

ポジトロニウムの寿命と量子振動

赤塚駿一 中川裕也 松本滉平 向井大智 山本貴宏

2015年4月7日

はじめに

本実験は、磁場中のポジトロニウムの崩壊の時間による振動の振動数を測定することで、間接的にポジトロニウムの超微細分裂 (HyperFine Splitting; HFS) を測定することを目的としていた。

が、その実験は思うように測定が進まず、後半は真空中でのオルソポジトロニウムの寿命を測定することを目的とした。

目次

はじめに	1
第 I 部 理想	4
第 1 章 理論	4
1.1 真空中のポジトロニウム	4
1.1.1 ポジトロニウムの基礎	4
1.1.2 オルソポジトロニウムとパラポジトロニウム	4
1.1.3 ポジトロニウムの崩壊	5
1.1.4 ポジトロニウムの寿命	7
1.2 磁場中のポジトロニウム	10
1.2.1 磁場による状態の混合	10
1.2.2 Δ_{SHIFT} の測定方法	11
1.3 断面積の振動の理論的背景	14
1.3.1 断面積の時間振動の起源	14
1.3.2 振動の振幅の角度変化	16
1.4 物質中のポジトロニウム	18
1.4.1 物質の影響	18
1.5 Appendix	19
1.5.1 量子化された自由な電子の場	19
1.5.2 QED	21
1.5.3 荷電共役変換	21
1.5.4 パリティ変換	22
1.5.5 散乱断面積, 崩壊確率	24
1.5.6 Feynman diagram	26
1.5.7 密度行列	26
第 2 章 装置・回路	27
2.1 回路	27
2.2 装置	33
2.2.1 外観	33
2.2.2 装置	35
第 3 章 シミュレーション	39
3.1 イントロダクション	39
3.2 手法	39
3.2.1 手法の概要	39

3.2.2	検証 1: 陽電子の軌道について	39
3.2.3	検証 2: 高いエネルギーの陽電子について	40
3.2.4	シミュレーションをする上での制約について	40
3.3	結果	41
3.3.1	検証 1: 陽電子の軌道について	41
3.3.2	検証 2: 高いエネルギーの陽電子について	41
3.4	考察	42
第 II 部 現実		43
第 4 章 補正・解析・結果		43
4.1	キャリブレーション	43
4.1.1	ADC Calibration	43
4.1.2	TDC Calibration	43
4.2	ADC カット	44
4.3	TDC カット	44
4.4	t-Q 補正	45
4.5	寿命の算出	47
第 5 章 考察		48
5.1	pick-off 補正の必要性	48
5.2	磁場の強さ	48
5.3	モジュールの不具合	48
謝辞		49

第 I 部 理想

第 1 章 理論

以下, 本稿において単位系は自然単位系を使用する.

1.1 真空中のポジトロニウム

1.1.1 ポジトロニウムの基礎

ポジトロニウムとは, 電子と陽電子が Coulomb 力によって形成する束縛状態である. その構造は水素原子と非常に似ており, 水素原子における陽子にあたるものがポジトロニウムにおける陽電子である.

陽電子は電子の反粒子であるので, ポジトロニウムは水素原子と異なり陽電子と電子が反応することで光子に崩壊することができ, 有限の寿命を持つ準安定な状態である.

1.1.2 オルソポジトロニウムとパラポジトロニウム

ポジトロニウムはそのスピン状態によって二つの状態を持つ. それはオルソポジトロニウム (以下 o-Ps と表記) とパラポジトロニウム (以下 p-Ps と表記) である. それは状態ベクトルとしては次のように表される. 電子と陽電子のスピン空間での基底を

$$|\uparrow\rangle_-, |\downarrow\rangle_-, |\uparrow\rangle_+, |\downarrow\rangle_+ \quad (1)$$

とする.

o-Ps は以下の (2),(3),(4)(スピン平行状態), p-Ps は (5)(スピン反平行状態) の状態ベクトルで与えられる. 左辺の $|S, S_z\rangle$ は電子と陽電子のスピンの合成の結果の全スピンとその z 成分を表す.

$$|1, 1\rangle = |\uparrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+ \quad (2)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ + |\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+ \} \quad (3)$$

$$|1, -1\rangle = |\downarrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ \quad (4)$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ - |\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+ \} \quad (5)$$

概念図を次の図 1,2 にあげる.

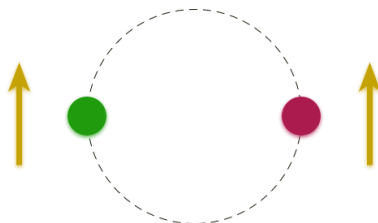


図 1 オルソポジトロニウムの概念図

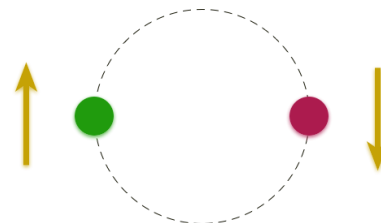


図 2 パラポジトロニウムの概念図

o-Ps と p-Ps の間には電子, 陽電子間の磁気モーメントの相互作用の差異によって生じるエネルギー差が存在し, それは 203GHz(0.84meV) である (o-Ps の方がエネルギーが高い*1). これは超微細分裂 (HFS;HyperFine Splitting) と呼ばれている*2.

1.1.3 ポジトロニウムの崩壊

前述のようにポジトロニウムは有限の寿命をもち, 何個かの光子に崩壊する. ポジトロニウムの崩壊は電磁相互作用によって引き起こされるので, 弱い相互作用の効果を無視すると電磁相互作用の荷電共役対称性より o-Ps と p-Ps の崩壊先はそれぞれ制限されることになる.

荷電共役変換演算子 (Appendix を参照) の固有値を charge conjugation parity と呼ぶ. これは o-Ps では -1 , p-Ps では $+1$ である. これは charge conjugation parity が状態の軌道角運動量の大きさを L , スピン角運動量の大きさを S として $(-1)^{L+S}$ で与えられることからわかる. この charge conjugation parity の式の導出を行っておく. 導出はポジトロニウムの状態ベクトルを書き下し, それに具体的に荷電共役変換演算子を作用させることで行う. まず記号として電子 (運動量 \mathbf{p} , スピンの z 成分 s) の生成演算子を $a_{\mathbf{p},s}^\dagger$ と定義し, 陽電子に対しても同じものを $b_{\mathbf{p},s}^\dagger$ と定義する (式 (56) を参照).

今考えているような束縛状態に対する扱い方として, 束縛状態の状態ベクトルを, 上で定義した生成演算子で作られる Fock 空間*3の元の, 非相対論的 Schrödinger 方程式を解いて得た波動関数で重みづけたものの重ね合わせで表現する方法がある. この方法に従うと合成スピン S , z 成分を S_z としたときの状態は

$$|S, S_z\rangle = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}^2) \tilde{Y}_M^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} \sigma_{s,s'} a_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{-\mathbf{p},s'}^\dagger |0\rangle \quad (6)$$

と表せる. ここで $|0\rangle$ は真空, $f(\mathbf{p}^2)$ は動径波動関数の運動量表示 (Fock 空間の状態の normalization の convention*4によって厳密には動径波動関数の運動量表示には一致しない, しかし今回必要になるのは球面調和関数のパリティ変換に対する振る舞いのみであり, normalization の convention によって入る項も \mathbf{p}^2 の関数であるので*5煩雑になる表記は避け f という関数にまとめた), $\tilde{Y}_M^L(\hat{\mathbf{p}})$ は球面調和関数の運動量表示, $\sigma_{s,s'}$

*1 直観的には一般に磁気モーメントの向きがそろう状態の方がエネルギーが低いことから, 磁気モーメントの向きが反平行である o-Ps の方が磁気モーメントの向きのそろっている p-Ps よりエネルギーが高いことが理解される. (電子は負電荷をもつのでスピンの向きと磁気モーメントの向きは逆であることに注意.)

*2 ポジトロニウムの HFS は水素原子の HFS(5.8μeV) に比べ大きい. これは陽電子の質量が陽子の質量に比べ小さいことに起因する. したがって, のちに述べることであるが (1.3.1 を参照) ポジトロニウムの HFS が直接測定できないのは o-Ps と p-Ps の崩壊先のチャネルの違いと HFS が大きすぎることに起因している. よってもし仮に水素原子が安定でなく HFS で分裂する状態が同じ崩壊チャネルを持てば振動は比較的簡単に直接測定することができ, それは検出器で検出可能な振動数のオーダーかもしれない. (もちろん水素原子が不安定な世界に我々が存在するのは不可能であるが.)

*3 ある一粒子状態の Hilbert 空間を定義しその空間の n 個のテンソル積を作り, n に関して代数的直和をとった内積空間 (テンソル代数に内積を導入したもの) を完備化したものをその一粒子状態空間上の full Fock space と呼ぶ. Boson, Fermion を不可分別性まで含めて考えるときはそれぞれのテンソル積を対称化, もしくは反対称化しておく (テンソル代数から対称代数や外積代数をつくると言ってもよい). ここでは真空に生成演算子を作用させたものであると理解してもらって構わない. 対称化, 反対称化を行ったテンソル積からつくられる full Fock space と真空に生成演算子を作用させた状態の生成する空間 (の完備化) の間に Hilbert 空間としての同型があることを考えれば, 真空に生成演算子を作用させた元を Fock space の元と呼ぶことが納得されると思う. この話については標準的な量子力学の教科書の第二量子化の項目を参照されたい. (テンソル代数の対称化や反対称化と, 真空に生成演算子を作用させた状態の生成する空間のユニタリ同型はユニタリなので有界作用素であることと, 完備化された空間の中で元の空間が稠密なこと) に注意すればこのユニタリ同型が完備化された空間同士のユニタリ同型に (一意的に) 拡張されることが直ちにわかる.)

*4 例えば, Peskin, Schroeder のテキストでは Lorentz 共変性のために状態をいわゆる不変規格化した状態で定義している (式 (57) を参照).

*5 normalization の関係上 $\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$ が入る. これについては式 (10) とその近辺の記述を参照.

は考えている状態のスピン成分が電子は s , 陽電子は s' であるスピン波動関数である*⁶ この状態に荷電共役変換演算子 C を作用させると

$$Ca_{\mathbf{p},s}^\dagger C = b_{\mathbf{p},s}^\dagger \quad (7)$$

$$Cb_{\mathbf{p},s}^\dagger C = a_{\mathbf{p},s}^\dagger \quad (8)$$

であるので

$$\begin{aligned} C|S, S_z\rangle &= \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}^2) \tilde{Y}_M^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} \sigma_{s,s'} Ca_{\mathbf{p},s}^\dagger C C b_{-\mathbf{p},s'}^\dagger C |0\rangle \\ &= \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}^2) \tilde{Y}_M^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} \sigma_{s,s'} b_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{-\mathbf{p},s'}^\dagger |0\rangle \\ &= \int d\mathbf{p} f((- \mathbf{p})^2) \tilde{Y}_M^L(-\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} \sigma_{s,s'} b_{-\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s'}^\dagger |0\rangle \\ &= (-1)^L \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}^2) \tilde{Y}_M^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} \sigma_{s,s'} b_{-\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s'}^\dagger |0\rangle \\ &= (-1)^{L+1} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}^2) \tilde{Y}_M^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} \sigma_{s,s'} a_{\mathbf{p},s'}^\dagger b_{-\mathbf{p},s}^\dagger |0\rangle \\ &= (-1)^{L+S+2} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}^2) \tilde{Y}_M^L(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} \sigma_{s,s'} a_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{-\mathbf{p},s'}^\dagger |0\rangle \\ &= (-1)^{L+S} |S, S_z\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

となる。よって charge conjugation parity は前述したとおり $(-1)^{L+S}$ である。式変形において 3 行目では $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ の積分変数の変換を行い, 4 行目では \tilde{Y}_M^L のパリティ変換に対する固有値が $(-1)^L$ であることを用い, 5 行目では Fermion である電子, 陽電子の生成演算子が従う反交換関係 $\{a_{\mathbf{p},s}^\dagger, b_{\mathbf{q},s'}^\dagger\} = 0$ を用い, 6 行目では $\sigma_{s,s'}$ が s と s' の入れ替えに対して $(-1)^{S+1}$ の因子を出すことを用いている。今は軌道の状態としては S 状態を考えているので*⁷ $L = 0$ を代入し, 上に述べた o-Ps と p-Ps のスピンを代入すれば前述した o-Ps と p-Ps の charge conjugation parity の値が確認できる。

崩壊先の光子の状態においては, 光子数が n の状態の charge conjugation parity は $(-1)^n$ で与えられる。これは光子一つの状態の charge conjugation parity が -1 であることから確認できる*⁸。

崩壊において荷電共役対称性から charge conjugation parity が保存する事を考慮に入れると*⁹, 上で求めた値から, o-Ps は奇数個の光子に, p-Ps は偶数個の光子に崩壊することがわかる。しかし, エネルギー・運動量保存則からポジトロニウムが 1 つの光子に崩壊することはなく, また崩壊先の光子の数が増えるほど摂動の

*⁶ 伝わりにくいおそれがあるので具体例で補足しておくとして例えば $|1, 0\rangle$ なら $\sigma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0, \sigma_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sigma_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sigma_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = 0$ といった具合である。

*⁷ P 状態以上の角運動量状態は Coulomb ポテンシャル中の非相対論的 Schödinger 方程式の解の性質としてよく知られているように波動関数の原点での値が 0 であり電子と陽電子が近づくことが妨げられ, 観測に影響をもたらすほどの崩壊をするとは考えにくい。この点についてはポジトロニウムの寿命の項でまた考察する。

*⁸ 簡単には荷電共役変換によって電荷の符号が変わることからスカラーポテンシャル, ベクトルポテンシャルがそれぞれ符号を変えることと光子の生成消滅演算子がこれらの 4 元ポテンシャルを量子化した時の展開係数の演算子であることから理解される。

*⁹ 崩壊は電磁相互作用によって引き起こされ, 電磁相互作用では荷電共役対称性が破れていない。荷電共役対称性を破る相互作用は現在知られている中では弱い相互作用のみである。

次数が上がり decay rate への寄与は小さくなっていく。よって、本実験において主に観測されるのは摂動の最低次である

1. p-Ps の $2\gamma^{*10}$ 崩壊
2. o-Ps の 3γ 崩壊

の2つである。

1.1.4 ポジトロニウムの寿命

ポジトロニウムの寿命は Feynman diagram を用いることで計算できる。パラポジトロニウムの場合にこれを行っておく。オルソポジトロニウムの場合も同じ方法で計算できるが煩雑さが増すだけで本質的な違いはないので導出は省略する。

パラポジトロニウムの寿命の計算 まず、上で述べたように今扱っているポジトロニウムの束縛状態は式(6)のように表せるとする。ここで動径と角度を分離せずまとめて相対座標での Schrödinger 方程式の解を $\psi(\mathbf{x})$ とする。これは規格化されているとし、これの Fourier 変換を $\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \int d^3x \psi(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ とする。状態は規格化までちゃんと考えて*11

$$|S, S_z\rangle = \sqrt{2M} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \sum_{s, s'} \sigma_{s, s'} \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} a_{\mathbf{p}, s}^\dagger b_{-\mathbf{p}, s'}^\dagger |0\rangle \quad (10)$$

ここで M はポジトロニウムの静止エネルギー、 m は電子の質量 (よって陽電子の質量とも等しい) である。normalization の factor について述べておく。 $\frac{1}{\sqrt{2m}}$ は、不変規格化の状態を非相対論的量子力学における normalization に戻すためにかけられている。本来はこの factor は $\frac{1}{\sqrt{2E_p}}$ であるが非相対論的な近似として $E_p = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \approx m$ としている。その後 $\sqrt{2M}$ をかけているのは状態を不変規格化された状態の規格化に戻すためである。

$a_{\mathbf{p}, s}^\dagger b_{-\mathbf{p}, s'}^\dagger |0\rangle$ の2個の光子 (運動量 k, k') への対消滅の不変散乱振幅を $M'_{s, s'}$ とする (もちろん p 依存性を持つのだが、最終的にこの依存性を落とすのでこの段階でも記号としては落としておく)。

ポジトロニウムが上の2個の光子に崩壊する不変散乱振幅を M とすると

$$M = \sqrt{2M} \sum_{s, s'} \sigma_{s, s'} \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) M'_{s, s'} \quad (11)$$

で与えられる。

ここでさらなる近似について述べておく。まず M の値の評価について述べる。これは本来ポジトロニウムを構成している電子と陽電子の静止エネルギーの和とはならず、それより低い値をとる (これは Coulomb 引力に起因する)。ここでは非相対論的 Schrödinger 方程式を解いて得られる結合エネルギーが -6.8eV であることから、静止エネルギーの和 1022keV がこれより非常に大きいのでこの M を静止エネルギーの和で近似する。つまり $M \approx 2m$ である。さらに $M'_{s, s'}$ を静止状態のもの、つまり $\mathbf{p} = 0$ のもので近似する。これより $M'_{s, s'}$ は積分の外に出せ、逆 Fourier 変換の式から

*10 特定のエネルギー領域の光子のことを γ 線ともいう。

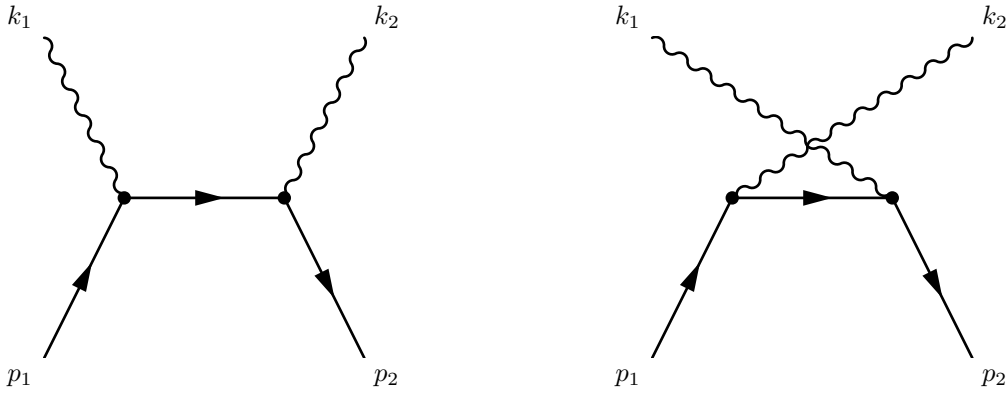
*11 座標系としては重心系で考えている。

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \sqrt{2M} \sum_{s,s'} \sigma_{s,s'} \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} \psi(\mathbf{0}) \mathcal{M}'_{s,s'} \\
&= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{s,s'} \sigma_{s,s'} \psi(\mathbf{0}) \mathcal{M}'_{s,s'}
\end{aligned} \tag{12}$$

これを崩壊率の式に代入すればよい。

まず $\mathcal{M}'_{s,s'}$ の評価を行う。

これに対応する Feynman diagram は以下である。



この評価は次のようになる (Appendix を参照). s, s' のラベルは落としてある。

$$\mathcal{M}'_1 = \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) (-ie\gamma^\nu) \bar{v}(p_2) S_F(k_1 - p_1) (-ie\gamma^\mu) u(p_1) \tag{13}$$

$$\mathcal{M}'_2 = \epsilon_\mu^*(k_1) \epsilon_\nu^*(k_2) (-ie\gamma^\mu) \bar{v}(p_2) S_F(k_2 - p_1) (-ie\gamma^\nu) u(p_1) \tag{14}$$

である (左の diagram が \mathcal{M}'_1 に, 右の diagram が \mathcal{M}'_2 に対応する). ここで ϵ_μ は光子の偏極ベクトルである。

$\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_1 + \mathcal{M}'_2$ である。

具体的に崩壊率の計算を追うことはここではしない。しかし計算上の注意について少し述べておく。

よく、非偏極の断面積を求めるときにスピン和をとり、それを γ 行列の積のトレースで表し、トレースを Clifford 代数を用いて変形した公式を用いる (Appendix を参照)。

ポジトロニウムの崩壊率について扱った文献において、ポジトロニウムの崩壊ではスピンを指定しているのでこの公式が使えず、スピノルと γ 行列の具体的な表示を用いねばならない、という記述があることがある (非偏極でなく偏極した状態の断面積を求めているから) が、これは一部間違っていることに言及しておく。なぜならスピン和をとるという行為は、電子、陽電子のスピン空間 2次元ずつのテンソル積である 4次元空間の元についての振幅の 2乗を求めて足しあげるということである。今回の場合、4次元空間の基底をスピン 1重項とスピン 3重項にとり、足しあげていると考えるとスピン 3重項状態、つまり o- Ps の状態は 2γ 崩壊をしないのでその崩壊振幅は 0 である。よってスピン和をとるという手法を用いても余計な項はすべて 0 にな

り、求めたい量は求めることができる^{*12}. これにより、スピノルと γ 行列の具体的な表式を用いることなくトレース公式を使うことで崩壊率を求めることができる.

