重力の測定

２０１３年度　課題研究　P1

京野秀紀　高部雄史　羽田顕人

1.　実験目的･動機

目的･動機

もともとカシミア力を測定したいという話があった. しかしこの測定は非常に近距離（数10nmスケール）で, 非常に弱い力を測定しなければいけない. これはおそらく高度な技術, 知識が求められる.

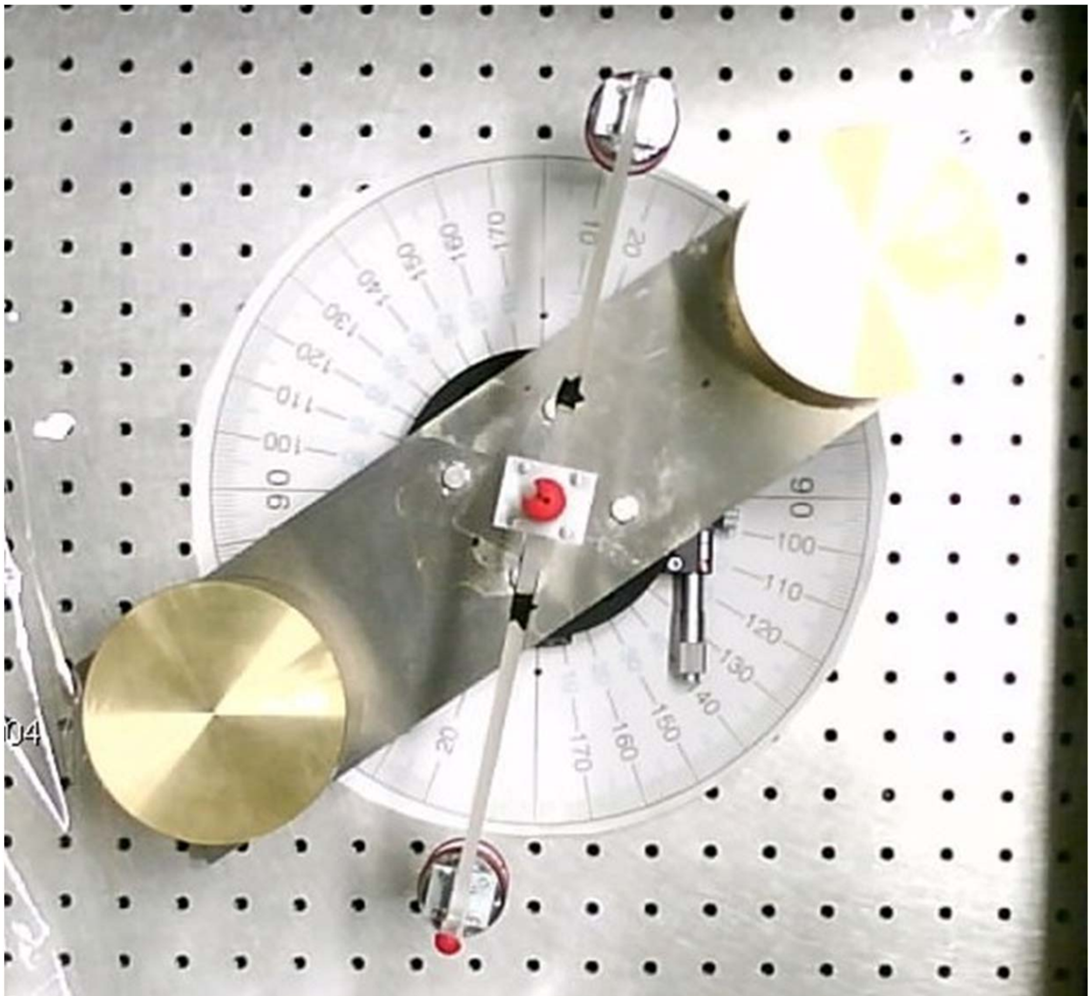
そこで, もう少し長距離（数cmスケール）で, キャベンディッシュの方法により重力の逆二乗則を検証することにした.

