
重力の測定

この実験ではキャベンディッシュ型の実験装置を用いて
数 cm 単位での重力を測定し, 逆二乗則に従っているかを検証した.

2013 年度, 課題研究 P1

京野秀紀 高部雄史 羽田顕人
京都大学理学部

2014.3.31

目次

第 1 章	目的と動機	3
第 2 章	実験原理と実験装置	4
2.1	実験原理	4
2.2	実験装置	6
第 3 章	実験結果	12
第 4 章	考察と結論	13
4.1	弾性係数の決定	13
4.2	その他変数の決定	15
4.3	重力定数を求める	16
4.4	考察/問題点	18
謝辞		19

第1章

目的と動機

もともとはカシミア力を測定したいという動機があったが、この測定は非常に近距離（数 10 nm スケール）で、非常に弱い力を測定しなければいけない。これはおそらく高度な技術、知識が求められるということで、より長距離（数 cm スケール）で、キャベンディッシュの方法により重力の逆二乗則を検証することにした。以下では特に万有引力定数を求めることを目的として話を進めていく。

第2章

実験原理と実験装置

実験原理と実際に使用した装置を解説する。

2.1 実験原理

今回、行った実験は、いわゆるキャベンディッシュの実験である。図 2.1 は、実験原理を説明するために、装置を上から模式的に表した図である。

おもり (大) の位置を手で動かし、おもり間に働く重力 (青矢印) によるトルクとワイヤーの復元力によるトルクの釣り合い (緑矢印) の平衡点の移動における応答を見る。

ここで、以下のように文字を置く (図 2.2 参照)。

- おもり (大) の重さ; M
- 下げ振り (おもり小) の重さ; m
- 中心からおもりまでの距離; L
- おもり間の距離; D
- おもり間の角度; φ
- ねじれた角度; Θ
- おもり (大) の高さ (直径も同じ) ; l_m
- ワイヤーの長さ; l_w
- ワイヤーの半径; r

さて、おもり間の重力を計算したいのだが、厳密に解析的計算を行うには限界があった。そこで、2つのおもりを共に長さ l_m の棒 (太さ 0) として近似をした。その結果、おもり間にはたらく重力を F_g とおくと、

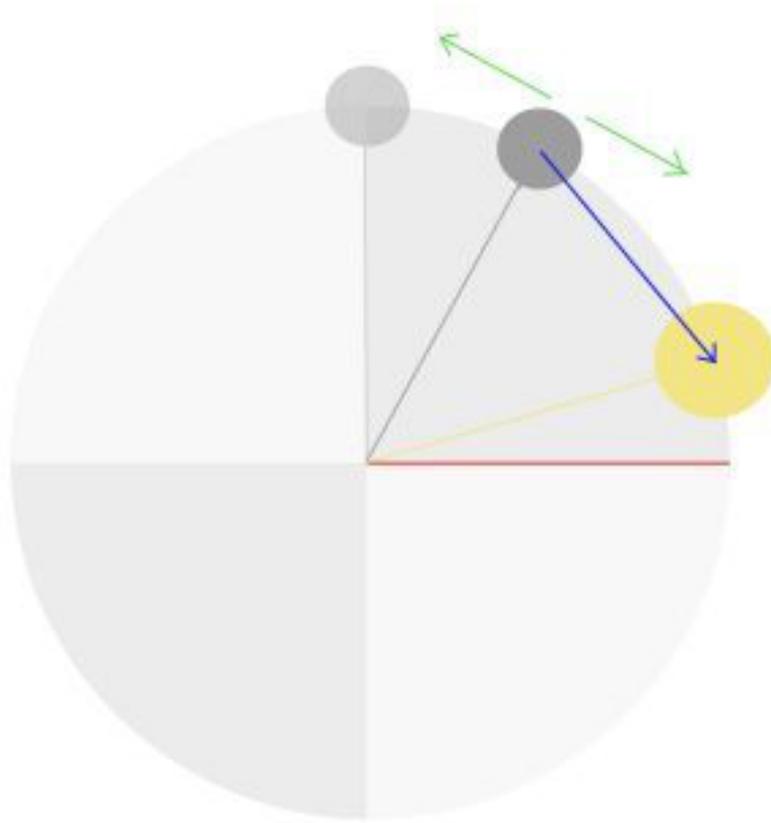


図 2.1 実験装置の上から見た模式図.