今, $p_1 = (m, \mathbf{0}), p_2 = (m, \mathbf{0})$ と近似する. その結果のスピン和をとった後の崩壊確率 ($\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}'_{s,s'}|^2$) は $16e^4$ となる. (例えば [3]) これを用いて崩壊率を Appendix の式に従って計算すると

$$d\Gamma = \frac{1}{m} |\psi(\mathbf{0})|^2 \frac{1}{2M} \left(\prod_i \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_i^0} \right) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}'_{s,s'}|^2 (2\pi)^4 \delta(P_{\text{Positronium}} - \sum k_i) \quad (15)$$

$P_{\text{Positronium}}$ はポジトロニウムの 4 元運動量で今は $P_{\text{Positronium}} = (M, \mathbf{0})$.

これに上に述べた近似を使い計算していく. 積分部分の変形等は例えば [3] を参照.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{m} |\psi(\mathbf{0})|^2 \frac{1}{2M} \int_0^1 d\cos\theta \frac{1}{16\pi} \frac{2|\mathbf{k}|}{E_{cm}} 16e^4 \\ &= \frac{1}{4m^2\pi} |\psi(\mathbf{0})|^2 e^4 \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{m^2} |\psi(\mathbf{0})|^2 \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{m^2} \frac{m^3\alpha^3}{8\pi} \\ &= \frac{m\alpha^5}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

となる^{*13}. $E_{cm} = 2m$ は重心系のエネルギーであり, $|\mathbf{k}| = m$. また, 積分が -1 から 1 でなく 0 から 1 であるのは終状態が光子 2 つの同種粒子系なので, 終状態を二重に数えてしまうのを防ぐためである. α は微細構造定数で $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ ^{*14}. ここでは $|\psi(\mathbf{0})|^2 = \frac{m^3\alpha^3}{8\pi}$ を用いた^{*15}. この値は適当な量子力学の教科書の中心力 (Coulomb ポテンシャル) の記述を参照し, ポジトロニウムの場合は換算質量が $\frac{m}{2}$ であることを考えればよい.

^{*12} 一応式でこのことを示しておく. つまり, ユニタリ変換によって基底を取り換えてもその振幅の 2 乗和は不変であることを示す. 式では $|A\rangle = \sum_a U_{Aa} |a\rangle$ とユニタリ行列 $\{U_{Aa}\}$ で基底を変換した時, それぞれの基底で考えた振幅の 2 乗和について, $\sum_A |\mathcal{M}_A|^2 = \sum_a |\mathcal{M}_a|^2$ を示すことになる ($\mathcal{M}_{A,a}$ はそれぞれの基底の状態からの散乱振幅). これは straightforward な計算で, $\mathcal{M}_A = \sum_a U_{Aa} \mathcal{M}_a$ より, $\sum_A |\mathcal{M}_A|^2 = \sum_A \sum_a \sum_{a'} U_{Aa} U_{Aa'}^* \mathcal{M}_a \mathcal{M}_{a'}^*$ で, U がユニタリより右辺は $\sum_a |\mathcal{M}_a|^2$ に等しいので証明できた. これを今のパラポジトロニウムの崩壊に使うなら, A としてパラポジトロニウム, オルソポジトロニウムの状態をとり, 2γ 崩壊への振幅はパラポジトロニウムのみが持つことに注意すると左辺は求めたい振幅の 2 乗である. a としては通常トレース公式で使う, それぞれの粒子のスピンアップダウンのテンソル積をとる. するとトレース公式を用いて計算したものと今求めたい振幅 2 乗が一致することが直接わかる.

^{*13} この近似では前に脚注で述べたことと対応して, $\psi(\mathbf{0}) = 0$ である P 状態以上の角運動量状態は崩壊率が 0 になり寄与しない. P 状態以上の寄与は上で行った近似を正確なものにすることで生じる. 例えば $\frac{1}{2E_p} \approx \frac{1}{2m}$ を行わないなどである. これによって生じる補正が小さいであろうことを見積もっておく. 今の近似は静止状態で近似することを行っていると思うと, 補正項は $\frac{\text{運動エネルギー}}{\text{静止エネルギー}}$ の相対オーダーであると考えられる. これは今ピリアル定理から運動エネルギーはポテンシャルエネルギーの半分の符号を変えたもの ($T = -\frac{1}{2}V$) であり合計のエネルギーは $E = T + V = \frac{1}{2}V$ であるので $T = -E$ つまりこれは 6.8eV 程度のオーダーと考えられる (主量子数が 1 の時の値). 静止エネルギーは 1022keV なのでこの比は約 10^{-5} で非常に小さく補正は小さいと考えられる.

^{*14} 約 $\frac{1}{137}$ である. QED の断面積等の摂動展開は α のべきで行われる.

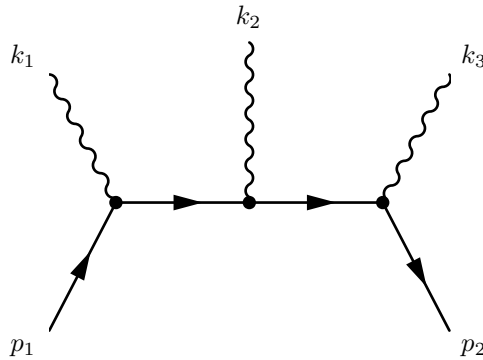
^{*15} $1S$ 状態での値である. 他の S 状態の寄与を考えておく. nS 状態では $|\psi(\mathbf{0})|^2 = \frac{m^3\alpha^3}{8\pi n^3}$ で, 例えば $2S$ 状態の寄与は $1S$ 状態の $\frac{9}{16}$ である. これは無視できるオーダーではない. 仮に $1S$ 状態と $2S$ 状態が割合 $\frac{1}{2}$ ずつで混合していると考えたとき, 崩壊率は $\frac{9}{16}$ の補正を受け, 寿命は延びる. また, すべての nS 状態が均等に混合していると考えたときは崩壊率が $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3}$ の補正を受けるのでこれは $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) = 1.20205\dots$ (Apéry 定数) が有限値に収束するので 0 になり, 寿命は無限大になってしまう. このようなことが起こらないのは今考えている状態はこのような混合が起きている状態ではなく, ほぼすべてが $1S$ 状態であるような状態であると考えてよいからであると思われる. なぜそう考えられるかの考察は筆者の力量を超える. これを読んだ方で分かる方がいれば教えていただきたい. (nS 状態が $1S$ 状態に遷移して $1S$ 状態から崩壊するという事は考えにくい. なぜならこのような遷移が双極子輻射によるものだとしたとき, S 状態はパリティが等しいので遷移は摂動の 2 次から起こり, それは一

この値は計算すると $\Gamma \approx 8.03 \times 10^9 \text{sec}^{-1}$ であり, これを寿命に直すと寿命 τ は

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \approx 125 \text{ps} \quad (17)$$

オルソポジトロニウムの寿命の計算 これも同様の手続きをすればよい. ただ計算が煩雑になるだけである. 前と同じ理由でトレース公式を用いることができる.

計算すべき Feynman diagram のみ以下にあげておく. 合計で 6 つであり, 以下の Feynman diagram の終状態の光子を入れ替えたものである ($3! = 6$ 通り).



結果は

$$\Gamma = \frac{2m\alpha^6(\pi^2 - 9)}{9\pi} \quad (18)$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \approx 142 \text{ns} \quad (19)$$

1.2 磁場中のポジトロニウム

1.2.1 磁場による状態の混合

ポジトロニウムに磁場を印加すると $|1, 0\rangle, |0, 0\rangle$ の状態の間に混合が起こり^{*16}, 新たなエネルギー固有状態が形成される. その結果としてエネルギー固有値が Zeeman シフトを起こす. Zeeman エネルギーの部分の

般に小さいと考えられるからである. これは例えば $2P$ 状態から $1S$ 状態への遷移の寿命が 1.6ns であり, これはパリティが異なるので 1 次の摂動で起きていることを考えると今考えたい遷移は少なくとも ns オーダーの寿命であるかそれより長いと思われる. しかし, $2S$ 状態の崩壊率は $1S$ 状態に対し $\frac{1}{8}$ の補正を受けるので寿命は 8 倍の補正を受けて約 1ns である. すると遷移と崩壊が同じオーダーの時間で起きるので遷移した後崩壊するというスケールの分離は行えない. さらに, ポジトロニウム形成が $|\tilde{\psi}^*(\mathbf{0})|$ に比例した確率で起こると仮定してもこれは説明できない. この説明では $2S$ 状態の生成確率が $1S$ 状態の $|\frac{\tilde{\psi}_{2S}^*(\mathbf{0})}{\tilde{\psi}_{1S}^*(\mathbf{0})}| = 4\sqrt{2}$ 倍になってしまい, $1S$ 状態の割合が支配的であることを説明できない.)

^{*16} 電子と陽電子の磁気モーメントの向きが逆を向いている状態は Zeeman シフトが正負同じ量だけ起き合計として影響を受けないので, 磁場によって混合が起こるのは磁気モーメントの向きが同じ状態である (つまりはスピンの逆向き状態).

Hamiltonian を $\mathcal{H}_{\text{Zeeman}}$ とすると

$$\mathcal{H}_{\text{Zeeman}} |1, 0\rangle = g' \mu_B H |0, 0\rangle \quad (20)$$

$$\mathcal{H}_{\text{Zeeman}} |0, 0\rangle = g' \mu_B H |1, 0\rangle \quad (21)$$

であるので (電子, 陽電子それぞれの空間で Zeeman エネルギーを考えれば straightforward に出せる) 全 Hamiltonian は式 (2),(3),(4),(5) を基底として用いた 4×4 行列の表示では

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & g' \mu_B H \\ 0 & 0 & W_1 & 0 \\ 0 & g' \mu_B H & 0 & W_0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

これを対角化して磁場を印加した後の新たなエネルギー固有状態は

$$|\chi_0\rangle = C_0^0 |0, 0\rangle + C_1^0 |1, 0\rangle, |\chi_1\rangle = C_0^1 |0, 0\rangle + C_1^1 |1, 0\rangle, |\chi_2\rangle = |1, 1\rangle, |\chi_3\rangle = |1, -1\rangle \quad (23)$$

であり, 混合の係数は

$$C_1^0 = -C_0^1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)} \quad (24)$$

$$C_0^0 = C_1^1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)} \quad (25)$$

で与えられる. x は磁場の強さを表す無次元量である ($x \equiv \frac{2g'\mu_B}{\Delta_{\text{HFS}}} H$, H は Tesla で測った磁場の値であり, 無次元量であるとする). g' は Landé の g -因子 (bound state correction を含む), μ_B は Bohr 磁子, Δ_{HFS} は超微細分裂, H は印加された磁場の強さである.

磁場が印加された後のエネルギー固有値は

$$E_0 = \frac{1}{2}(W_1 + W_0) - \frac{1}{2}(W_1 - W_0)(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

$$E_1 = \frac{1}{2}(W_1 + W_0) + \frac{1}{2}(W_1 - W_0)(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

$$E_2 = E_3 = W_1 \quad (28)$$

W_0 は p-Ps の, W_1 は o-Ps の真空中でのエネルギーである. エネルギーシフトは図 3 のようになる.

$$\Delta_{\text{SHIFT}} \equiv E_1 - W_1 = \frac{1}{2} \Delta_{\text{HFS}} (-1 + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}) \quad (29)$$

となるので, Δ_{SHIFT} を測定することで印加する磁場を既知として間接的に Δ_{HFS} を測定することができる.

1.2.2 Δ_{SHIFT} の測定方法

磁場を印加することで o-Ps の 3γ 崩壊の角度分布が時間によって振動する. この時の振動数が Δ_{SHIFT} であるので, この振動を観測することで Δ_{SHIFT} を測定することができる.

この項での説明は結果をまとめるだけとし, 理論的背景については次の 2 項で補足説明を加える.

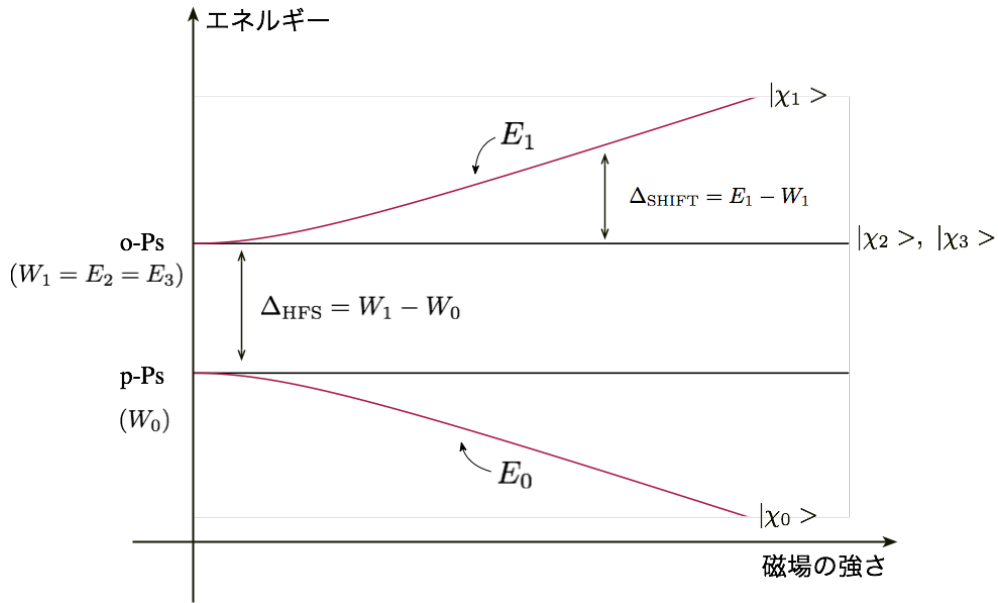


図3 エネルギーシフトの概念図

o-Ps の 3γ 崩壊の (ある方向への) 全断面積は [2] によると

$$\sigma \sim (1 + h \sin \Omega t) \exp\left(-\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)t\right) \quad (30)$$

となる.

実際の測定では以下の図4のように振動が現れると予想される.

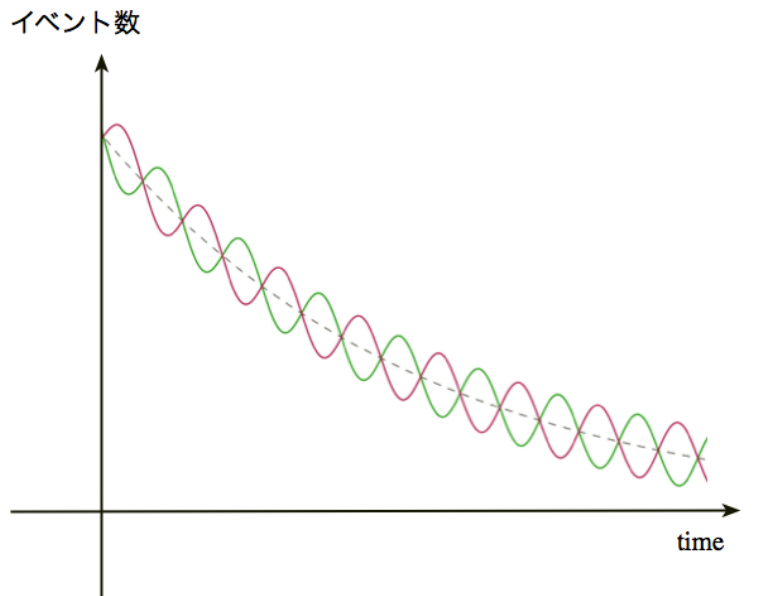


図4 観測される時間振動

色の違いは下で述べる角度による位相差

振幅の位相は以下の図 5 のようになる。

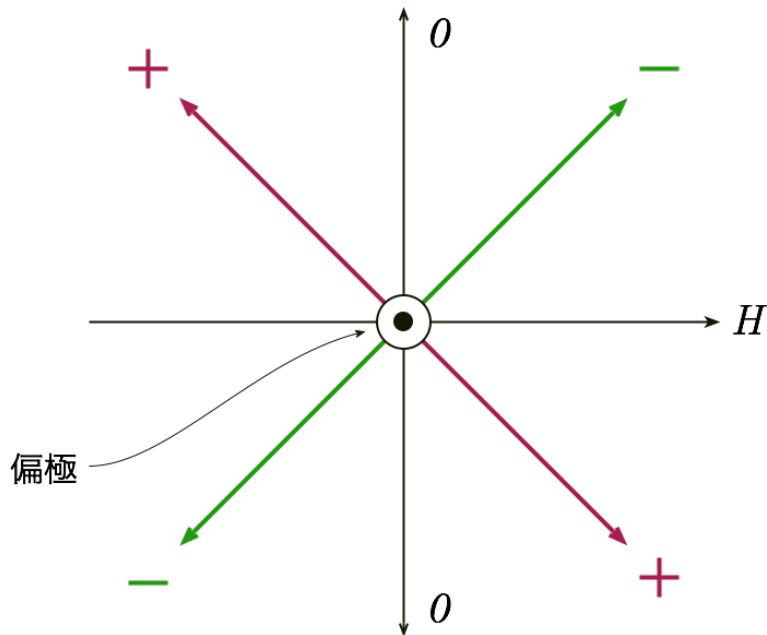


図 5 角度による位相差

これについては理論的背景を述べるときに説明する。

h は modulation depth と呼ばれる振動項と非振動項の比である [2].

$$h \equiv 0.213P |\sin \theta \sin \alpha \sin 2\beta| \quad (31)$$

であり, P は陽電子の偏極率, θ は磁場と偏極方向がなす角, α と β は磁場を z 軸方向, 陽電子の偏極方向を x 軸方向にとった時の方位角と偏角である. 定義された角度の図での説明は図 6 と図 7 である.

