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2n^2} \quad (2.1)$$

図示すると、以下ようになる。

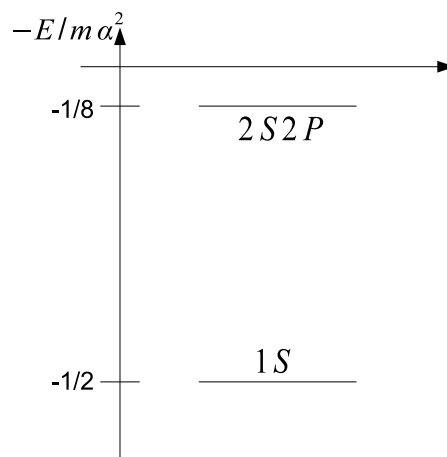


図 2.1: 量子力学での水素原子のエネルギー準位

2.2 Fine-structure

次は Dirac の理論で計算してみよう．Dirac 方程式

$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m\}\psi = 0 \quad (2.2)$$

から出発する． A は電子が感じるベクトルポテンシャルで今の場合 $eA_\mu = (-\alpha/r, 0, 0, 0)$ である．エネルギー固有値を $E(|E| < m)$ とし固有方程式に書きなおすと，

$$E\psi = H\psi \quad (2.3)$$

$$H = -\frac{\alpha}{r} + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\gamma^0 \quad (2.4)$$

となる．これは以下の様にして r の微分方程式に書き直せる．

まず H の第 2 項を次の様に変形する．

$$\begin{aligned} i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} &= \frac{\epsilon}{r} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \\ &= \frac{\epsilon}{r} [\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\nabla})] \\ &= \frac{\epsilon}{r} (r\partial_r - \gamma^0 M + 1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし，

$$\epsilon = \frac{i}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x} = \frac{i}{r} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$M = \gamma^0 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{l} + 1) \quad (2.7)$$

である．これを H に代入すると (2.3) は

$$\left[E + \frac{\alpha}{r} + \frac{\epsilon\gamma^0}{r} M - \epsilon \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) - m\gamma^0 \right] \psi = 0 \quad (2.8)$$

となるが， $[M, H] = 0$ なので J は定数 μ で置き換えられる．さらに ϵ, γ^0 は (r によらない) 基底変換で

$$\epsilon \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と出来るので，この基底における ψ を

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$

と書くと (以下，複号同順)，

$$\left(m \mp E \mp \frac{\alpha}{r} \right) \psi_\pm - \left(\partial_r + \frac{1 \pm \mu}{r} \right) \psi_\mp = 0 \quad (2.9)$$

が得られる．

(2.9) を解く．束縛状態のエネルギー準位を求めるために， ψ_\pm は全空間で規格化可能とする，また，簡便のため $a_\pm = 1/(m \mp E)$ (ともに正である) とおく．

まず, $r \rightarrow \infty$ での (2.9) の振る舞いを考慮して

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{a}} f_{\pm} \quad (2.10)$$

$$a = \sqrt{a_+ a_-} = \sqrt{\frac{1}{m^2 - E^2}}$$

とおくと,

$$\left(\frac{1}{a_{\pm}} \mp \frac{\alpha}{r} \right) f_{\pm} - \left(\partial_r - \frac{1}{a} \pm \frac{\mu}{r} \right) f_{\mp} = 0 .$$

さらに $f_{\pm} = r^{\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} c_s^{\pm} r^s$ (c_0^{\pm} の少なくとも片方は 0 でないとする) とおくと, r の各次の係数から c_s^{\pm} の漸化式

$$\begin{pmatrix} \alpha & s + \lambda + \mu \\ s + \lambda - \mu & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_s^+ \\ c_s^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_+} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{s-1}^+ \\ c_{s-1}^- \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

を得る (c_{-1}^{\pm} は 0 とする). 実は行基本変形により c_{s-1}^{\pm} を消去出来,

$$\{a\alpha - a_-(s + \lambda - \mu)\}c_s^+ + \{a_-\alpha + a(s + \lambda + \mu)\}c_s^- = 0 , \quad (2.12)$$

さらにこれを用いて (2.11) から c^{\pm} の一方を消去することで

$$\frac{c_s^{\pm}}{c_{s-1}^{\pm}} = \frac{1}{a^2} \frac{a_{\pm}(s + \lambda \pm \mu) \pm \alpha a}{a_{\pm}(s - 1 + \lambda \pm \mu) \pm \alpha a} \frac{2a(s - 1 + \lambda) - \alpha(a_+ - a_-)}{(s + \lambda)^2 - \mu^2 + \alpha^2} \quad (2.13)$$

が得られる.

まず $s = 0$ の式より λ が求まる;

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{a^2} \frac{c_{-1}^{\pm}}{c_0^{\pm}} \\ &= \frac{a_{\pm}(-1 + \lambda \pm \mu) \pm \alpha a}{a_{\pm}(\lambda \pm \mu) \pm \alpha a} \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \alpha^2}{2\alpha(-1 + \lambda) - \alpha(a_+ - a_-)} \end{aligned}$$

原点付近で規格化可能な解を考えると $\lambda \geq 0$ なので

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 - \alpha^2} . \quad (2.14)$$

次に, c_s^{\pm} が有限の s で 0 とならないとすると, s が大きいとき (2.13) は

$$\frac{c_s^{\pm}}{c_{s-1}^{\pm}} \sim \frac{2}{as}$$

となるので $c_s \sim (2/a)^s / s!$ (\times 定数), 従って $f \sim \exp(2r/a)$ となる. ところがそうすると $\psi \sim \exp(r/a)$ となり $r \rightarrow \infty$ で規格化出来なくなる.

