

オルソポジトロニウムの寿命と その量子振動の測定

大山 修平
中山 悠平
服部 爽音

平成 31 年 4 月 9 日

概要

真空中でのオルソポジトロニウムの寿命を測定する. 加えて磁場中での寿命曲線の振動周期を求め、超微細分裂 ΔHFS を測定する. これらの解析を行うにあたって、pick-off 補正における補正関数の fit 関数として、本学の実験で長年用いられてきたものに比べてより物理的でかつ解析的に十分扱いやすい関数の提案を行った. これによって物理的に妥当な時間定義域での寿命の算出を行い、提案した関数が従来のものと比べて“良い”ものであることを、他の先行研究との整合性から確かめた.

目次

1	理論	3
1.1	真空中のポジトロニウム	3
1.2	磁場中のポジトロニウム	5
1.3	量子振動	8
1.4	pick-off 補正理論	9
2	実験	14
2.1	本実験	14
2.1.1	実験器具	14
2.1.2	回路	14
2.1.3	セットアップ	16
2.1.4	ターゲットにシリカパウダーを用いる実験	16
2.1.5	ターゲットに消しゴムを用いる実験	19
2.2	予備実験 (Energy calibration)	19
3	解析・結果	20
3.1	誤差の評価	20
3.2	Energy Calibration	20
3.3	1275keV のカット	21
3.4	Energy cut	22
3.5	TDC Calibration	22
3.6	Pick-off 補正関数の表し方	23
3.6.1	寿命曲線の導出	23
3.6.2	$f(t)$ を観測量で表す	23
3.6.3	$\Delta N_{\text{pick-off}}(t)$ を観測量で表す	23
3.6.4	補正関数まとめ	24
3.7	補正関数 $f(t)$ のフィット	24
3.8	寿命曲線のフィット	26
3.9	量子振動について	27
4	考察	29
4.1	pick-off 補正理論の改良	29
4.2	量子振動が見えない理由について	29
5	まとめ	29
A	付録	30

イントロダクション

真空中でのオルソポジトロニウムの寿命を測定する. 加えて磁場中での寿命曲線の振動周期を求め, 超微細分裂 ΔHFS を測定する. これらの解析を行うにあたって, pick-off 補正における補正関数の fit 関数として, 本学の実験で長年用いられてきたものに比べてより物理的かつ解析的に十分扱いやすい関数の提案を行った. これによって物理的に妥当な時間定義域での寿命の算出を行い, 提案した関数が従来のものと比べて“良い”ものであることを, 他の先行研究との整合性から確かめた.

1 理論

1.1 真空中のポジトロニウム

ポジトロニウム (以下 Ps) は電子及び陽電子の束縛状態である. スピンに対する既約分解に応じて三重項をオルソポジトロニウム (以下 o-Ps), 一重項をパラポジトロニウム (以下 p-Ps) と呼ぶ. すなわち電子のスピン基底を $\{|\uparrow\rangle_{e^-}, |\downarrow\rangle_{e^-}\}$, 陽電子のスピン基底を $\{|\uparrow\rangle_{e^+}, |\downarrow\rangle_{e^+}\}$ とすると, o-P の基底は

$$|1, 1\rangle = |\uparrow\rangle_{e^-} \otimes |\uparrow\rangle_{e^+} \quad (1.1)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{e^-} \otimes |\downarrow\rangle_{e^+} + |\downarrow\rangle_{e^-} \otimes |\uparrow\rangle_{e^+}) \quad (1.2)$$

$$|1, -1\rangle = |\downarrow\rangle_{e^-} \otimes |\downarrow\rangle_{e^+} \quad (1.3)$$

であり, p-Ps の基底は

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{e^-} \otimes |\downarrow\rangle_{e^+} - |\downarrow\rangle_{e^-} \otimes |\uparrow\rangle_{e^+}) \quad (1.4)$$

と書ける. ここで最左辺のケットは慣例に従って第一成分が全スピン, 第二成分が量子化軸方向のスピンを表すものとする. o-Ps と p-Ps のエネルギーはほとんど同じであるが, 厳密には p-Ps の方がわずかに低い. o-Ps と p-Ps のエネルギーの差を超微細分裂といい, ΔHFS と書くことにする.

この実験では o-Ps の寿命に興味があるが, 実験方法の都合上 p-Ps の生成が避けられない. そこで解析の際 o-Ps と p-Ps の性質を利用してデータから o-Ps の情報のみを取り出すことが重要になる¹. そのためここで両者の性質の違いを述べる. 結果は表の通りである:

	o-Ps	p-Ps
荷電共役変換のパリティ	-1	+1
崩壊チャンネル	$3\gamma, 5\gamma, \dots$	$2\gamma, 4\gamma, \dots$
寿命	約142[ns]	約123[ps]

図 1: o-Ps と p-Ps の性質の違い. γ は光子の意味. 寿命は o-Ps は p-Ps の 1000 倍長生きできる.

¹詳しくは pick-off 補正理論及び energy cut の節を参照.

(A) 荷電共役変換のパリティ

非相対論的な場の理論では Ps は次のように表現される.

$$\begin{aligned} |\text{o-Ps}\rangle &= \int d\mathbf{p} f(p) Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi) (a_{i,\mathbf{p}}^\dagger b_{j,\mathbf{p}}^\dagger + a_{j,\mathbf{p}}^\dagger b_{i,\mathbf{p}}^\dagger) |0\rangle \otimes |0\rangle, \\ |\text{p-Ps}\rangle &= \int d\mathbf{p} f(p) Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi) \epsilon^{ij} a_{i,\mathbf{p}}^\dagger b_{j,\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \otimes |0\rangle \end{aligned}$$

ここで $a_{i,\mathbf{p}}^\dagger, b_{j,\mathbf{p}}^\dagger$ は電子及び陽電子の消滅演算子であり、 i, j は電子及び陽電子のスピンを指す。 $Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi)$ は球面調和関数であり、ここではほぼ静止しているポジトロニウムを扱うため軌道角運動量は $l = m = 0$ とした。また規格化は行っていない。規格化を込めた表示は (C) 真空中での寿命 を参照。

荷電共役変換 C は粒子・反粒子を入れ替える変換である。すなわち生成演算子 $a_{i,\mathbf{p}}^\dagger, b_{j,\mathbf{p}}^\dagger$ に対して $C a_{i,\mathbf{p}}^\dagger C^{-1} = b_{j,\mathbf{p}}^\dagger, C b_{j,\mathbf{p}}^\dagger C^{-1} = a_{i,\mathbf{p}}^\dagger$ と作用する。またフェルミオンに対する反交換関係 $\{a_{i,\mathbf{p}}^\dagger, b_{j,\mathbf{p}}^\dagger\} = 0$ を用いると、荷電共役変換は以下のようになる:

$$\begin{aligned} |\text{o-Ps}\rangle &= \int d\mathbf{p} f(p) Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi) (a_i^\dagger b_j^\dagger + a_j^\dagger b_i^\dagger) |0\rangle \otimes |0\rangle & |\text{p-Ps}\rangle &= \int d\mathbf{p} f(p) Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi) \epsilon^{ij} a_i^\dagger b_j^\dagger |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &\rightarrow \int d\mathbf{p} f(p) Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi) (b_i^\dagger a_j^\dagger + b_j^\dagger a_i^\dagger) |0\rangle \otimes |0\rangle & &\rightarrow \int d\mathbf{p} f(p) Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi) \epsilon^{ij} b_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= - \int d\mathbf{p} f(p) Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi) (a_j^\dagger b_i^\dagger + a_i^\dagger b_j^\dagger) |0\rangle \otimes |0\rangle & &= - \int d\mathbf{p} f(p) Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi) \epsilon^{ij} a_j^\dagger b_i^\dagger |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= - |\text{o-Ps}\rangle & &= + \int d\mathbf{p} f(p) Y_{m=0}^{l=0}(\theta, \phi) \epsilon^{ji} a_j^\dagger b_i^\dagger |0\rangle \otimes |0\rangle \\ & & &= + |\text{p-Ps}\rangle \end{aligned}$$

従って (一見逆説的だが) 三重項である o-Ps の荷電共役パリティが -1 、一重項である p-Ps の荷電共役パリティが $+1$ ということが分かる。

一方で光子の荷電共役パリティは -1 である。これは (1) 電荷を入れかえると電流密度 j^μ が -1 倍されることから j^μ のパリティが -1 であること、(2) 電磁場はラグランジアンの中に $j^\mu A_\mu$ という形で入るため、ラグランジアンが荷電共役変換不変性から A_μ のパリティが -1 になること、(3) A_μ の量子化が光子の生成消滅演算子だったことを思い出せば理解できる。

(B) 崩壊チャンネル

Ps の崩壊過程は純電磁気学的現象であり、従って荷電共役対称性は破れておらずパリティは保存する。そのため o-Ps は奇数個の光子にしか崩壊できず、p-Ps は偶数個の光子にしか崩壊できない。ただし運動量保存から o-Ps の 1 光子崩壊は禁止されている。従って摂動の最低次では o-Ps は 3 光子に、p-Ps は 2 光子に崩壊する。

(C) 真空中での寿命

o-Ps と p-Ps の崩壊に関する Feynmann 図は以下のようになる:

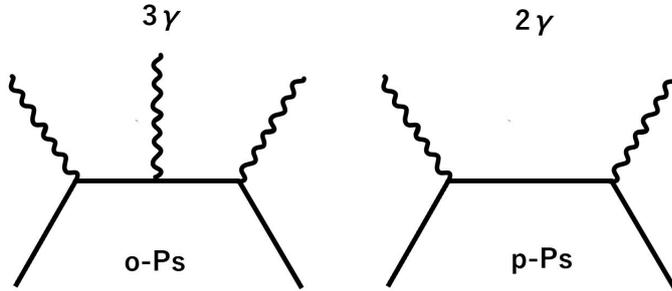


図 2: o-Ps と p-Ps の Feynmann 図

遷移振幅 M には頂点毎に結合定数 α がかかるため、p-Ps の振幅 M_p より o-Ps の振幅 M_o 方が小さくなる: $\alpha M_p \simeq M_o$

寿命 τ は振幅の逆数に比例するので、o-Ps と p-Ps の寿命をそれぞれ τ_o, τ_p とおくと、 $\tau_p \simeq \alpha \tau_o$ となる. すなわち o-Ps の方が p-Ps よりも 100 倍程度長生きすると予想される.

実際場の理論を用いて真面目に計算すると $\tau_o \simeq 142\text{ns}, \tau_p \simeq 123\text{ps}$ となり、o-Ps は p-Ps の 1000 倍長生きすることがわかる. これらの計算の詳細はこの実験において本質的には重要でないため、計算は付録において p-Ps の寿命のみを計算することにする.

1.2 磁場中のポジトロニウム

量子振動の観測には Ps に対して適当な磁場をかける必要がある. 磁場中では Ps のエネルギーの縮退が解けて、固有状態が変化する. この時注意すべき点が二つある:

一つ目は磁場の影響で o-Ps と p-Ps の寿命がそれぞれ変化することである. 従って真空中での寿命を測定するにはこの効果を補正しなければならない.

二つ目は振動の振幅である. 量子振動の振幅は陽電子の偏極方向、磁場の方向、光子の放出方向に依存する. これらをうまく選ぶことで振動が見えない測定や、振動が最もよく見える測定を実現できる. 前者は寿命の測定に、後者は量子振動の振動数の測定に用いられる.

この節では磁場中での寿命曲線について述べ、次節で振動理論の概説を行う.

(A) 不安定粒子のハミルトニアン

Ps 等の不安定な束縛系の量子力学的な記述には歪エルミートなハミルトニアンが有効である. ここでは必要最低限の事実をまとめる:

まず元のハミルトニアン \mathcal{H} は時間に依存しないと仮定する. \mathcal{H} と同時対角化可能な正值エルミート作用素 Γ をとり、 $\mathcal{H}_{\text{decay}} = \mathcal{H} - i\Gamma$ とおく². \mathcal{H} と Γ の同時対角化基底を $|\psi_i\rangle$ とし、それぞれの固有値を E_i, γ_i とすれば $\mathcal{H}_{\text{decay}} |\psi_i\rangle = (E_i - i\gamma_i) |\psi_i\rangle$ となるため、時刻 t では

$$|\psi_i(t)\rangle = \exp(-i\mathcal{H}_{\text{decay}}t) |\psi_i(0)\rangle = \exp(-\gamma_i t) \exp(-iE_i t) |\psi_i(0)\rangle$$

となる. 従って $|\psi_i(t)|^2 = \exp(-2\gamma_i t) |\psi_i(0)|^2$ となるから $\Gamma_i = 2\gamma_i$, $\tau_i = \frac{1}{\Gamma_i} = \frac{1}{2\gamma_i}$ と定義すると Γ_i が粒子の崩壊幅、 τ_i が粒子の寿命を表す. 以上の理由から Γ_i を崩壊ハミルトニアンと呼ぶことにする.