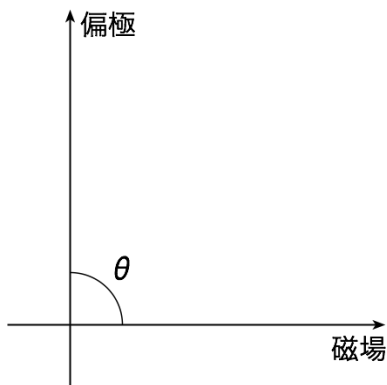


図 6 θ の定義

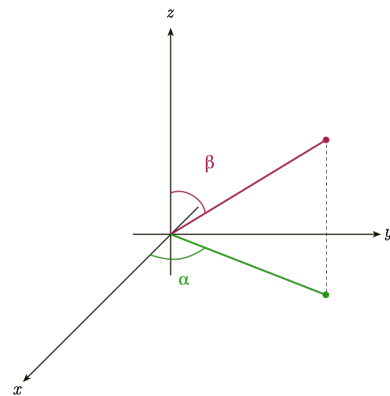


図 7 α, β の定義

本実験のセッティングでは $\theta \sim 90^\circ$, $\alpha \sim 90^\circ$ である. つまり, β の角度変化によってのみ振動の振幅が変化する. $\Omega, \gamma_1, \gamma_2$ は以下で定義されている.

$$\Omega \equiv \Delta_{\text{SHIFT}} \quad (32)$$

$$\gamma_1 \equiv (C_0^1)^2 \gamma_p + (C_1^1)^2 \gamma_o, \gamma_2 \equiv \gamma_o \quad (33)$$

γ_p は p-Ps の decay rate で $\gamma_p = 8.03 \times 10^9 s^{-1}$, γ_o は o-Ps の decay rate で $\gamma_o = 7.04 \times 10^6 s^{-1}$ である。
本実験では磁場が弱い (x が小さい) ので, $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ としている。

1.3 断面積の振動の理論的背景

1.3.1 断面積の時間振動の起源

断面積の振動 (30) の起源について簡単に説明しておく。簡単のため陽電子のスピンは完全に進行方向に偏極しているとし^{*17}, 電子のスピンは完全にランダムであるとする。

このとき陽電子の密度行列は陽電子が x 軸の正方向にスピンが向いている純粋状態 ($|\uparrow; x\rangle_+$ と表記) での密度行列である。これは x 軸方向を量子化軸に選んだスピン空間の基底で表示すると以下ようになる。

$$\rho_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

これを $|\uparrow; x\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_+ + |\downarrow\rangle_+)$ を用いて基底を z 軸を量子化軸に選んだもので書き直すと次のようになる。

$$\rho_+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (35)$$

電子の密度行列はスピンが完全にランダムだとしたので, 量子化軸を z 軸に選んだ基底で書くと

$$\rho_- = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (36)$$

となる。

今の系の密度行列はこの二つの合成系の密度行列と考えて

$$\rho = \rho_- \otimes \rho_+ \quad (37)$$

となる。

この ρ を対角化し, どのようにこの混合状態ができているかを解析する。この ρ を対角化する基底は $|\uparrow\rangle_- \otimes |\uparrow; x\rangle_+, |\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow; x\rangle_+, |\uparrow\rangle_- \otimes |\downarrow; x\rangle_+, |\downarrow\rangle_- \otimes |\downarrow; x\rangle_+$ であり, この基底で ρ を表示すると

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

となる。

^{*17} 弱い相互作用の理論からこの偏極率は実際は陽電子の速度 v で与えられるので, 今回のこの仮定は理想的に速い陽電子のみを用いた場合の話であるが, 本質はこれで理解できると思われる。

これを電子と陽電子両方の量子化軸を z 軸に選んだ基底で考え、それをさらに前に導入した $|\chi_0\rangle$ から $|\chi_3\rangle$ を用いて基底を書き直し、対角化された密度行列の各成分が状態がその基底の状態にある確率を表すことを考えると (Appendix を参照)、今考えている状態は x の 2 次までの近似で考えて

$$C_1^0 = -C_0^1 \sim \frac{1}{2}x \quad (39)$$

$$C_0^0 = C_1^1 \sim 1 - \frac{1}{8}x^2 \quad (40)$$

を用いて

$$|\uparrow\rangle_- \otimes |\uparrow; x\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}|\chi_2\rangle + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)|\chi_0\rangle - \left(\frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)|\chi_1\rangle \quad (41)$$

と

$$|\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow; x\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}|\chi_3\rangle - \left(\frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)|\chi_0\rangle - \left(\frac{x^2}{16} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)|\chi_1\rangle \quad (42)$$

が確率 $\frac{1}{2}$ ずつで混合している状態だと解釈できる。

これらの状態の時間発展を考えると、各々の項がそれぞれに対応するエネルギーを振動数とする位相の振動をする。これらの状態の 3γ 崩壊の振幅を考えるとそれはその 3 項の振幅の重ね合わせである。崩壊確率はその振幅の絶対値の 2 乗であり、ここで出現する cross term が崩壊確率の振動を生む^{*18}。これはつまり、 $|\chi_i\rangle$ の 3γ 崩壊の振幅を M_i と表記すると ($M_i = \langle 3\gamma | \chi_i \rangle$)、例えば上で述べた二つの状態の中の 1 つめの方の状態 (41) では、簡単のため状態ベクトルの $|\chi_i\rangle$ の係数を C_i 、 $|\chi_i\rangle$ のエネルギーを ε_i とおくと、時刻 t での崩壊振幅 $M(t)$ は

$$M(t) = C_2 M_2 \exp(-i\varepsilon_2 t) + C_0 M_0 \exp(-i\varepsilon_0 t) + C_1 M_1 \exp(-i\varepsilon_1 t) \quad (43)$$

となる^{*19} (この式において振動に無関係な、崩壊における粒子数の減少を表す dumping term を無視している)。

崩壊確率は $|M(t)|^2$ なので cross term が t 依存性を残し振動が観測される。これは具体的には上の式の例では

$$\begin{aligned} |M(t)|^2 &= |C_2 M_2|^2 + |C_0 M_0|^2 + |C_1 M_1|^2 \\ &\quad + C_2 C_0 M_2^* M_0 \exp(i(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)t) \\ &\quad + C_2 C_1 M_2^* M_1 \exp(i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t) \\ &\quad + C_0 C_1 M_0^* M_1 \exp(i(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)t) \\ &\quad + (\text{complex conjugation of the above three terms}) \end{aligned} \quad (44)$$

である。

この振動の振動数は cross term 1 つ 1 つに対して異なり、組み合わせに応じて

^{*18} つまり本質的にはかの有名な二重スリット実験と同じメカニズム (干渉項) でこの振動は生まれている。

^{*19} 本項の説明は定量的に正しいものではない。実際に断面積を求めるには 3 つの光子のうち 2 つを積分し、残りの一つも角度を残しエネルギーを積分する等の操作が必要になる。今回はあくまで崩壊の時間による振動の起源が何であるかを理解することのみを目的としている。定量的な評価に興味のある方は [2] を参照してもらいたい。

$$\Omega = E_1 - W_1 (= \varepsilon_0 - \varepsilon_2) \quad (45)$$

$$\Omega_1 = W_1 - E_0 (= \varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (46)$$

$$\Omega_2 = E_1 - E_0 (= \varepsilon_0 - \varepsilon_1) \quad (47)$$

の3つの振動数が存在する。この中で Ω_1, Ω_2 は $\sim 10^{12}$ Hz であり、本実験の検出器の検出精度では検出ができない。よって Ω の振動数で振動する成分のみが観測される。式 (44) では2行目が検出可能な振動項、3, 4行目が検出不可能な振動項となっている。

このことから、本実験で磁場を用いるのには二つ理由があることがわかる。ひとつは磁場をかけないときのエネルギー準位は o-Ps と p-Ps しかなく、状態がこれらの重ね合わせであったとしても、 2γ 崩壊か 3γ 崩壊の崩壊振幅を考えると片方の項が0になってしまい、崩壊振幅は重ね合わせとにならないので、崩壊を見ることで振動が観測できないことである。具体的には、p-Ps の状態を $|p\text{-Ps}\rangle$ 、o-Ps の状態を $|o\text{-Ps}\rangle$ とし、状態が $|\psi\rangle = C_1 |p\text{-Ps}\rangle + C_2 |o\text{-Ps}\rangle$ とすると、この時間発展は p-Ps のエネルギーを ε_p 、o-Ps のエネルギーを ε_o とおくと時刻 t での状態は $|\psi, t\rangle = C_1 \exp(-i\varepsilon_p t) |p\text{-Ps}\rangle + C_2 \exp(-i\varepsilon_o t) |o\text{-Ps}\rangle$ となる。しかしこの 2γ 、 3γ 崩壊の振幅を求めるために $\langle 2\gamma|$ 、 $\langle 3\gamma|$ をかけると $\langle 2\gamma|o\text{-Ps}\rangle = 0$ 、 $\langle 3\gamma|p\text{-Ps}\rangle = 0$ より、 $\langle 2\gamma|\psi, t\rangle = C_1 \exp(-i\varepsilon_p t) \langle 2\gamma|p\text{-Ps}\rangle$ 、 $\langle 3\gamma|\psi, t\rangle = C_2 \exp(-i\varepsilon_o t) \langle 3\gamma|o\text{-Ps}\rangle$ となり干渉項が生じない(絶対値をとることで t 依存性がなくなってしまう)。これに磁場を入れることで $|\chi_0\rangle$ と $|\chi_{2,3}\rangle$ という、エネルギー差があり、かつ両方 3γ 崩壊のチャンネルを持つ状態を作り、崩壊の観測によって振動を観測することができるようにできる。もうひとつはポジトロニウムでは HFS が大きすぎ、仮に干渉したとしてもそのエネルギーに対応する振動が本実験の検出器では検出できないことである。これは $|\chi_0\rangle$ と $|\chi_{2,3}\rangle$ とのエネルギー差 Δ_{SHIFT} は磁場の強さを変えることで調整でき(13 ページの式 (31) を見よ)、それを検出できる大きさにすることで振動を観測できるようにしている。

1.3.2 振動の振幅の角度変化

ここで振動の振幅の角度変化を簡単に説明しておく。詳しい計算は [2] を参照してもらうこととし、ここでは角度分布が上で述べた図 5 のような振る舞いをするを簡単に定性的に説明する。

まず、 3γ 崩壊をする状態は今考えている状態の中で、 $|\chi_i\rangle$ の中に含まれる $|1, \pm 1\rangle$ 、 $|1, 0\rangle$ の状態、つまり o-Ps の状態である事を思い出す。($|\chi_{0,1}\rangle$ 内の $|1, 0\rangle$ と $|\chi_2\rangle$ 内の $|1, 1\rangle$ と $|\chi_3\rangle$ 内の $|1, -1\rangle$ のことである) この中で $|1, \pm 1\rangle$ と $|1, 0\rangle$ の崩壊は定性的に異なる振る舞いを見せる。この原因を以下で説明する。まず、光子のヘリシティ^{*20}が1であることに言及しておく。これによって角運動量保存則から、崩壊した光子がポジトロニウムのスピン方向に放出されやすいことが理解できる。これを考慮に入れて崩壊方向の角度分布を考えると $|1, \pm 1\rangle$ が崩壊した光子は磁場の方向に放出されやすく、 $|1, 0\rangle$ が崩壊した光子は磁場に垂直な方向に放出されやすい。これを図にすると以下の図 8 のようになる。

崩壊の振幅は $|M(t)|^2$ で、これを展開して観測する振動の項の振幅を見ると、 $M_2^* M_0, M_3^* M_0$ の振る舞いを考えればよい。例えば式 (44) においては $M_2^* M_0$ が現れている。

ここである方向をとり、その方向の反対側に光子が放出される振幅は元の方向に放出される振幅に対してどれくらい位相がずれているかを考えておく。これらが位相因子しか変わらないことは、崩壊が電磁相互作用によって引き起こされるのでパリティ対称性が存在し^{*21}、崩壊確率は反対側に放出されるものもとの方向に放

*20 粒子の進行方向のスピン

*21 現在知られているパリティ対称性を破る相互作用は弱い相互作用のみである。

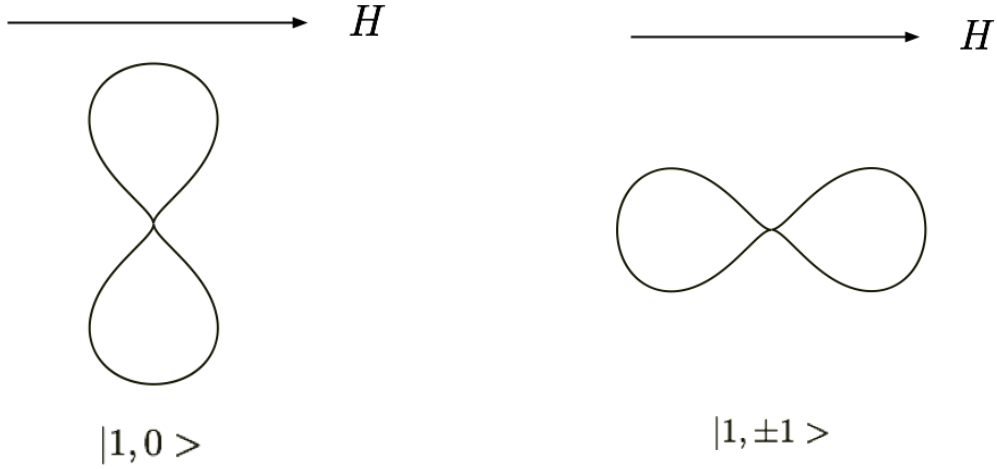


図 8 崩壊振幅の絶対値の概念図

中心から遠いほどその方向に崩壊しやすい

出されるもので等しく、これは崩壊振幅で見ると位相因子だけ異なることを意味することからわかる。

この位相因子が今考えている状況では -1 であることが次のようにわかる。パリティ変換演算子を P として、崩壊先の 3γ の状態を $|3\gamma\rangle$ と表す。すると、3つの光子がすべて逆向きに放出される振幅は $\langle 3\gamma|P|\text{Positronium}\rangle$ となる。これを評価するためにポジトロニウムの状態にパリティ変換演算子を作用させたときの状態を考える。これは前述の charge conjugation parity を求めたときと同様にやればよいが、今回の計算で重要となる内部パリティの問題についてのみ言及しておく。 P の作用は電子と陽電子に対して等しいわけではなく以下ようになる。

$$Pa_{\mathbf{p},s}^\dagger P = a_{-\mathbf{p},s}^\dagger \quad (48)$$

$$Pb_{\mathbf{p},s}^\dagger P = -b_{-\mathbf{p},s}^\dagger \quad (49)$$

このように P の作用は電子と陽電子に対して相対符号が $-$ になるという差がある。このことは Dirac 粒子の内部パリティは粒子と反粒子で逆になる、と表現される (Appendix を参照)。この式を用いて charge conjugation parity を求めたときの計算と同様の計算を行うと、ポジトロニウムの状態のパリティは $o\text{-Ps}$, $p\text{-Ps}$ の違いに問わず $(-1)^{L+1}$ である。今、 S 状態を考えているので $L=0$ 、つまり今の状況ではポジトロニウムのパリティは -1 である。よって $\langle 3\gamma|P|\text{Positronium}\rangle = -\langle 3\gamma|\text{Positronium}\rangle$ となり、問題にしていた位相因子は -1 であることがわかる。このことを考えて上で考えた図に符号をつけて考えると図 11 のようになる。

これは左図が $|1, \pm 1\rangle$ の崩壊の振幅、つまりは $M_{2,3}$ に対応するもの、右図が $|1, 0\rangle$ の崩壊の振幅、つまりは M_0 に対応するものと考えられる。よって振動の振幅に対応する、 $M_2^* M_0, M_3^* M_0$ はこの図を掛け合わせたものになる。すると振動の振幅は以下の図 12 に示すような角度分布を持つ。

偏極していない陽電子を用いてしまうとこれと逆符号の寄与が同じだけ存在してしまい、振動がなくなってしまう。今は偏極している陽電子を用いているので逆符号の寄与では相殺はされきらず振動が観測される。

以上が modulation depth h の中での $\sin 2\beta$ の振る舞いの定性的説明である (13 ページの式 (31)を見よ。これは絶対値であるが、振幅の角度依存性は図 5 でも示したように $\sin 2\beta$ のふるまいを見せる)。

まとめると、崩壊振幅の角度依存性は

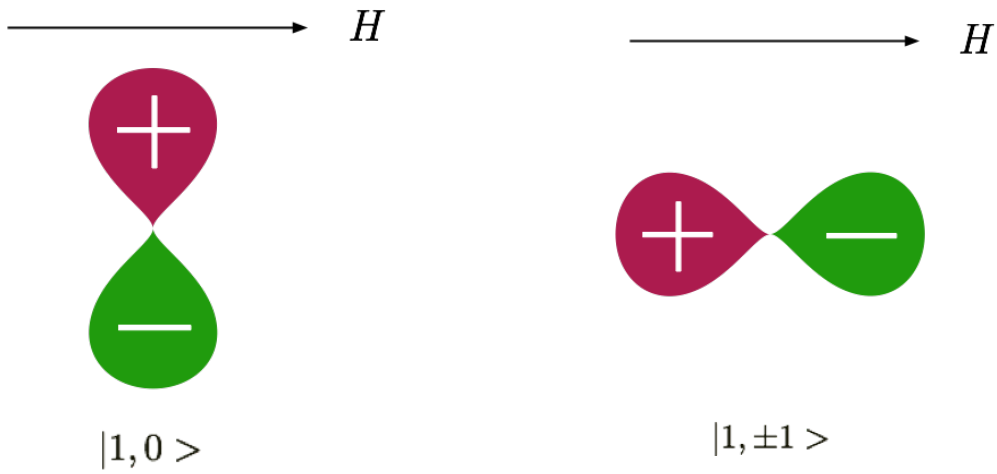


図 9

図 10

図 11 崩壊振幅の相対符号の概念図

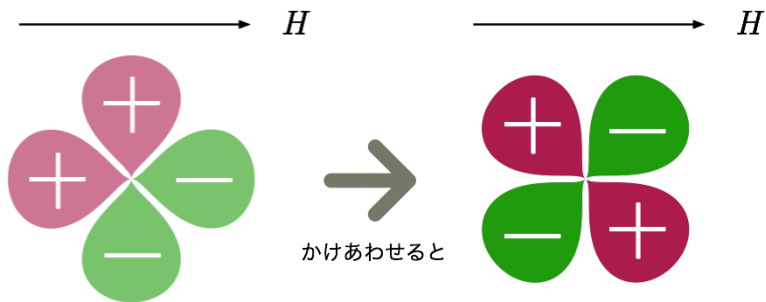


図 12 崩壊振幅の干渉項の振幅の相対符号とその計算の概念図

1. $|1, \pm 1\rangle$ と $|1, 0\rangle$ の角運動量による崩壊の角度分布の違い
2. 電子と陽電子の内部パリティの違いにより崩壊振幅が反対方向で符号が変わること
3. 干渉項における振幅の掛け算

で理解できる。

1.4 物質中のポジトロニウム

1.4.1 物質の影響

この項では物質中にポジトロニウムがあるときに起きる主な反応についてまとめる。本実験において、ポジトロニウムの形成のために陽電子を slow down させることが必要であり、それには物質の使用が不可欠である。

物質中ではポジトロニウムがポジトロニウムを形成する電子、陽電子の対消滅以外の要因で崩壊する。その要因として次の3つがあげられる。

これらが上で述べた測定を困難にする要素である。

1. Pick-off 過程: ポジトロニウム中の陽電子が、ポジトロニウムを構成している電子とは異なる、物質中の

電子と反応して崩壊してしまう過程.