結局, ある有限の $\nu (\geq 0)$ で $c_{\nu+1}^{\pm} = 0$ とならなければならないことが分かる. すなわち (2.13) より

$$2a(\nu + \lambda) - \alpha(a_+ - a_-) = 0 . \quad (2.15)$$

E について解くと,

$$\begin{aligned} E &= m \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha}{\nu + \lambda} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= m \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha}{\nu + \sqrt{\mu^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.7) より,

$$M^2 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{l} + 1)^2 = J^2 + \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{l} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$$

と変形できるので, μ は全角運動量 j で

$$\mu = \sqrt{j(j+1) + \frac{1}{4}} = j + \frac{1}{2} \quad (2.17)$$

と表すことが出来る. さらに $n = \mu + \nu$ とすると, エネルギー準位は

$$E_n^{j(l,s)} = m \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha}{n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

$$= m - \frac{m\alpha^2}{2n^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + O(\alpha^4) \right\} \quad (2.19)$$

となる (第二式では, 非相対論との比較のため静止エネルギーを分けて書いた). 図示すると, 以下のようになる.

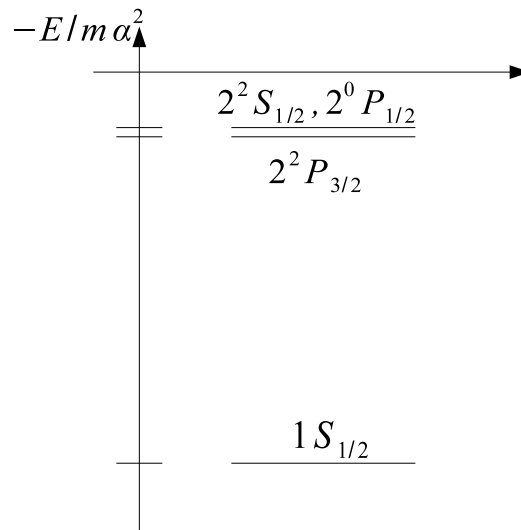


図 2.2: Dirac 理論での水素原子のエネルギー準位, 固有状態の表記は $n^{2s+1}L_j$

Dirac の理論では, $2S_{1/2}$, $2^0P_{1/2}$ と $2^2P_{3/2}$ の縮退は解けるが, $2S_{1/2}$ と $2^0P_{1/2}$ の縮退は解けない.

2.3 量子電気力学

Lamb シフトは原子核の束縛の下で軌道電子が仮想光子と相互作用することにより生じる. Counterterm を導入し, 電磁場を $A \rightarrow A_{cl} + A$ のように外場とゆらぎに分けた量子電気力学のラグラン

ンジアンは

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi - eA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\
 & -\frac{1}{4}\delta_3(F_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m)\psi - e\delta_1 A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\
 & - eA_{cl\mu} \bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \delta_3 A_{cl}^\nu (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\mu - e\delta_1 A_{cl\mu} \bar{\psi}\gamma^\mu\psi
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

となる .

繰り込み条件は

$$\text{電子の自己エネルギー} |_{p \neq m} = 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{d}{d p} (\text{電子の自己エネルギー}) |_{p \neq m} = 0 \tag{2.22}$$

$$\text{光子の自己エネルギー} |_{q^2=0} = 0 \tag{2.23}$$

$$\text{頂点関数} |_{p' - p = 0} = \gamma^\mu \tag{2.24}$$

Ward identity から $\delta_1 = \delta_2$ なので , 以下では δ_2 のみを用いる .

束縛状態のエネルギーシフトは , 状態を区別する量子数をまとめて N として

$$\delta E_N = \text{Re} \left[-\int d^3x \int d^3y \bar{u}_N(\mathbf{x}) \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N) u_N(\mathbf{y}) \right] = \text{Re} \left[-\int d^3p' \int d^3p \bar{u}_N(\mathbf{p}') \tilde{\Sigma}(\mathbf{p}', \mathbf{p}; E_N) \tilde{u}_N(\mathbf{p}) \right]$$

で与えられる .

ただし , Σ は外場のもとでの電子の 2 点関数で , u_N は外場のもとでの Dirac 方程式の正振動数解 . これより , 最低次の補正は以下の diagram で与えられる .

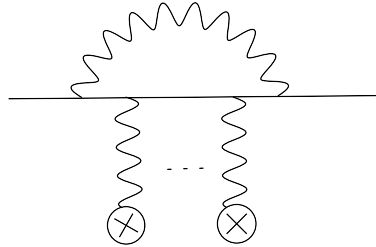


図 2.3: diagram 1

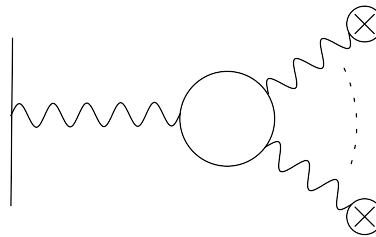


図 2.4: diagram 2

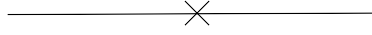


図 2.5: diagram 3

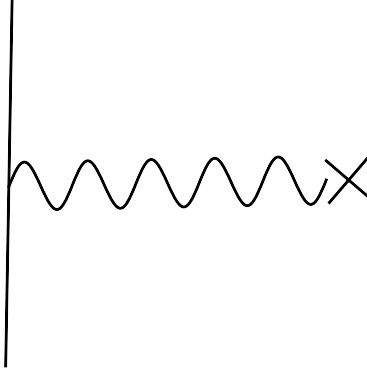


図 2.6: diagram 4

これらのうち, diagram 1 は低運動量積分から来る赤外発散を含むため, 注意深い取り扱いが必要であり, 光子の propagator を以下のように 2 つに分けて書く.

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} = \left[-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right] + \left[-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right] \quad (2.25)$$

Diagram 2 は赤外発散しないので普通に計算する. Diagram 1 で光子の propagator として (2.25) の最初の項を使い, それに真空偏極の寄与を加えたものを高エネルギー項, 後の項を使ったものを低エネルギー項と呼ぼう. 前者は相対論的に, 後者は非相対論的近似をして取り扱い, 全エネルギーシフトに μ が表れないことを後でみる.