²結論から言うと Γ は崩壊幅の半分になるようにとればよい.

(B) Zeeman 項の作用

磁場によってハミルトニアンに Zeeman 項が加わる. これは電子及び陽電子のスピン空間 V_-, V_+ への作用素として次のように与えられる:

$$\mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^\pm} = \mp g\mu_B \mathbf{B} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \mp g\mu_B B \frac{\sigma_z}{2}$$

ここで磁場 \mathbf{B} は一様とし、 \mathbf{B} の方向を z 軸にとり、 \mathbf{B} の大きさを B とおく.

これを用いて合成系 $V_- \otimes V_+$ 上の Zeeman 項 $\mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+}$ は $\mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} = \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^-} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^+}$ と書けるので、o-Ps への作用は以下のようになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} |1, 1\rangle &= \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} |\uparrow\rangle_{e^-} \otimes |\uparrow\rangle_{e^+} = \left(g\mu_B B \frac{1}{2} - g\mu_B B \frac{1}{2} \right) |\uparrow\rangle_{e^-} \otimes |\uparrow\rangle_{e^+} \\ &= 0 \\ \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} |1, 0\rangle &= \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_{e^-} \otimes |\downarrow\rangle_{e^+} + |\downarrow\rangle_{e^-} \otimes |\uparrow\rangle_{e^+}) = g\mu_B B \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_{e^-} \otimes |\downarrow\rangle_{e^+} + |\downarrow\rangle_{e^-} \otimes |\uparrow\rangle_{e^+}) \\ &= g\mu_B B |1, 0\rangle \\ \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} |1, -1\rangle &= \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} |\downarrow\rangle_{e^-} \otimes |\downarrow\rangle_{e^+} = \left(-g\mu_B B \frac{1}{2} + g\mu_B B \frac{1}{2} \right) |\downarrow\rangle_{e^-} \otimes |\downarrow\rangle_{e^+} \\ &= 0 \end{aligned}$$

同様に p-Ps への作用は次のようになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} |0, 0\rangle &= \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_{e^-} \otimes |\downarrow\rangle_{e^+} - |\downarrow\rangle_{e^-} \otimes |\uparrow\rangle_{e^+}) = g\mu_B B \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_{e^-} \otimes |\downarrow\rangle_{e^+} - |\downarrow\rangle_{e^-} \otimes |\uparrow\rangle_{e^+}) \\ &= g\mu_B B |0, 0\rangle \end{aligned}$$

すなわち $\mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+}$ は $s_z = 0$ の成分にのみ作用する. これにより $|1, 0\rangle$ と $|0, 0\rangle$ が混ざって新しい固有状態ができることがわかる. 次節で固有状態の具体的表式を求める.

(C) 摂動ハミルトニアンの対角化

以上より全ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\text{total}}$ は $\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H} + \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}^{e^- \otimes e^+} - i\Gamma^{e^- \otimes e^+}$ となる. ここで \mathcal{H} は真空中での Ps のハミルトニアン、 $\Gamma^{e^- \otimes e^+}$ は合成系の崩壊ハミルトニアンである. 基底として $|0, 0\rangle, |1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$ をとれば、 $\mathcal{H}_{\text{total}}$ は以下のようになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{total}} &= \begin{bmatrix} E_{\text{para}} & & & \\ & E_{\text{ortho}} & & \\ & & E_{\text{ortho}} & \\ & & & E_{\text{ortho}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & g\mu_B B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g\mu_B B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{\text{para}}}{2} & & & \\ & \frac{\Gamma_{\text{ortho}}}{2} & & \\ & & \frac{\Gamma_{\text{ortho}}}{2} & \\ & & & \frac{\Gamma_{\text{ortho}}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_{\text{para}} - i\gamma_{\text{para}} & 0 & & \\ 0 & E_{\text{ortho}} - i\gamma_{\text{ortho}} & & \\ g\mu_B B & 0 & E_{\text{ortho}} - i\gamma_{\text{ortho}} & \\ 0 & 0 & 0 & E_{\text{ortho}} - i\gamma_{\text{ortho}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで磁場のない時の o-Ps 及び p-Ps のエネルギーをそれぞれ $E_{\text{ortho}}, E_{\text{para}}$ とし、崩壊ハミルトニアンの

固有値を $\gamma_{\text{para}} = \frac{\Gamma_{\text{para}}}{2}, \gamma_{\text{ortho}} = \frac{\Gamma_{\text{ortho}}}{2}$ とおいた.

$\mathcal{H}_{\text{total}}$ を対角化することを考える. そのために無次元化した磁場 x 及び崩壊幅 κ をそれぞれ $x = \frac{2g\mu_B B}{E_{\text{ortho}} - E_{\text{para}}}$, $\kappa =$

$\frac{\gamma_{\text{para}} - \gamma_{\text{ortho}}}{E_{\text{ortho}} - E_{\text{para}}}$ で定義する. この時固有状態は

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}(|0,0\rangle - \epsilon|1,0\rangle), \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}(|1,0\rangle + \epsilon|0,0\rangle), \quad |1,1\rangle, \quad |1,-1\rangle$$

で与えられる. ここで混合率 ϵ は $\epsilon = -\frac{1}{x} [1 + i\kappa - \sqrt{(1+i\kappa)^2 + x^2}]$ である.

基底 $|-\rangle, |1,1\rangle, |+\rangle, |1,-1\rangle$ の下での $\mathcal{H}_{\text{total}}$ の表示は,

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \begin{bmatrix} E_{\text{para}} - i\gamma_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\text{ortho}} - i\gamma_{\text{ortho}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_+ - i\gamma_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{\text{ortho}} - i\gamma_{\text{ortho}} \end{bmatrix}$$

となる. ここで E_- 及び E_+ はそれぞれ

$$E_- = -\frac{E_{\text{ortho}} - E_{\text{para}}}{2}(1 + \text{Re}(\epsilon)x) \quad (1.5)$$

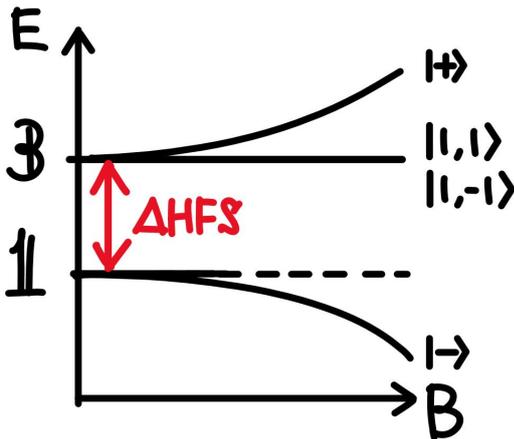
$$E_+ = \frac{E_{\text{ortho}} - E_{\text{para}}}{2}(1 + \text{Re}(\epsilon)x) \quad (1.6)$$

であり, γ_- 及び γ_+ はそれぞれ

$$\gamma_- = \gamma_{\text{ortho}} + \frac{E_{\text{ortho}} - E_{\text{para}}}{2} \text{Im}(\epsilon)x, \quad \gamma_+ = \gamma_{\text{para}} - \frac{E_{\text{ortho}} - E_{\text{para}}}{2} \text{Im}(\epsilon)x \quad (1.7)$$

である.

まず $\mathcal{H}_{\text{total}}$ の実部から, 磁場の大きさ B が十分小さいところでのエネルギースペクトルは図のようになる:



ここで縦軸 E はエネルギーを表し, 横軸 B は印加した磁場の大きさを表す. また **3** はゼロ磁場におけるスピン三重項, **1** はゼロ磁場におけるスピン一重項を表す. このように三重項のうち量子化軸方向のスピン s_z がゼロの成分だけエネルギーが大きくなり, 縮退が解ける. 一方 $s_z = 0$ の成分は磁場の有無にかかわらずエネルギーの値は一定であり, 二重の縮退が残る.

次節で述べる通り量子振動は $|+\rangle$ と $|1,1\rangle, |1,-1\rangle$ の干渉であるため, これら三つの状態すべてが重要である.

一方 $\mathcal{H}_{\text{total}}$ の虚部から $|+\rangle$ 寿命を求めることができる. まず弱磁場の近似として $|x|^2$ とし, $|x|^2$ の二次まで ϵ を展開すると

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{x} [1 + i\kappa - \sqrt{(1+i\kappa)^2 + x^2}] \\ &\simeq \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) - \frac{i}{2}\kappa x \end{aligned}$$

となる. これを用いると $|+\rangle$ の崩壊幅 Γ_+ は

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= 2\gamma_+ = \Gamma_{\text{ortho}} + (E_{\text{ortho}} - E_{\text{para}})\text{Im}(\epsilon)x \\ &\simeq \Gamma_{\text{ortho}} + (E_{\text{ortho}} - E_{\text{para}}) \cdot \frac{1}{2}\kappa x^2 \\ &= \Gamma_{\text{ortho}} + \frac{1}{2}\kappa x^2(\gamma_{\text{ortho}} - \gamma_{\text{para}}) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\Gamma_{\text{ortho}} + \frac{x^2}{4}\Gamma_{\text{para}}\end{aligned}$$

と求まる.

1.3 量子振動

この節では 2014 年度 P1 の量子振動のレポートを参考にしながら量子振動が生じる原理を定性的に説明する. 定量的な説明は [5] を参照.

説明の詳細に入る前に Ps の生成方法及び座標軸のとり方を決めておく. まず電子の供給源 O(図の星印) に対して陽電子を入射させる. このとき O を原点とし, 陽電子の方向を x 軸にとる. 次に O において x に垂直な方向に磁場をかける. これを z 軸とし, 右手系になるように y 軸をとる³.(図 3 を参照.)

さて量子振動は崩壊により放出した光子の干渉によって生じる. ここでは簡単のため y-z 平面上の干渉について述べる⁴. 重要な点は, 角運動量の保存によって $|+\rangle$ の出す光子の方向と $|1, \pm 1\rangle$ の出す光子の方向に偏りができる点である.(図 4 を参照.)

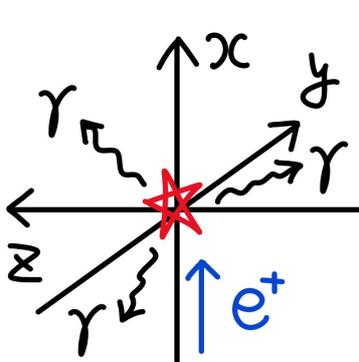


図 3: 座標軸のとり方. 図の下から入射した陽電子が星印の原点で Ps を形成し崩壊して光子を放出する.

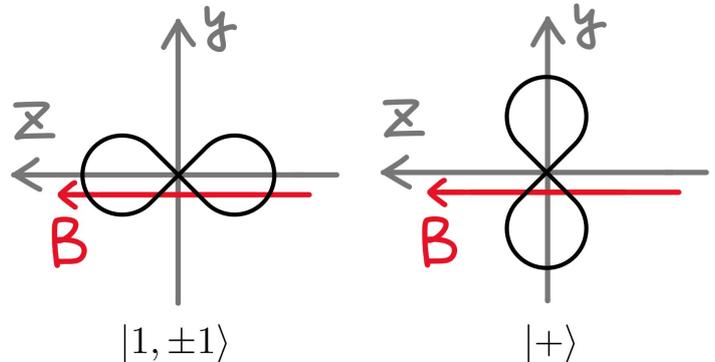


図 4: 光子の放出分布. 原点からの距離が遠いほど相対的に多くの光子が放出されることを意味する.

これより y 軸方向に出る光子はすべて $|+\rangle$ 由来のもののみであり, なんの干渉も見られないことがわかる. 一方 y 軸から ± 45 度方向に出る光子は $|+\rangle$ 由来のもの $|1, \pm 1\rangle$ 由来のものが混ざり合い干渉が生じる. 加えて $|+\rangle$ 及び $|1, \pm 1\rangle$ の P 変換のパリティはすべて -1 であることから, 逆方向に出る光子の位相は -1 倍であることがわかる. 従って例えば ± 45 度方向に出る光子の振動の位相は逆位相になることが分かる.(図 5 参照.)