2. Spin flip 過程:o-Ps 内の電子が物質中の不対電子とスピンを交換する反応を起こし p-Ps となり, o-Ps より短い p-Ps の寿命でポジトロニウムが崩壊してしまう過程.
3. 化学反応:酸化反応が起き, ポジトロニウムから電子が奪われ, 自由になった陽電子が物質中の電子と反応し崩壊する過程.

これら为了避免するためには基本的には周囲の電子を減らすこと, つまり密度の小さい物質を用いることが効果的である.

1.5 Appendix

1.5.1 量子化された自由な電子の場

Lagrangian と生成消滅演算子での展開 電子は Fermion であり, 場の量子論ではそれは次の Lagrangian をもつスピノル場で表現される. 以下, この項の内容は相互作用のない電子の場, つまり自由場での話である.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (50)$$

ψ は電子の場を表すスピノル場であり, γ^μ は Clifford 代数 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ を満たす行列で, 今回考える 4 次元時空では 4×4 行列である. m は電子の質量.

表示があらわに効いてくるのは以下の平面波解の具体形のみであるが, 一応本稿では chiral 表示

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

をとる. ここで $\sigma^\mu = (1, \sigma), \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma)$ であり, σ は Pauli 行列を 3 次元ベクトルのように並べたもの.

この Lagrangian から最小作用の原理より導かれる運動方程式は $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ である. これが Dirac 方程式である. この方程式の平面波解を議論しておく. 詳しい議論は適当な場の量子論のテキストを参照されたい.

まず正エネルギー解と負エネルギー解を定義する. 4 元運動量ベクトルを p^μ とする. ここで $p^0 > 0, p^2 = m^2$ とする. $u(p), v(p)$ を定数スピノルとして $u(p) \exp(-ipx)$ の形の解を正エネルギー解, $v(p) \exp(ipx)$ の形の解を負エネルギー解という. この $u(p), v(p)$ を求める. これらの解を Dirac 方程式に代入すると例えば正エネルギー解の方では $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$ を得る. 粒子の静止系をとると $m(\gamma^0 - 1)u(p) = 0$ を得る. chiral 表示で具体的に計算すると $(\gamma^0 - 1)$ のランクは 2 であるので線型代数学の定理から $u(p)$ は独立解を 2 つもつ. このことは静止系への変換が全単射であることに注意すると静止系でない時も正しいことが分かり, Pauli の基本定理^{*22}に注意すると, Clifford 代数の具体的表示によらないことがわかる. $v(p)$ に関しても同じことが分かり, 独立解は二つである.

この解を $u^s(p), v^s(p)$ ($s = 1, 2$) と表す. 具体形は, 例えば chiral 表示では 1 つの取り方として

^{*22} すべての Clifford 代数の表現はすべて同値である. さらにこの変換は定数倍を除き単純推移的, つまり任意の二つの表現に対して同値を与える相似変換の行列は定数倍を除き一意である. また, 変換前と変換後の表現行列が両方もユニタリであるときはこの変換行列はユニタリ行列にとれる (この時ユニタリ行列のみ考えるなら定数倍の不定性は位相因子の不定性となる). という定理.

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix} \quad (53)$$

であり, ξ^s, η^s は適当な 2 成分スピノルである. ^{*23}

ξ^s を後述の (Appendix の荷電共役変換の節) $\xi(\uparrow), \xi(\downarrow)$ にとると, Lorentz 変換で静止系に変換した時のスピノルが (θ, ϕ) 方向に向いている状態を作るように生成消滅演算子を定義することになる (これは具体的に角運動量演算子を作用させることによってチェックできる). これはスピン状態を対角化する表示と呼ばれる. 他にヘリシティを対角化する表示などがある.

ここで QED の過程の散乱断面積の計算に便利な公式

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \gamma^\mu p_\mu + m \quad (54)$$

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \gamma^\mu p_\mu - m \quad (55)$$

をあげておく. 証明は上の表示を用いて具体的に計算すればよい.

u, v を用いて ψ を展開すると

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (u^s(p) a_{\mathbf{p},s} \exp(-ipx) + v^s(p) b_{\mathbf{p},s}^\dagger \exp(ipx)) \quad (56)$$

となり, $a_{\mathbf{p},s}$ が電子の消滅演算子を, $b_{\mathbf{p},s}^\dagger$ が陽電子の消滅演算子を表すことが Hamiltonian, 運動量, 電荷 (U(1)charge) を調べることによってわかるがここでは割愛する.

以前脚注で述べた不変規格化とは運動量固有状態を

$$|\mathbf{p}, s\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p},s}^\dagger |0\rangle \quad (57)$$

などと定義することである.

Feynman propagator 電子の propagator を $S_F(p)$ と書く (運動量表示). これは

$$S_F(p) = \frac{i}{p_\mu \gamma^\mu - m + i\varepsilon} = \frac{i(p_\mu \gamma^\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (58)$$

である.

座標表示を $S_F(x)$ とするとこれは

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S_F(x) = i\delta(x) \quad (59)$$

を満たす.

^{*23} $\sqrt{p \cdot \sigma}$ 等はスペクトル分解で定義している. このとき $p^0 \geq |\mathbf{p}|$ なので $\sqrt{p \cdot \sigma}$ の固有値はすべて正 ($p^0 \pm |\mathbf{p}| \geq 0$) よりちゃんと $\sqrt{\quad}$ が定義される.

1.5.2 QED

今回の実験の基礎理論となる QED について概要を説明する。

QED とは電磁相互作用を記述する場の理論である。標準模型ではこれは物質場としてクォーク、レプトンを含み、4 元ポテンシャル場をゲージ場とする U(1) ゲージ理論である。Lagrangian は以下で与えられる。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (60)$$

ただし $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ であり、 e は考える荷電粒子の電荷で今回は電子の電荷、 A_μ は 4 元ポテンシャル、 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場テンソル、 ψ は物質場を表すスピノル場で今回は電子である。 m はその物質場の粒子の質量。この Lagrangian の D_μ は covariant derivative と呼ばれており、自由な Dirac 場の理論から、局所 U(1) ゲージ変換不変性を持たせるために導入される最小の変更である (minimal coupling)。これによって対称性から相互作用が決定される。

1.5.3 荷電共役変換

粒子と反粒子を入れ替える変換を荷電共役変換という。これをユニタリ演算子 C で表すと本文中に述べたように

$$Ca_{\mathbf{p},s}^\dagger C = b_{\mathbf{p},s}^\dagger \quad (61)$$

$$Cb_{\mathbf{p},s}^\dagger C = a_{\mathbf{p},s}^\dagger \quad (62)$$

である。この時の注意として、 a と b を結びつける変換であるので、これらの演算子を定義するための正エネルギー解、負エネルギー解の間には関係付けが必要である。これはつまり式 (52) の ξ と (53) の η の間に関係付けが必要であることを表す。これには flipped spinor という関係をとればよいことがわかる。これは $u^s(p)$ の表示として式 (52) をとり、 ξ^s を $\xi^s = (\xi(\uparrow), \xi(\downarrow))$

$$\xi(\uparrow) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\xi(\downarrow) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (64)$$

ととる。これは粒子の生成演算子で作られる状態のスピン状態を (θ, ϕ) の方向にとったものとして定義している基底の取り方である。

$v^s(p)$ の η^s の取り方を $\eta^s = \xi^{-s}, \xi^{-s} = -i\sigma^2 \xi^{s*}$ ととる。これは具体的には $\eta^s = (\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow))$ となる。

この選択の根拠は相対論的量子力学の Dirac 方程式と Clifford 代数から理解できる。まず外部電磁場中の Dirac 方程式 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0$ を考え (本稿では電子の電荷を e とする。つまり $e < 0$)、 γ^μ が Clifford 代数を満たすとすると $-(\gamma^\mu)^T$ も Clifford 代数を満たす。よって Pauli の基本定理からあるユニタリ行列 C が存在して $C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$ となる。 $C^{-1} = C$ であるように C をとれる^{*24}。これは以下で C の具体形を示すのでそこから直接的にチェックできる。Dirac 方程式に C をかけると $(-i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu + e(\gamma^\mu)^T A_\mu - m)C\psi = 0$ となり、さらにこれの complex conjugate をとると $(i(\gamma^\mu)^\dagger \partial_\mu + e(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m)(C\psi)^* = 0$ である。これに γ^0 をかけ、 $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^\mu \gamma^0$ を用いると $(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\gamma^0(C\psi)^* = 0$ を得る。これは元の Dirac

^{*24} こう選ぶのは Pauli の基本定理の位相因子を除いて定まる相似変換の行列の位相因子を fix することに相当する。

方程式の電荷の符号を変えたものになっている。 $\psi \rightarrow \gamma^0(C\psi)^*$ という変換が荷電共役変換であるということである。 flipped spinor の取り方は場の演算子のユニタリ変換として $C\psi C = \gamma^0(C\psi)^* = \gamma^0 C^* (\gamma^0)^T \bar{\psi}^T$ となるような u, v の相対関係が flipped spinor というとり方である。(記法が紛らわしいが上式の C は左辺では Hilbert 空間上のユニタリ変換, 右辺では 4×4 行列である。)

C の具体形は chiral 表示では $C = i\gamma^2$ である。これを代入すると $\gamma^0 C^* (\gamma^0)^T \bar{\psi}^T = -i\gamma^2 \bar{\psi}^T$ である。(C が chiral 表示では実行列であることに注意。) これの Fourier 成分を比較して

$$u^s = -i\gamma^2 \bar{v}^{sT} \quad (65)$$

$$v^s = -i\gamma^2 \bar{u}^{sT} \quad (66)$$

である。この式を 2 成分ごとに書き下したのが flipped spinor の関係式である。

1.5.4 パリティ変換

パリティの変換はスピンを変えずに運動量を逆向きにするものであると考える。相対符号が本文中に述べた

$$Pa_{\mathbf{p},s}^\dagger P = a_{-\mathbf{p},s}^\dagger \quad (67)$$

$$Pb_{\mathbf{p},s}^\dagger P = -b_{-\mathbf{p},s}^\dagger \quad (68)$$

となることの説明としては可観測量がパリティ変換を二度行うと元に戻ることに、場のパリティ変換が定数行列をかけたものになることから説明できる、と [3] には書かれている。しかし、Peskin の説明に不審に感じる点があるので筆者としての考えを以下で述べる。これは、まず変換則を

$$Pa_{\mathbf{p},s}^\dagger P = \eta_a a_{-\mathbf{p},s}^\dagger \quad (69)$$

$$Pb_{\mathbf{p},s}^\dagger P = \eta_b b_{-\mathbf{p},s}^\dagger \quad (70)$$

と仮定する。ここで $|\eta_a| = |\eta_b| = 1$ の位相因子である。これは P がユニタリであることから従う。ここで $\eta_{a,b}$ は運動量やスピン状態によらないことを示しておく。Lorentz 変換に対するユニタリ変換を $U(\Lambda)$ とかく。すべての運動量状態とスピン状態には任意の状態から適当な Lorentz 変換を施せばたどり着けることにまず注意しておく。ここで boost 変換だけの Lorentz 変換を Λ_{boost} , 回転変換だけの Lorentz 変換を $\Lambda_{\text{rotation}}$ とかく*²⁵。これらとパリティ変換 P に対して $PU(\Lambda_{\text{boost}}) = U(\Lambda_{\text{boost}}^{-1})P$, $PU(\Lambda_{\text{rotation}}) = U(\Lambda_{\text{rotation}})P$ であることを考えると*²⁶, 式 (69),(70) に $U(\Lambda_{\text{boost}})$ や $U(\Lambda_{\text{rotation}})$ のユニタリ変換を施して

$$U(\Lambda)Pa_{\mathbf{p},s}^\dagger PU(\Lambda^{-1}) = \eta_a U(\Lambda)a_{-\mathbf{p},s}^\dagger U(\Lambda^{-1}) \quad (71)$$

$$U(\Lambda)Pb_{\mathbf{p},s}^\dagger PU(\Lambda^{-1}) = \eta_b U(\Lambda)b_{-\mathbf{p},s}^\dagger U(\Lambda^{-1}) \quad (72)$$

であり、まず Λ_{boost} の場合は上にあげた式を用いて

*²⁵ この 2 つの合成で任意の Lorentz 変換が得られる。

*²⁶ これは boost 変換の生成子がパリティ変換に対して極性ベクトルのようにふるまい、回転変換の生成子がパリティ変換に対して軸性ベクトルのようにふるまうことを考えればわかる。

$$PU(\Lambda_{\text{boost}}^{-1})a_{\mathbf{p},s}^\dagger U(\Lambda_{\text{boost}})P = \eta_a U(\Lambda_{\text{boost}})a_{-\mathbf{p},s}^\dagger U(\Lambda_{\text{boost}}^{-1}) \quad (73)$$

$$PU(\Lambda_{\text{boost}}^{-1})b_{\mathbf{p},s}^\dagger U(\Lambda_{\text{boost}})P = \eta_b U(\Lambda_{\text{boost}})b_{-\mathbf{p},s}^\dagger U(\Lambda_{\text{boost}}^{-1}) \quad (74)$$

これをさらに変形すると

$$Pa_{\Lambda_{\text{boost}}^{-1}\mathbf{p},s}^\dagger P = \eta_a a_{\Lambda_{\text{boost}}(-\mathbf{p}),s}^\dagger \quad (75)$$

$$Pb_{\Lambda_{\text{boost}}^{-1}\mathbf{p},s}^\dagger P = \eta_b b_{\Lambda_{\text{boost}}(-\mathbf{p}),s}^\dagger \quad (76)$$

これには $\Lambda_{\text{boost}}^{-1}\mathbf{p}$ の運動量の粒子が持つエネルギーと $\Lambda_{\text{boost}}(-\mathbf{p})$ の運動量の粒子がもつエネルギーが等しいこと^{*27}を用いた^{*28}.