この μ は電子の典型的な運動エネルギーより大きく, 典型的な運動量より小さくとる. すなわち

$$\alpha^2 m_e \ll \mu \ll \alpha m_e$$

2.3.1 高エネルギー項

図 2.2~2.5 のうち, 外場について 1 次のものであればよい. したがって

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p', p; E_N) = & -ieA_{cl\mu}(p' - p) \left[-\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{(\not{p}' - \not{k}) + m_e}{(p' - k)^2 - m_e^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{(\not{p} - \not{k}) + m_e}{(p - k)^2 - m_e^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \right. \\ & + \delta_2 \gamma^\mu \\ & + \frac{ie^2 \gamma_\nu}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p' - p)^2 + i\epsilon} \int d^4l \operatorname{Tr} \left(\frac{\not{l} + m_e}{l^2 - m_e^2} \gamma^\mu \frac{\not{l} + \not{p}' - \not{p} + m_e}{(l + p' - p)^2 - m_e^2} \gamma^\nu \right) \\ & \left. - \frac{\delta_3}{(p' - p)^2 + i\epsilon} [(p' - p)^2 g^{\mu\nu} - (p' - p)^\mu (p' - p)^\nu] \gamma_\nu \right] \quad (2.26) \end{aligned}$$

$$\equiv -ieA_{cl\mu}(p' - p) \Gamma^\mu(p', p) \quad (2.27)$$

これを $(p' - p)^2 = q^2 \ll m_e^2$ として計算すると

$$-i\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu (F_1(q^2) - 1) + \frac{1}{2}i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]q_\nu F_2(q^2) \quad (2.28)$$

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \left(\frac{q^2}{m_e^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m_e^2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right] \quad (2.29)$$

$$F_2(q^2) = \frac{e^2}{16m_e\pi^2} \quad (2.30)$$

また, $\alpha \ll 1$ なので, $u_N(\mathbf{x})$ は外場中の電子の非相対論的波動関数 $f_N(\mathbf{x})$ を用いて

$$u_N(\mathbf{x}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\nabla}{2m_e})f_N(\mathbf{x}) \\ (1 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\nabla}{2m_e})f_N(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v})f_N(\mathbf{x}) \\ (1 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v})f_N(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

と近似できる. 以上からエネルギーシフトへの寄与は

$$[\delta E_N]_{high} = \text{Re} \left(\int d^3p' \int d^3p \bar{u}_N(\mathbf{p}') (eA_{cl}^0(p' - p)) \left[(F_1(q^2) - 1)\gamma^0 + \frac{1}{2}i[\gamma^0, \gamma^\nu]q_\nu F_2(q^2) \right] \tilde{u}_N(\mathbf{p}) \right) \quad (2.33)$$

$$= \frac{e^2}{24\pi^2 m_e^2} \left[\ln \frac{\mu^2}{m_e^2} + \frac{2}{5} \right] \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) [e\nabla^2 A_{cl}^0(\mathbf{x})] f_N(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

$$+ \frac{ie^2}{16\pi^2 m_e^2} \int d^3x f_N^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla(eA_{cl}^0(\mathbf{x})) \times \nabla f_N(\mathbf{x})) \quad (2.35)$$

2.3.2 低エネルギー項

図の diagram のうち, 外場についてすべての次数をとらなければいけない. 外場の寄与をすべてとりこんだ propagator は以下のようにかける.

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = -i \left[\sum_{N(1 \text{ 電子状態})} \frac{u_N(\mathbf{x})\bar{u}_N(\mathbf{y})}{E_N - E - i\epsilon} - \sum_{M(1 \text{ 陽電子状態})} \frac{v_M(\mathbf{x})\bar{v}_M(\mathbf{y})}{E_M + E - i\epsilon} \right]$$

$$[\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E_N)]_{low} = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\rho S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E - k^0) \gamma_\rho \left[\frac{1}{k^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ - \delta_2(\not{\partial} + ie A_{cl} + im_e) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (im_e \delta_2 - i\delta m_e) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.36)$$

エネルギーシフトは

$$\Gamma_{MN}^\alpha(\mathbf{k}) \equiv \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \bar{u}_M(\mathbf{x}) \gamma^\alpha u_N(\mathbf{x}) \quad (2.37)$$

$$\tilde{\Gamma}_{MN}^\alpha(\mathbf{k}) \equiv \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \bar{u}_M(\mathbf{x}) \gamma^\alpha u_N(\mathbf{x}) \quad (2.38)$$

を使い

$$\begin{aligned}
[\delta E_N]_{low} = & \text{Re} \left[-\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \left[\Gamma_{MN}^\alpha(\mathbf{k})^* \Gamma_{MN\alpha}(\mathbf{k}) \right. \right. \\
& \times \left(\frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \\
& \left. \left. - \tilde{\Gamma}_{MN}^\alpha(\mathbf{k})^* \tilde{\Gamma}_{MN\alpha}(\mathbf{k}) \left(\frac{1}{|\mathbf{k}|(E_M + E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}(E_M + E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \right] \right. \\
& \left. - (im_e\delta_2 - i\delta m_e) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}) \right] \quad (2.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \text{Re} \left[-\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M \left[\left(\frac{|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - \frac{|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2}{\mathbf{k}^2}}{|\mathbf{k}|(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \frac{(|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - \frac{|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2}{\mathbf{k}^2 + \mu^2})}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\Gamma \leftrightarrow \tilde{\Gamma} \right) (E_N \leftrightarrow -E_N) \right] - \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M |\tilde{\Gamma}_{MN}^0(\mathbf{k})|^2 \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \alpha \mu - (im_e\delta_2 - i\delta m_e) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}) \right] \quad (2.40)
\end{aligned}$$

$\mu \ll m_e$ では

$$im_e\delta_2 - i\delta m_e \rightarrow \frac{\alpha\mu}{2} \left[1 - \frac{3\mu}{2\pi m_e} \right]$$

さらに，非相対論的なとき

$$\int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2)_{NN}$$

これらを使うと，式 (2.40) において

$$(im_e\delta_2 - i\delta m_e) \int d^3x \bar{u}_N(\mathbf{x}) u_N(\mathbf{x}) = (\text{第 1 項})|_{E_M - E_N = 0} + (\text{第 2 項}) + (\text{第 3 項}) + (\text{第 4 項})$$