$$F_g = \int_0^{l_m} \int_0^{l_m} dx dy \frac{GMm}{l_m^2 (D^2 + (x-y)^2)} \quad (2.1)$$

$$= \frac{2GMm}{l_m^2} \left[\frac{l_m}{D} \arctan \frac{l_m}{D} - \frac{1}{2} \log \left(1 + \left(\frac{l_m}{D} \right)^2 \right) \right] \quad (2.2)$$

したがって、重力によるトルク T_g は、上の F_g を用いて、

$$T_g = 2LF_g \quad (2.3)$$

と書ける。

また、ワイヤーによるトルクは、弾性理論により H を (タングステンの) ねじれ係数として、

$$T_e = \frac{H\pi^2 r^4}{2l} \theta \equiv k\theta \quad (2.4)$$

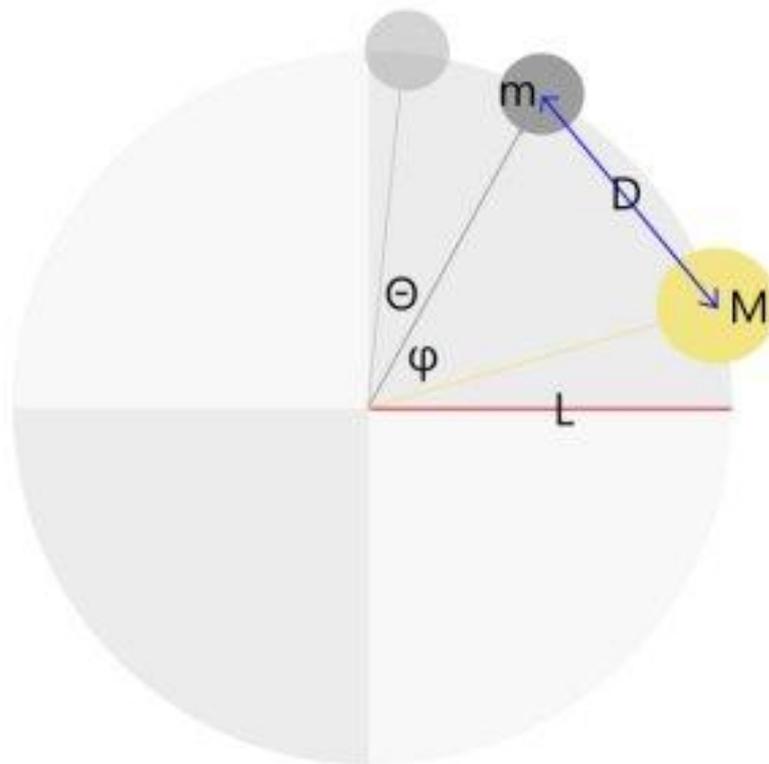


図 2.2

したがって、各測定値は、

$$T_g = T_e \quad (2.5)$$

を満たすはずである。

2.2 実験装置

実際に使用した実験装置を以下に述べる。

- 全体 (図 2.3)
実験当初、風や外部からの振動によるノイズが懸念されたので、装置全体を防振台に乗せ、とくにおもりまわり風除けを作った。
- 本体 (図 2.4)
下げ振りとワイヤーを接続するプラスチックフレームは自らの設計のもと発注した。うでの長さは 30cm である。
- タングステンワイヤー (図 2.5)



図 2.3 全体図

直径は、0.1[mm] であり、長さは 87[cm] ほど※。

※ワイヤーの両端をそれぞれ接続する際、内部構造を持たないように細心の注意を払わなければならなかったため、ワイヤーの長さの精度は犠牲は不可避であった。

- おもり大 (図 2.6)

真鍮製で、重さ 7[kg]、直径 10[cm]、高さ 10[cm] の円柱型。

- さげふり (おもり小) (図 2.7)

重さ 400[g] で、市販のもの。

- カメラ (図 2.8)

人が実験装置に近づくことによるノイズを避けるため導入された。PC に接続し自動的に



図 2.4 本体

キャプチャすることによって室内無人の測定が可能となった。

以上を用いて、

- ワイヤーでさげふりを吊るし、おもりを所定の位置へセットする。
- カメラをせつとする。
 - ※ 30 秒に一枚撮影
 - ※ 18 時ごろから翌 9 時ごろまで人の少ない時間をねらい測定
- 退出（測定中は入出禁止）