またスピン状態は静止状態で定義されているので boost 変換では変化しないことを用いている。

回転変換に対しては同様の変形を行えばよく、 P との交換性を用いるときに inverse が出ないという点と、スピン状態が回転変換では変化しうるといふ点異なる。inverse が出ない点は変形が少し変化するだけで問題はない。スピン状態はスピン量子化軸を回転の軸に選ぶ基底で展開し直すことで、スピン状態が変化しないとして一般性を失わずに議論ができ、これで boost 変換、回転変換に対しての $\eta_{a,b}$ の不変性からすべての運動量とスピン状態に対して $\eta_{a,b}$ が共通にとれることが示された。

本題に戻ると、可観測量がパリティ変換を二度行うと元に戻ることを要求すると $\eta_{a,b}^4 = 1$ が要求される、というのが Peskin の記述であるが、可観測量は Grassmann even で Hermite^{*29}であることを要求すると、Grassmann even 性は可観測量は Fermion の生成消滅演算子偶数個の積の線型結合でできていることを要求し、Hermite 性はその積が aa^\dagger, bb^\dagger の形のもを最小単位とする組み合わせでできていることを要求するので(各演算子 a, b の粒子の種類、運動量、スピンは等しいとする)実際に aa^\dagger, bb^\dagger にパリティ変換を二度作用させることで $|\eta_{a,b}|^2 = 1$ だけの要求から可観測量が元に戻ることがわかる。 $\eta_{a,b}$ への制限は $P^2 = 1$ を式(69),(70)に適用して $\eta_{a,b}^2 = 1$ を要求するべきである。あとはこれを場の展開式(56)に適用して

^{*27} boost の方向を x 軸方向に選ぶ座標をうまくとって具体的に 4 元運動量の Lorentz 変換を計算すると簡単に示せる。

^{*28} $U(\Lambda_{\text{boost}})a_{\mathbf{p},s}^\dagger U(\Lambda_{\text{boost}}^{-1}) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda_{\text{boost}}\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}} a_{\Lambda_{\text{boost}}\mathbf{p},s}^\dagger$ より(式(57)を参照)。

^{*29} 本稿において、Hermite 演算子、対称演算子、自己共役演算子の厳密な区別は行わない。通常量子力学で使われる $A^\dagger = A$ という定義は本来は自己共役演算子について用いられる定義であるが、本稿では演算子の定義域などを議論の対象とするような厳密な議論をすることはないので、厳密には Hermite 性という言葉の定義は通常量子力学で用いられる定義とは一致しないことを言及するだけにしておく。(厳密には考えている Hilbert 空間を H として線型写像(ここでの線型写像の意味は、写像の定義域が線型空間であり、通常の線型性の条件を満たすものという意味で定義されているものである) $A : H \rightarrow H$ (この書き方は必ずしも定義域が H 全体であることを意味しない)が Hermite であるとは H の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ として、 A の定義域を $D(A)$ としたとき、任意の $\psi, \phi \in D(A)$ に対し $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A\psi, \phi \rangle$ を満たすことと定義される。対称演算子は $D(A)$ が H で稠密であり (A^\dagger (adjoint operator of A) を定義するために必要) A が A^\dagger を閉拡大として持つことと定義され、自己共役演算子は $A^\dagger = A$ と定義される。 A の定義域が考える線型空間全体である有界作用素である場合には Hermite、対称、自己共役の概念はすべて一致する。特に有限次元の線型代数学では定義域は通常、考える線型空間全体であり、有限次元間の線型作用素は常に有界であるのでこのような概念の区別は不要であった。)

$$\begin{aligned}
P\psi(x)P &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (u^s(p) P a_{\mathbf{p},s} P \exp(-ipx) + v^s(p) P b_{\mathbf{p},s}^\dagger P \exp(ipx)) \\
&= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{\mathbf{p}}}}} (u^s(p) \eta_a^* a_{\tilde{\mathbf{p}},s} \exp(-i\tilde{p}(t, -\mathbf{x})) + v^s(p) \eta_b b_{\tilde{\mathbf{p}},s}^\dagger P \exp(i\tilde{p}(t, -\mathbf{x}))) \\
&= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{\mathbf{p}}}}} (\gamma^0 u^s(\tilde{p}) \eta_a^* a_{\tilde{\mathbf{p}},s} \exp(-i\tilde{p}(t, -\mathbf{x})) - \gamma^0 v^s(\tilde{p}) \eta_b b_{\tilde{\mathbf{p}},s}^\dagger P \exp(i\tilde{p}(t, -\mathbf{x}))) \quad (77)
\end{aligned}$$

ここで $\tilde{p} \equiv (p^0, -\mathbf{p})$ であり

$$u^s(p) = \gamma^0 u^s(\tilde{p}) \quad (78)$$

$$v^s(p) = -\gamma^0 v^s(\tilde{p}) \quad (79)$$

を用いた。導出は式 (52),(53) から直接的に出る。また、 $\eta_{a,b}$ の定義が Peskin のものと complex conjugate 分違うことに言及しておく。

式 (77) が $\psi(t, -\mathbf{x})$ の定数行列倍になることを要求すると、全体の位相因子の不定性から $\eta_a = 1$ と定義したとすると、 $\eta_b = -1$ ととるべきであることを示す。つまり $P\psi(x)P = \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x})$ であり、この $\eta_{a,b}$ の値から内部パリティが粒子と反粒子で逆であることが示される。

このパリティ変換の γ^0 も荷電共役変換の時のように Clifford 代数から理解することができる。以前と同じように γ^μ を Clifford 代数を満たす γ 行列とすると、 $\gamma^0, -\gamma^i$ も Clifford 代数を満たす。よって Pauli の基本定理よりあるユニタリ行列 P が存在し $P\gamma^0 P^{-1} = \gamma^0, P\gamma^i P^{-1} = -\gamma^i$ となる。この変換も荷電共役変換の時と同じように $P^{-1} = P$ ととれる^{*30}(以下の具体形を見よ)。この P を Dirac 方程式 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ にかけると $(i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i - m)P\psi(x) = 0$ これを少し変形すると $(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m)P\psi(t, -\mathbf{x}) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)P\psi(t, -\mathbf{x}) = 0$ となる。よって $P\psi(x)P = P\psi(t, -\mathbf{x})$ がパリティ変換された状態であると考え、場のユニタリ変換がこの変換に一致するようにする、つまり $P\psi(x)P = P\psi(t, -\mathbf{x})$ を要求する(これも荷電共役演算子の時と同様左辺の P は Hilbert 空間上のユニタリ変換で右辺の P は 4×4 行列である)。 P の具体形は $P = \gamma^0$ ととれるので上の式が再導出される。

1.5.5 散乱断面積, 崩壊確率

散乱断面積を定義して、計算する方法を与えておく。導出はありとあらゆる場の量子論の教科書に載っているので省略し、主に結果のみ述べる。散乱断面積とはある反応が起きる割合を表す量であり、定義は (粒子のビームの断面積^{*31}) $\times \frac{\text{観測する反応の数}}{\text{反応に寄与する粒子の数の種}}$ で与えられる。

in state と out state 散乱実験を考えるにあたり仮定として衝突の時間より十分離れているときには粒子は自由粒子として振る舞うとする。このとき衝突の十分前に自由粒子として振る舞う状態を in state(|in>), 衝突の十分後に自由粒子として振る舞う状態を out state(|out>) と定義する。これらの状態は Heisenberg 描像の状態であるとする。^{*32}

^{*30} これも荷電共役変換の時と同様位相因子の不定性の fix である。

^{*31} 今回は始状態が 2 粒子の散乱を考え、この断面積はふたつのビームの共通部分の断面積である。

^{*32} これは数学的には場が時間が正負の無限大においてある自由場に弱収束し、その自由場の作る Fock space の状態を in state, out state と呼んでいることに相当する。これらの自由場のことを漸近場と呼ぶ。

不変散乱振幅 エネルギー・運動量保存則から, in state と out state を 4 元運動量固有状態にとるとき, その 4 元運動量が一致していない散乱は起こらない. よって不変散乱振幅 \mathcal{M} を以下で定義する.

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = i(2\pi)^4 \delta(p_{\text{out}} - p_{\text{in}}) \mathcal{M} \quad (80)$$

散乱断面積, 崩壊率の不変散乱振幅での表現 散乱断面積と崩壊率の不変散乱振幅を用いた表式を書いておく. 導出は例えば [3] を参照.

始状態が運動量 p_A, p_B で終状態の運動量がまとめて $\{p_f\}$ となるとき微分散乱断面積は

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - \Sigma p_f) \quad (81)$$

となる. $v_{A,B}$ は始状態の粒子の 4 元速度.

本稿において必要なのは次の崩壊率を求める式である. 崩壊率 Γ として $d\Gamma$ は次のように与えられる. $P = (M, 0)$ をもつ粒子が運動量 $\{p_f\}$ の終状態に崩壊する微分崩壊率は

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta(P - \Sigma p_f) \quad (82)$$

である.

非偏極断面積の計算方法 (トレース公式) 例えば QED では次のような形をしている散乱振幅を頻繁に考える. このような散乱振幅を持つ過程の非偏極断面積 (スピン偏極を観測しない断面積) を求めるときに便利な公式について説明する. 例えば以下は電子陽電子対消滅のような過程の場合のものである.

$$\mathcal{M} = \bar{v}^{s'}(p') \Gamma u^s(p) \quad (83)$$

Γ は適当な γ 行列の線型結合や積で与えられる 4×4 行列である.

ここから非偏極断面積を求めるときには

$$\sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 \quad (84)$$

を計算する必要がある.

これは例えば上の \mathcal{M} では

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{s,s'} \bar{u}^s(p) \Gamma' v^{s'}(p') \bar{v}^{s'}(p') \Gamma u^s(p) \\ &= \text{Trace}[(\gamma^\mu p_\mu + m) \Gamma' (\gamma^\nu p'_\nu - m) \Gamma] \end{aligned} \quad (85)$$

ここで Γ' は Γ の中の γ 行列の積の順番を変えたもので

$$\mathcal{M}^* = \bar{u}^s(p) \Gamma' v^{s'}(p') \quad (86)$$

を用いている. この式は例えば [3] を参照.

Trace への変形には式 (54) と式 (55) を用いた.

このように、最終的に非偏極断面積を求めることは γ 行列の積のトレースをとることに帰着される。これには例えば $\text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ 等を用いる。他の公式など (γ 行列 4 つの積のトレースの公式など) については詳しくは [3] を参照。

1.5.6 Feynman diagram

Feynman diagram の基礎 (QED について) QED の散乱過程において次のルールに従って Feynman diagram というものを描き計算する。今回の計算に必要なルールのみ挙げる。描き方等のさらに詳しいルールは [3] を参照。運動量表示で挙げる。

1. 始状態の電子: $u^s(p)$
2. 終状態の電子: $\bar{u}^s(p)$
3. 始状態の陽電子: $\bar{v}^s(p)$
4. 終状態の陽電子: $v^s(p)$
5. 始状態の光子: $\epsilon_\mu(k)$
6. 終状態の光子: $\epsilon_\mu^*(k)$
7. QED vertex: $-ie\gamma^\mu$
8. 中間状態の Fermion: $S_F(p)$
9. vertex における運動量保存

Feynman diagram と不変散乱振幅 不変散乱振幅と Feynman diagram の関係について述べておく。これもありとあらゆるテキストに詳細が載っているので詳しくはそちらを参照していただきたい。

簡単に述べると、Feynman diagram で fully connected なものが遷移確率 ($i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta(p_{\text{out}} - p_{\text{in}})$) に相当する。

1.5.7 密度行列

密度行列とは、混合状態^{*33}を表すために必要になるものである。混合状態がどの状態がどのような割合で混合して構成されているかを調べて、その割合を対角成分に並べたものが (その状態たちを基底とした) 密度行列である。逆に言えば、密度行列を対角化してそれがどのような基底での表示によるものなのかを調べればどのような状態がどのような割合で混合しているかを決定することができる。

*33 状態が作られるときに一つの状態が作られるのではなく、複数の状態がある一定の割合で出現するような状態を混合状態と呼ぶ。

第 2 章 装置・回路

本稿の冒頭にあるように、我々は当初、ポジトロニウムの寿命測定による量子振動の観測を目的としていた(前節において、真空中に加え、磁場中でのポジトロニウムをも扱っているのはそのためである)。しかしながら、量子振動を観測するために得た TDC histogram から、そもそもポジトロニウムの寿命がまともに測定できていないことが判明した。そのため我々は、多くの時間を、真空中での o -Ps の寿命測定に割くこととなった。次節以降で行われる解析等も主に o -Ps の寿命測定に関するものである。

このような事情から、以下での装置および回路の説明は、主に o -Ps の寿命測定に用いたセットアップについて行い、また量子振動を観測するためのセットアップについても適宜併記していくものとする。

2.1 回路

o -Ps の寿命測定に用いた回路を次ページ図 13 に、またその回路における信号の時間関係を図 14 にそれぞれ示す。

図中の NaI-3 および P.S. には、High Voltage Power Supply(ハイボル)によってそれぞれ正または負電圧をかけてあるが、図からは省略した。

また、量子振動の観測に用いる予定であった回路は、この図において NaI-3 に 2 本加えて NaI-5 としたものであった^{*34}が、この回路図との本質的な違いはない(このときの NaI の配置については、装置の項を参照されたい)。

^{*34} もちろんこれに伴って、AMP と DIS もそれぞれ AMP1-5, DIS1-6 となる。

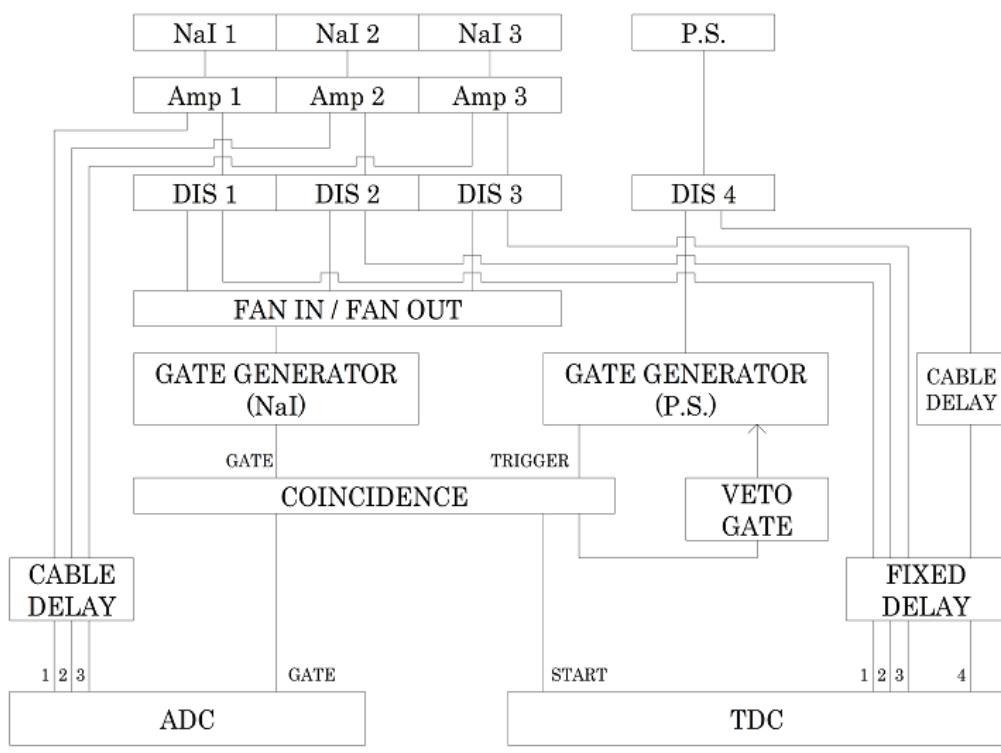


图 13 回路图

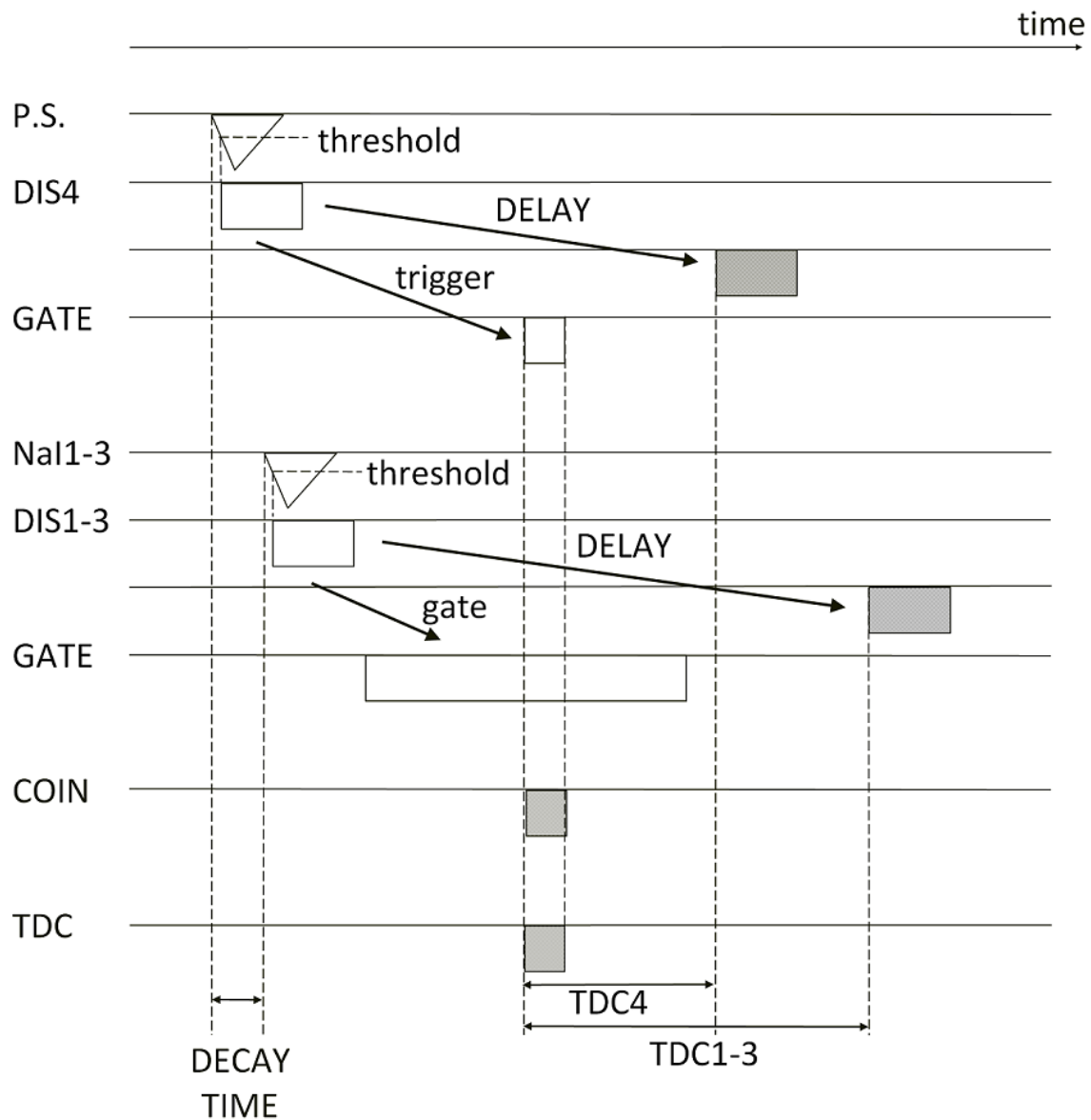


図 14 信号の時間関係

見やすくする都合上、時間の縮尺を変更した部分がある。

以下は、回路で用いたそれぞれの検出器およびモジュールについての説明である。なお、使用したモジュールは表 1, 2 にまとめてある。

NaI1-3 NaI Scintillation Detector(Bicron/Saint-Gobain, Model 2M2/2)

ポジトロニウムの崩壊に伴って生じる γ 線の検出に用いる。

NaI シンチレータに入射した γ 線によってシンチレータが発した蛍光のうち、PMT(Photomultiplier Tube, 光電子増倍管)の中に入った光子が内部で光電効果を起こし、光電面を飛び出した電子が管の中を通過して増倍され電流となることにより、入射した γ 線はそのエネルギーに応じた電気信号に変わる。

NaI シンチレータはエネルギー分解能が良いため、ADC(後述)によって入射した γ 線のエネルギーを逆算できる。これは後のデータ解析において重要である。

NaI-3 には、ハイボルによってそれぞれ 902V, 906V, 905V だけの電圧をかけてある。

P.S. Plastic Scintillation Detector(浜松ホトニクス, R1398 ASSY)

^{22}Na 線源から出た β^+ (陽電子) の検出に用いる。

NaI と同様の機構で、プラスチックシンチレータに入射した β^{+*35} は PMT を通じて電気信号に変わる。一方で NaI シンチレータと異なり、プラスチックシンチレータはエネルギー分解能が悪いため、ADC を用いてエネルギーを逆算することはしない。幸い、 β^+ のエネルギーはデータ解析においてさほど重要でない (DIS の項, 脚注*40 参照)。