２．　実験原理・方法・装置

■実験原理･方法･装置

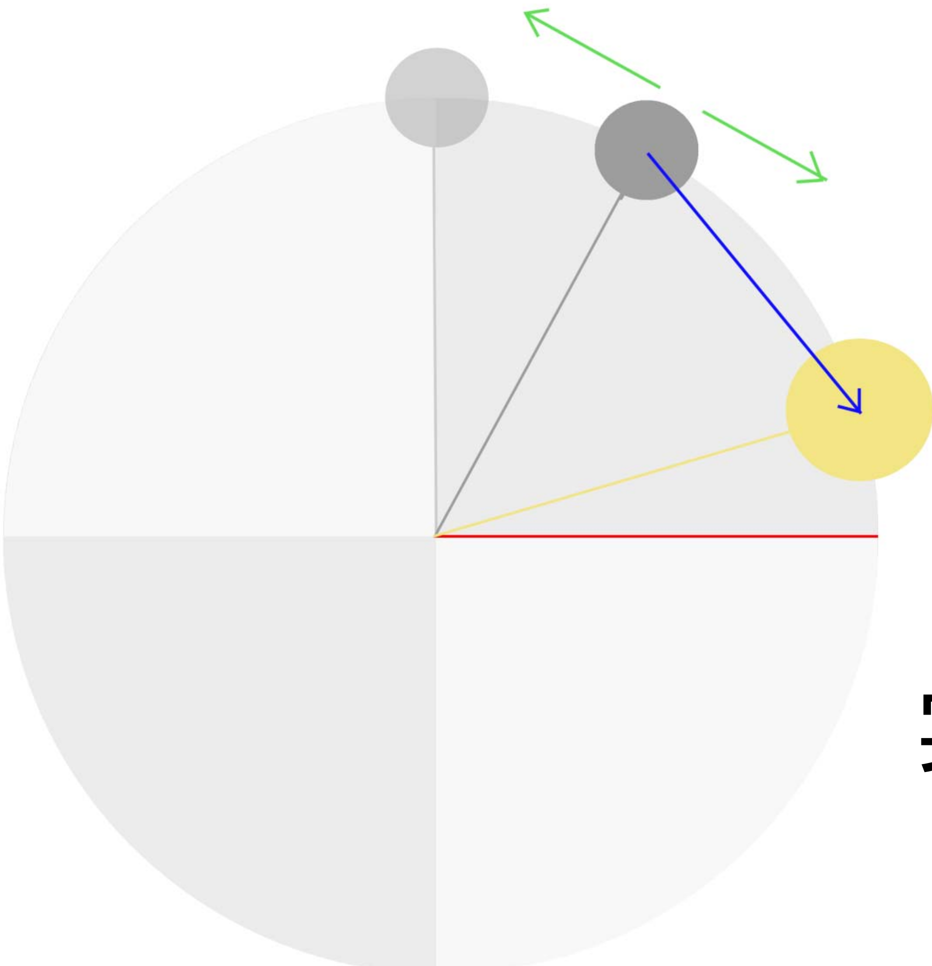
・キャベンディッシュの実験

■実験原理･方法･装置



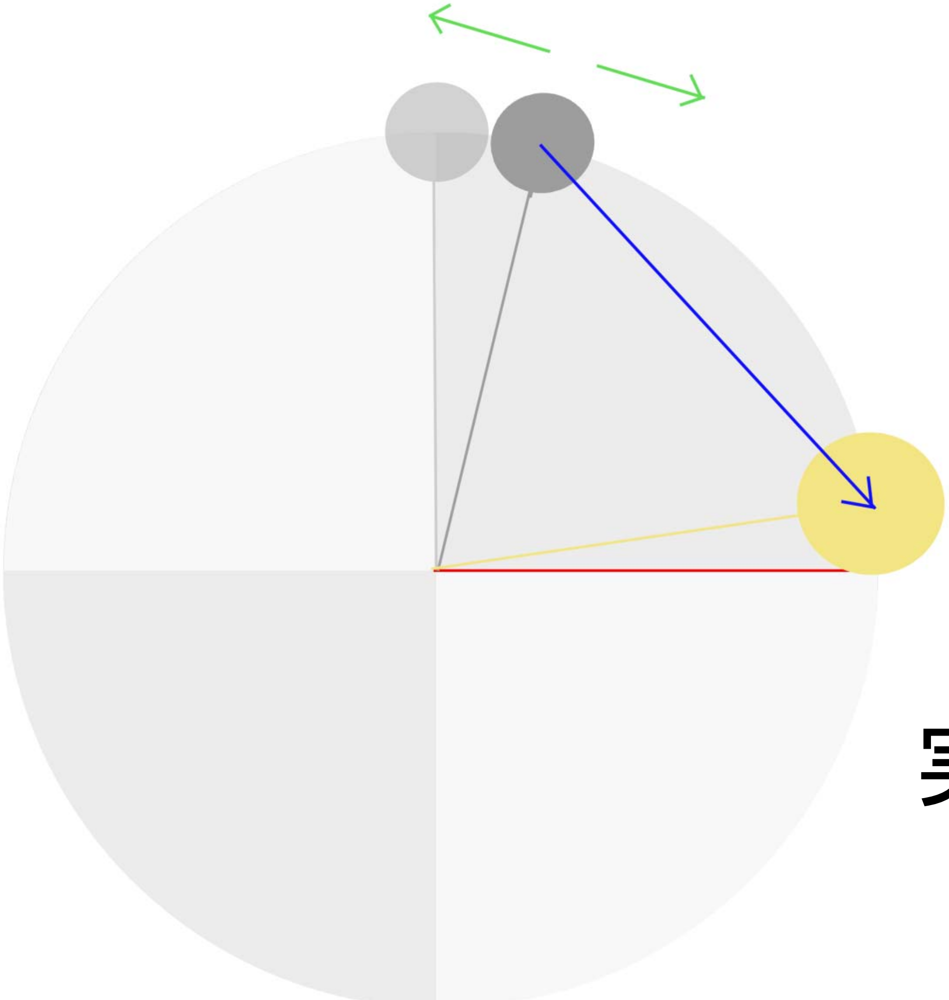
上から見た図

■実験原理･方法･装置



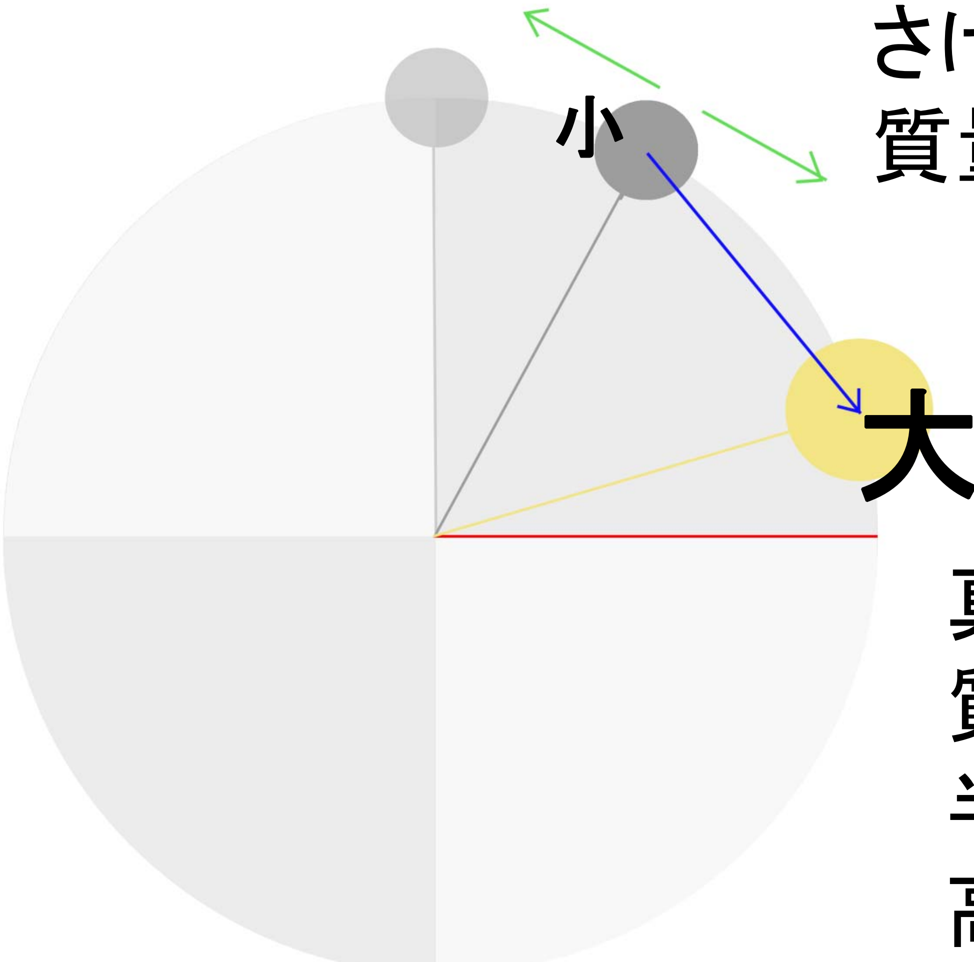
実験装置の模式図

■実験原理･方法･装置



実験装置の模式図

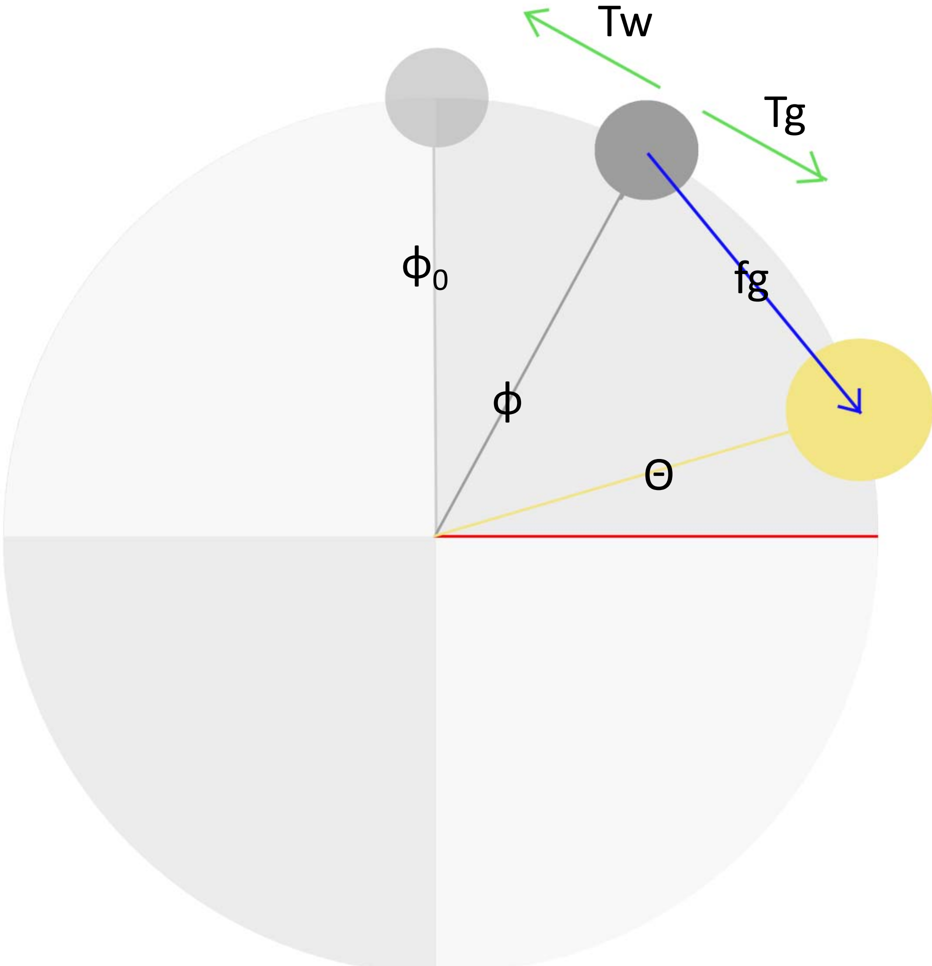
■実験原理･方法･装置



さげふり(おもり)
質量:m

真鍮のおもり(円柱型)
質量:M
半径:a
高さ:2a

■実験原理・方法・装置



Θ：おもり大の角度
ϕ：さげふりの角度
(中心値)
ϕ_0：ワイヤーの自然角
※角度は全て赤線より
fg：重力
Tg：重力によるトルク
Tw：ねじり秤によるトルク