以上は定性的な説明であるが, 詳細な理論計算から寿命曲線が $(1 + h\sin(\Omega t))e^{-\frac{t}{\tau}}$ で書かれることが知られている. ここで h は modulation depth と呼ばれ, 陽電子の偏極率 P 及び y 軸からの角度 θ を用いて

³図の軸のとり方が変なのは実験のセットアップと対応つきやすいようにするため.

⁴この実験では y-z 平面上の三点から観測するためこれで充分である.

$h = 0.231P\sin(\theta)$ と書かれる量で振動の振幅を表す. 一方 Ω は $\Omega = \frac{1}{2} \Delta HFS(-1 + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}})$ と書かれる量で振動数を表す. この表式より振動数が分かれば ΔHFS が求まることがわかる.

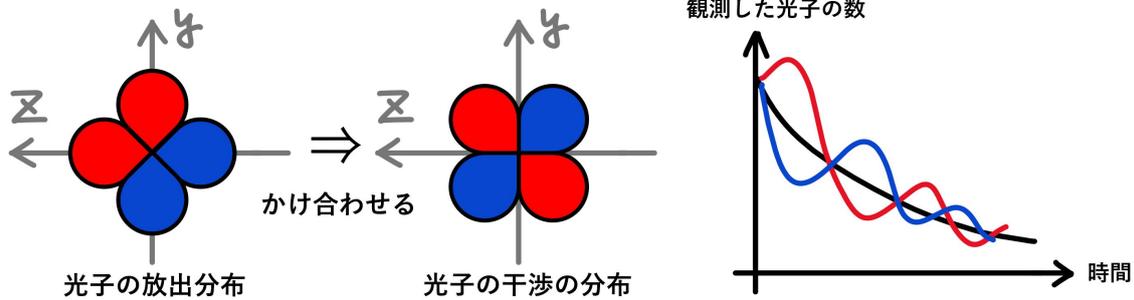


図 5: 位相の情報まで込めた光子の放出分布および干渉分布. 赤に対して青は位相が逆という意味であり、 ± 45 度方向では干渉の位相が逆位相であることが見える.

図 6: y 軸から測って 45 度 (赤線)、 0 度 (黒線)、 -45 度 (青線) から見た時の光子数. 実験ではこれを寿命曲線として測定するため、寿命曲線が振動して見える.

注意

実験では PMT を $\theta = 0, \pm 45$ 度方向に設置する. 0 度方向で観測された光子は振動しないため寿命の測定に用いるが、これらはすべて $|+\rangle$ 由来であるため実験により直接観測されるのは $\tau_+ = \frac{1}{\Gamma_+}$ である. 従って真空中での寿命を求めるには Γ_{para} は既知であるとして前節で導出した式

$$\Gamma_+ = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \Gamma_{ortho} + \frac{x^2}{4} \Gamma_{para}$$

を用いる必要がある. このとき Γ_{para} は既知の量として扱う.

1.4 pick-off 補正理論

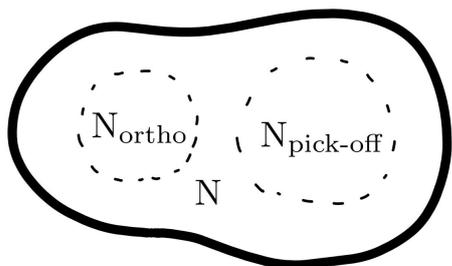
真空中での o-Ps の寿命は 142ns であるが、物質が存在する場合物質との相互作用によって見かけの寿命が変化することがある. 具体的な反応としては o-Ps 中の陽電子と物質中の電子が対消滅する反応 (狭義 pick-off 反応)、o-Ps がスピンを外部に落として p-Ps になり崩壊する反応 (スピン交換反応)、o-Ps が外部に電子を奪われる反応 (酸化反応) などが知られている. ここではこれらの反応を総称して pick-off 反応と呼ぶ. 経験的にはこれらの反応が起こるとほとんどの場合 o-Ps は p-Ps に転化し、それによって直ちに 2 光子崩壊する. そのためここでは “pick-off 反応とは o-Ps が物質との相互作用によって p-Ps に変わり、その結果 2 光子崩壊する現象” として扱う⁵. 従って pick-off 反応が多く起こると o-Ps の見かけの寿命が本来の 142ns に比べて短く見えてしまうことになる. しかしながら実験において Ps の生成には電子の供給源としての物

⁵実際にはスピン交換反応以外の 2 つに関しては反応によって再び o-Ps が生成し、それによって見かけの寿命が長く見える可能性はゼロではない. しかし後の解析では十分後の時間 (具体的には o-Ps の生成から 400ns 以降) のデータは切り捨てたうえで寿命を求めるため、このような反応の影響はほとんどないと思って話を進める.

質が必要であるから、pick-off 反応をゼロにすることは難しい。そのため実験データから pick-off の効果を適切に補正しなければならない。

(A)pick-off 補正理論の一般論

pick-off 補正理論を簡単に述べる。まず $N(t), N_{\text{ortho}}(t), N_{\text{pick-off}}(t)$ をそれぞれ全 Ps の数、o-Ps として崩壊した Ps の数、pick-off 反応により崩壊した Ps の数とする⁶。これらは次の微分方程式を満たす：



$$\begin{aligned}\frac{dN_{\text{ortho}}}{dt} &= \Gamma_{\text{ortho}}N, \\ \frac{dN_{\text{pick-off}}}{dt} &= \Gamma_{\text{pick-off}}N, \\ -\frac{dN}{dt} &= \frac{dN_{\text{ortho}}}{dt} + \frac{dN_{\text{pick-off}}}{dt}.\end{aligned}$$

図 7: 粒子数のイメージ

ここで Γ_{ortho} は o-Ps の崩壊幅、 $\Gamma_{\text{pick-off}}$ は pick-off の崩壊幅とする。1 つ目と 2 つ目の式は“崩壊率”が“存在する粒子数”に比例するという崩壊現象の典型的な微分方程式であり、3 つ目の式は全粒子数の保存である。ここで 1 つ目と 2 つ目の右辺は N_{ortho} や $N_{\text{pick-off}}$ でなく N に比例することに注意する。これは例えば一つ目の式でいうと全粒子数 N 個のうちどの Ps がオルソとして 3 光子崩壊してもおかしくないためである。

さて pick-off 補正理論の本質は以下の仮定にある：

仮定

$\Gamma_{\text{pick-off}}$ は o-Ps が生成してからの時間 t に依存し、 t について減少し、かつ一定の値に漸近するような関数である。

根拠

この仮定の根拠は o-Ps の熱化過程にある。すなわち o-Ps が生成された時点でのエネルギーは約 1eV であるため、(途中で pick-off が起きなければ) 周囲に熱エネルギーを落としていき室温 (約 0.3eV) まで冷やされていく。これを熱化過程という。

熱化によって Ps の速度は時間とともに減少していき、平衡状態に達すると一定になる。従って o-Ps の速さを時間 t の関数として $v(t)$ とすれば、 $v(t)$ は t について減少し、かつ一定値に漸近する関数である。また pick-off 反応は物質との相互作用が原因であったため、o-Ps の速さに比例して反応確率が上がると考えられる。従って崩壊幅 $\Gamma_{\text{pick-off}}$ は速さの関数として単調増加関数である。

以上より pick-off 反応による寿命は $\Gamma(v(t))$ という形で時間 t に依存し、 $v(t)$ の関数形が遺伝することによって $\Gamma_{\text{pick-off}}$ も減少かつ漸近する関数となる。

この仮定を踏まえて、以後の取り扱いのために $\Gamma_{\text{pick-off}}$ を無次元化した量として

$$f(t) = \frac{\Gamma_{\text{pick-off}}(t)}{\Gamma_{\text{ortho}}}$$

⁶ $N(t), N_{\text{ortho}}(t), N_{\text{pick-off}}(t)$ の時間依存性は以下明示しない。

と定める。 $f(t)$ を (pick-off) 補正関数と呼ぶ⁷。

補正関数 $f(t)$ を用いて式を整理すると N に関する微分方程式として次が得られる:

$$-\frac{dN}{dt} = \Gamma_{\text{ortho}}(1 + f(t))N$$

従って $\Gamma_{\text{obs}}(t) = \Gamma_{\text{ortho}}(1 + f(t))$ と定義すれば、これがこの実験において (pick-off 由来のものを取り除かずに) 全ての光子を観測した場合に測定される崩壊幅である。従ってこの微分方程式を解けば、全粒子数 N は初期時刻 $t = t_0$ での粒子数 N_0 を用いて次のように書ける:

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{\text{ortho}}} \int_{t_0}^t dt' (1 + f(t'))\right)$$

N を明示的に求めるには $f(t)$ の決定、すなわち $\Gamma_{\text{pick-off}}(t)$ の決定が必要である。しかしながら $\Gamma_{\text{pick-off}}$ は実験時の気圧や温度、電子の供給物質の物性などに依存する関数であるため、理論的に決定するのは難しい。そのため $f(t)$ は次のように2段階に分けて決定する:

(1) 適当な物理的考察に基づいて補正関数 $f(t)$ の関数形を推測する。この時の必要条件として先述の通り単調減少かつ一定値に漸近するような関数であることを課す。また N の表式から分かる通り解析的に積分できる関数である方が使い勝手が良い。

(2) 実験により観測できる量によって $f(t)$ を表現することで実験値を用いて $f(t)$ をプロットし、(1) で定めた関数形を用いてフィットを行う。

この実験での (1) の具体的な取り扱いとは次節で述べる。一方観測可能量は実験のセットアップに依存するため、(2) のこの実験における具体的な扱いは実験の章で述べることにする。

(B) 補正関数 $f(t)$ の関数形の推測

ここまでは pick-off 補正理論の一般論を述べた。ここからはこの実験で用いた補正関数の関数系及びその根拠を述べる。この実験で用いた pick-off 補正関数の関数形の候補は以下の3つである:

- (あ) 慣習的推測 : $f_0(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2$
- (い) 直観的推測 : $f_1(t) = \left(\frac{1}{p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right)} - 1\right)^{-1} + p_2$
- (う) 先行研究的推測 : $f_2(t) = \frac{p_0}{(t - p_1)^{p_2}} + p_3$

ここで赤字で書いた p 達がフィットの際のフィットパラメータである。以下ではこれらの根拠について述べる。

(あ) 慣習的推測

本学において課題演習 A2 が約 10 年にわたって α -Ps の寿命を測定している。これらの実験において pick-off 補正関数の関数形はいずれの年も $p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2$ として解析が行われている。レポートを遡ってもこの関数形を用いる明確な物理的根拠は見つからないが、過去の実験との比較のために本実験では $f_0(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2$ と定義して、 $f_0(t)$ も候補として用いることにする。

⁷この呼び方の由来は言うまでもなくこの実験では pick-off 反応が補正されるべき量だからである。

(い) 直観的推測

次に多少の直観的飛躍はあるものの物理的考察に基づいた推測を行う。まず補正関数 $f(t)$ の定義式を次のように変形する:

$$f(t) = \frac{\Gamma_{\text{pick-off}}(t)}{\Gamma_{\text{ortho}}} = \frac{\frac{dN_{\text{pick-off}}}{dt}}{\frac{dN_{\text{ortho}}}{dt}} = \frac{\frac{dN_{\text{pick-off}}}{dt}}{\frac{dN}{dt} - \frac{dN_{\text{pick-off}}}{dt}} = \frac{1}{\frac{dN}{dN_{\text{pick-off}}} - 1} = \left(\frac{1}{\frac{dN_{\text{pick-off}}}{dN}} - 1 \right)^{-1}$$

さてここで次のような直観的仮定を行う:

仮定

$$\frac{dN_{\text{pick-off}}}{dN} = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) \text{ と書ける.}$$

根拠

まずは Ps の速さについて議論する。熱化過程では Ps がシリカや空気の分子と衝突しエネルギーを失う。Ps は電子と陽電子の束縛系であるから、質量はこれらの分子に比べて非常に小さい。そのため衝突時の Ps の速度の変化量 Δv は衝突時の Ps の速さにほとんど依存せず、分子の速さがこれを決めていると考えられる。このことを少しだけ定量的に見る。簡単のため Ps と分子がそれぞれ速さ v 及び V で正面衝突する場合を考えて、エネルギー保存と運動量保存から衝突後の Ps の速さ v' を求めると $v' = \frac{M-m}{M+m}v + \frac{2M}{M+m}V$ となる。ただし m, M はそれぞれ Ps 及び分子の質量である。従って Ps の速さの変化量は

$$\Delta v = v - v' = \frac{2m}{M+m}v + \frac{2M}{M+m}V = \frac{2\frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}v + \frac{2}{1 + \frac{m}{M}}V \quad (1.8)$$