となる事が分かる．よって

$$\begin{aligned}
[\delta E_N]_{low} = & \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M (E_M - E_N) \left[\frac{|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - \frac{|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2}{\mathbf{k}^2}}{|\mathbf{k}|^2 (E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \frac{|\boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2 - \frac{|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{MN}(\mathbf{k})|^2}{\mathbf{k}^2 + \mu^2}}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right] \\
& \quad (2.41)
\end{aligned}$$

$|\mathbf{k}| \ll \alpha m_e$ では α の最低次で

$$\Gamma_{MN} = (\mathbf{v})_{MN}$$

となることから

$$[\delta E_N]_{low} = \text{Re} \left[\frac{e^2}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3|\mathbf{k}|^2(E_M - E_N + |\mathbf{k}| - i\epsilon)} - \frac{1 - \frac{k^2}{3(k^2 + \mu^2)}}{(k^2 + \mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{k^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \right] \quad (2.42)$$

$$= \text{Re} \left[\frac{e^2}{4\pi^2} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \right. \\ \left. \times \int_0^\infty k^2 dk \left(\frac{2}{3k^2(E_M - E_N + k - i\epsilon)} - \frac{1 - \frac{k^2}{3(k^2 + \mu^2)}}{(k^2 + \mu^2)(E_M - E_N + \sqrt{k^2 + \mu^2} - i\epsilon)} \right) \right] \quad (2.43)$$

$$= \frac{e^2}{6\pi^2} \sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \left[\ln \left(\frac{\mu}{2|E_N - E_M|} \right) + \frac{5}{6} \right] \quad (2.44)$$

2.3.3 高エネルギー項 + 低エネルギー項

$$\sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 = -\frac{e}{2m_e^2} (\nabla^2 A_{cl}^0(\mathbf{x}))_{NN} = \frac{e^2}{2m_e^2} f_N^\dagger(0) f_N(0) \quad (2.45)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \quad (2.46)$$

に注意して，式 (2.35) と式 (2.44) から

$$\delta E_N = [\delta E_N]_{high} + [\delta E_N]_{low} \quad (2.47)$$

$$= \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{e^2}{2m_e^2} f_N^\dagger(0) f_N(0) \left[\ln \left(\frac{m_e}{2|E_N - E_M|} \right) + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right] - \frac{e^2}{16\pi^2 m_e^2} \left(e \frac{1}{r^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} \right)_{NN} \quad (2.48)$$

となり， μ 依存性は消えている．平均励起エネルギーを $l = 0$ のとき

$$\sum_M |\mathbf{v}_{MN}|^2 (E_M - E_N) \ln |E_N - E_M| = \frac{e^2}{2m_e^2} \ln \Delta E_N (f_N^\dagger(0) f_N(0))$$

$l \neq 0$ のとき

$$\sum_M (E_M - E_N) |\mathbf{v}_{MN}|^2 \ln |E_N - E_M| = \frac{2\alpha^4 m_e}{n^3} \ln \left(\frac{2\Delta E_N}{\alpha^2 m_e} \right)$$

で定義すれば

$$[\delta E]_{n,l=0} = \frac{4\alpha^5 m_e}{3\pi n^3} \left[\ln \left(\frac{m_e}{2\Delta E_{n,l=0}} \right) + \frac{19}{30} \right] \quad (2.49)$$

$$[\delta E]_{n,j,l \neq 0} = \frac{-4\alpha^5 m_e}{3\pi n^3} \ln \left(\frac{2\Delta E_N}{\alpha^2 m_e} \right) + \frac{\alpha^5 m_e}{2\pi n^3} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}}{l(l+1)(2l+1)} \right] \quad (2.50)$$

平均励起エネルギーは，非相対論的波動関数もちいて数値的に計算される．その結果^[5]

$$[\delta E]_{2s} - [\delta E]_{2p_{1/2}} = 4.35152 \times 10^{-5} eV = h \times 1052.19 \text{ MHz}$$

これは，実験とよく一致している．

第3章 実験装置

ここでは、実験で用いた装置についてまとめる．全体図は以下である．

3.1 全体の配置図

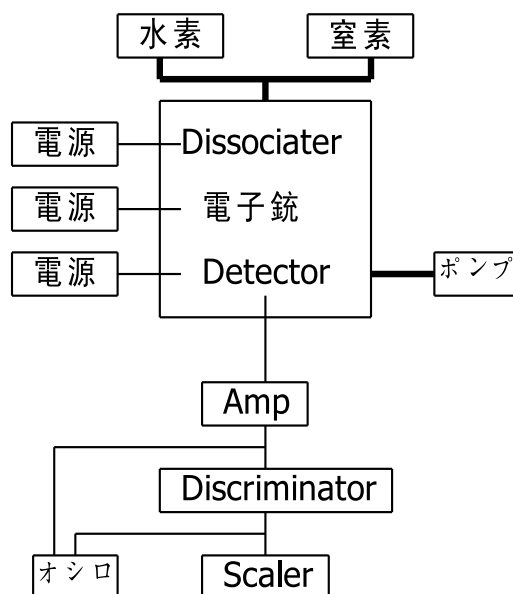


図 3.1: 全体の配置図

3.2 使用した装置

3.2.1 真空ポンプ

本実験ではできるだけ真空に近づけて純粋に水素だけの反応を見たいので、ロータリーポンプとターボ分子ポンプを用いた．ロータリーポンプのみだと数 Pa の真空度まででしか使用できないので、ターボポンプも併用してチェンバー内の気圧を下げた．真空計はピラニ真空計と冷陰極電離真空計を使用した．