P.S. にはハイボルによって -1804V だけの電圧をかけてある。性能上は、 -1900V までかけられるようである [4]。

AMP1-3 Octal PM Amplifier(アンプ), 入ってきた信号の振幅を約 10 倍に増幅する。NaI から入ってきた信号のうち、目的とするエネルギーを持ったものの電圧が DIS の threshold 最低値よりも小さかったために導入した。

なお、AMP1-3 はひとつのモジュール内の別々のチャンネルであるが、off set の値をチャンネル毎にいじることができたため^{*36}, いずれもオシロスコープを見ながら ground の値に adjust した。

DIS1-4 Octal Discriminator(ディスクリ), threshold にかかるアナログ信号に対してデジタル信号 (矩形波, NIM) を出力するモジュールである。DIS1-4 はひとつのモジュール内の別々のチャンネルであり, threshold と出力される NIM 信号の幅はチャンネル毎に設定できる。

NaI の信号が入力される DIS1-3 の threshold は, なるべく多くのデータを集めるべく, モジュールでの最低値である 10mV に設定した^{*37}。一方 P.S. 側の DIS4 では, 反射信号^{*38}をカットできるように, threshold の値を 100mV 程度に設定した。

各チャンネルから出力される NIM 信号の幅については, いずれもモジュール最大である 160ns に設定してある。これは, 生信号のギザギザ具合によっては, ひとつの山形の信号に対して複数の NIM 信号が出てしまうことがあるため, それぞれの NIM 信号の幅をなるべく広げることによって, ひとつの γ 線ないし β^+ 粒子に対して複数の細切れの NIM 信号が出力されるのを防ごうとしたことによる。実際には, NaI については, 山の立ち上がりから立ち下がりまでの幅が非常に大きい ($\sim 1\mu\text{s}$) ために, それほど意味がなかったが, 一方 P.S. に対しては, 信号のひとつの山の幅が $\sim 15\text{ns}$ であり, ある程度効果があったようである (この効果は, TDC histogram において如実に現れた)。

DIS1-3 への入力信号が立ち上がり始めてから threshold にかかって NIM 信号を出すまでの遅延は

*35 プラスチックシンチレータは有機シンチレータの一種で, 水素原子主体で平均の原子番号が小さいために γ 線感度が低く, β 線検出に用いられることが多いようである。

*36 全てのアンプがそうというわけではない。実際, 我々が以前使用していたアンプ (林栄精器, RPN-090) には offset の値を調節する機能がなく, このことは長きにわたり我々を苦しめた。

*37 今回我々が用いた DIS(Phillips Scientific, Octal Discriminator Model 705) は, threshold を電圧計で測定した値が実際の値の 10 倍となる仕様であった。今後も同じモジュールを使う方があれば, よくよく注意されたい。

*38 前年度のレポート [4] によれば, P.S. の内部抵抗が回路の他の部分の抵抗 (50Ω) と異なり, それによる信号の反射が生じるようである。実際, オシロスコープで小さな反射信号が認められた。

10–15ns 程度であった。遅延時間には γ 線のエネルギーによって多少ずれがあるため、このずれについて解析の段階で t-Q 補正 (4.4 を参照) を行う必要がある。

一方で、DIS4 への入力信号は立ち上がりが極めて急であり^{*39}、信号毎の遅延時間のずれはほとんど認められなかった^{*40}。

FAN IN/FAN OUT INPUT のスロットのいずれかに NIM 信号が入力されると、OUTPUT から入力と同じ NIM 信号が出力されるモジュールで、回路において”or”の役割をもつ。ここでは、NaI の DIS1–3 から出た NIM 信号をひとまとめにしており、どれかひとつの NaI が γ 線を検出すると、OUTPUT から NIM 信号がひとつ出力されることになる。

GATE GENERATOR(NaI) 入力された NIM 信号に対し、出力されるタイミングや信号幅を設定して、お好みの NIM 信号を出力できるモジュールである。ここでは、FAN IN/FAN OUT から来る NaI の NIM 信号で COINCIDENCE の Gate 信号を作るために用いており、Delay ~ 50ns, Width ~ 380ns と設定した。

GATE GENERATOR(P.S.) 同じく、DIS4 から来る P.S. の NIM 信号で COINCIDENCE の Trigger となる信号を作るために用いており、Delay ~ 400ns, Width ~ 90ns と設定した。

COINCIDENCE Input のスロット全てに NIM 信号が入力されたときのみ NIM 信号を出力するモジュールであり、回路において”and”の役割をもつ。ここでは、GATE GENERATOR(NaI) の作る Gate 信号に GATE GENERATOR(P.S.) の NIM 信号が入ったときに Coincidence を取るようになっており、P.S. を鳴らした β^+ が、NaI に入った崩壊 γ 線の元となったポジトロニウムの β^+ と同一であることを保証している。

我々が使用した Coincidence Unit では特に、Output として、

- LIN.OUT – Input 全てに NIM 信号が入っている、すなわち Coincidence が取れている間、各信号の共通部分だけの長さの NIM 信号を出力する。
- OUT – 一度の Coincidence に対し、Coincidence が取れた瞬間を起点として、一定幅の NIM 信号を出力する (幅は指定できる)。

という 2 種類のスロットがあり^{*41}、LIN.OUT から VETO GATE へ、OUT から ADC の Gate, TDC の Start へ、それぞれ NIM 信号を出力した。このとき OUT の NIM 幅は、ADC Gate に NaI からの信号が入るように、800ns とした^{*42}。

ADC Analog-to-Digital Converter, Gate 信号が入力されている間、入ってきたアナログ信号をチャンネル毎に積分するモジュールである。ここでは、NaI に入った γ 線の信号をチャンネル 1–3 でそれぞれ積分

^{*39} プラスチックシンチレータは時間に対する応答がよく、エネルギー分解能が悪い。一方 NaI シンチレータはエネルギー分解能がよいが、時間への応答は悪いようだ。

^{*40} したがって P.S. に対する t-Q 補正は必要ない。これはエネルギー分解能が悪く、ADC で有意なデータを得難いプラスチックシンチレータにとっては幸いである。

^{*41} もう一つ、 $\overline{\text{OUT}}$ というスロットがあるが、これは OUT の信号と同じ Width の TTL 信号を出力するものである。

^{*42} あるいは、もっと長くするべきであったかもしれない。ある程度遅れてきた信号は Gate から少しはみ出てしまい、信号を十分に積分できなかったように思われる。

しており、ここで得たデータは、後のデータ解析において用いられる。

TDC Time-to-Digital Converter, Start 信号から Goal 信号までの時間差を測定するモジュールで、分解能は 1ns である。ここでのデータから寿命曲線を得る。

VETO GATE Coincidence が取れてからしばらくの間、Coincidence の Trigger となる信号が入力されないよう、GATE GENERATOR(P.S.) を veto するための Gate 信号を作る。Delay ~ 44ns, Width ~ 7ms と設定した。これを導入した理由は、TDC Start に入る信号のレートが高すぎると、TDC の処理が追いつかず、不具合が生じるので、それを防ぐためである。

CABLE DELAY 信号のタイミングを調節するため、AMP1-3 と ADC の間にそれぞれ ~ 420ns, DIS4 と FIXED DELAY の間に ~ 300ns だけ Cable を用いて Delay をかけている^{*43}。

FIXED DELAY 信号のタイミングを調節するため、DIS1-3 と TDC の間にそれぞれ ~ 420ns, DIS4 と TDC の間に ~ 105ns^{*44}だけ NIM モジュールによる Delay をかけている。

以下に本実験で使用したモジュールをまとめた。
また、参考までに回路とケーブルの写真を載せる。

表 1 回路

Module	Model
Quad High Voltage Power Supply(NaI1,2)	林栄精器, RPH-022
Quad High Voltage Power Supply(NaI3)	林栄精器, RPH-012
Quad High Voltage Power Supply(P.S.)	林栄精器, RPH-030
Octal PM Amplifier	Fuji Diamond International, TKY-0351
Octal Discriminator	Phillips Scientific, Model 705
Fixed Delay	KEK N0531-04
Dual Fan In/Fan Out	KEK-NO9-24 7906
Dual Gate Generator(NaI, P.S.)	海津製作所, 290
Coincidence Unit	LeCroy, Model 465
Dual Gate Generator(veto)	海津製作所, 290

^{*43} アナログ信号は NIM モジュールで Delay をかけられないため、Cable による Delay が必要である。ところで、後者については NIM 信号であり、これを Cable で遅らせているのは、単に我々に用意できた機材の事情によるものである。

^{*44} Cable の Delay も含めると結局、DIS4 と TDC の間には 400ns 程度の Delay をかけている。

表 2 CAMAC

Module	Model
Crate Controller	豊伸電子, CCP-F
16CH ADC	豊伸電子, C1113-027
16CH TDC	林栄精器, RPC-180

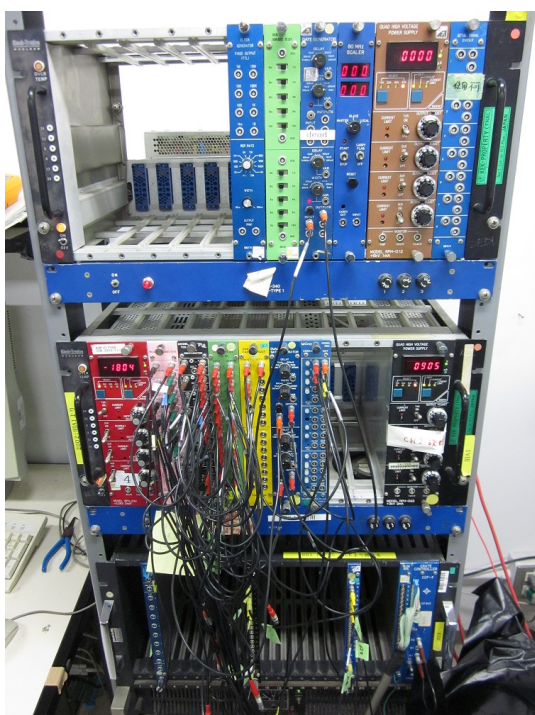


図 15 回路

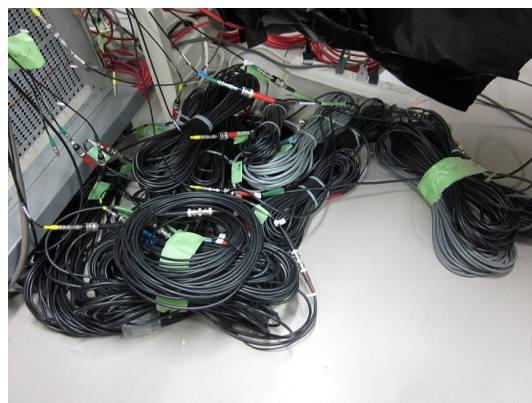


図 16 Cable Delay

2.2 装置

回路の説明を終えたので、続いて実際にポジトロニウムについて観測するための装置の説明を行う。

2.2.1 外観

まず、装置の外観を以下の図 17, 18 に載せる。

5本の NaI が配置されてあるが、実際に実験で用いたのは、このうち概念図において NaI1-3 と書かれた 3本のみである。

中心の黒い物体は、装置と P.S. をまとめて遮光したものであり、上部から伸びる黒いチューブは真空ポンプ (図 26) へと通じている。このときの遮光はもちろん P.S. のために行ったものである。

測定の際は、図 19 に見えるように、全体を遮光した。NaI および P.S. において、光によるノイズを減らすためである。

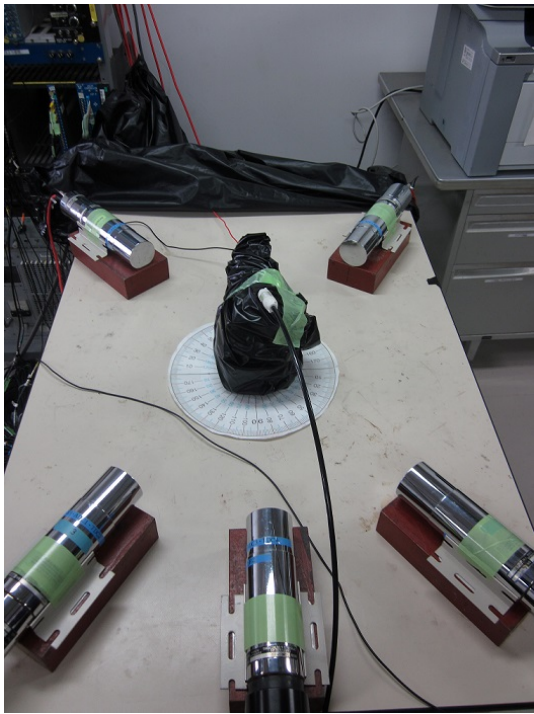


図 17 外観 (遮光前)

量子振動を観測するには、アクリル板の間に磁場を作る。理論的には、磁場に対して垂直方向では振動がなく、向かい合った同士では振動が逆位相になるはずであり、それを確かめるための配置であった。

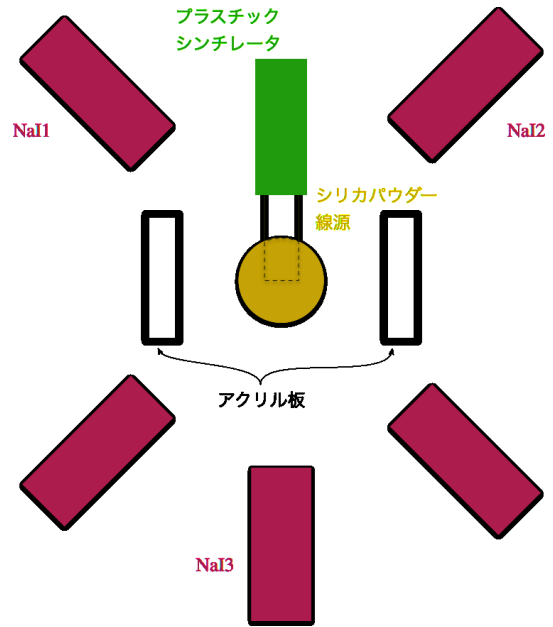


図 18 外観 (概念図)



図 19 外観 (遮光後)

2.2.2 装置

上で遮光されていた中心の黒い物体についての説明である。

β^+ 線源としては ^{22}Na を用いた。ポジトロニウムのターゲットとしてシリカパウダーを採用したのは、密度が小さく、pick-off 反応 (1.4.1 を参照) を起こしにくいからである。pick-off 反応を抑えるために、シリカパウダーをオープンで 30 分ほど焼いて水分を飛ばしたあと、シリカ容器 (図 23) に入れて、さらに容器内を真空に引いた。

装置の枠組はアクリル板で構成されており、これは前年度の実験装置を改変したものである。

なお、量子振動を観測する際には、アクリル板の中に NdFeB 磁石 ($\Phi 50 \times 5\text{mm}$) を入れる。図 20, 22 などで磁石をはめ込むためのくぼみが確認できるであろう。

線源から出た β^+ が P.S. を鳴らし、シリカパウダー内へ入ってポジトロニウムを生成、のち崩壊してできた γ 線が NaI で検出される、というのがこの装置において我々の理想とする過程であり、そのとき得られる信号の処理については、既に回路の項で述べた通りである。

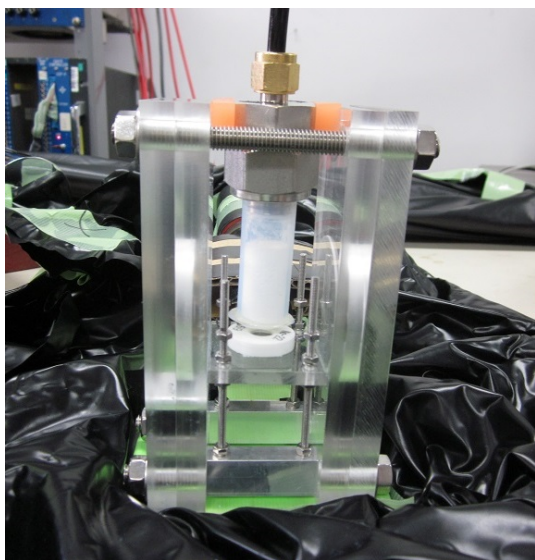


図 20 装置 (正面)

シリカ容器はオレンジ色の消しゴムで挟んで固定され、吊られている。

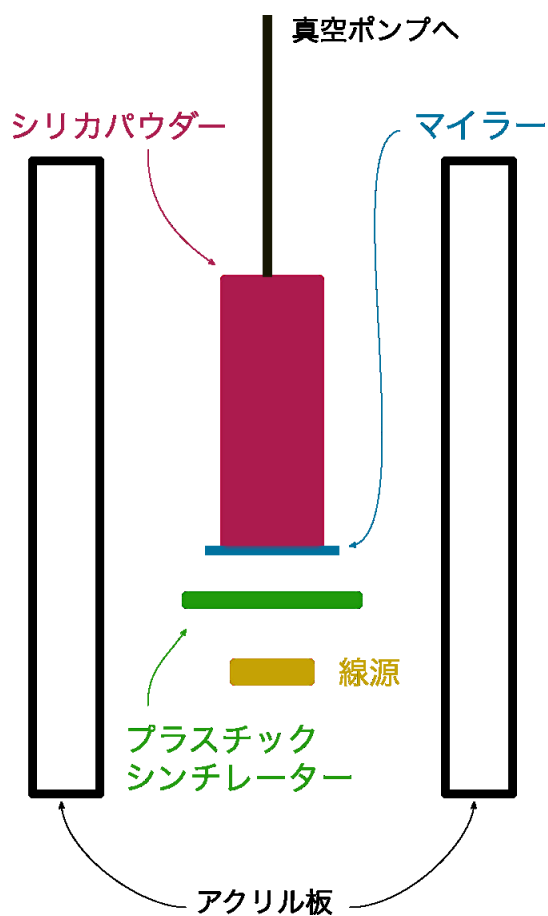


図 21 概念図 (正面)