と求まる。ここで $\frac{m}{M}$ はだいたい電子と陽子の質量の比と考えて $\frac{m}{M} \simeq 10^{-4}$ とし、また Ps 及び分子のエネルギースケールはおおよそ 1eV 程度で同程度あるから、速さの比は質量のルートのオーダーになるため $\frac{v}{V} \simeq 10^{-2}$ とすれば、上式の第一項は無視してよい。従って Δv が v によらないことが分かった。

以上をもとに v の満たす微分方程式が求まる。分子間の平均距離を l と置くと、 dt の間に Ps が分子と衝突する回数は $\frac{vdt}{l}$ で与えられる。従って Ps の速さは次のように求まる:

$$dv = -\frac{vdt}{l}\Delta v \iff \frac{dv}{dt} = -\frac{\Delta v}{l}v \iff v = v_0 \exp\left(-\frac{\Delta v}{l}t\right) \quad (1.9)$$

一方で pick-off 反応は物質との相互作用で起こるため、反応の確率は速さに比例すると考えられる。その意味で $\frac{dN_{\text{pick-off}}}{dN}$ も $p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right)$ という関数形で書けるはずである。

以上の理由から、先に求めた $f(t)$ の表式の $\frac{dN_{\text{pick-off}}}{dN}$ を $p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right)$ で置き換えたものとして

$$f_1(t) = \left(\frac{1}{p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right)} - 1 \right)^{-1} + p_2$$

を定義し、これによりフィットを行う。ただし p_2 はノイズに由来するベダスタルを吸収する項である。

(う) 先行研究的推測

先行研究 [1],[2] によるとボルツマン方程式から補正関数 $f(t)$ は以下の微分方程式を満たす⁸:

$$\frac{df}{dt} = -C (f^2 - f_\infty^2) f^{2\beta}$$

ここで C, f_∞, β は環境に依存する定数である. この微分方程式は解析的には解けないため, [1] では C, f_∞, β をフィットパラメータとして微分方程式を数値的に解いて補正関数のフィットを行っている.

しかしながらこの解析は簡単でないため, ここではその時の f_∞ の値が $f_\infty \sim 10^{-2}$ であることに注目して $f_\infty^2 = 0$ の 0 次近似の下で微分方程式を解析的に解く. 実際 $f_\infty^2 = 0$ とした時の解は簡単に求まって,

$f(t) = \frac{A}{(t-D)^a}$ となる. ただし $a = \frac{1}{2\beta+1}$, $A = \left(\frac{1}{(2\beta+1)C} \right)^{\frac{1}{2\beta+1}}$ と置いた. また D は積分定数である.

以上から $f_2(t) = \frac{p_0}{(t-p_1)^{p_2}} + p_3$ と定義し, これによりフィットを行う.

⁸ $f_1(t)$ はこれを満たさないことに注意. そのため (い) と (う) は本質的に異なる提案である.

2 実験

この実験ではポジトロニウム (Ps) の集団を用意し, 崩壊までの時間を測定することによって寿命曲線を描き, Ps の寿命及び量子振動の振動数を決定する. ^{22}Na が出す β^+ がプラスチックシンチレータ (プラシン) を鳴らす時刻を t_i , Ps の崩壊によって放出された γ 線が NaI シンチレータを鳴らす時刻を t_f とすると, Ps の崩壊までの時間 Δt は近似的に⁹

$$\Delta t = t_f - t_i \quad (2.1)$$

となる. (2.1) 式を実験原理として寿命測定を行う.

2.1 本実験

2.1.1 実験器具

本実験で用いた実験器具は以下の通りである.

- ^{22}Na : β^+ 線源
- プラシン : β^+ の検出
- NaI シンチレータ : γ 線の検出
- シリカパウダー : Ps の形成に用いる物質. 詳細は後述.
- 鉛ブロック : ^{22}Na より出る 1.3MeV の γ 線の遮蔽
- 磁石 : 磁場の発生に用いる.
- 真空ポンプ : シリカパウダーのケース内の真空引き
- インラインフィルタ : シリカパウダーの吸引防止
- 真空計 : 真空度の確認
- 遮光シート : ノイズの低減およびプラシンの破損防止

2.1.2 回路

図 8 は, (2.1) に基づいた寿命測定を行うため実際に用いた回路である. Threshold や delay 等を除いて, 昨年度から変更した点はない. この回路における寿命測定は次のように行われる. (図 9)

1. ^{22}Na から出た β^+ はプラシンを鳴らし, discriminator を通じて gate を 1000ns 開く.
2. β^+ が物質中の電子と出会い γ 線に変わる. その γ 線が NaI を鳴らし, discriminator でロジック信号に変わる.
3. プラシン由来の gate と, NaI 由来のロジック信号で coincidence をとり, FADC¹⁰ のトリガ信号とするとプラシンと NaI の生の信号が root ファイルに記録される.
4. 記録された生の信号に対して立ち下がりの時刻 t_i , t_f (すなわち threshold) を決めて, (2.1) にしたがって崩壊までの時間を求める.

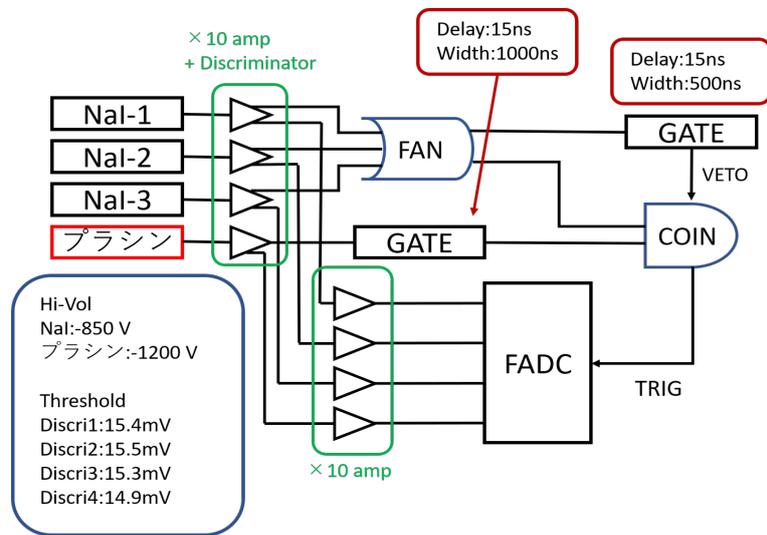


図 8: 回路図

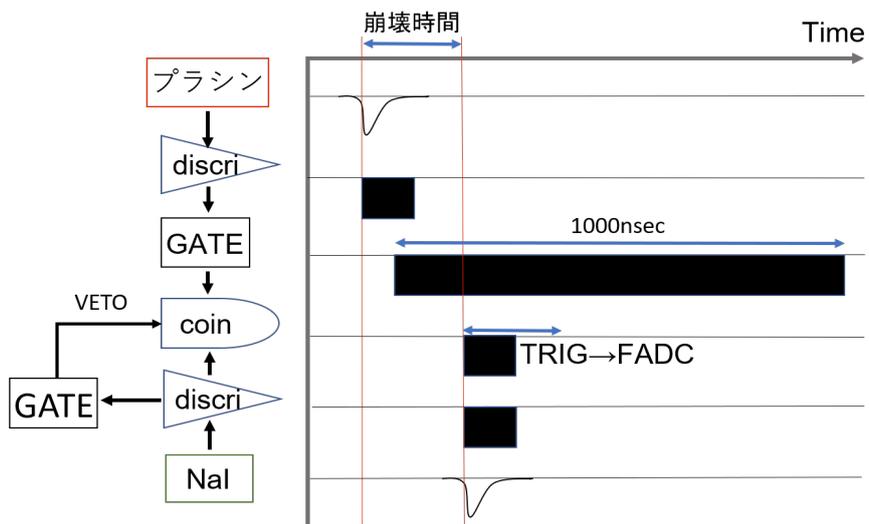


図 9: 信号の概念図

なお、立ち下りの時刻を決める threshold は peakvalue (波高の最大値) の半分の高さに設定した。この方法では peakvalue (\approx エネルギー) に応じて threshold が変わるため、TQ 補正は必要ない。

2.1.3 セットアップ

本実験で用いたセットアップの概観を図 10, 図 11 に示す。図 11 ではシリカパウダーの容器を入れてあるが、実験目的に応じて消しゴムを入れることもある (後述)。

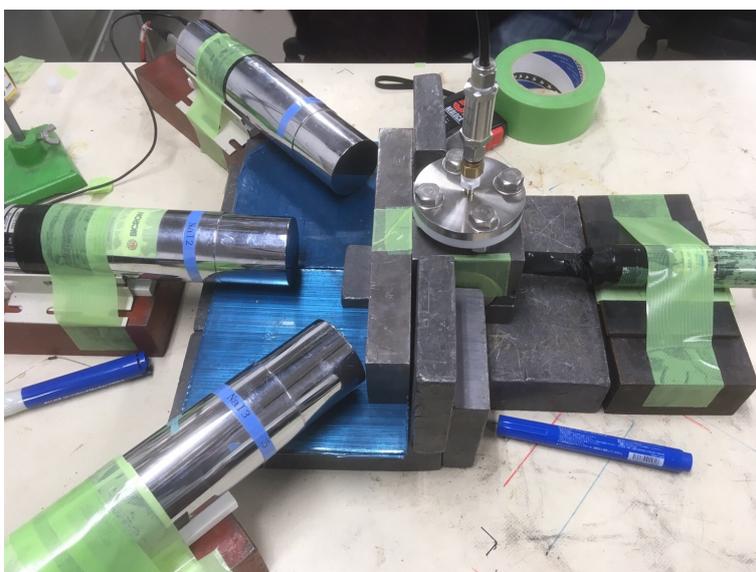


図 10: セットアップの概観

鉛ブロックの構造は図 12 のようになっている。側面にある円形のくぼみにネオジウム磁石をはめ、ターゲットに磁場を印加する。ブラシン付近の磁場は 37.4mT であった。磁場は軸対称ではあるが空間的に一様ではなく、 ± 4.2 mT の変動があった。

シリカパウダーは図 13a の左のケースに入れて鉛ブロック上面の穴に差し込む。その際真空引きをするため、真空ポンプがシリカを吸引してしまわないためのフィルタを取り付けた。

2.1.4 ターゲットにシリカパウダーを用いる実験

前節で触れたように、今回はターゲットにシリカを用いる実験と消しゴムを用いる実験の両方を行った。これらの実験の違いを理解するために、Ps の形成について述べておこう。

通常 Ps は β^+ 線を物質に打ち込んで作る。 β^+ 崩壊のエネルギースペクトラムは連続的であるが、大体 MeV オーダー程度にピークがある。そのような典型的なエネルギーを持つ β^+ は、物質に入射すると相互作用でエネルギーを失い、やがて物質中の電子と Ps を形成するか、そのまま対消滅する。しかし、もし運良く o-Ps を形成したとしても、消しゴムのような密度の高い物質中では pick-off 反応によって本来の寿命より短い時間で γ 線に崩壊してしまう。そのため、o-Ps の寿命曲線を問題にするときは、多孔質構造をもち低密度なシリカパウダー (ないしエアロゲル) がよく用いられる¹¹。

⁹ β^+ および γ 線の飛行時間は Δt に比べて十分短いと見做している。

¹⁰Flash Analog-to-Digital Converter の略。各チャンネルの波形を常に記録し続ける装置で、トリガに入力があるとトリガ信号の前後の時刻にある (デジタル化した) 波形を root ファイルに書き出す仕様になっている。なお、levent の波形は 1024 分割した形で記録され、1 分割は 4ns に相当する。このことは FADC のサンプリングレートとして予め分かっており、時間の calibration は必要ない。

¹¹シリカには次のような利点もある。SiO₂ は Ps に対して負の仕事関数をもつため、Ps は形成後速やかにシリカ微粒子中から放出される。したがって pick-off 反応が起こりづらく、o-Ps が天寿を全うすることができる。