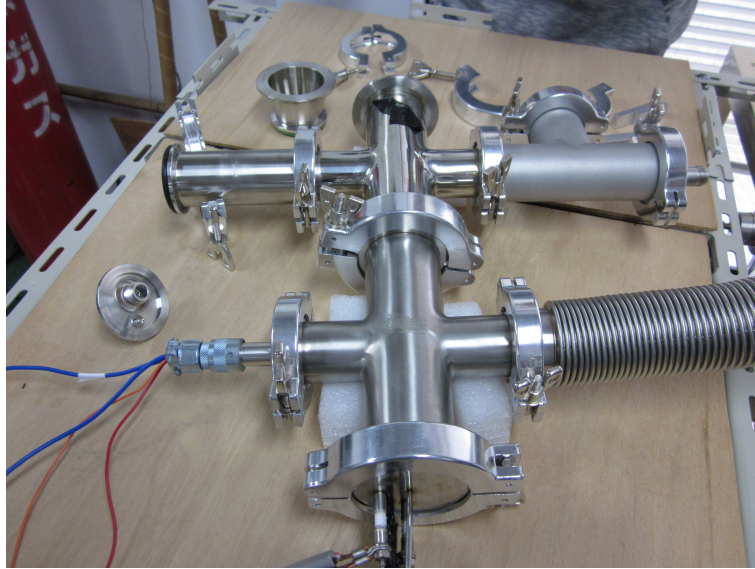


図 3.2: チェンバー



図 3.3: 真空ポンプと真空計

3.2.2 Dissociator

水素分子を熱によって水素原子に分離するのが dissociator である．この装置は去年に作製されたものを用いた．Dissociator はタングステンチューブ (外径 0.7 mm ϕ , 内径 0.5 mm ϕ , 長さ 3 cm) でできている．また，実験中はタングステンチューブは 2500 K 程度まで加熱され容器自体も非常に高温になるためチェンバーの外側にホースを巻きつけ水道水を流すことで容器が高温になり過ぎないように冷却した．



図 3.4: dissociator

3.2.3 電子銃

電子銃とは，水素原子を励起させるために加速した電子ビームを照射する装置である．電子の発生源にはタングステンを使用した．

電子銃の写真および回路図を以下に示す．

タングステンと接地した銅の間を加速した電子が飛び水素原子が励起される．銅はシールドの役割も果たし，検出器の方に電子がほとんど飛んでいかないようにしてある．水素原子が電場によってクエンチされるのを防ぐため，タングステンと銅の間には接地したタングステングリッドを挟んだ．そのため，水素の通り道に電場はかかっていない．タングステンの長さは 1 cm 程度であり，直径は 0.2 mm ϕ である．抵抗は約 0.3 Ω となる．電子銃の水素原子を励起する概略は以下の図の通りである．

タングステンに約 2 V の電圧をかけるのに電源 1 を使用した．ここで，タングステンの電位は装置に対して負になるように設定した．それはグリッドおよび銅のシールドので電位は装置のグラウンドと一致するようにに設定してあるため，タングステンの電位を装置に対して負にしないと電子がグリッドに向かって加速されないためである．タングステン自体の電位を ground に対してさげるため電源 2 には 10.0 V の電圧をかけた．ノイズを除去するため，回路にローパスフィルターを付け加えた (図 3.8) ．図 3.2.3 から見たい信号の周波数はおよそ 2×10^9 Hz であり，ノイズの周

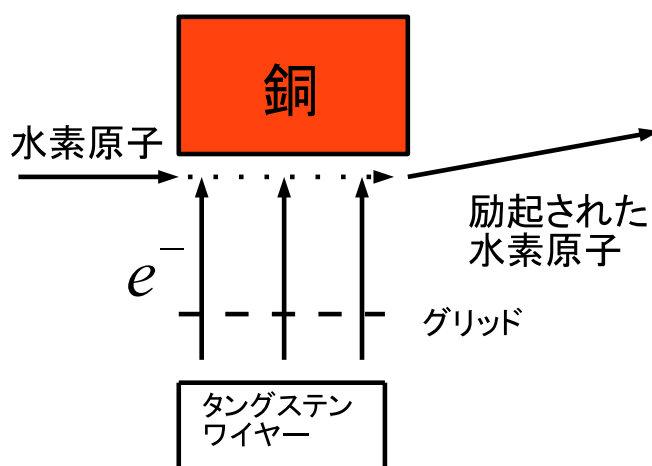


図 3.5: 水素原子励起の概略図

波数はおよそ 1×10^9 Hz だから、ノイズを消すために、抵抗は 0.091Ω のもの、コンデンサーは 10 nF のものを用いた。ローパスフィルターの抵抗については、最初は $5 \text{ W } 0.3 \Omega$ のものを使っていたが高温になり異臭がしたため $10 \text{ W } 0.1 \Omega$ のものに変更した。しかしそれでもやはり高温になったため、更に $10 \text{ W } 5.1 \Omega$ の抵抗を 5 個並列につないで高温にならないようにした。

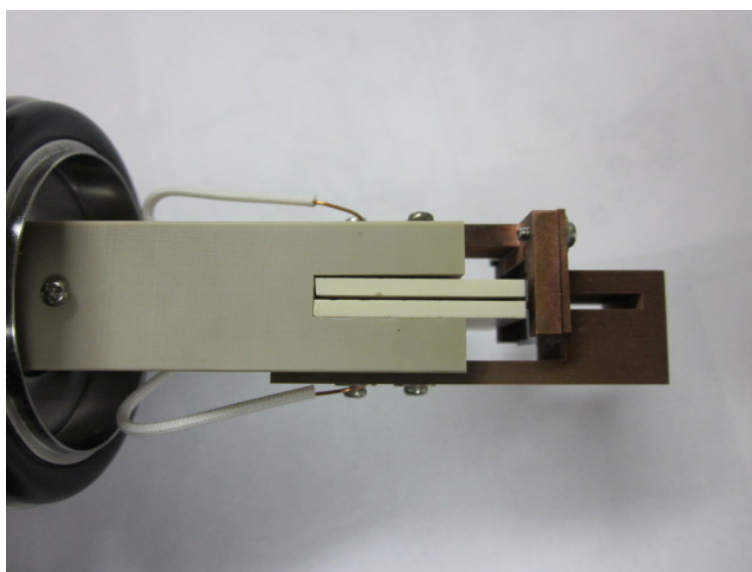


図 3.6: 電子銃

ただし、実際に測定するときに見ていた信号の大きさは AMP を通す前であっても上の写真とは異なるものであった。しかしローパスフィルターを入れた後ではノイズはあまり見られなかったのでローパスフィルターの効果はあったものと思われる。