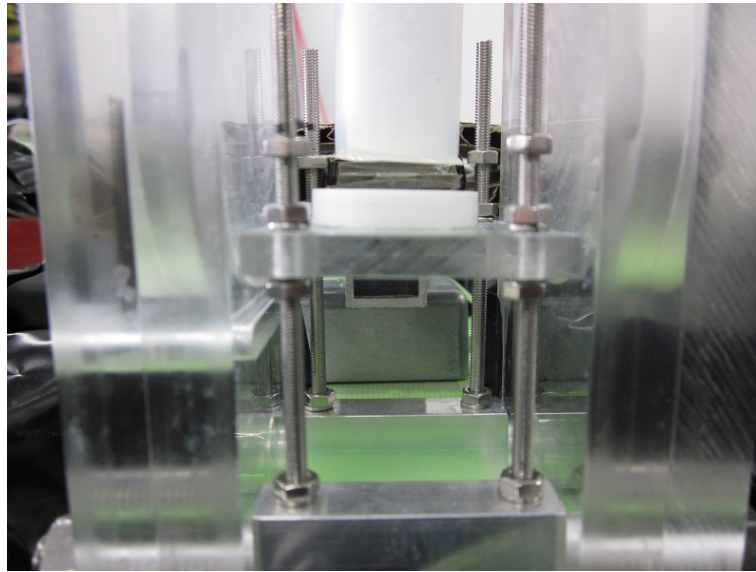


図 22 線源まわり

土台から、線源、プラシン、シリカの順に並んでいるのがわかる。



図 23 シリカ容器

円筒 (ポリウレタン製) の片方の口をマイラー (Du Pont, MYLAR FILM304X200X0.125MM) で塞いで接着した。



図 24 装置 (斜め上)

プラスチックシンチレータを挿入した際、線源の真上に位置するように、ちょうど良くアクリル板に支えるよう作ったダンボールのカバーが見える。

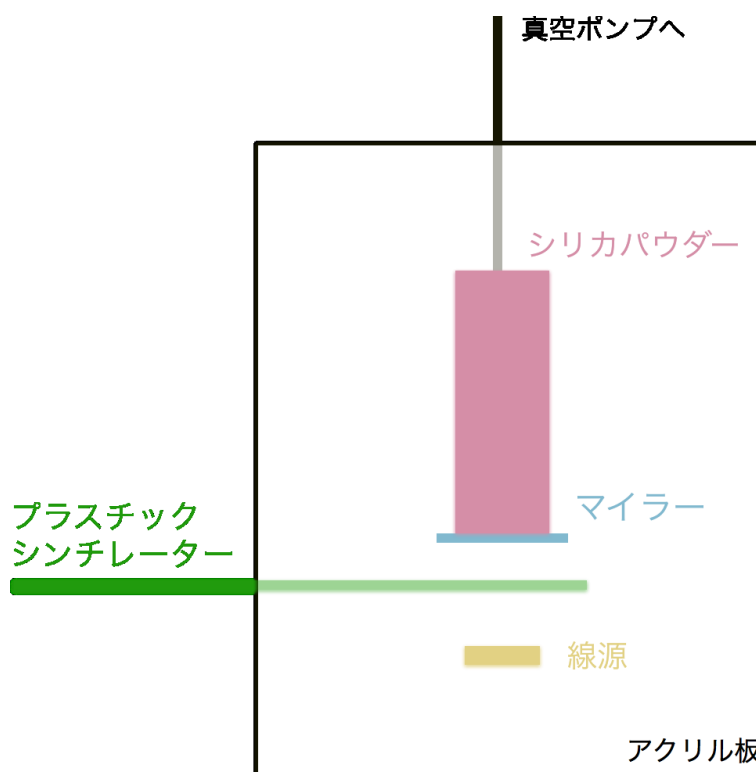


図 25 概念図 (横)

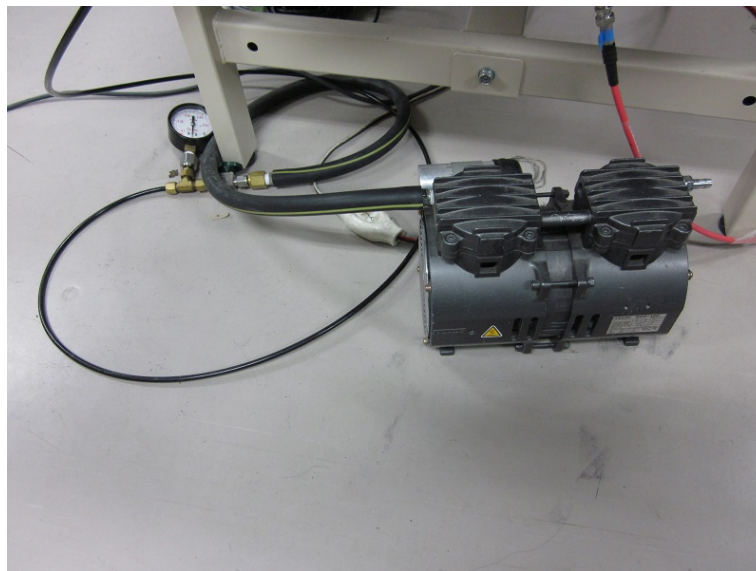


図 26 真空ポンプ (ULVAC DOP-40D)

第3章 シミュレーション

3.1 イントロダクション

量子振動を観測するための実験では ^{22}Na から出た陽電子が磁場中を通過するが、陽電子は荷電粒子であるから磁場により曲げられてしまう。この際、装置の配置によっては陽電子の軌道の曲率半径が小さすぎて、シリカパウダーに陽電子が入らずポジトロニウムの生成するレートが低下してしまうのではないかという懸念がある。

ところで、陽電子の偏極率はその速度 v によって与えられる。理論の内容と使用している装置のことを考えると、ポジトロニウムを生成する陽電子の偏極率はできるだけ鉛直上向きに完全偏極していることが望ましいが、それに近い高いエネルギーを持つ陽電子が配置しているシリカパウダーで適切に止められているのかという懸念もある^{*45}。

今回は、計算機でシミュレーションを行ってこれらの懸念を考察することにした^{*46}。これには CERN などが開発が行われている物質と粒子の相互作用をシミュレートするためのツールキットである Geant4 [1] を用いた。

3.2 手法

3.2.1 手法の概要

まず Geant4 で本実験の環境を再現した。その幾何的な配置を可視化したものが図 27^{*47}である。

今回のシミュレーションではイントロダクションで述べたような 2 つの検証を行うことにした。

以下でここで用いる独自の言葉を定義しておく。

定義. 一度 ^{22}Na が崩壊してから、生成された粒子すべてが時間経過によりシミュレーションに利用している世界^{*48} からすべての粒子が消える^{*49} などで粒子の輸送が終了するまでをイベントと呼ぶ。

定義. ^{22}Na の崩壊で生まれた陽電子がプラスチックシンチレータを通過し、その後シリカパウダーで止まって 2 つの γ 線に崩壊したとき、そのイベントをよいイベントと呼ぶ。

3.2.2 検証 1: 陽電子の軌道について

1 つ目の検証は、陽電子が磁場で曲げられることの影響についてのものである。

これについては、再現した配置の中に磁場を入れた場合と入れてない場合でよいイベントの数に大きな差が出るかどうかで判断することにする。

^{*45} エネルギーが高すぎて、シリカパウダーで止まらずに飛んでいってしまわないか、ということを心配している。

^{*46} そもそもシミュレーションを行おうと考えたのは、量子振動を観測できるはずの装置を組んで実験を進めていたが、期待通りに進まなかったからである。この装置で本当に量子振動が観測できるのかについてを疑問視していたので、主な目的は上で述べたような原因で量子振動が見えないほどの影響がないことを確かめることにある。ゆえに、以下の議論は幾分か定性的なものになっていることを断っておく。

^{*47} この図は後述のよいイベントの例にもなっている。

^{*48} 一辺が 40cm の立方体である。

^{*49} ほとんどの場合、すべての γ 線が世界の端に到達する。

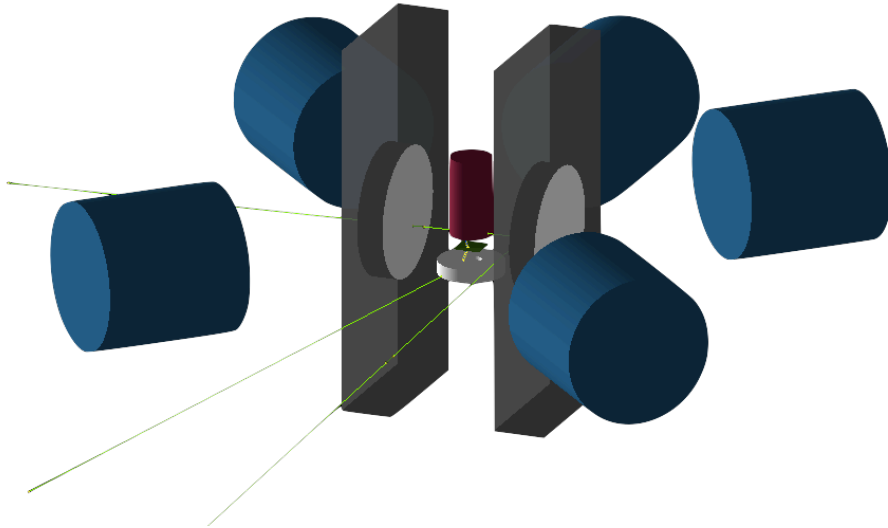


図 27 シミュレーション環境の可視化

3.2.3 検証 2: 高いエネルギーの陽電子について

2つ目の検証は、高いエネルギーの陽電子がシリカパウダーで適切に止まっているのかについてである。

これについては、各イベントで陽電子が止まった、または世界の端に到達した場所を保存しておいて、エネルギーによってその場所に偏りが見られるかどうかを確認することにする。

^{22}Na は β^+ 崩壊またはエレクトロンキャプチャにより大部分は励起した ^{22}Ne になるが、この β^+ 崩壊で陽電子が得られる運動エネルギーの最大値はおよそ 546keV である。このことから、この検証では 400keV 以上ならば陽電子のエネルギーは十分に高いと判断することにする。

なお、この検証では検証 1 の磁場を入れた場合と同じ状況でシミュレーションを行う。

3.2.4 シミュレーションをする上での制約について

シミュレーションでは計算量を現実的な範囲に抑えなければいけない。また、現実の物理量を完全に再現することが困難な場合がある。これらを考慮した結果、現実と食い違ってしまうことがいくつかある。いくつかは現実とあうように修正していくことも可能である。しかし今回の検証にはどれも本質的には関係ないと考えたので、これらの制約の下で検証を行う。

磁場 磁場は 2 つの磁石の間に一様に 50mT で存在する。

ニュートリノ ^{22}Na の崩壊は β^+ 崩壊であるから電子ニュートリノも生成される。これが他の場面で相互作用することはないと考えられるので、はじめから無視するようにしてある。

ポジトロニウム よいイベントを定義したときに、止まってしまった陽電子は 2 つの γ 線に崩壊すると書いた。実はシミュレーションでは陽電子は物質中の電子とポジトロニウムになったりはしない*50。本実験

*50 これは、シミュレーションの世界での電磁気相互作用を記述している G4EmStandardPhysics というものにポジトロニウムを生成するロジックがないためと思われる。

はポジトロニウムが主役であるのにこれでは困りそうだが、検証 1, 検証 2 とともに陽電子がシリカパウダーで止められるまでのシミュレーションが意味を持つのでこの制約があっても問題はない。

Geant4 Geant4 が自動的に作っている制約がいくつかある。例えば、赤外発散を避けるため二次粒子を生成するのに必要なエネルギーに下限値が設けられているなどである。

3.3 結果

3.3.1 検証 1: 陽電子の軌道について

磁場を入れた場合と入れなかった場合についてそれぞれ 10,000,000 イベントのシミュレーションを行った。結果は表 3 のようになった。

表 3 検証 1 の結果

	磁場を入れた場合	磁場を入れなかった場合
イベントの数	10,000,000	10,000,000
よいイベントの数	28,958	30,543

磁場を入れると、よいイベントの数が磁場を入れていない場合に対しておよそ 5.2% 減少することがわかる。この程度であれば、量子振動が観測できないほどの影響はないと考えられる。

3.3.2 検証 2: 高いエネルギーの陽電子について

磁場がある場合の配置で 10,000,000 イベントのシミュレーションを行った。結果は表 4 のようになった。

表 4 検証 2 の結果

イベントの数	10,000,000
β^+ 崩壊の数	9,029,305
エレクトロンキャプチャの数	970,695

ここで、エレクトロンキャプチャしたイベントについては陽電子が生成されないで解析対象は β^+ 崩壊した 9,029,305 イベントになる。

陽電子が止まった位置の鉛直方向と磁場方向の関係を図示したものが図 28 である。

赤くなっている部分ほどイベント数が大きく、紫の部分ほど小さい (白の部分はイベントがない)。

これを、陽電子のエネルギーが高い部分とそうでない部分にわけて図示したものがそれぞれ図 29 と図 30 である。

エネルギーが高いものの方がプラスチックシンチレータで止まらずに、シリカパウダーで止まっている割合が多くなっているように見える。これらの図を磁場方向に積算したものが図 31 と図 32 である。

エネルギーが低い場合はプラスチックシンチレータで止まっているものとシリカパウダーで止まっているものの割合はほぼ同程度になっている。一方エネルギーが高いものはシリカパウダーで止まるものの方が多く、しかも十分に陽電子を止めることができている。

以上から、エネルギーが高い場合もシリカパウダーを通過してしまうことはなさそうだと考えられる。

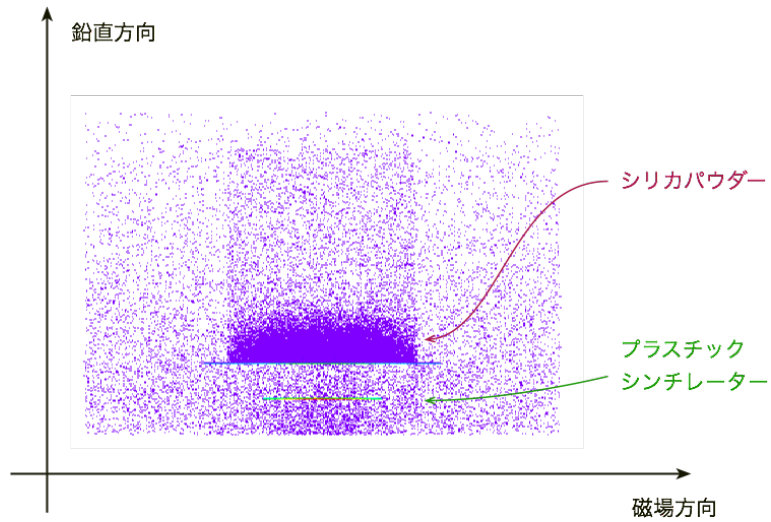


図 28 陽電子が止まった位置の鉛直方向と磁場方向の関係

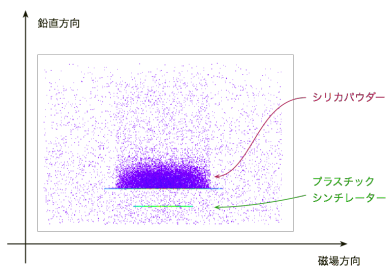


図 29 陽電子のエネルギーが 400keV 以上の場合

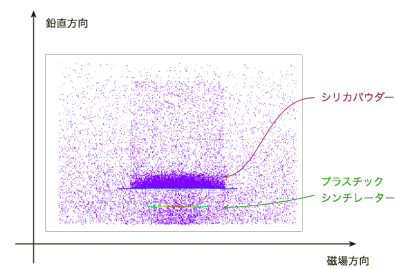


図 30 陽電子のエネルギーが 400keV 未満の場合

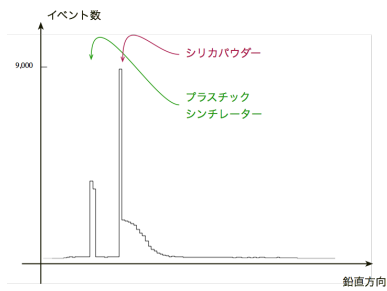


図 31 陽電子のエネルギーが 400keV 以上の場合を積算したもの

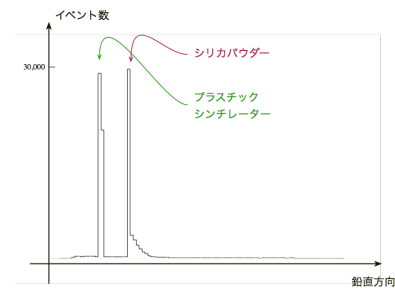


図 32 陽電子のエネルギーが 400keV 未満の場合を積算したもの

3.4 考察

検証 1, 検証 2 とともに現在の装置の配置で問題がないという結果になった。量子振動が観測できなかったのはここで検証した懸念の他に原因があると考えられる。

第 II 部

現実

第 4 章 補正・解析・結果

4.1 キャリブレーション

4.1.1 ADC Calibration

ADC の返す値がどのエネルギーに対応しているのかを調べるため, NaI シンチレータを用いて ADC Calibration を行った. ^{22}Na によるエネルギースペクトルが 511keV, 1275keV にピークを持つことを利用して Calibration を行った. NaI シンチレータに入射した γ 線のエネルギーが

$$\text{Energy}[\text{keV}] = a_0 \times \text{ADCcount} + a_1 \quad (87)$$

とかけると仮定して pedestal と 2 つのピークの 3 点から a_0, a_1 を計算したものが以下の表である.

表 5 ADC Calibration

ADC channel	a_0	a_1
1	0.505	-31.2
2	0.641	-21.6
3	0.714	-33.7

4.1.2 TDC Calibration

Clock Generator で作った信号を TDC のスタートに, 同じ信号を Gate Generator で 100–200ns 遅らせたものを TDC のストップに入力することで, TDC の Calibration を行った. 表 4.1.2 にその結果をまとめた.

表 6 TDC Calibration

delay [ns]	ch1	ch2	ch3	ch4
100	634	637	643	714
120	765	770	783	850
140	890	898	918	986
160	1022	1031	1058	1122
180	1153	1166	1200	1262
200	1286	1301	1343	1405

ADC Calibration の際と同様に,

$$\text{delay}[\text{ns}] = b_0 \times \text{TDCcount} + b_1 \quad (88)$$

と書けると仮定してフィッティングを行った. その結果得られた b_0, b_1 を表 4.1.2 に示す.