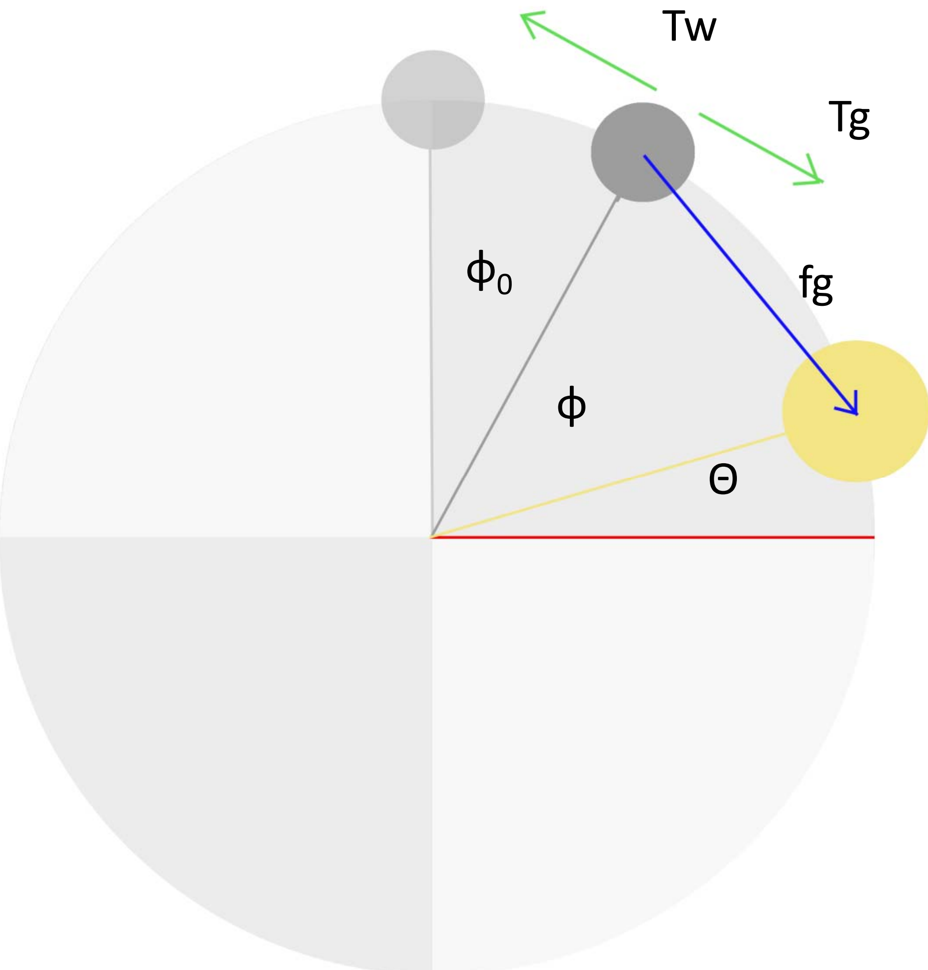
■実験原理･方法･装置

【近似】
おもり大、さげふり共に長さ2aの棒（太さゼロ）として近似

$$F_g = \frac{GMm}{(2a)^2} \iint_0^{2a} dxdy \frac{1}{D^2 + (x-y)^2} = \frac{GMm}{2(2a)^2} \left[\frac{2a}{D} \arctan\left(\frac{2a}{D}\right) - \frac{1}{2} log \left\{ (\frac{2a}{D})^2 + 1 \right\} \right]$$