また、実験終了後に何もせずに真空を破ると、チェンバー内に酸素が流入し高温になった dissociator のタングステンチューブや電子銃のタングステンワイヤーが酸化され電子銃や dissociator の耐用

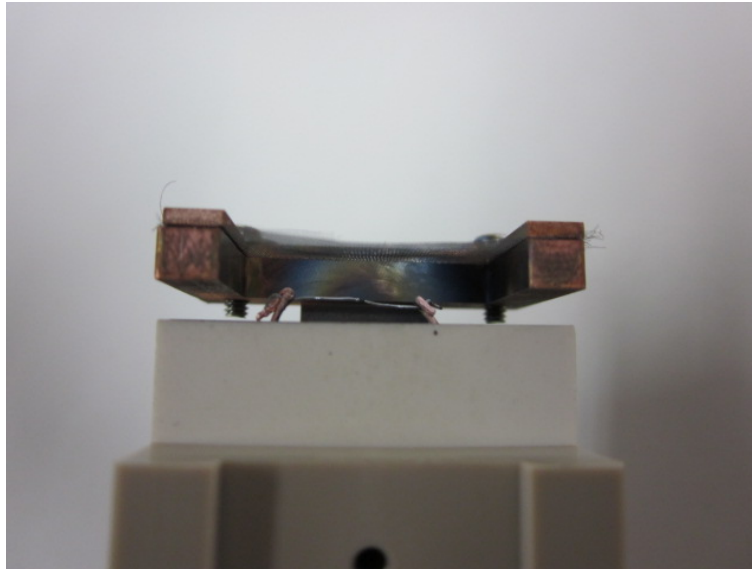


図 3.7: 電子銃に使用したタングステンとグリッド

期間が短くなってしまふ．それを避けるために実験終了後はチェンバー内に窒素分子を封入し，タングステンの酸化を防いだ．

3.2.4 検出器

水素原子の検出には電子増倍管を用いた．準安定な水素原子が金属にぶつくと光電効果のように電子が飛び出すことを利用する．ただし，準安定水素原子は電場によってクエンチされてしまうため，増倍管の入射側を ground にし，通常と逆の電圧のかけ方で使用した．増倍管には 2500 V の電圧をかけた．増倍管からの信号は AMP で増幅した．さらに，その信号を discriminator を用いてデジタル信号に変換し，それを scaler につないで信号数を計測した．