図 11: セットアップの概観（別アングル）



図 12: 鉛ブロックの構造



(a) シリカケースとフィルタ



(b) フィルタ取り付け後

図 13: シリカケース

ターゲットにシリカパウダーを用いる実験は 2019/2/6-2019/3/15 のあいだ測定を行った。これによって、o-Ps の寿命測定および量子振動の観測に必要なデータを取得すると同時に、 ^{22}Na から直接 NaI に入る 1275keV の γ 線が鉛で遮蔽できているかを確認する。

2.1.5 ターゲットに消しゴムを用いる実験

後に寿命を決定する際に NaI の時間分解能が問題になるが、これは寿命曲線における 0ns のピークがどの程度広がるかで評価できる。ただし、今回は o-Ps がいると 0ns ピークが非対称になり、広がりや評価することが難しくなる。そこで消しゴムをターゲットにすれば o-Ps による長寿命成分が極端に減り、0ns ピークを左右対称な gaussian と見なすことができるはずである。このような予想のもと、ターゲットを消しゴムにして（そのほかの条件は一切変えず）データを取得した。

なお、上に言う“0ns のピーク”に対応する TDC count は 0 ではなく、何らかの対応をつける必要がある。この実験では、0ns にあたると思われるピークを gaussian fit して count と対応させる。

2.2 予備実験 (Energy calibration)

Ps の崩壊によって現れる γ 線のエネルギーは 511keV 以下である。この実験では Ps の崩壊イベントを抽出できさえすれば、すなわちエネルギースペクトラムのうちどの領域が 511keV 以下かさえ分かればよく、それには 511keV ピークがどこにあるかが分かればよい。しかし ^{22}Na の崩壊様式は既知だという立場では、ピークのうちどれが 511keV にあたるのかは明らかである。そのため Energy calibration をあえて行う必要はないが、データの見やすさのために簡単に行っておくことにする。

方法としては、 ^{22}Na 線源を NaI シンチレータの前に置き、FADC で記録した波形からエネルギースペクトラムを描く。実際にそれは図 14 のようになる。

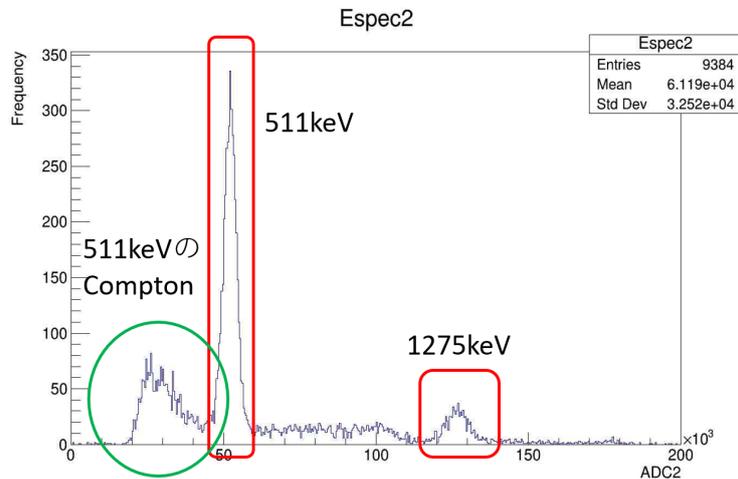


図 14: calibration 前のエネルギースペクトラム

この節の初めで述べたのは、一番背の高いピークが 511keV に、その左側にあるのが 511keV 未満の崩壊イベントに、それぞれ対応することが明らかだということである。これをもとに Energy calibration を行う。

3 解析・結果

以下特記のない限り、3.1.4節で述べたシリカパウダーを用いた実験の結果を用いる。

3.1 誤差の評価

フィッティングを行った際に ROOT が出力した誤差は統計誤差として取り扱う。また今回は寿命を求める実験もすべて磁場をかけたまま行ったので、「磁場の非一様性に由来する誤差」を系統誤差として取り扱う。2章で得た式をもとに、寿命を求める際の誤差は誤差伝播則を用いて次のように計算される。

$$\Delta\Gamma_{\text{ortho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Gamma_{\text{ortho}}}{\partial\Gamma'}\right)^2 \Delta\Gamma'^2 + \left(\frac{\partial\Gamma_{\text{ortho}}}{\partial\varepsilon}\right)^2 \Delta\varepsilon^2} \quad (3.1)$$

$$= \sqrt{(1 + \varepsilon^2)^2 \Delta\Gamma'^2 + 4\varepsilon^2(\Gamma' - \Gamma_{\text{para}})^2 \Delta\varepsilon^2} \quad (3.2)$$

以降、誤差の値はすべて式 (3.2) を用いて計算したものである。

3.2 Energy Calibration

この節では「予備実験」で得たデータを用いる。3.2節で説明したように、今回は ^{22}Na の 511keV (β +と NaI 表面の金属の電子との対消滅の γ 線), 1275keV (線源からの γ 線) を用いて Calibration を行った。ADC カウントと γ 線のエネルギー値との間には線形性があると仮定し、線形関数 (γ 線のエネルギー値 [keV]) = $a \times (\text{ADC カウント}) + b$ を用いて a, b を求める。結果を表 1 に示す。

表 1: Energy Calibration の結果

NaI	a	b
Ch1	1.23×10^{-2}	32.7
Ch2	9.58×10^{-3}	20.6
Ch3	1.13×10^{-2}	34.4

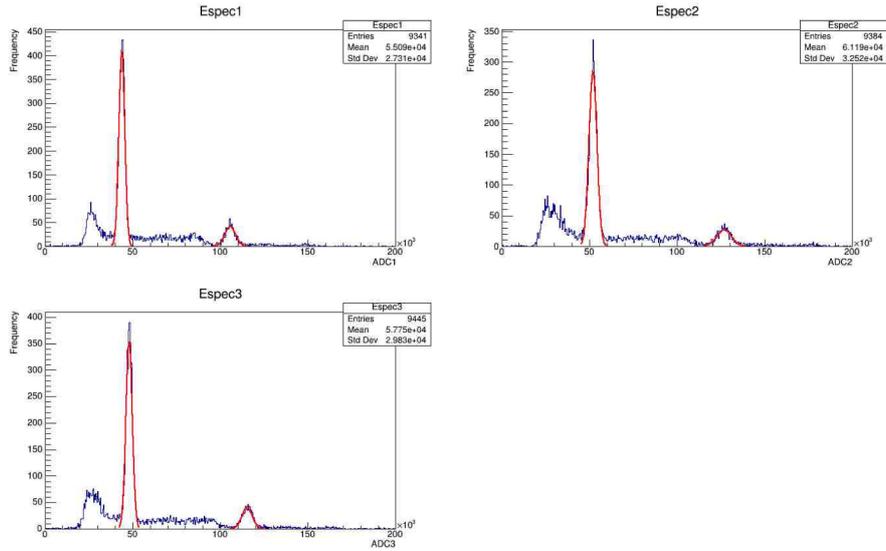


図 15: Na22 のエネルギースペクトルのフィッティングの様子

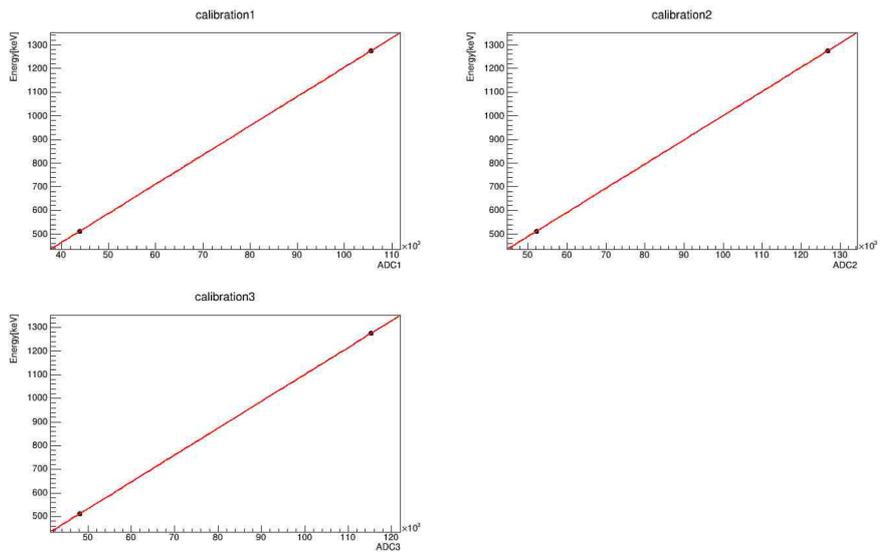


図 16: NaI の Calibration

3.3 1275keV のカット

本実験ではポジトロニウムの崩壊イベントに絞って観測を行いたいため、Na22の直接の崩壊イベントである1275keVのイベントはカットしなければならない。そこで実際に1275keVのピークがカットできているか調べた。結果を図17に示す。

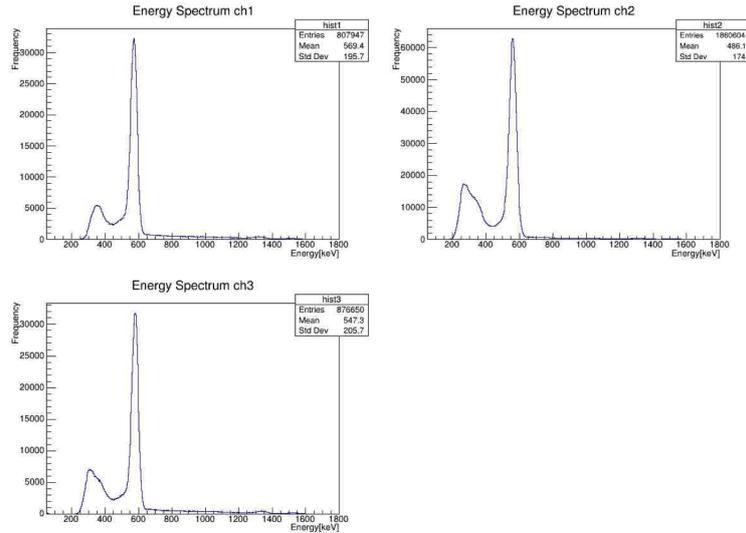


図 17: Energy Spectrum

511keV 以上のイベントの割合は Ch2 が 5%程度, Ch1,3 が 10%程度であり, 十分カットできていると判断できる.¹²

3.4 Energy cut

本実験で観測したい 3γ 崩壊による γ 線の持つエネルギーは 511keV 以下である. 2γ 崩壊によるエネルギーは 511keV であるため, 511keV のピーク以上のエネルギーをもつイベントはカットする必要がある. 寿命曲線を描くにあたり, 図 17 に示した Energy Spectrum をもとに, 今回は 500keV 以上のデータをカットした. また, 下限としては Pedestal を含まないように 200keV 以下のものをカットした. 以下, 寿命曲線とは「イベントを 200keV から 500keV にわたって足し上げたものを縦軸に, 時刻を横軸にして描いたもの」である.

3.5 TDC Calibration

今回使用した FADC は時刻 1 単位が 4ns であるため, TDC カウントと実際の時刻には以下の関係が成り立つ.

$$(\text{実際の時刻 [ns]}) = 4\text{ns} \times (\text{TDC カウント}) + \text{const.} \quad (3.3)$$

したがって, 式 (3.3) の const. の値さえわかれば実際の時刻を得ることができる. これを得るために, 寿命曲線を描いて 0ns 付近に現れるべきピーク (p-Ps の崩壊イベント) を Gaussian で Fit し, その Mean の値を const. の値とした. 表 2 に結果を示す.

¹² このカットに多大な労力と時間を費やしたことは言うまでもない.