G:重力定数
D : おもりと下げふりの距離

■実験原理･方法･装置



T_g = $Rf_g \cos((\phi - \Theta)/2)$

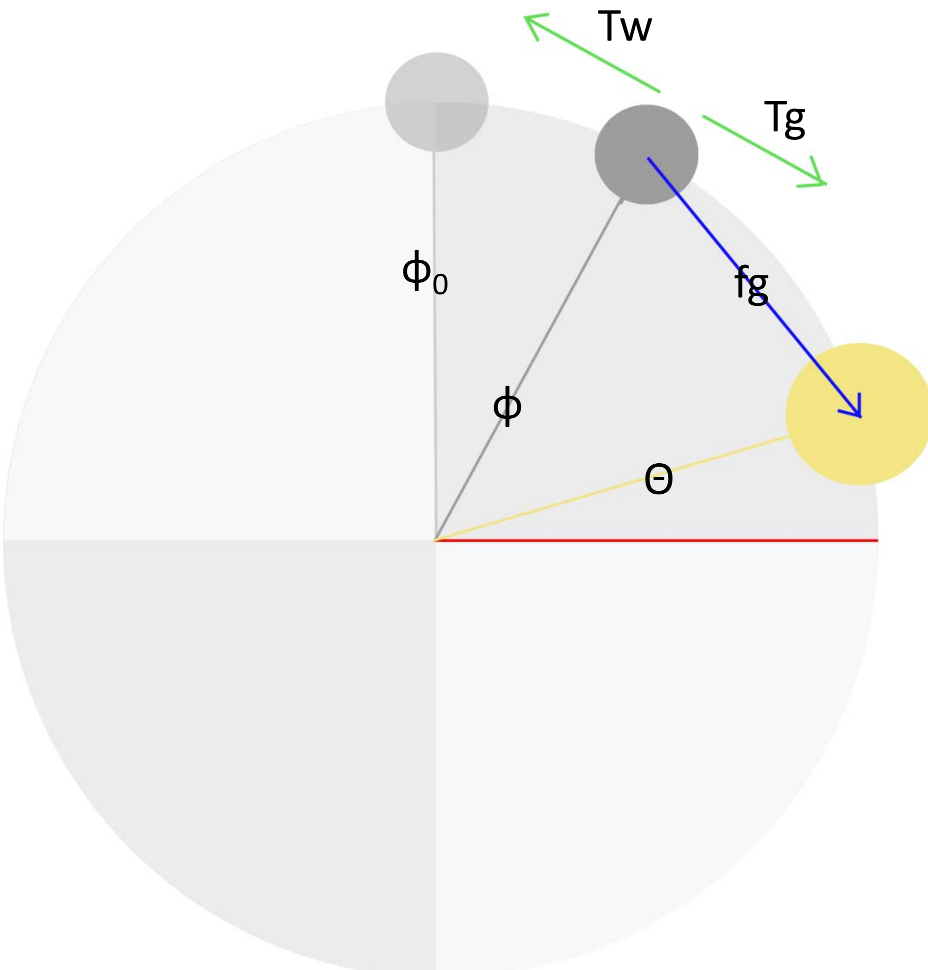
※Rは中心からおもりまでの距離

$T_e = H(\phi_0 - \phi)\pi r^4 / 2L$

※Hはタングステンの剛性率

Lはワイヤーの長さ

■実験原理･方法･装置

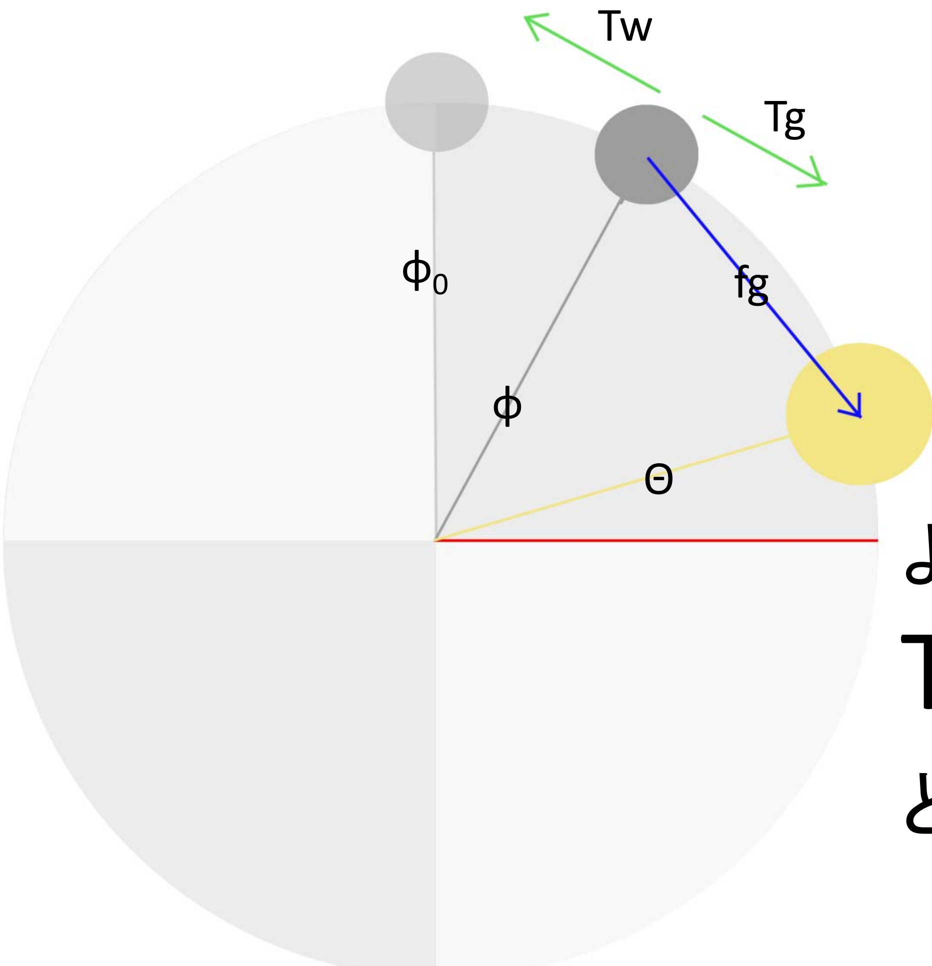


ただし、実際にT_wは…

$$T_e = H(\phi_0 - \phi)\pi r^4 / 2L$$
$$= k\theta$$

このkを重力なしの単振動より計算（後述）

■実験原理･方法･装置

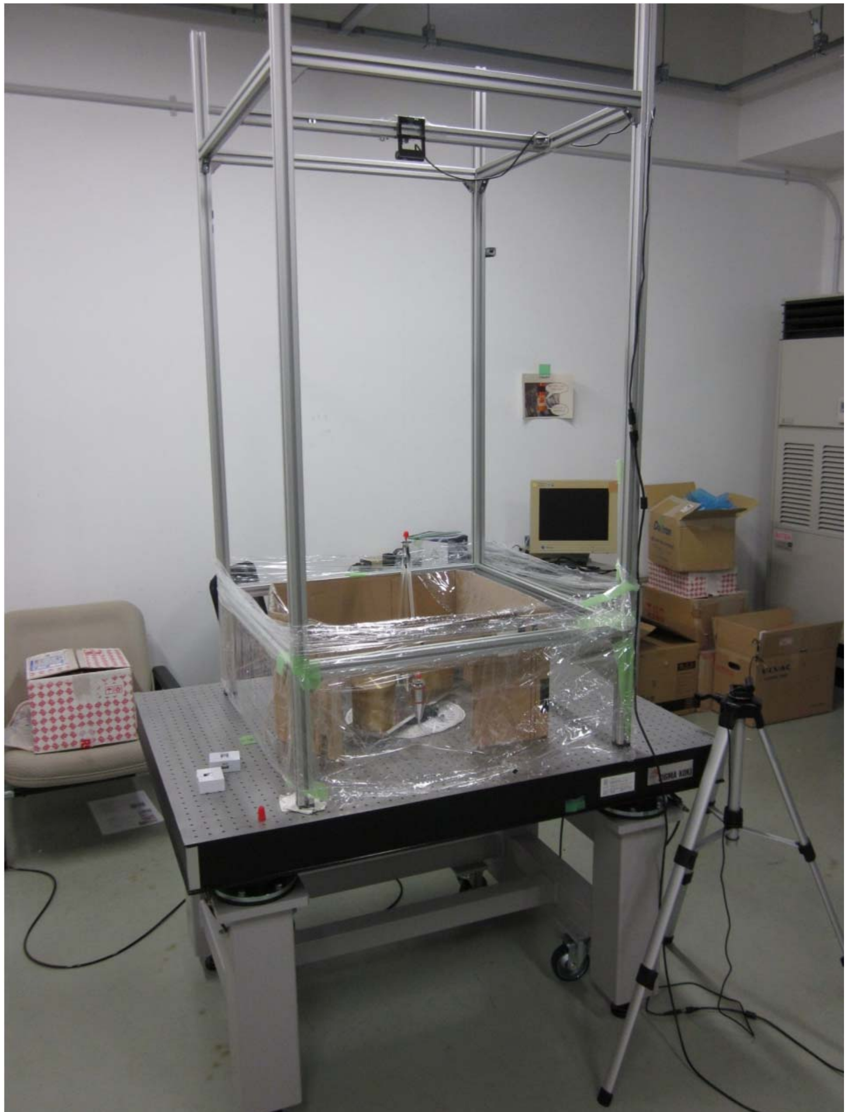


よって、ϕとΘは

$T_g = 2T_e$

という線(グラフ)に乗るはず。

■実験原理･方法･装置



【全体図】

･フレーム

･風除け

･防振台

■実験原理･方法･装置

【本体】

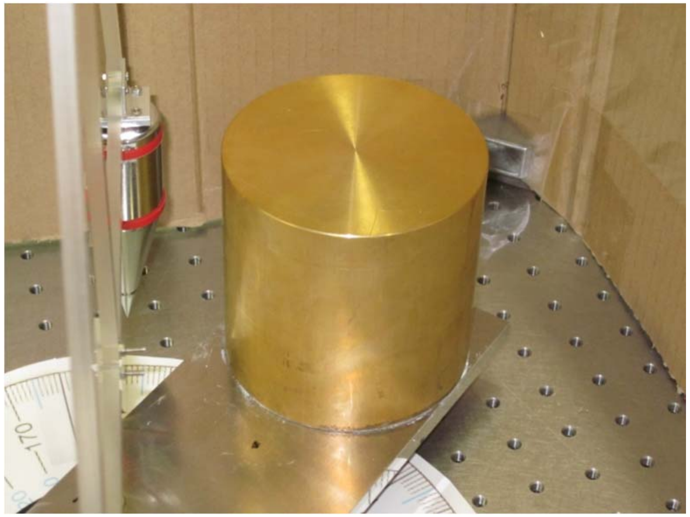
･プラスチック
フレーム

※下げ振り間の長さ
30cm

･タングステン
ワイヤー

※直径0.1mm
※長さ87cmほど※

■実験原理･方法･装置



【おもり各種】

･おもり大

※7kg

※直径10cm

※高さ10cm

･さげふり

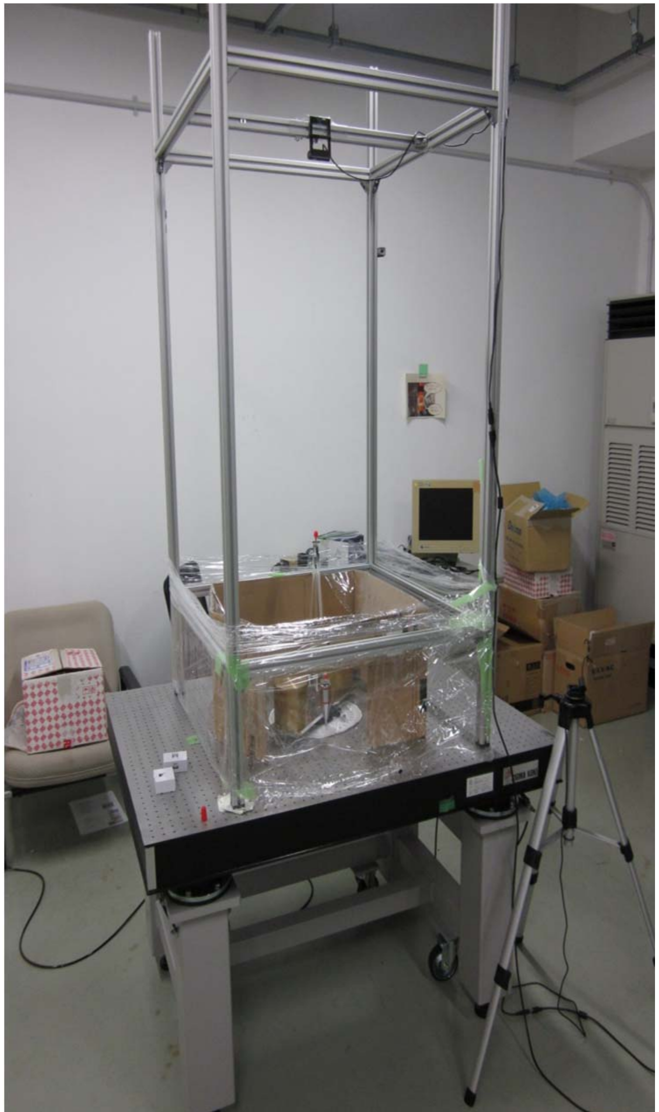
※400g

■実験原理･方法･装置

【測定装置】
・カメラ

※PCに接続、室内無人でデータ取得

■実験原理･方法･装置



実際に行った測定方法

・ワイヤー、おもりをセット

・カメラをセット
※30秒に1枚撮影
※だいたい18時～翌9時

・退出(測定中は入室禁止)