以下に使用した電子増倍管の写真，及びその概略図を示す．

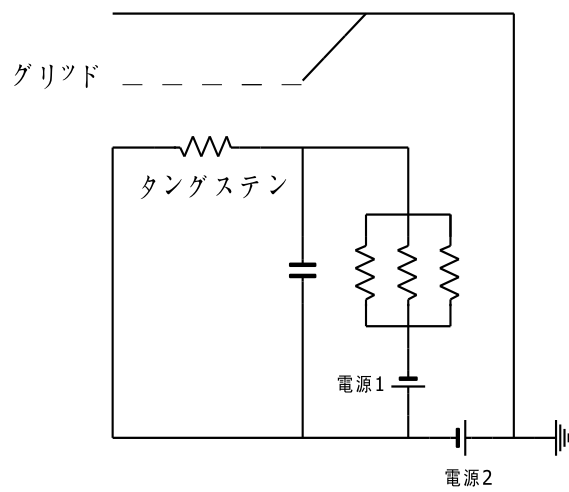


図 3.8: 電子銃の回路

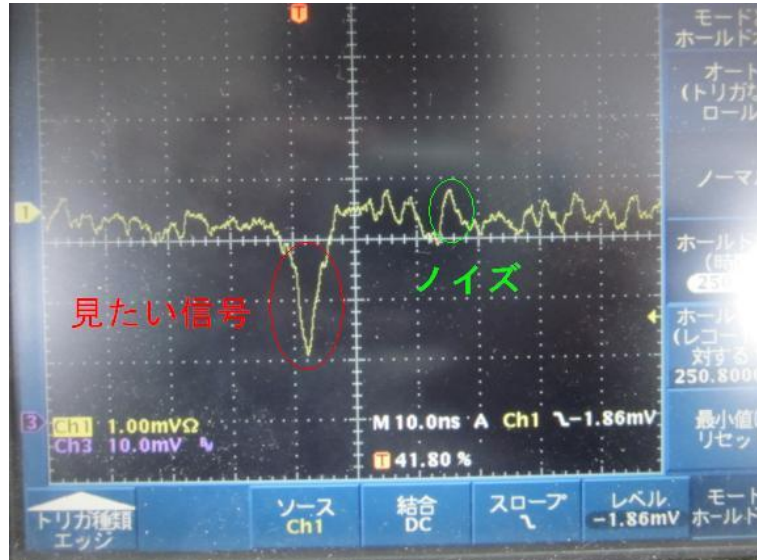


図 3.9: 信号

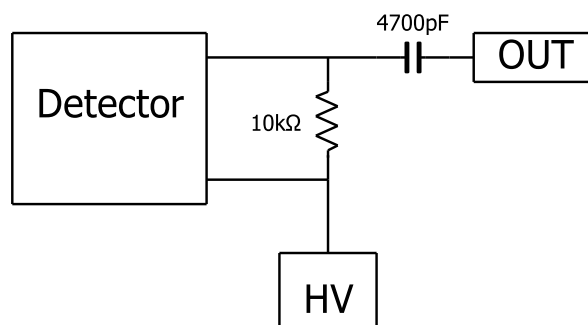


図 3.10: 検出器



図 3.11: 電子増倍管

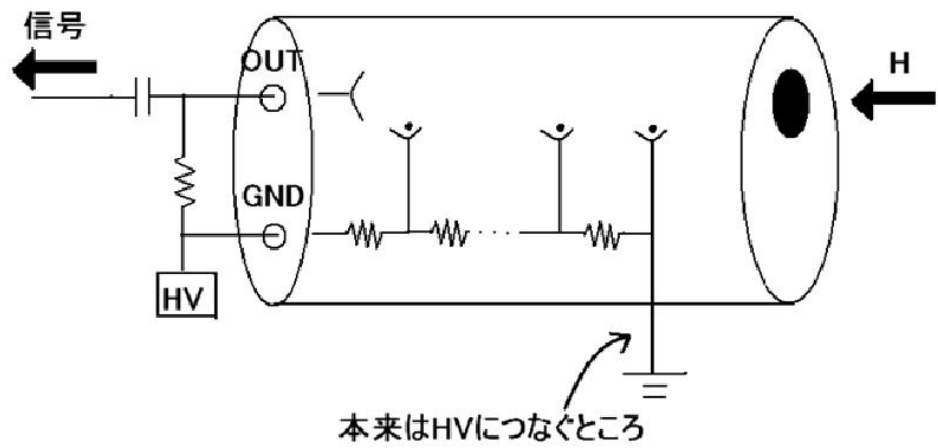


図 3.12: 電子増倍管の概略図

第4章 測定

4.1 水素原子への解離の確認

真空ポンプでチェンバー内の気圧を十分 (10^{-3} Pa 程度) 下げたあとに、水素分子流を入れた (1.3×10^{-1} 程度)。この状態でタングステンチューブに電流を流してタングステンチューブを加熱した。水素分子の解離エネルギーが 4.5 eV であることから dissociator の温度は 2500 K 程度まで加熱しなければならなかったため、dissociator の温度を確認するために加熱されたタングステンチューブの色によって大体の温度を推定した。

水素分子量の調整については水素分子ポンプとチェンバーの間にニードルバルブを設置し、ニードルバルブを手動で調節することにより行った。ここで水素原子が出来ていることを確認するために、チェンバー内に酸化モリブデン (VI) (MoO_3) 粉末をテープにつけて入れ、それが $\text{MoO}_3 + 6\text{H} \rightarrow \text{Mo} + 3\text{H}_2\text{O}$ に従い黄から青に変色することを見た (図 4.1, 図 4.3)。



図 4.1: 反応前のモリブデン

Dissociator を加熱しなかったときまたは十分加熱されていないときは、酸化モリブデン (VI) の色の変化を確認できなかったが、タングステンチューブが赤変するまで加熱したときには酸化モリブデン (VI) の色の変化を確認できた。よって、dissociator の加熱によって水素分子が水素原子に解離したことが確かめられた。

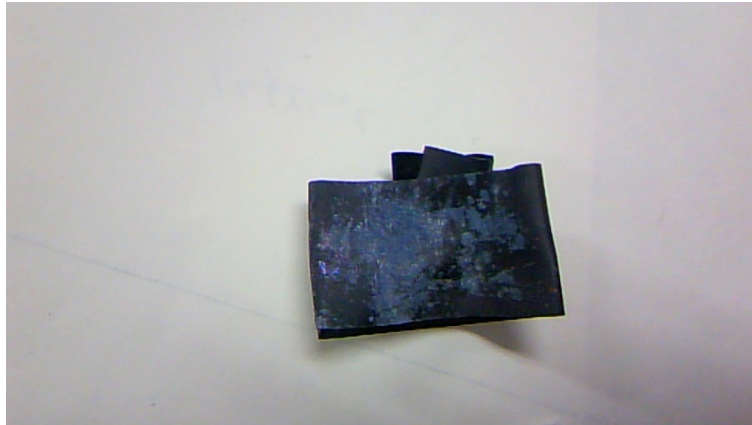


図 4.2: 反応後のモリブデン

4.2 測定方法

水素原子ができて、さらに $2S$ 状態に励起されていることを確認するため、次の 4 つの場合で増倍管の信号数を 1 分間計測した。同じ設定で計測は 2 回ずつ行った。それぞれの場合において discriminator の threshold V_{th} をおよそ 20, 25, 30 mV の 3 段階に分けて計測した (表 4.1~4.4)。Threshold についてはオシロスコープで確認した信号の高さをもとに設定した。典型的な信号の写真を以下に示す。

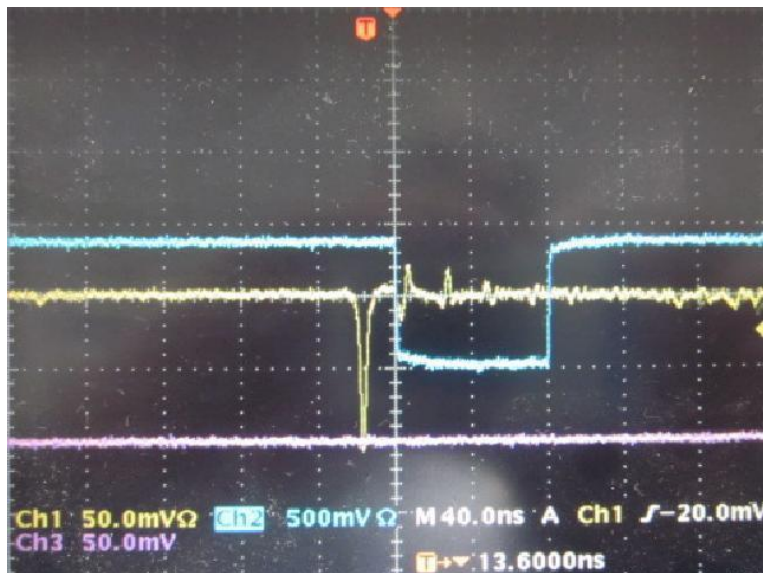


図 4.3: 典型的な信号

測定は以下の4つの条件で行った。

- i. 電子銃のみ
- ii. 水素分子 + Dissociator
- iii. 電子銃 + 水素分子
- iv. 電子銃 + 水素分子 + Dissociator