表 2: Energy Calibration の結果

NaI	const. の値 [ns]
Ch1	6.197
Ch2	6.124
Ch3	6.195

3.6 Pick-off 補正関数の表し方

3.6.1 寿命曲線の導出

2.4 節 (A) の内容の続きである。Pick-off 補正関数

$$f(t) := \frac{\Gamma_{\text{pick-off}}(t)}{\Gamma_{\text{ortho}}} \quad (3.4)$$

を定義することで、時刻 t における粒子数を

$$N(t) = -N_0 \exp\left(\frac{1}{\tau_{\text{ortho}}} \int_{t_0}^t dt' (1 + f(t'))\right) \quad (3.5)$$

と表すことができた。これを再度 t で微分することにより、

$$\frac{dN}{dt} = -N_0 \frac{1}{\tau_{\text{ortho}}} (1 + f(t)) \exp\left(\frac{1}{\tau_{\text{ortho}}} \int_{t_0}^t dt' (1 + f(t'))\right) \quad (3.6)$$

を得る。この左辺の示す量は寿命曲線そのものである。つまり、fit parameter p_i を用いて

$$\frac{dN}{dt} = p_0 (1 + f(t)) \exp\left(\frac{1}{p_1} \int_{t_0}^t dt' (1 + f(t'))\right) + p_2 \quad (3.7)$$

という関数で寿命曲線をフィットすることで、実験値としての寿命の値 (p_1) を得ることができる。

したがって、我々のすべきことは、Pick-off 補正関数 $f(t)$ を求めることである。しかしながら、これは気圧や室温などに依存するため、実験のパラメーターから理論的に求めることは困難である。したがって、 $f(t)$ を観測量で表すことで実験的に求めることにする。

3.6.2 $f(t)$ を観測量で表す

定義から、

$$f(t) = \frac{\Gamma_{\text{pick-off}}(t)}{\Gamma_{\text{ortho}}} = \frac{\frac{dN_{\text{pick-off}}}{dt}}{\frac{dN_{\text{ortho}}}{dt}} = \frac{\frac{dN_{\text{pick-off}}}{dt}}{\frac{dN}{dt} - \frac{dN_{\text{pick-off}}}{dt}} \simeq \frac{\Delta N_{\text{pick-off}}}{\Delta N - \Delta N_{\text{pick-off}}} \quad (3.8)$$

と表せる。第 2 辺から第 3 辺への変形は Γ の定義の微分方程式を、第 4 辺から第 5 辺では無限小時間での量 $\frac{dN}{dt}$ を有限の時間 $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ (Δ は有限時間での変化量を表す) で表す近似を行った。 ΔN は各時刻におけるイベント数であり、我々はこれを直接観測できる。となれば、あとは $\Delta N_{\text{pick-off}}$ を観測量で表せばよい。

3.6.3 $\Delta N_{\text{pick-off}}(t)$ を観測量で表す

Pick-off された o-Ps は 511keV の γ 線に崩壊する。この γ が NaI に入り光電吸収やコンプトン散乱が起こる。1 つ目のポイントは、エネルギー保存から 3 γ 崩壊では 511keV の γ は出ないため、511keV のピークはすべて 2 γ (pick-off) 由来であるということである。したがって、 ΔN に対して $\Delta N_{\text{pick-off}}$ は図 18 の

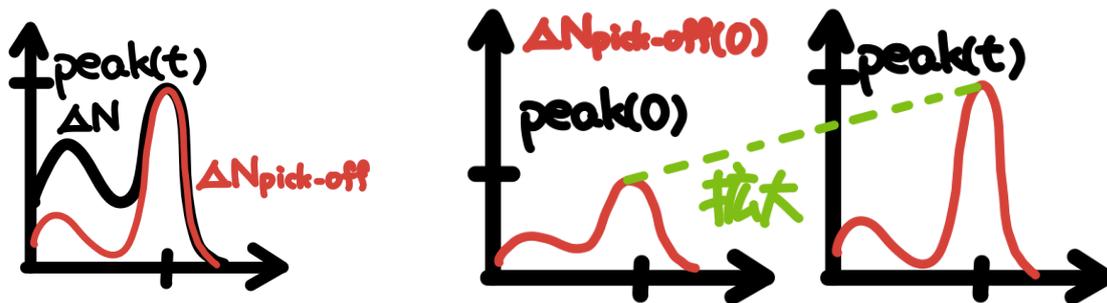


図 18: $\Delta N_{\text{pick-off}}$ の概略

1 枚目のようになり、これをどのように取り出すかが問題となる。

2 つ目のポイントは、o-Ps の寿命に対して p-Ps の寿命は十分に短いので、時刻 0 では p-Ps 由来の 2γ しかないということである。すなわち $\Delta N(0) = \Delta N_{\text{pick-off}}(0)$ となる。ここで、「511keV のピークに対するある 511keV 未満のイベントは同じ確率で分布する」と仮定する。この仮定から、時刻 t における 2γ のイベントは図 18 の 2,3 枚目のように時刻 0 のイベントを 511keV のピーク値で相似拡大したものとなり、イベント数 $\Delta N_{\text{pick-off}}(t)$ もそれに従う。すなわち、時刻 t における 511keV のピーク値を $\text{peak}(t)$ とすれば、

$$\Delta N_{\text{pick-off}}(t) = \frac{\text{peak}(t)}{\text{peak}(0)} \Delta N_{\text{pick-off}}(0) \quad (3.9)$$

と表すことができる。

3.6.4 補正関数まとめ

以上から、補正関数 $f(t)$ は

$$f(t) \simeq \frac{\frac{\text{peak}(t)}{\text{peak}(0)} \Delta N_{\text{pick-off}}(0)}{\Delta N(t) - \frac{\text{peak}(t)}{\text{peak}(0)} \Delta N_{\text{pick-off}}(0)} \quad (3.10)$$

と観測量によって表せる。但し、実際には $f(t)$ は適当な関数によって Fit する必要がある。

3.7 補正関数 $f(t)$ のフィット

以降、寿命について議論する際は Ch2 の結果のみを用い、Ch1,3 のデータは使用しない。

式 (3.10) にしたがって、 $f(t)$ を 32ns(理由は後述) から 20ns 刻みでプロットした。さらに、それを 3 種類の fit 関数

$$f_0(t) = p_0 \exp(-t/p_1) + p_2 \quad (3.11)$$

$$f_1(t) = \left(\frac{1}{p_0 \exp(-t/p_1)} - 1 \right)^{-1} + p_2 \quad (3.12)$$

$$f_2(t) = \frac{p_0}{(t - p_1)^{p_2}} + p_3 \quad (3.13)$$

を用いて、32ns から 400ns の範囲で fit した (p_i はフィットパラメータ)。結果を表 3 に示す。

表 3: 補正関数 $f(t)$ のフィット結果

Fit 関数	p_0	p_1	p_2	χ^2/ndf
$f_0(t)$	2.81 ± 0.26	55.7 ± 0.400	2.10 ± 0.0109	10.6
$f_1(t)$	0.711 ± 0.0245	91.5 ± 6.83	0.154 ± 0.00983	3.46
$f_2(t)$	923 ± 762	23.3 ± 8.49	1.55 ± 0.163	3.60

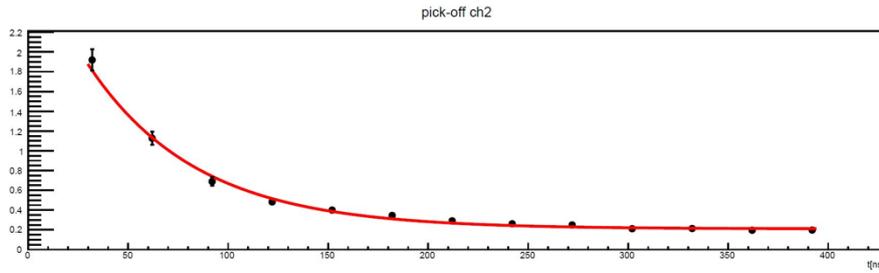


図 19: $f_0(t)$ での補正関数の Fitting

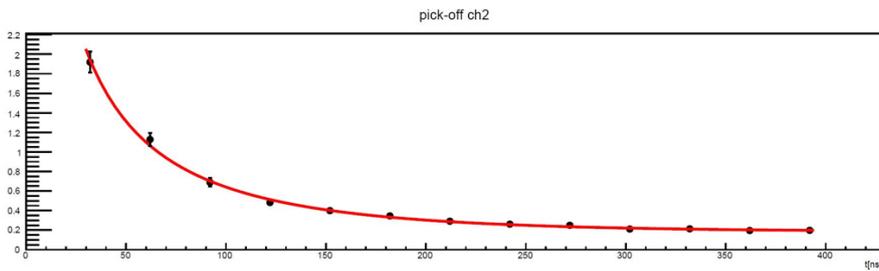


図 20: $f_1(t)$ での補正関数の Fitting

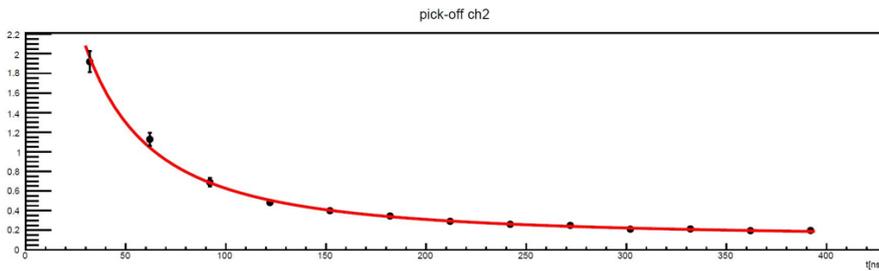


図 21: $f_2(t)$ での補正関数の Fitting

fit 関数の定義域の決定について

Fit 範囲の上端については、約 99% の o-Pos が崩壊する 400ns を採用した。下端について決定するために、図 22 のように補正関数を 0ns から 100ns まで 2ns 毎にプロットして考察した。

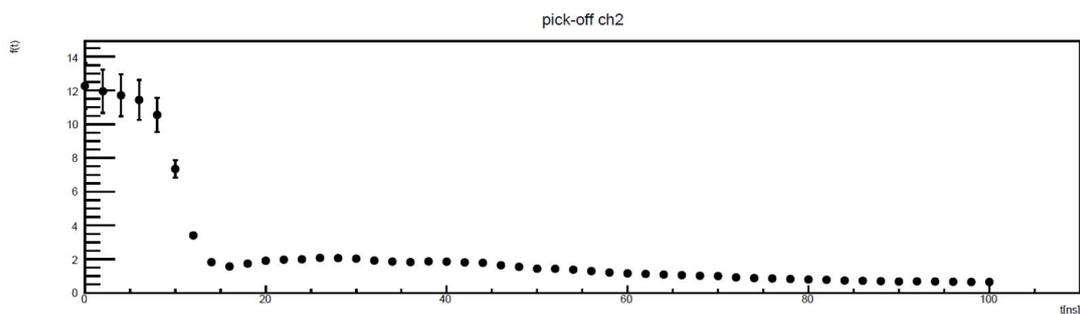


図 22: 補正関数 $f(t)$ のプロット

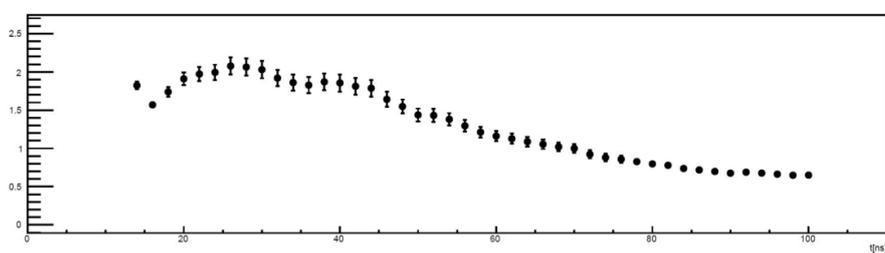


図 23: 補正関数 $f(t)$ のプロット (拡大)

0ns に近い領域では p-Pos の崩壊イベントが含まれる影響で、補正関数は特異的な振る舞いを示す。そのため、その部分は定義域として除外する。図 23 のように、32ns あたりから補正関数は減少関数となっているため、今回は Fit 関数の定義域の下限を 32ns とした。

3.8 寿命曲線のフィット

前節のフィット結果をもとに、寿命曲線を 20ns から 400ns まで式 3.7 で Fit して寿命を求めた。結果を表 4 に示す。

表 4: 寿命曲線のフィット結果

Fit 関数	寿命の値 [ns]	χ^2/ndf
$f_0(t)$	129.2 ± 2.6	169.2
$f_1(t)$	143.2 ± 3.0	176.6
$f_2(t)$	145.4 ± 3.3	192.7