3.　結果

■結果

測定結果は画像データとして出力された。
測定時間と画像の枚数。

おもりの角度	枚数	時間
-5度	2496枚	20時間48分
15度	2025枚	16時間52分
35度	3212枚	26時間46分
40度	6572枚	54時間46分
45度	1471枚	12時間15分

■結果

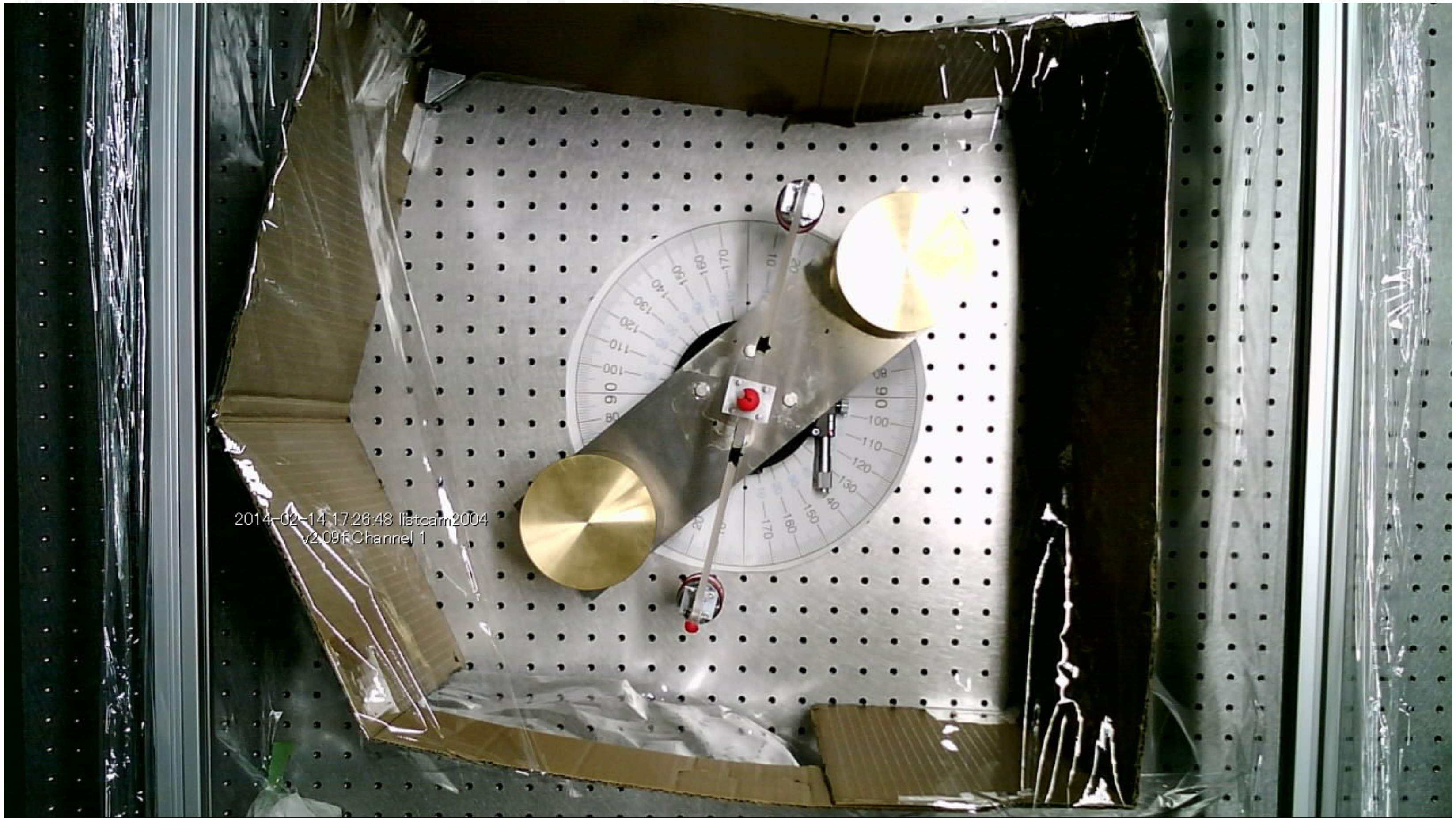
以上の大量の画像データを腕の角度値として出力するために、プログラミングを用いた解析を行った。