という手順を踏んで、測定を行った。



図 2.5 ワイヤー



図 2.6 おもり大



図 2.7 さげふり



図 2.8 カメラ

第 3 章

実験結果

第4章

考察と結論

ここではワイヤーの弾性力と重力によるトルクの釣り合いから重力定数を求めていく。まずワイヤーの弾性 (ねじれ) 係数を決定し, おもり間の距離 D , 角度 θ , ねじれた角度 ϕ を画像解析より求めていく。これらの変数をトルクの釣り合いの式に代入し重力定数を求める。

4.1 弾性係数の決定

ワイヤーの弾性力によるねじれ秤に働くトルク T_e は, 弾性係数 k , ねじれ角 θ を用いて,

$$T_e = k\theta \quad (4.1)$$

とかける。この k を今回は二通りのやり方で求めた。

1. 周期から求める方法

重力がない場合, ねじれ秤は運動方程式

$$I \frac{d}{dt} \theta = T_e = k\theta \quad (4.2)$$

に従っている (単振動) と仮定する (I はねじれ秤の慣性モーメント)。するとこの運動の周期は $2\pi\sqrt{I/k}$ となる。この関係より周期を得ることで弾性係数が得られる。なお以下の解析において慣性モーメント I はねじれ秤の質量は下げ振りのみにあると近似し, $I = 2mL^2$ とした。

振動周期はおもりのメモリが 355 であるときを重力がない場合とし, このときの画像解析により得たデータを関数 $f(x) = a * \cos(2\pi x/T + b) + c$ で fitting することで fit パラメータ T として周期が得られる (a, b, c はその他の fit パラメータ)。実際に得られたデータのグラフを見ると単振動ではないため, そのまま全体を fit してもうまくいかなかった, そのためデータを 2010 [s] ごとに 0 [s] から順に十箇所 fitting を行い, その各結果の平均を周期とした。以下に解析の様子と結果を記す。

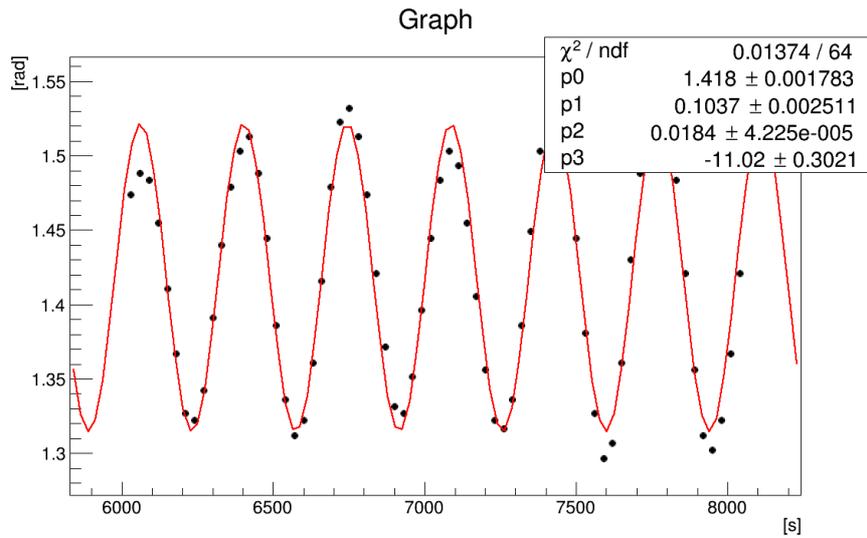


図 4.1 周期の fitting の様子 (6030 [s] から 8040 [s] まで). fitting 関数は $[p0] + [p1] * \cos([p2] * x + [p3])$

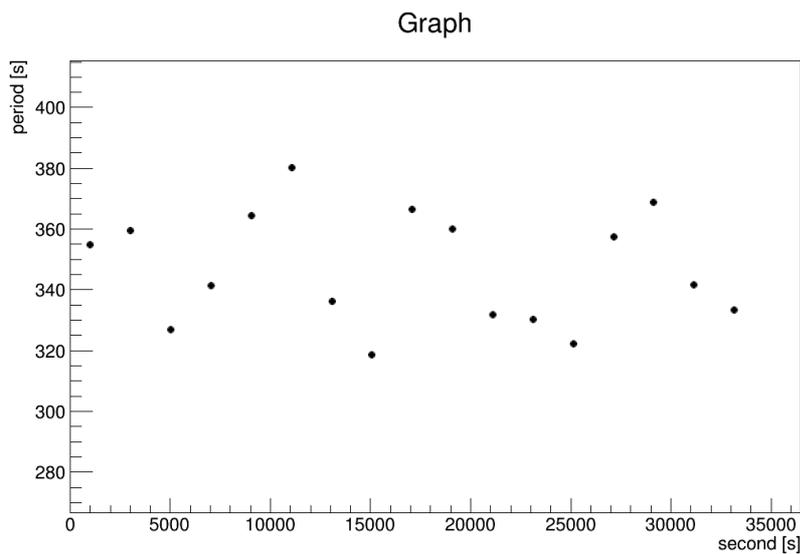


図 4.2 周期の変遷の様子 (0 [s] から 34170 [s] まで).