表 7 TDC Calibration 結果

TDC channel	b_0	b_1
1	$0.1538 \pm 1.84 \times 10^{-3}$	2.647 ± 1.80
2	$0.1510 \pm 1.80 \times 10^{-3}$	3.947 ± 1.79
3	$0.1433 \pm 1.71 \times 10^{-3}$	8.101 ± 1.74
4	$0.1452 \pm 1.73 \times 10^{-3}$	-3.394 ± 1.88

4.2 ADC カット

本実験において観測したい 3γ 崩壊による光子のもつエネルギーは 511keV 以下である。一方 2γ 崩壊による光子のもつエネルギーは 511keV である。 3γ 崩壊による光子を見るために、ADC ヒストグラムにおいて 511keV に現れるピーク以上のエネルギーを持つイベントをカットした。下限については pedestal を含まないようにカットした。

図 33 は、ADCch1 のヒストグラムである。例えばこの場では 511keV (約 1100 カウント) を含むピークをカットしたいので、900 カウント以上のデータをカットした。(pedestal は 200 カウント以下に現れていたものを既にカットしてある。)

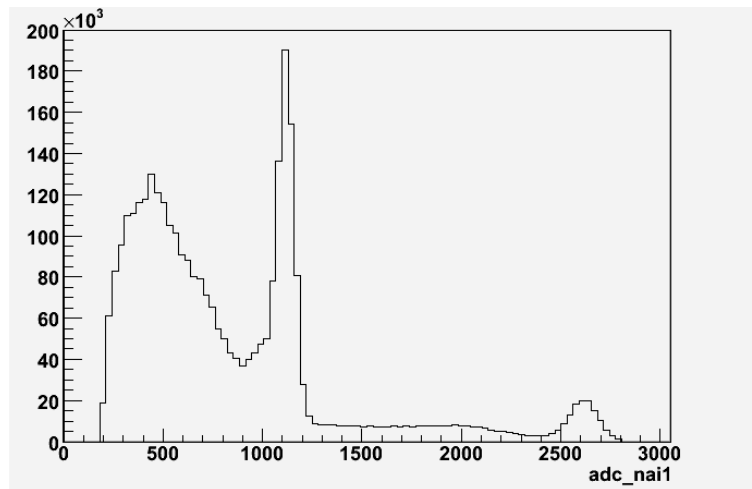


図 33 ADC ヒストグラム

4.3 TDC カット

2γ 崩壊において 2 つの光子は図 34 のように一直線上に崩壊する。一方 3γ 崩壊においては図 35 のように一直線上にはならない。本実験では最終的に直線状にない 3 つの NaI シンチレータを用いて測定を行ったため、2 つの NaI シンチレータに光子が入射した場合、それは一直線上ではないので 3γ 崩壊である確率が高くなると考えられる。

したがって、2 つまたは 3 つ同時に NaI シンチレータに信号が来ているイベントのみで TDC cut を試みた。

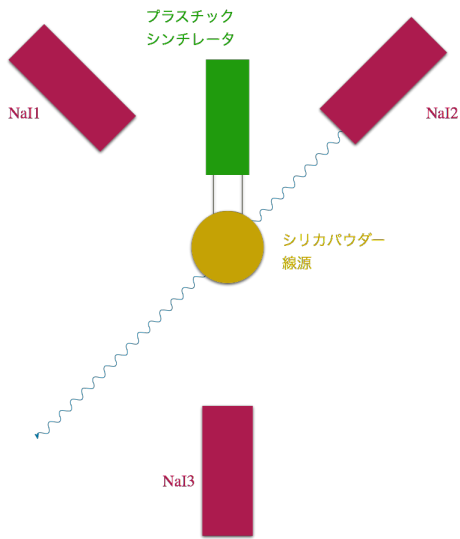


図 34 2 γ 崩壊

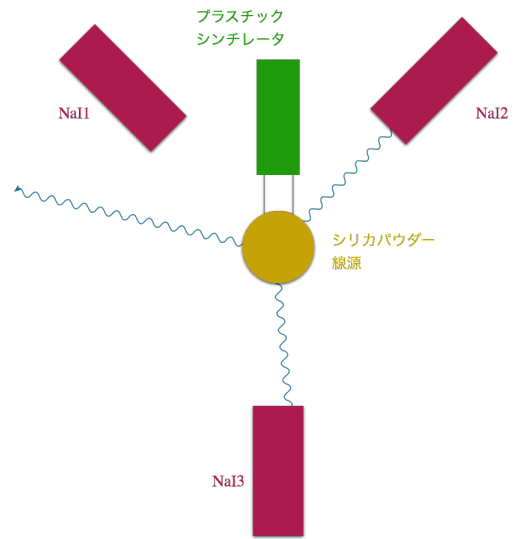


図 35 3 γ 崩壊

図 36, 37 はそれぞれ 2 つ同時に信号が来たものと 3 つ同時に信号が来たもののみ残した場合の TDC ヒストグラムである。いずれの場合もイベント数が著しく減ったが、2ch 同時のみの場合ピークのフィッティング結果に大きな影響を及ぼさなかった。また、3ch 同時の場合にはピーク自体が消えてしまった。

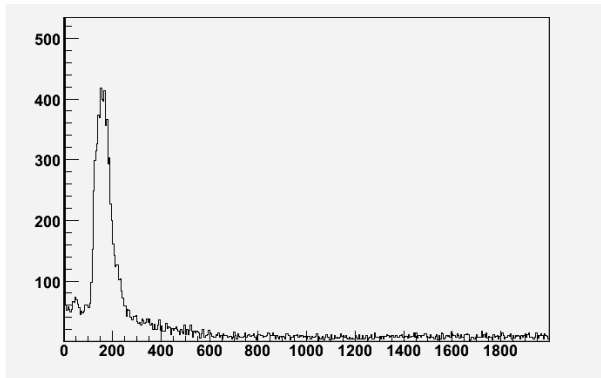


図 36 2ch 同時のみ

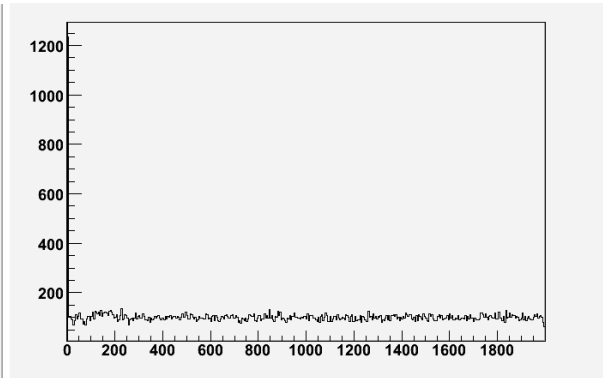


図 37 3ch 同時のみ

以上より本実験のデータカットでは TDC cut は行わず、ADC cut のみを行うこととした。

4.4 t-Q 補正

異なるエネルギーを持つ信号が、同時に NaI に入ったとする。このとき TDC は同じ値を返すべきである。しかし、NaI の応答が鈍いため、信号を受けてからピークに到達するまでにラグが発生する。それにより信号が threshold を超え、実際に ADC や TDC に検知されるまで多少の時間差が生じる。そしてその時間差は信号のエネルギーに依存し、エネルギーが低いほど遅く、高いほど早く検出される。これにより、同じタイミングで信号が来たとしても、TDC で検出した際には同時ではないように見えてしまう。このエネルギー依存性を除去す

るための補正が t-Q 補正である。今回は TDC 値と ADC 値の関係を次の関数で近似する^{*51},

$$\text{TDC 値} = \frac{a_0}{\text{ADC 値} + a_1} + a_2. \quad (89)$$

この関数を用いる理由を示す。まず入射した信号の立ち上がりを直線とみなす (図 38)。信号が実際に NaI

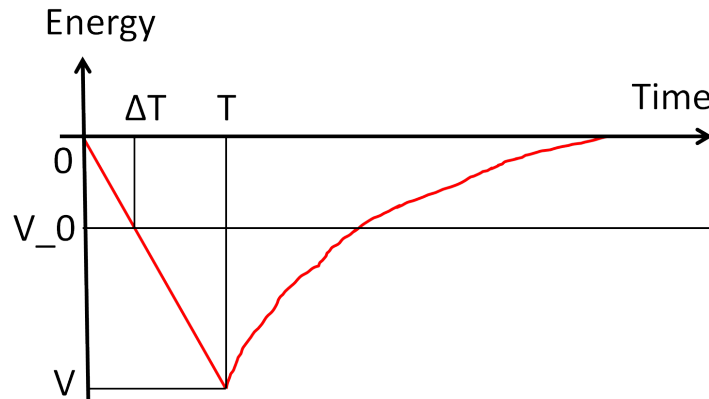


図 38 信号の概念図

に入射した時刻を原点とする。ΔT は信号が threshold を超えた時刻, T は信号がピークに達した時刻, ここで V₀ は Discriminator の threshold, V は信号のピーク電圧である。信号が入ってからピークに達するまでの時間はエネルギーによらない。

すると, 次の式を得る,

$$\begin{aligned} \Delta T : T &= V_0 : V, \\ \Rightarrow \Delta T &= \frac{V_0}{V} T. \end{aligned} \quad (90)$$

ところで信号のピーク電圧は信号のエネルギーに比例する。そしてエネルギーと ADC 値との関係は線型である。したがってピーク電圧と ADC 値の関係も線型である。また, ΔT と TDC 値の関係も線型である。したがって式 (90) を変形すると,

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{V_0}{V} T \\ \Rightarrow b_1 \times (\text{TDC 値}) + b_0 &= \frac{V_0}{c_1 \times (\text{ADC 値}) + c_0} \\ \Rightarrow (\text{TDC 値}) &= \frac{a_0}{(\text{ADC 値}) + a_1} + a_2 \end{aligned}$$

となり, 式 (89) を得る。

補正前の TDC 対 ADC プロットを図 39 に示す。前述したようにエネルギーが高いほど tdc 値が小さいことがわかる。これは本来エネルギーによらず一定の値を取るべきものである。一方, 補正後の TDC 対 ADC プロットを図 40 に示す。TDC がエネルギーによらず一定の値を返していることがわかる。

^{*51} t-Q 補正をするにあたり過去のレポートをいくつか参照したが, $a_0/(x - a_1)^2 + a_2$ や, $a_0/(x - a_1)^{a_2} + a_3$ など, 様々な関数が用いられている。

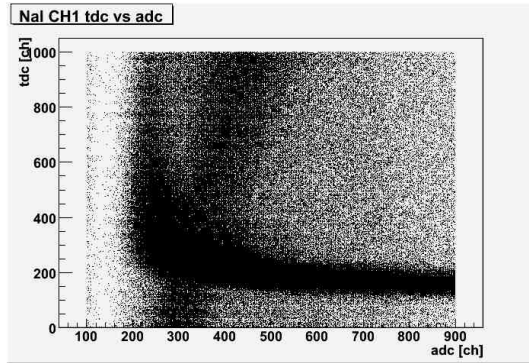


図 39 補正前の TDCvsADC プロット

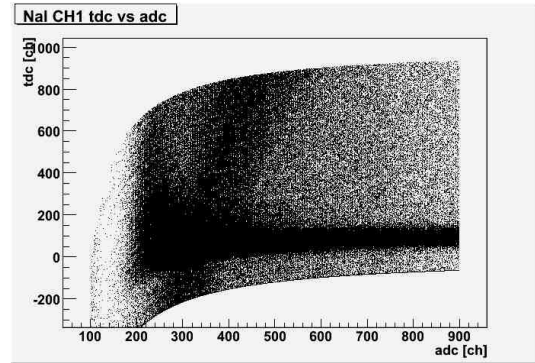


図 40 補正後の TDCvsADC プロット

4.5 寿命の算出

図 41, 図 42, 図 43 はそれぞれの NaI から得られた崩壊曲線に対して, 上で述べた ADC カット, t-Q 補正を行ったのちに式 (91) でフィッティングしたものである*52. そして結果を表 8 に示す.

$$f(x) = a_0 e^{-t/a_1} + a_2 \quad (91)$$

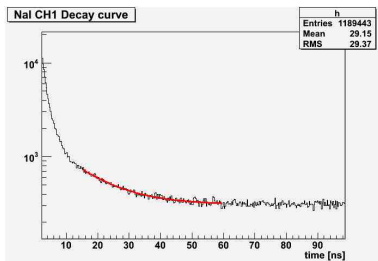


図 41 Ch1 から得られた崩壊曲線

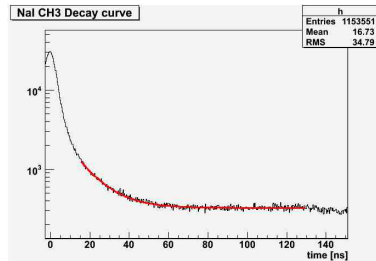


図 42 Ch2 から得られた崩壊曲線

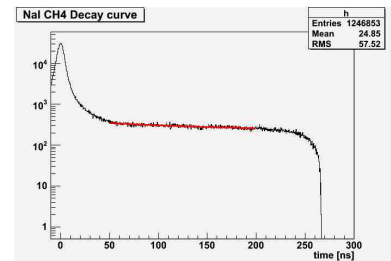


図 43 Ch3 から得られた崩壊曲線

表 8 フィッティングの結果

Ch	a_0	a_1 [ns]	a_2
Ch1	$1.46940 \times 10^3 \pm 8.54361 \times 10^1$	$1.21963 \times 10^1 \pm 4.98304 \times 10^{-1}$	$3.07690 \times 10^2 \pm 4.12247 \times 10^0$
Ch2	$3.53096 \times 10^3 \pm 9.62532 \times 10^1$	$1.14885 \times 10^1 \pm 1.61593 \times 10^{-1}$	$3.25857 \times 10^2 \pm 1.24731 \times 10^0$
Ch3	$1.88214 \times 10^2 \pm 5.97678 \times 10^0$	$1.11985 \times 10^2 \pm 2.41116 \times 10^1$	$2.28355 \times 10^2 \pm 1.38481 \times 10^1$

オルソポジトロニウムの寿命は, 理論値では 142ns である. Ch1 と Ch2 の NaI ではオルソポジトロニウムの崩壊は捉えられなかったようだ. 一方, Ch3 の NaI ではやはり実験結果は理論値よりも短い, Ch1, Ch2 よりは理論値に近いものになった.

*52 図 42 は Ch2 の NaI における崩壊曲線であるが, 図の中にあるキャプションには"CH3"と書かれている. これは量子振動の実験で NaI を 5 本使ったことの名残である. 図 43 のキャプションが"CH4"と書かれているのも同様である

第5章 考察

5.1 pick-off 補正の必要性

理論値と Ch3 の NaI から得られた寿命がずれた原因は、pick-off 補正をしていなかったことが考えられる。pick-off とは、分子との衝突やパラポジトロニウムへの転化により、オルソポジトロニウムが本来の寿命である 142ns を待たずに 2γ に崩壊することである。pick-off 補正の原因は 2γ 崩壊であるから、511keV より上のエネルギーを cut してしまえば問題ないと考えていた。よって今回は単純に指数関数的な崩壊曲線を想定してフィッティングした。しかし、 2γ 崩壊であっても Compton 散乱などによって、それより下のエネルギー帯に分布する。したがって、511keV 以上のエネルギーを持つイベントを cut しても、pick-off 補正は必要である。

5.2 磁場の強さ

当初、私たちはポジトロニウムを磁場中で崩壊させることにより、量子振動を観察しようとしていた。振動の周期は $\Omega = \frac{1}{2}\Delta_{\text{HFS}}((1+x^2)^{1/2} - 1)$ である。ここで Δ_{HFS} はポジトロニウムの超微細構造で、 $\Delta_{\text{HFS}} = 0.84\text{meV}$ である。また x は、 $x = \frac{2g'\mu_{\text{B}}}{\Delta_{\text{HFS}}}H = 0.275H$ である。

寿命測定の実験を終え、発表会を目前に控えた 3 月 18 日、ふとガウスメーターを手に取り、ネオジム磁石の磁場の強さを測定した。その結果、P1 が保有しているネオジム磁石の磁場は 10mT 程度しかなかった*53。このとき振動周期は $2.6\mu\text{s}$ となる。私たちの回路では 300ns までしか測定できないため、このネオジム磁石が作る磁場では振動がゆるやかすぎて、量子振動は観測できない。なんとも後味の悪い結末となった。

5.3 モジュールの不具合

実験を進める中でモジュールの不具合が多発した。特に ADC, TDC は、一時、 ^{22}Na のスペクトルすらまともに測定できない状態になってしまった。結局、ADC, TDC, Coincidence Unit を入れ替えた。また、offset を調整するためにアンプも入れ替えた。モジュールの不具合により実験が度々滞ったのは悲劇である。すぐに思いつく改善策はモジュールたちを一新することだろう。しかしモジュール一つが数万円から数十万円するので、それは現実的ではない。次年度以降の P1 の皆さんは、モジュールの性能を過信せず、慎重に実験を進めてほしい。

*53 ガウスメーターの電池が切れかかっていた可能性があるのですが、あるいは電池をあらためて再度測定するべきであるかもしれない。残念ながら、我々にその猶予は残されていなかった。

謝辞

本実験を行うにあたり、また一年間にわたり、指導教官である市川先生^{*54*55} ^{*56}をはじめ、TAの廣田さん、山本さんには、実験について多大なるご指導を賜りました。また線源を借りに行く際に鍵を貸して下さった方々、offsetが調整できず苦しんでいた我々にピンクアンプを貸して下さった方、工場研修の予定調整に奔走して下さった方など、沢山の方々のお世話になりました。P1一同、この場をお借りして皆様に感謝申し上げます。

*54 どんどんーナツドーンといこう！

*55 本実験は前年度の実験装置を引き継いで行ったため、今年度は実験器具に対しほとんど予算を使っていない。その点において我々は非常に経済的 (economical) な集団であった。あまりに経済的であったためであろうか、我々の予算で来年度以降のためにモジュールを買って頂けるほどであった。余った予算の行方が少し気になっていたこともあり、無駄なお金を有効に活用くださったことにもひとつ感謝したい。

*56 我々が初めて得た崩壊曲線は、前述から容易に想像される通り、とてもひどいものであった。しかしこれは我々の素人目には振動のようにも見えたため、市川さんに見せたところ、これが量子振動かわげがない——と一蹴されるだけなら良かったのであるが、加えて仰ることは、「ここはひとつ、これが量子振動かどうか賭けようじゃないか、え？ そうだなア、こういうのはどうだい、もし万一、仮に、これが量子振動だとあんたらが証明できたらだ、発表会の後の飲み会であたしがあんたら全員の分をおごってやるよ。ただし、あたしが勝ったらお前らがあたしの分をおごるんだよ、へ、へ！」と。10分のうち我々はこの賭けに負けてしまったものの、結局飲み会で学生は一律千円で済み、我々が御大の分をおごることはなかった。なお、モジュールの不具合オンパレードが我々に幾度となく酷い Histogram と悪夢を見せてくれたことは疑いようのない事実である一方で、当初見られた偽量子振動の根本的な原因はついにわからなかった。

参考文献

- [1] Geant4: A toolkit for the simulation of the passage of particles through matter. <http://geant4.cern.ch/>.
- [2] V G Baryshevsky, O N Metelitsa, and V V Tikhomirov. Oscillations of the positronium decay γ -quantum angular distribution in a magnetic field. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*
- [3] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [4] 高柳遠林, 宮川大輝, 山岡慎治. ポジトロニウムの寿命測定による量子振動の観測. 2013 年度の P1 のレポート.