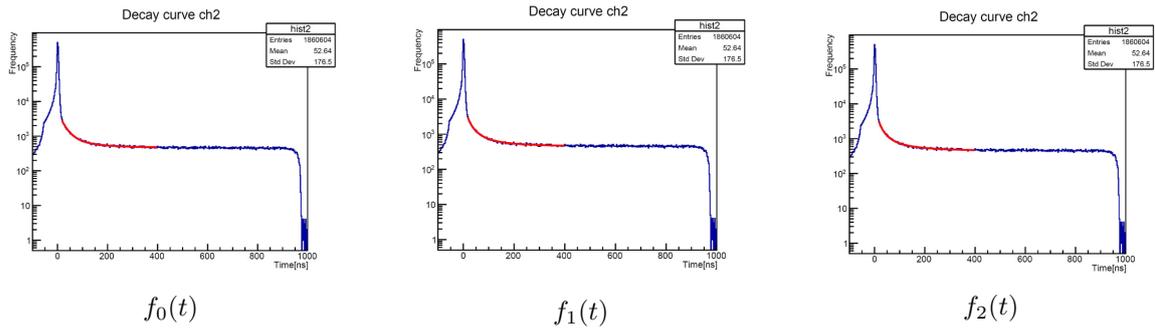


図 24: 補正関数の Fit 結果を用いた寿命曲線の Fit

寿命曲線の Fit 範囲について

寿命曲線の Fit 範囲の上端については、補正関数と同じ理由から 400ns とした。下端について調べるべく、3.1.2「消しゴムを用いた実験」の結果を利用する。結果を図 25 に示す。

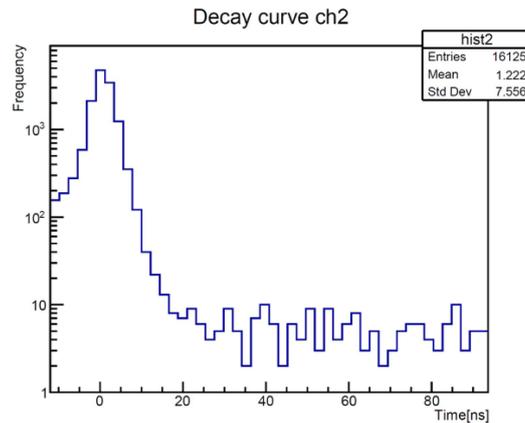


図 25: 実験 2 から得られる寿命曲線 (-10ns から 100ns を拡大)

この実験ではシリカではなく消しゴムを置いただけなので、o-Ps はできない (できても直ちに Pick-off されてしまう) と考えてよい。したがって 20ns 程度まで広がっているピークは、p-Ps の崩壊イベントによるものと見ることができる。本来 p-Ps の寿命は 123ps 程度であるため、寿命曲線には 0ns のところに細かいピークがピンと立つと考えられるが、NaI の時間分解能から 20ns 程度まで裾野が出来たと考えることができる。このような考察から、20ns までは p-Ps の崩壊イベントが含まれている可能性があるため、Fit 範囲の下端は 20ns と決定した。

3.9 量子振動について

量子振動は Ch1,3 に逆位相で現れるはずである。Ch1,2,3 の寿命曲線を図 26 に示す。

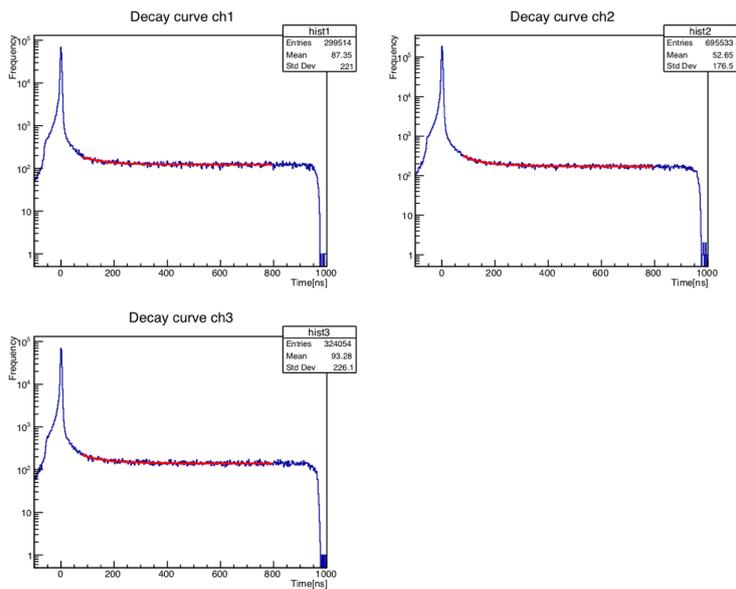


図 26: Ch1,2,3 の寿命曲線

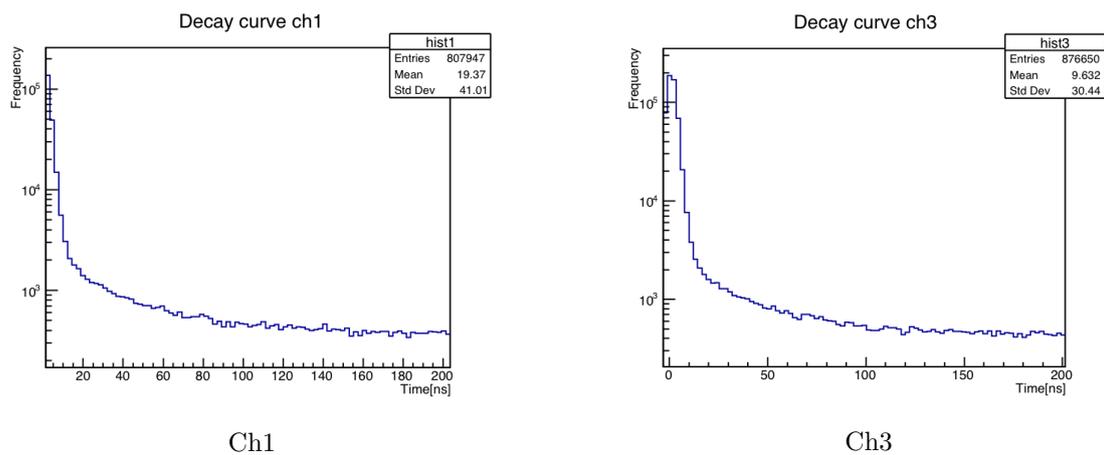


図 27: Ch1,3 の寿命曲線 (0ns から 200ns までの拡大)

今回の磁場の値 (37.4mT) から、量子振動の周期は 184ns 程度と概算される。しかし寿命曲線には振動が現れているようには見えない。本来は先述の方法で寿命曲線を Fit してずれを比較するなどして、見えるかどうかを定量的に判断すべきであったが、時間の都合上できなかった。

4 考察

4.1 pick-off 補正理論の改良

第2章で触れたように、課題演習 A2 では pick-off 補正関数の fit 関数として

$$f_0(t) = p_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + p_2 \quad (4.1)$$

を用いている。この場合、寿命曲線の fitting 範囲を不自然に遅くしないと理論値に近い寿命が得られない。

一方、 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ を用いた解析では補正関数・寿命曲線ともに fitting 範囲を物理的考察に基づいて選んだ。特に先行研究に基づいた $f_2(t)$ を用いた場合の寿命は理論値を誤差に含んでおり、今回の実験で取得したデータが悪いものでないことを示唆している。その上で $f_1(t)$ を用いて得られた寿命も理論値を誤差に含んでおり、 $f_1(t)$ (および $f_2(t)$) は pick-off 補正関数の修正として一定の成功を収めたと言える。 $f_1(t)$ は直感的に導出でき、なおかつ解析的に取り扱いやすいという点で優れた fit 関数である。

4.2 量子振動が見えない理由について

今回の実験のデータでは量子振動が見えたとは言い難い。この原因について、次の2つがあると考えられる。

1. β^+ の偏極率が低すぎた。
2. 磁場の一様性が低かった。

まず1つ目から考察しよう。もともと、量子振動の振幅 (modulation depth) は次式で与えられていた:

$$h = -0.23P^{e^+} |\sin 2\theta| \quad (4.2)$$

ここで P^{e^+} は陽電子の偏極率である。すでに述べたように、 β^+ 線は物質と相互作用しながらエネルギーを落とした上で Ps を形成するが、その過程で β^+ ビームの偏極率も落ちてしまう。実際 Ge-Ga の偏極率は β^+ 崩壊直後で 0.94 だが、Ps を形成するまでに 0.4 まで落ちる。一方 ^{22}Na の偏極率は 0.7 であり、Ps を形成するまでに偏極率は Ge-Ga 以上に落ちると考えるのが自然である。(4.2) より、偏極率が小さいと振幅も小さくなり、量子振動を観測することが難しくなる。尤もここで述べたことは単なる推測に過ぎず、実際にはシミュレーションをして偏極率の低下を定量的に評価すべきであったが、時間的・技術的理由により断念した。

つぎに2つ目を考えよう。量子振動の振動数は Ps のある点における磁場の大きさに依存する。そのため磁場が空間的に一様でないと、寿命曲線は様々な振動数の重ね合わせとなり、量子振動を観測することが難しくなる。3.1 節で述べたように、今回のセットアップでも $\pm 4.2\text{mT}$ の非一様性があるが、これがどの程度測定に効いてくるかの評価はしていない。(ここも本来はシミュレーションによって磁場分布を求め、定量的な評価をすべきところであったが、時間的・技術的理由により断念した。) なお、今年度はシリカパウダーの体積を増やそうと容器を大きくしたが、これがかえって磁場の非一様性の効果を際立たせてしまった可能性があるということは付言しておく。

5 まとめ

今回の実験では、Pick-off 補正理論の改善案として、解析的に取り扱いやすい簡単なモデルの提案をした。加えて寿命曲線及び pick-off 補正関数の定義域を物理的考察に基づいて決定した。そのモデルによって、寿命曲線の定義域でフィットを行い α -Ps の寿命として $143.2 \pm 3.0[\text{ns}]$ という、理論値 (142ns) が誤差の範囲に入った結果を得ることができた。また、量子振動については残念ながら見えなかった。

A 付録

Ps の寿命計算

ここでは p-Ps の寿命を求める. ここでの計算や記法及び o-Ps の計算については [4] を参照のこと.

公式の確認

この計算で用いる公式についてまとめておく. 1 粒子が n 粒子に崩壊する過程を考える. 始状態 $|i\rangle$ の四元運動量を P^μ とする. また終状態 $|f\rangle$ の k 番目の粒子の四元運動量を p_k と書くことにする. ただし $k = 1 \sim n$. この時粒子の微分崩壊幅 $d\Gamma$ は

$$d\Gamma = \frac{1}{2P^0} \left(\prod_{k=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3 \cdot 2p_k^0} \right) |\mathcal{M}(i \rightarrow f)|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P - \sum_k p_k)$$

で与えられる. ここで $\mathcal{M}(i \rightarrow f)$ は遷移振幅と呼ばれ $\langle f|i\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(P - \sum_k p_k) \mathcal{M}(i \rightarrow f)$ で与えられる. 従って以降は Feynmann ルールを用いて $|\mathcal{M}|^2$ を求める.

始状態・終状態の表現

スピンは相対論的には良い量子数ではないため, Ps を場の理論的に取り扱うには始状態の非相対論的記述が必要になる. p-Ps のエネルギーを E_p 、電子、陽電子のエネルギーを E とおくと, 非相対論的な p-Ps の状態ベクトルは, 規格化を込めて次で与えられる:

$$\frac{1}{\sqrt{2E_p}} |p\text{-Ps}\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(p) Y_m^l(\theta, \phi) \epsilon^{ij} \frac{1}{\sqrt{2E}} a_{i,\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2E}} b_{j,-\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$$

ここで状態ベクトルは内積がローレンツ不変になるように $\frac{1}{\sqrt{2E}} |\text{ket}\rangle$ という形で規格化している. さらに非相対論的近似として $E_p \simeq 2m, E \simeq m$ とすれば,

$$|p\text{-Ps}\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{m}} f(p) Y_m^l(\theta, \phi) \epsilon^{ij} a_{i,\mathbf{k}}^\dagger b_{j,-\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$$

と書ける. また生成される Ps の運動エネルギーは数 eV のオーダーであるから十分静止しているとみなして波動関数は $l = m = 0, p \simeq 0$ のものを用いる. 従って最終的な始状態の表达式は

$$|p\text{-Ps}\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} f(0) \epsilon^{ij} a_{i,0}^\dagger b_{j,0}^\dagger |0\rangle$$

と求まる.

一方終状態は光子が 2 つの状態であるから光子の消滅演算子を $c_{\mu,\mathbf{p}}$ 、偏光ベクトルを ϵ_a^μ などとすれば

$$|2\gamma\rangle = \epsilon_a^\mu c_{\mu,\mathbf{p}_1}^\dagger \epsilon_b^\nu c_{\nu,\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle$$

と書くことができる. ただし $a, b = \pm$ は偏光の足である.