以上の結果を平均して、周期 $T = 346.76[s]$ を得た. これを

$$k = \frac{8\pi^2 mL^2}{T^2} \tag{4.3}$$

に代入し ($m = 0.4[\text{kg}], L = 0.15[\text{m}]$), $k = 5.91 * 10^{-6}[\text{kgm}^2/\text{s}^2]$ を得た.

2. 弾性理論の公式から求める方法

もう一方の k の求め方は、弾性理論による円柱の弾性 (ねじれ) 係数の公式

$$k = \frac{H\pi^2 r^4}{2l} \tag{4.4}$$

を用いる方法である（ここで H はタングステンのねじれ係数, r はワイヤーの半径, l はワイヤーの長さである）。これに $H = 161[\text{GPa}]$, $r = 0.01[\text{mm}]$, $l = 87[\text{cm}]$ を代入すると, $k = 1.8 * 10^{-6}[\text{kgm}^2/\text{s}^2]$ を得た。

4.2 その他変数の決定

まず, おもりと下げふりの振動中心との間の角度 ϕ をきめる。おもりの各メモリごとの位置は画像より読み取り, 下げふりの振動中心は画像解析より得たデータの平均とした。しかし長時間のデータを区切って平均をとってみると振動中心の変遷がみられたので, 以下にそのグラフを載せておく。

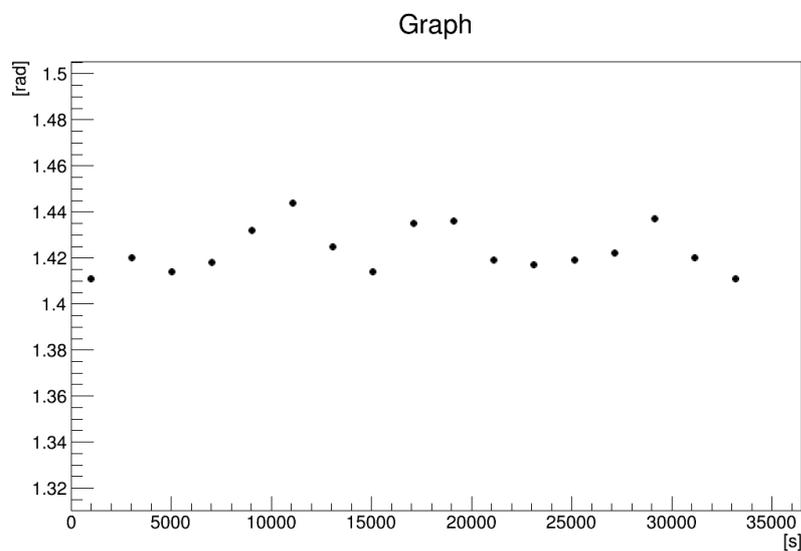


図 4.3 振動中心の変遷の様子 (メモリ 355 の時のデータについて, 0 [s] から 34170 [s] まで)。

各おもりのメモリと ϕ の値については, 表 4.1 のような結果となった。

おもりのメモリ	ϕ [度]
355	87.26
15	67.51
35	46.30
40	40.49
45	35.60

表 4.1 各メモリごとの ϕ

この結果よりメモリが 355 の場合はねじれ秤とおもりがほぼ垂直に位置しており, この時を重

力が働いていない状態とみなして良いことがわかる。次に、ねじれ角 θ を決める。メモリが 355 の時の振動中心を (重力が無いため) ねじれ 0 とみなし、この時の振動中心 ϕ_{355} と各メモリの振動中心 ϕ との差を θ とする。この結果は表 4.2 となった。

おもりのメモリ	θ [度]
355	0
15	-0.2510
35	0.9615
40	1.765
45	1.659

表 4.2 各メモリごとの θ

おもりの間の距離 D についてはおもりの間の角度 ϕ から、 $D = \sqrt{2L^2(1 - \cos\phi)}$ と求まる。この結果は表 4.3 となった。