・言語はRubyを使用。

・Rmagickというライブラリを利用。

■結果

- 画像データの例



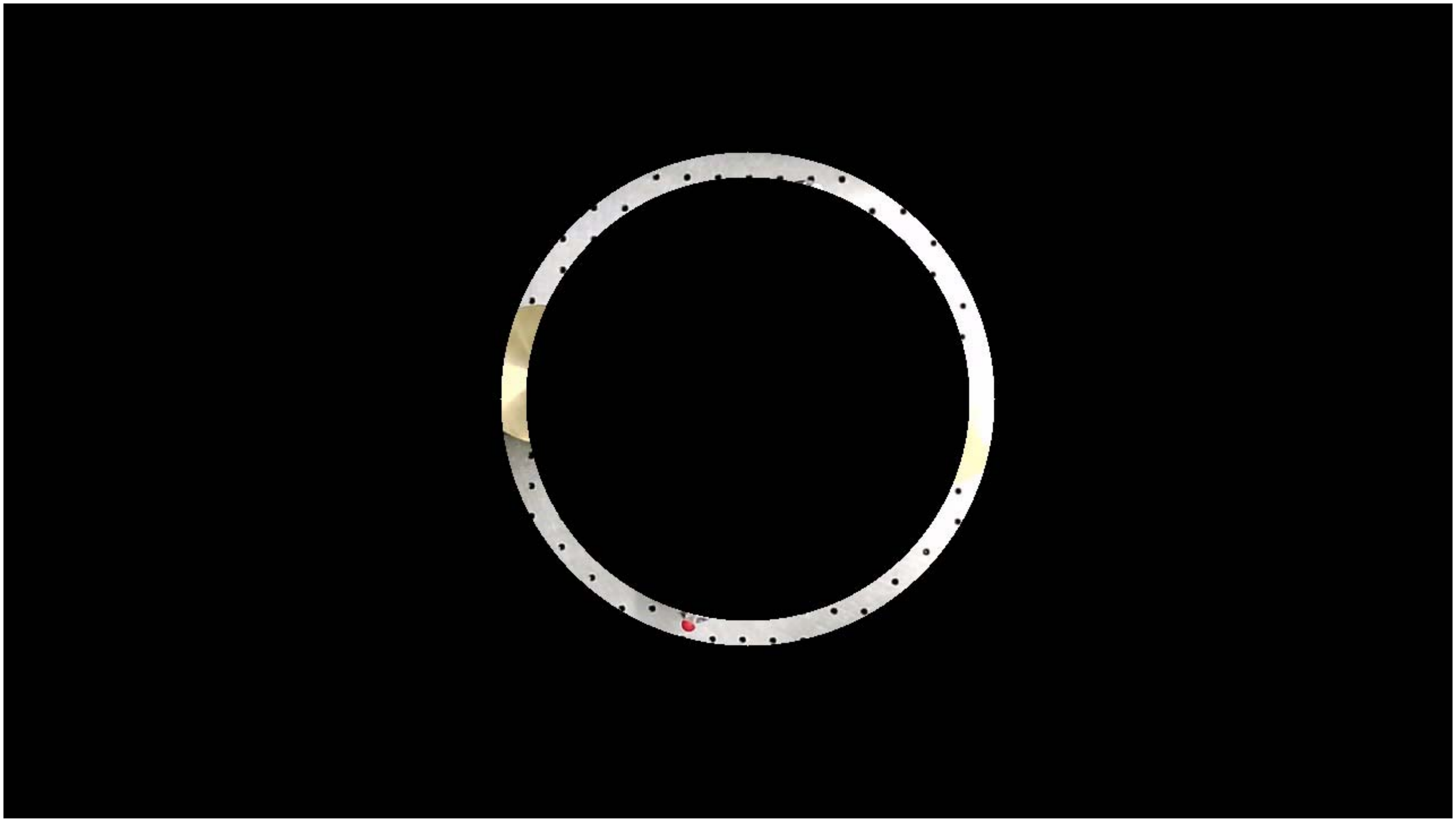
■結果

解析の手順（アルゴリズム）

・おもりの円軌道上だけを抽出。
・赤成分の部分を抽出。
・おもりの円軌道にそって、一ピクセルずつ解析して赤成分が一定の数出現したら、それをおもりと判定。

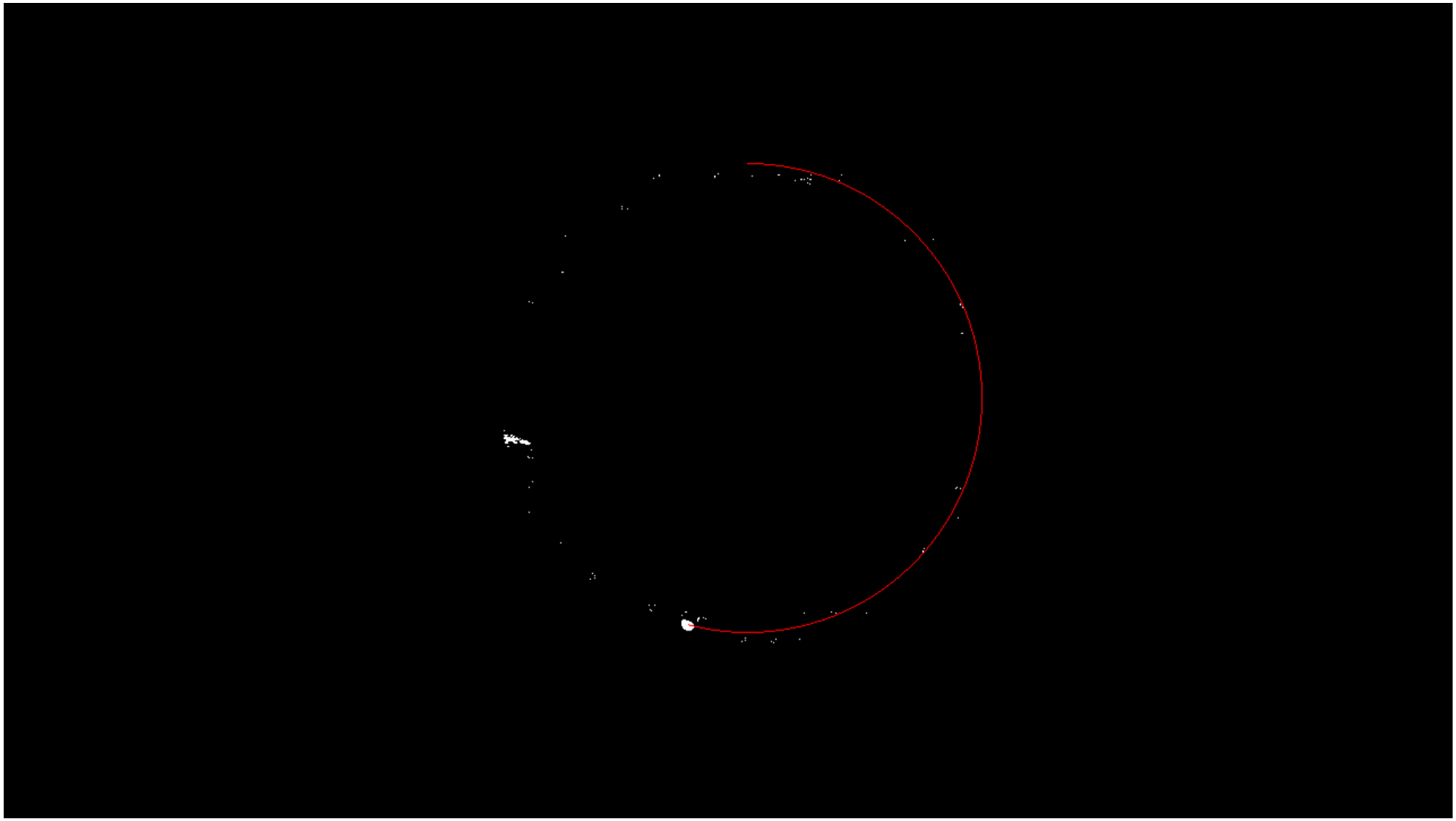
■結果

- 解析途中で出力される画像（その1）。



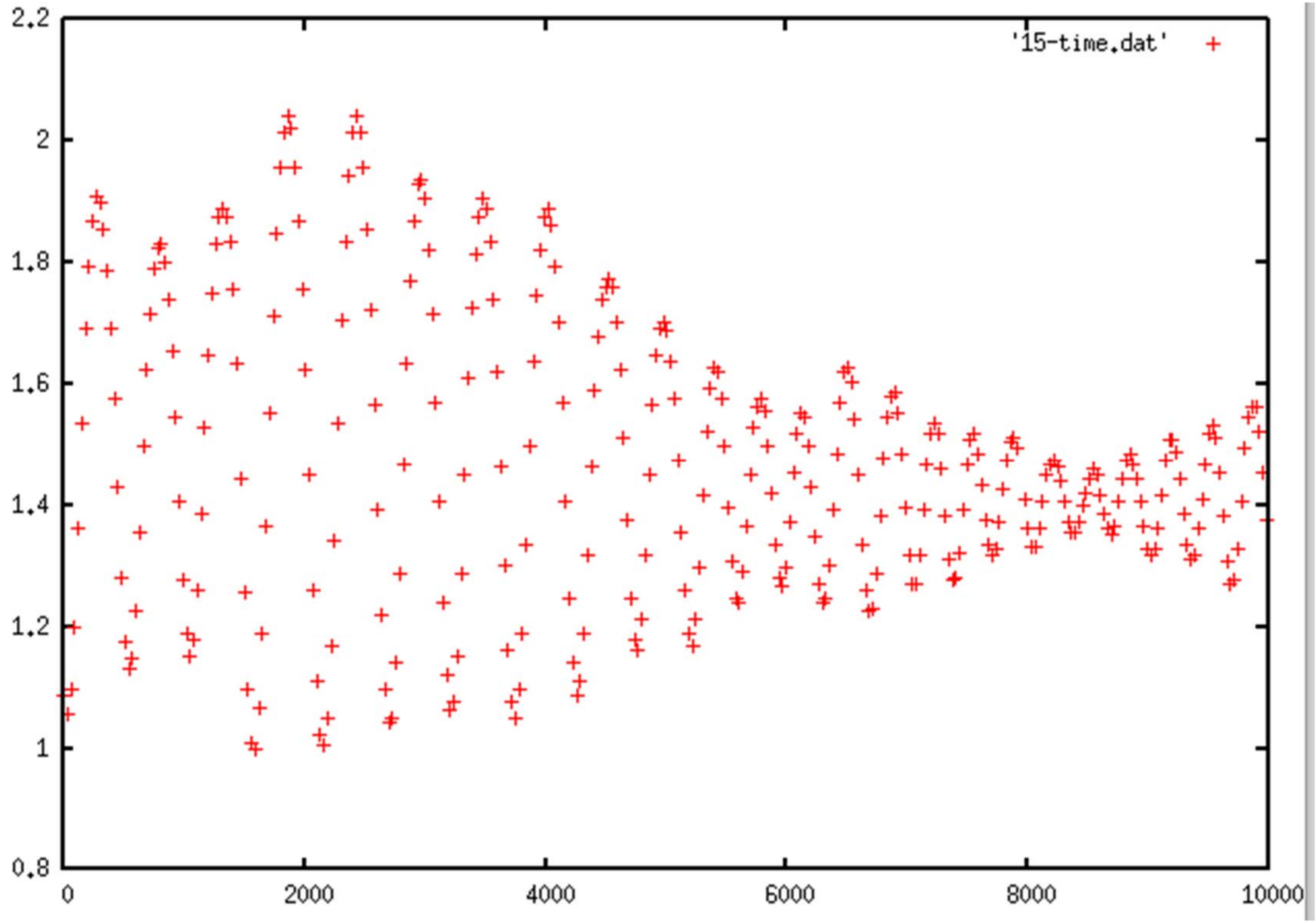
■結果

- 解析途中で出力される画像（その2）。



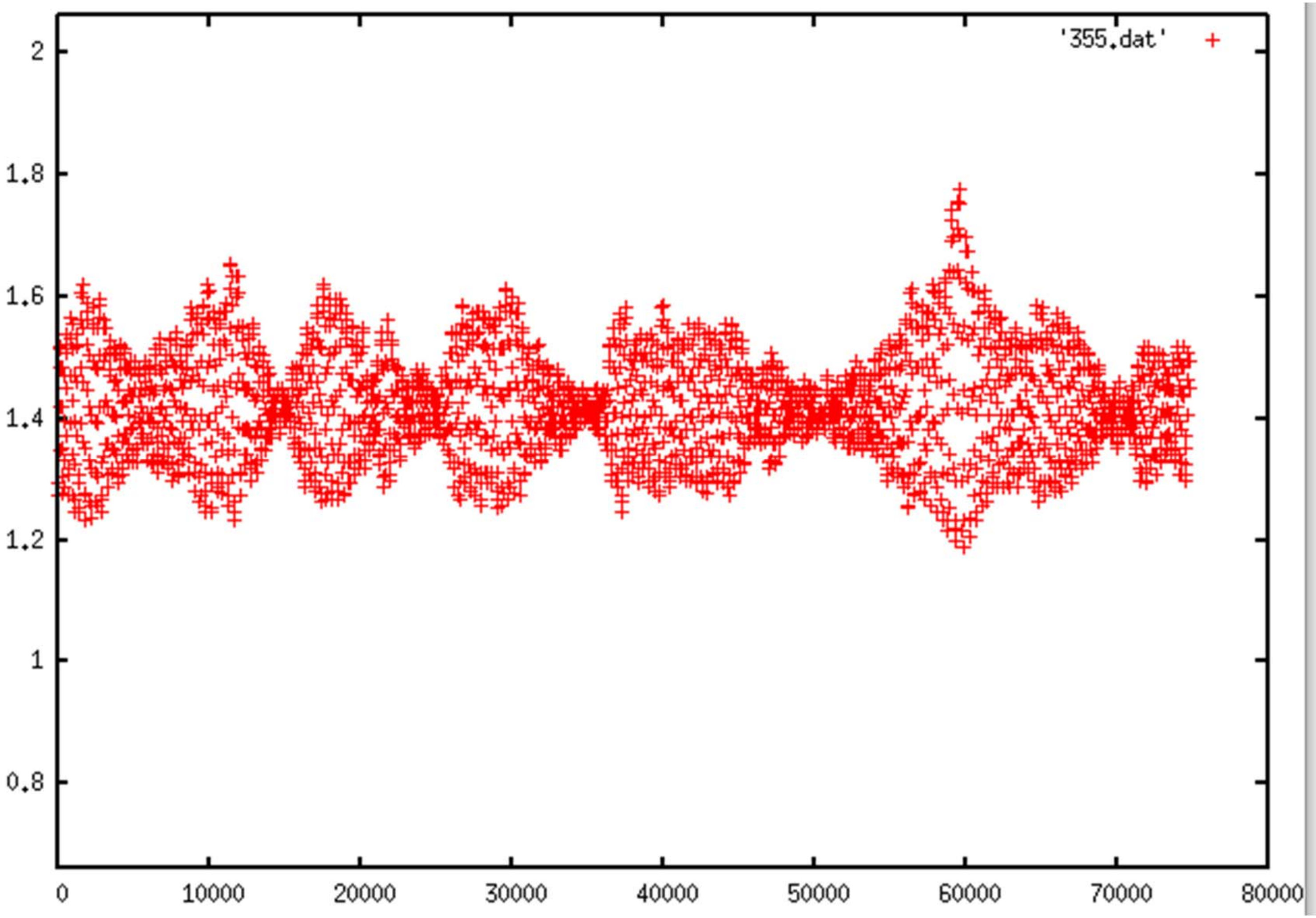
■結果

出力結果その1



■結果

出力結果その2



'355.dat'
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000

■結果

全ての出力結果から振動中心を算出。

おもりの位置	角度（radian）
-5度	1.422
15度	1.427
35度	1.406
40度	1.392
45度	1.394

４．　結論･考察

重力 F_g によるトルクとワイヤーの弾性力によるトルクT_eの釣り合いより重力定数を求めてみる

まず、おもり間に働く重力は有限棒近似によって

$$F_g = \frac{GMm}{(2a)^2}\iint_0^{2a} dxdy\,\frac{1}{D^2+(x-y)^2} = \frac{GMm}{2(2a)^2}\left[\frac{2a}{D}\arctan\left(\frac{2a}{D}\right) - \frac{1}{2}log\left\{(\frac{2a}{D})^2+1\right\}\right]$$

と求まる。（Dはおもり間の距離）

T_eについては, 二通りのやり方で求めることにした

①測定した周期を使って

$$T = 2\pi\sqrt{I/k}$$

よりkを求める方法

②弾性体理論による式

$$\mathrm{k} = \frac{H\pi r^4}{2L}$$

からkをもとめる方法