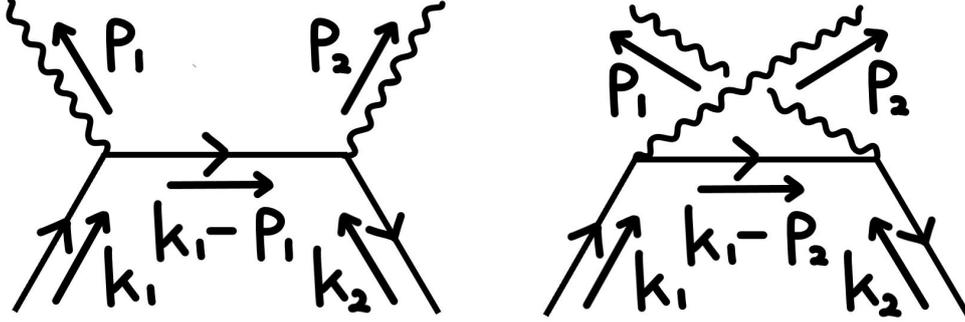
遷移振幅の計算

$|i\rangle = |p-P_s\rangle$, $|f\rangle = |2\gamma\rangle$ に対する遷移振幅 $\mathcal{M}(p-P_s \rightarrow 2\gamma)$ を求めればよい. これは始状態を $a_i^\dagger b_j^\dagger |0\rangle$ 、終状態を $|2\gamma\rangle$ とした時の遷移振幅 $\mathcal{M}_{ij}(e^-e^+ \rightarrow 2\gamma)$ を用いて

$$\mathcal{M}(p-P_s \rightarrow 2\gamma) = \frac{1}{\sqrt{m}} f(0) \epsilon^{ij} \mathcal{M}_{ij}(e^-e^+ \rightarrow 2\gamma)$$

と書ける. 従って $\mathcal{M}_{ij}(e^-e^+ \rightarrow 2\gamma)$ を求めればよい.

$e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$ の最低次のダイアグラムは次の2つである:



さて図のように運動量を置いた時、Feynmann ルールから偏光の足をつけた遷移振幅は次のように書ける:

$$i\mathcal{M}_{ij,ab}(e^-e^+ \rightarrow 2\gamma) = (-ie)^2 \epsilon_{\mu,a}^*(p_1) \epsilon_{\nu,b}^*(p_2) \bar{v}_i(k_2) \left[\gamma^\nu \frac{i(k_1 - p_1 + m)}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{i(k_1 - p_2 + m)}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \gamma^\nu \right] u_j(k_1)$$

ここでダイアグラムの一つ目と二つ目がそれぞれ式の一項目及び二項目に対応する.¹³

非相対論的極限として $k_1^\mu = k_2^\mu = (m, 0, 0, 0)$ とし、光子は back-to-back に出ることから $p_1^\mu = (m, 0, 0, m)$, $p_2^\mu = (m, 0, 0, -m)$ と書ける. また u, v をカイラル基底で表示すると、適当な 2 成分スピノル ξ_i 及び ξ'_i を用いて

$$u_i(k_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{k_1^\mu \sigma_\mu \xi_i} \\ \sqrt{k_1^\mu \bar{\sigma}_\mu \xi_i} \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \xi_i \end{pmatrix}, \quad v_i(k_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{k_2^\mu \sigma_\mu \xi'_i} \\ -\sqrt{k_2^\mu \bar{\sigma}_\mu \xi'_i} \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi'_i \\ -\xi'_i \end{pmatrix}$$

となる. ただし $\sigma_\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$, $\bar{\sigma}_\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma})$ ここで z 軸方向を量子化軸とする flipped spinor 基底をとれば、 ξ と ξ' は次のように書ける:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

さらに光子の偏光は次のようにとることにする:

$$\epsilon_{\mu,\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0), \quad \epsilon_{\nu,\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, \pm i, 0)$$

これらを代入すると、 $i\mathcal{M}_{ij,ab}(e^-e^+ \rightarrow 2\gamma)$ の表式の括弧の中は、

$$\begin{aligned} \gamma^\nu \frac{i(k_1 - p_1 + m)}{(k_1 - p_1)^2 - m^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{i(k_1 - p_2 + m)}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \gamma^\nu &= \gamma^\nu \frac{i(-m\gamma^3 + m)}{-2m^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{i(m\gamma^3 + m)}{-2m^2} \gamma^\nu \\ &= \frac{i}{2m} ([\gamma^\nu, \gamma^\mu] \gamma^3 + 2g^{\nu\mu} \mathbf{1}_4) \end{aligned}$$

¹³後と計算で具体的にも計算するが、ヘリシティの保存から $\mathcal{M}_{+-} = \mathcal{M}_{-+} = 0$ がわかる. また実験では光子の偏光は測定しないため、測定される遷移振幅は偏光についての平均として $|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2}(|\mathcal{M}_{++}|^2 + |\mathcal{M}_{--}|^2)$ で与えられる.

となる. ここで $\mu, \nu = 3$ が値を持たないため $\{\gamma^\mu, \gamma^3\} = 0$ であること及びクリフォード代数の定義式 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を用いた. それぞれの項に対して偏光ベクトルと縮約をとると、

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu,a}^*(p_1)\epsilon_{\nu,b}^*(p_2) [\gamma^\nu, \gamma^\mu] &= \epsilon_{1,a}^*(p_1)\epsilon_{2,b}^*(p_2) [\gamma^2, \gamma^1] + \epsilon_{2,a}^*(p_1)\epsilon_{1,b}^*(p_2) [\gamma^1, \gamma^2] \\
&= (-\epsilon_{1,a}^*(p_1)\epsilon_{2,b}^*(p_2) + \epsilon_{2,a}^*(p_1)\epsilon_{1,b}^*(p_2)) [\gamma^1, \gamma^2] \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}b - \frac{i}{2}a \\ \phantom{-\frac{i}{2}b - \frac{i}{2}a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\sigma^1, \bar{\sigma}^2] \\ \phantom{[\sigma^1, \bar{\sigma}^2]} \\ \phantom{[\sigma^1, \bar{\sigma}^2]} \\ [\sigma^1, \bar{\sigma}^2] \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{2}(a+b) \begin{pmatrix} -2i\sigma^3 \\ \\ \\ -2i\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= -(a+b) \begin{pmatrix} \sigma^3 \\ \\ \\ \sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= -(a+b) \mathbf{1}_2 \otimes \sigma^3 \\
\epsilon_{\mu,a}^*(p_1)\epsilon_{\nu,b}^*(p_2) \cdot 2g^{\nu\mu} \mathbf{1}_4 &= 2\epsilon_{\mu,a}^*(p_1)\epsilon_b^{\mu}(p_2) \mathbf{1}_4 = -(1+ab) \mathbf{1}_4
\end{aligned}$$

となるから、結局遷移振幅は

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{ij,ab}(e^- e^+ \rightarrow 2\gamma) &= \epsilon^{ij} (-ie)^2 \epsilon_{\mu,a}^*(p_1)\epsilon_{\nu,b}^*(p_2) \bar{v}_i(k_2) \frac{i}{2m} ([\gamma^\nu, \gamma^\mu] \gamma^3 + 2g^{\nu\mu} \mathbf{1}_4) u_j(k_1) \\
&= (-ie)^2 \bar{v}_i(k_2) \frac{i}{2m} (\epsilon_{\mu,a}^*(p_1)\epsilon_{\nu,b}^*(p_2) [\gamma^\nu, \gamma^\mu] \gamma^3 + \epsilon_{\mu,a}^*(p_1)\epsilon_{\nu,b}^*(p_2) \cdot 2g^{\nu\mu} \mathbf{1}_4) u_j(k_1) \\
&= -\frac{ie^2}{2m} \bar{v}_i(k_2) (-(a+b) \mathbf{1}_2 \otimes \sigma^3 - (1+ab) \mathbf{1}_4) u_j(k_1)
\end{aligned}$$

これより $\mathcal{M}_{ij,+} = \mathcal{M}_{ij,-} = 0, \mathcal{M}_{ij,++} = -\mathcal{M}_{ij,--}$ がわかるので、 $\mathcal{M}_{ij,++}$ について計算すれば十分である. 計算のために ϵ^{ij} と縮約しておく

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ij} \mathcal{M}_{ij,ab}(e^- e^+ \rightarrow 2\gamma) &= \frac{ie^2}{m} \epsilon^{ij} \bar{v}_i(k_2) (\mathbf{1}_2 \otimes \sigma^3 + \mathbf{1}_4) u_j(k_1) \\
&= \frac{ie^2}{m} [\bar{v}_1(k_2) (\mathbf{1}_2 \otimes \sigma^3 + \mathbf{1}_4) u_2(k_1) - \bar{v}_2(k_2) (\mathbf{1}_2 \otimes \sigma^3 + \mathbf{1}_4) u_1(k_1)] \\
&= -4ie^2
\end{aligned}$$

ここで次を用いた:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1(k_2) (\mathbf{1}_2 \otimes \sigma^3 + \mathbf{1}_4) u_2(k_1) &= m \begin{pmatrix} 0, -1, 0, 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2m \\
\bar{v}_2(k_2) (\mathbf{1}_2 \otimes \sigma^3 + \mathbf{1}_4) u_1(k_1) &= m \begin{pmatrix} 1, 0, -1, 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2m
\end{aligned}$$

これにより遷移振幅は

$$|\mathcal{M}(e^- e^+ \rightarrow 2\gamma)|^2 = \frac{1}{2} (|\epsilon^{ij} \mathcal{M}_{ij,++}|^2 + |\epsilon^{ij} \mathcal{M}_{ij,--}|^2) = 16e^4$$

と求まる. よって

$$|\mathcal{M}(\text{p-Ps} \rightarrow 2\gamma)|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{m}} f(0) \right)^2 |\epsilon^{ij} \mathcal{M}_{ij}(e^- e^+ \rightarrow 2\gamma)|^2 = \frac{1}{m} \frac{(\alpha m)^3}{\pi} \cdot 16e^4 = \frac{2\alpha^3 m^2 e^4}{\pi}$$

となる. ここで $f(0)$ は 1S 状態の波動関数の原点での値 $f(0) = \sqrt{\frac{(\frac{\alpha m}{2})^3}{\pi}}$ を代入した.

τ_p の計算

以上の結果を公式の積分形に代入する:

$$\begin{aligned}
\Gamma_p &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2P_{Ps}^0} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 \cdot 2p_1^0 2p_2^0} |\mathcal{M}_{ij}(e^- e^+ \rightarrow 2\gamma)|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_{Ps} - p_1 - p_2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2P_{Ps}^0} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 \cdot 2p_1^0 2p_2^0} |\mathcal{M}_{ij}(e^- e^+ \rightarrow 2\gamma)|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta(2m - p_1^0 - p_2^0) \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4m} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^6 \cdot 4E_1^2} \frac{2\alpha^3 m^2 e^4}{\pi} \cdot (2\pi)^4 \delta(2m - 2E_1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4m} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2 \cdot 4m^2} \cdot \frac{2\alpha^3 m^2 e^4}{\pi} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{p}_1 \delta(m - p_1^0) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4m} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2 \cdot 4m^2} \cdot \frac{2\alpha^3 m^2 e^4}{\pi} \frac{1}{2} \cdot 4\pi m^2 \\
&= \frac{m\alpha^5}{2}
\end{aligned}$$

これより $\tau_p = \frac{2}{m\alpha^5} \sim 123\text{ps}$ と求まる.

謝辞

本実験を行うに当たり, 指導教官の市川先生, TA の小田川さんには, 実験について多大なるご指導を賜りました. また, 線源を借りる際に鍵を貸してくださった高エネルギー物理学研究室の方々, ガウスメーターを貸してくださった P2 のの方々など, 沢山の方々にお世話になりました. この場をお借りして感謝申し上げます.

参考文献

- [1] O. Jinnouchi, S. Asai, T. Kobayashi, “Precision measurement of orthopositronium decay rate using SiO₂ powder ”
- [2] Y Nagashima et al, “Momentum-transfer cross section for slow positronium-He scattering ” 1998 J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 31 329
- [3] p1 2014 年度
- [4] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory”, Westview Press, 1995.
- [5] V G Baryshevsky, O N Metelitsa, and V V Tikhomirov “Oscillations of the positronium decay γ -quantum angular distribution in a magnetic field ”