おもりのメモリ	D [m]
355	0.2070
15	0.1667
35	0.1179
40	0.1038
45	0.09170

表 4.3 各メモリごとの D

また以上で得られた D と θ の相関を表すグラフを図 4.4 として載せておく。

4.3 重力定数を求める

以上の結果をつり合いの式

$$2LF_g = T_e \quad (4.5)$$

に代入し、重力定数 G について解く。ここで

$$T_e = k\theta \quad (4.6)$$

であり (k は上で得たもの)、また F_g については今回はおもりと下げふりを長さ l_m の棒と近似したので、

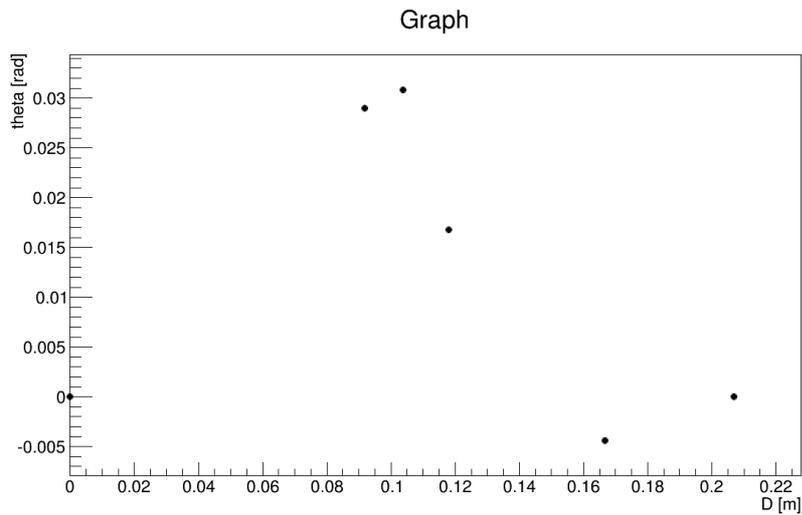


図 4.4 おもり間の距離 D と θ の相関

$$F_g = \int_0^{l_m} \int_0^{l_m} dx dy \frac{GMm}{l_m^2 (D^2 + (x - y)^2)} \tag{4.7}$$

$$= \frac{2GMm}{l_m^2} \left[\frac{l_m}{D} \arctan \frac{l_m}{D} - \frac{1}{2} \log \left(1 + \left(\frac{l_m}{D} \right)^2 \right) \right] \tag{4.8}$$

となる. これに上記の変数を代入し G を得た. その結果は以下となった.

おもりのメモリ	$G[\text{m}^3/\text{kgs}^3]$
35	1.814×10^{-9}
40	2.642×10^{-9}
45	1.990×10^{-9}

表 4.4 各メモリごとの G (1 のやり方で求めた $k = 5.91 * 10^{-6} [\text{kgm}^2/\text{s}^2]$ を用いた場合)

おもりのメモリ	$G[\text{m}^3/\text{kgs}^3]$
35	5.524×10^{-10}
40	8.046×10^{-10}
45	6.060×10^{-10}

表 4.5 各メモリごとの G (2 のやり方で求めた $k = 1.8 * 10^{-6} [\text{kgm}^2/\text{s}^2]$ を用いた場合)

以上より, 文献値 $G = 6.67384 \times 10^{-11} [\text{kgm}^2/\text{s}^2]$ よりも大きい値が得られることとなった.

4.4 考察/問題点

ここでは、この実験における改善点・考察を挙げていく。

- 得られたねじれ秤の振動うなりのような形をしており、なぜこのような形になるのか原因を突き止めることは出来なかった。今回は防振台を用いて実験を行ったが防振台自身が非常にゆっくり揺れている可能性がある。また空気中で振動しているため風や空気の抵抗の影響もあると思われる。
- 重力源として、円筒形のものと同様に下げ振りを用いたためこの間に働く重力を求めることが困難であった。実際には両者を一次元の棒として近似した。この過程で重力定数の値がずれてしまうことは大いに考えられる。また、今回は重力定数 G を求めるだけに終わったが、本来は重力がどのような距離依存性を持つかということも検証したかった。そのためには球体同士で測定を行うのが良いと思われる。
-

謝辞

この実験を行うにあたって、実験方法の考案から、装置の購入まで大変お世話になった市川温子准教授に深く感謝します。また、実験を手伝ってくださった TA の黄さん、林野さん、実験室の使用に協力してくださった素粒子物理学研究室の皆さんにも感謝致します。