H : タングステンの剛性率

r : ワイヤーの半径（0.05mm)

L : ワイヤーの長さ(約87cm)

①の方法:フックの法則より

$$T_e = k\theta$$

とかけるが、この弾性定数k は振動周期

$$T = 2\pi\sqrt{I/k}$$

を測ることでもとまる。ここでI は捻れぱかりの慣性モーメントであり(Lは腕の長さ)

$$I = 2mL^2$$

となる。これらよりk は以下の様に求まる。

（周期Tは後で求める）

$$k = \frac{8\pi^2 L^2 m}{T^2} = \frac{8\pi^2 \times 0.4[\mathrm{kg}] \times (0.15)^2[\mathrm{m}^2]}{T^2[s^2]}$$

②の方法：与えられた式

$$k = \frac{H\pi r^4}{2L}$$

に文献値

H=161 [GPa] r=0.0005 [m] L=0.87 [m]

を代入するとk=1.8168*10^-6 を得る

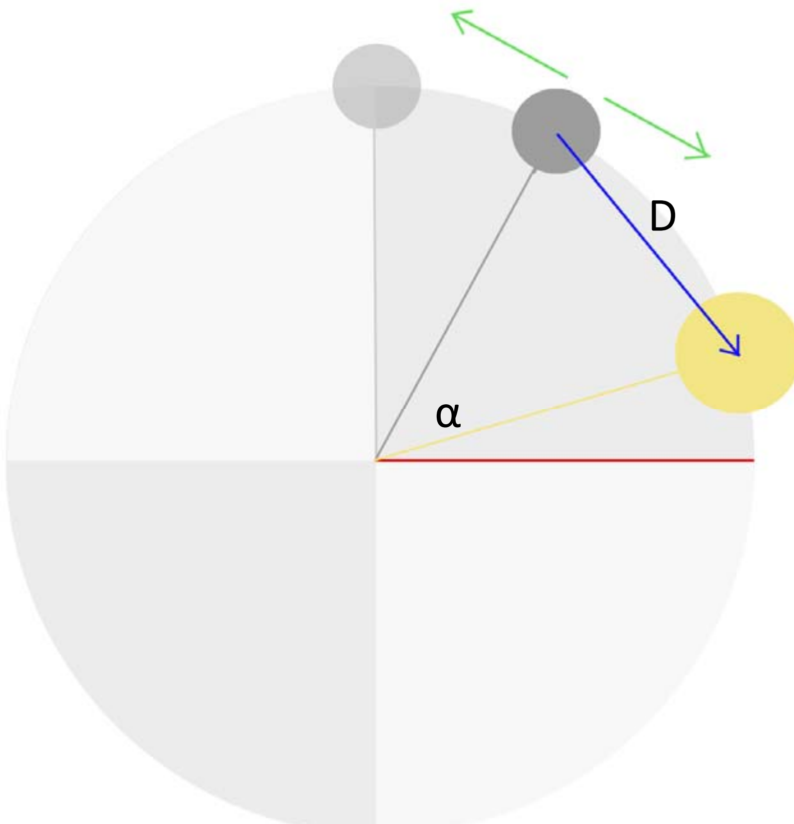
ちなみにこの二通りのやり方で得たkには無視しきれない差が出たが気にしないことにする

これら2つのトルクの釣り合いから

$$2F_g L = T_e$$

さらに、これに以上の式を代入してGについてとくと①、②それぞれのやり方でGが求まる

これから、データ解析によってD, α=φ-θ（おもり間の角度）, T（周期）を求めていく


D
α

[D 、θについて]

おもりと下げふりの距離はこの2つの間の角度がわかれば良い

下げふりの角度は真下からの角度がわかる

おもりの角度も画像より三点の座標を取り出すことで求まる

おもりのメモリ	おもりの真下からの右回りの角度
-5	95.751
15	75.751
35	55.751
40	50.751
45	45.751

[D 、θについて]

これと下げふりの真下からの角度（抽出したデータの平均）によりαが以下のようにもとまる

おもりのメモリ	α（度）
−5	87.25877
15	67.50979
35	46.29729
40	40.4936
45	35.60012

これから、r=√(2*(0.15)^2*(1-cosα))よりr が求まる

[D 、θについて]