次に水素を流し、電子銃をつけたまま dissociator に流す電流を変えて測定を行った (表 4.5)。

Threshold は 24.9 mV であり、ここでも電子増倍管からの信号数を scaler を用いて 1 分間計測した。同じ設定で計測は 2 回ずつ行った。ただし最後のデータは、電子銃のタングステンが切れてしまったために測定ができなかった。

4.3 実験結果

実験結果は以下の表のようになった。ただし気圧に関しては、真空計が水素原子と分子を主に計測しているため大気の場合で計測された気圧からは補正がかかるが、以下の表には計器の示した気圧の値をそのまま記してある。

表 4.1: 電子銃のみ

V_{th} (mV)	カウント数/min.		気圧 (Pa)	電子銃		Dissociator	
	1 回目	2 回目		電圧 (V)	電流 (A)	電圧 (V)	電流 (A)
19.9	56	59	2.3×10^{-3}	2.1	5.7	0	0
24.9	7	14	1.8×10^{-3}	2.1	5.7	0	0
30.0	2	5	1.7×10^{-3}	2.1	5.7	0	0

表 4.2: 水素分子 + Dissociator

V_{th} (mV)	カウント数/min.		気圧 (Pa)	電子銃		Dissociator	
	1 回目	2 回目		電圧 (V)	電流 (A)	電圧 (V)	電流 (A)
20.1	117	96	2.1×10^{-1}	0	0	1.6	15
25.1	26	31	2.1×10^{-1}	0	0	1.6	15
30.0	9	8	2.1×10^{-1}	0	0	1.6	15

表 4.3: 水素分子 + 電子銃

V_{th} (mV)	カウント数/min.		気圧 (Pa)	電子銃		Dissociator	
	1回目	2回目		電圧 (V)	電流 (A)	電圧 (V)	電流 (A)
20.1	3628	4030	2.5×10^{-1}	2.1	5.6	0	0
25.2	769	952	2.4×10^{-1}	2.1	5.6	0	0
30.0	87	148	2.4×10^{-1}	2.1	5.6	0	0

表 4.4: 水素分子 + 電子銃 + Dissociator

V_{th} (mV)	カウント数/min.		気圧 (Pa)	電子銃		Dissociator	
	1回目	2回目		電圧 (V)	電流 (A)	電圧 (V)	電流 (A)
20.1	9573	9338	2.1×10^{-1}	2.1	5.4	1.6	15
24.9	3089	3464	2.1×10^{-1}	2.1	5.4	1.6	15
30.0	1031	1008	2.1×10^{-1}	2.1	5.4	1.6	15

表 4.5: dissociator に流す電流を変化させた場合

Dissociator		カウント数/min.		気圧 (Pa)	電子銃	
電圧 (V)	電流 (A)	1回目	2回目		電圧 (V)	電流 (A)
0	0	918	2084	2.8×10^{-1}	2.1	5.6
0.1	3	3732	4259	2.9×10^{-1}	2.1	5.5
0.3	6	6616	7415	2.9×10^{-1}	2.1	5.5
0.7	9	9449	9389	2.9×10^{-1}	2.1	5.5
1.2	12	11950	12775	2.9×10^{-1}	2.2	5.4
1.7	15	22532	*	2.9×10^{-1}	2.2	5.4

*電子銃のタングステンが切れてしまったために測定ができなかった。

第5章 考察

表 5.1~5.4 より, どの threshold においても, 上で示した条件 i. ~ iv. の順でカウント数が増えていることがわかる. 電子銃 + 水素分子の場合と電子銃 + 水素分子 + Dissociator の場合を比較すると後者のほうがカウント数がおよそ 2~10 倍ほど多い. そのため, Dissociator は水素分子を原子に分離していると思われる. 水素分子 + Dissociator の場合と電子銃 + 水素分子 + Dissociator の場合を比較すると後者のほうがカウント数がおよそ 100 倍ほど多い. 従って, 電子銃により水素原子は $2S$ 状態に励起していると思われる. しかし, 電子銃のみの場合と比べて電子銃 + 水素分子の場合のカウント数がおよそ 100 倍ほど多い点が気になる. この理由としては, 水素分子が電子銃により水素原子に分離しているか, もしくは水素分子自体が励起してそれを電子増倍管が検出していることなどが考えられる. 水素分子の結合エネルギーは 4.5 eV 程度なので, 電子銃によって原子に分離し得る. ただし, 表 4.5 を見ると dissociator に電流を流すとカウント数は増えるので, 分離する量は多くないまたは分離しても分子にすぐ戻っている可能性が高い. 電子銃で水素分子が励起したとしても dissociator をつけた場合と比較すると信号数は少ない. 特に threshold を高めた場合, dissociator をつけた場合と比べて信号数は 10 分の 1 程度しかないので, これは問題ではないと思われる.

第6章 今後の展望

おそらく水素原子を $2S_{1/2}$ に励起することはできたので、あとは rf をかけることができれば、Lamb シフトを測定することができるはずである。マイクロ波発生器を使って電磁波を同軸管に通し、その中に水素原子を通すことで rf をかければよい。そのためには同軸管を水素原子の通り道にうまく配置する必要がある。他に考えるべきことは、装置内の気圧をどの程度にするべきか、dissociator に流す電流をどの程度にするべきか等である。

第7章 謝辞

実験全体を通して、市川さんと TA の松岡さんには大変お世話になりました。

100 万円もするマイクロ波発生器を買っていただいたのに使えなかったことが大変心残りですが、来年度の人たちに有効に使ってもらえることを期待します。

最後に、このレポートを偉大なる W.E.Lamb と R.C.Retherford に捧げます。

参考文献

- [1] W. E. Lamb and R. C. Retherford, Phys. Rev 79, 549 (1950)
- [2] W. E. Lamb and R. C. Retherford, Phys. Rev 81, 222 (1950)
- [3] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, (みすず書房, 1963)
- [4] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction To Quantum Field Theory, (Westview Press, 1995)
- [5] S. Weinberg, 場の量子論 2 巻, (吉岡書店 1997)