$\phi-\phi_0\equiv\theta$は重力がない場合の釣り合いの位置からのズレである、メモリが355の場合を重力なしとして、この時の平衡点との差をθとする。

おもりのメモリ	θ（rad）
−5	0
15	−0.004381
35	0.016781
40	0.030808
45	0.028949

以上でr, θ がもとまった。

[Tについて]

①のやり方では振動周期Tが必要

得たデータを

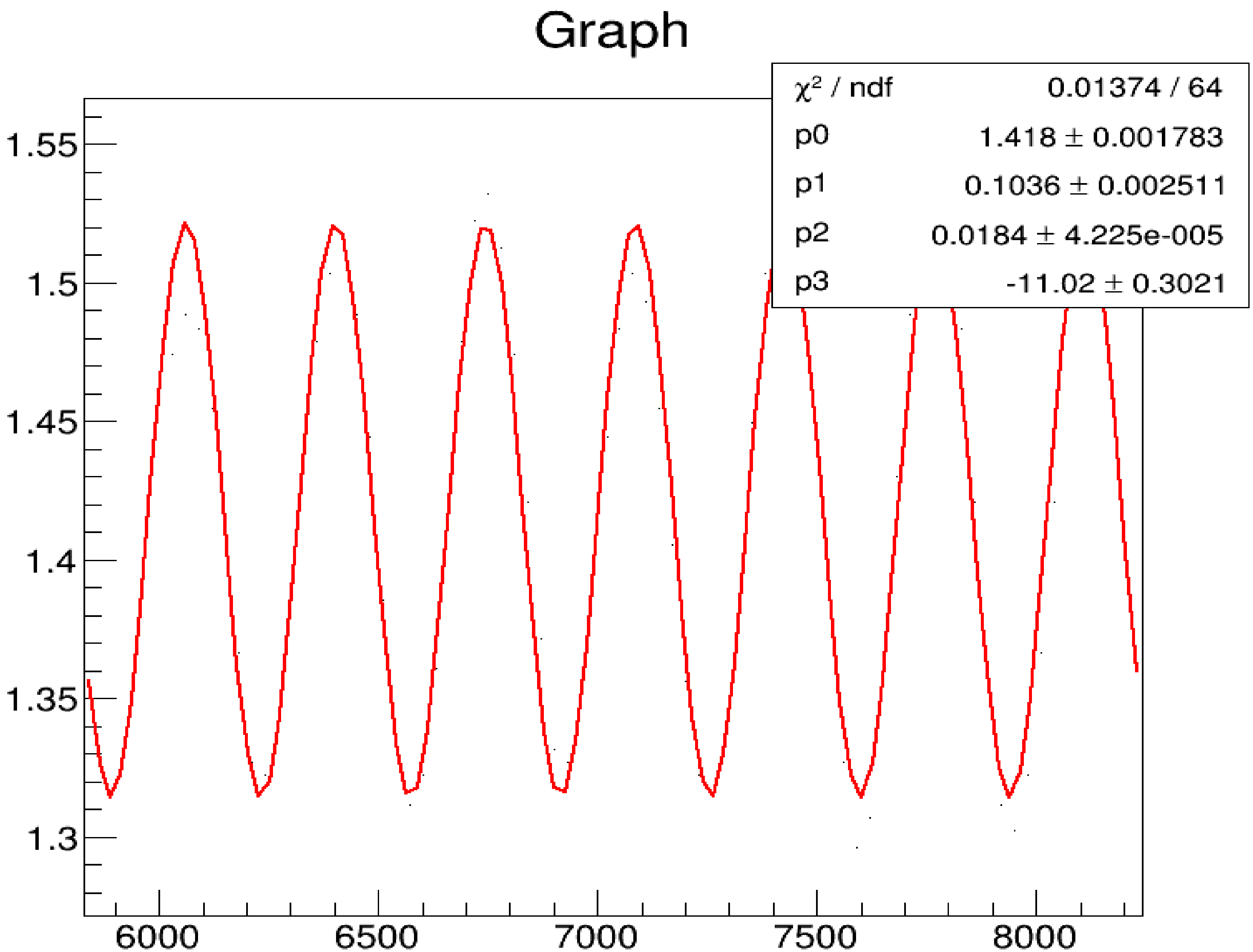
f(x)=A+B*cos(C*x+D)

でfittingする（A, B, C, Dは自由なパラメータ）

厄介なうなりのような形をしているので30分毎にデータを区切って、それぞれfitした結果の平均をTとした。

この操作でT=346.7676 [s]を得た。

Fittingの様子（縦軸：角度[rad] 横軸：時間[s]）



①、②のやり方でそれぞれ以下のkを得た

①：

$$k = \frac{8\pi^2 L^2 m}{T^2} = \frac{8\pi^2 \times 0.4[\mathrm{kg}] \times (0.15)^2[\mathrm{m}^2]}{T^2[s^2]}$$

=5.6*10^-6

②：$\mathrm{k} = \frac{H\pi r^4}{2L}$=1.8*10^-6

これらの結果を

先のトルクの釣り合いの式に代入し、Gについて解いて以下の結果を得た

①

おもりの位置	G(有限棒近似)
35	9.07E-10
40	1.32E-09
45	9.95E-10

②

おもりの位置	G(有限棒近似)
35	8.28634E-11
40	1.20683E-10
45	9.09027E-11

②のやり方ではそれなりに近いGが得られた。

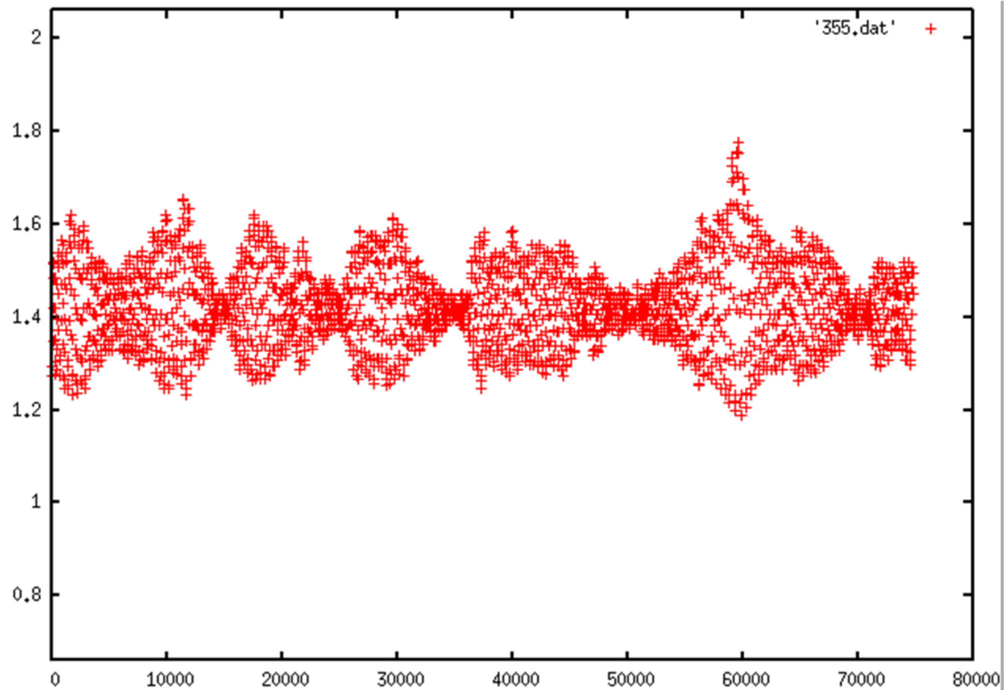
[問題点]

・振動の様子を見るとうなりのような形をしていることがわかる

このため、周期を得るのが難しい。

また、なぜこの形になるのか？

風？



[問題点]

・Gを求めるだけでなく、重力が距離の何乗に比例しているかということを調べたかったが、

円柱vs円柱ではうまいやり方が見つからなかった。

アルゴリズムで懸念するべき点

・光量が一定でなく、おもりのしるし部分抽出の際に大きさにばらつきが出る可能性がある。

・円の位置の較正がうまくいっていない可能性。

謝辞

この実験を行うにあたって, 実験方法の考案から, 装置の購入まで大変お世話になった市川温子准教授に深く感謝します. また, 実験を手伝ってくださったTAの黄さん, 林野さん, 仲村さん, 実験室の使用に協力してくださった素粒子物理学研究室の皆さんにも感謝致します.