

# 万有引力定数 $G$ の測定

京都大学理学部物理学第二教室 課題研究 P1

杉浦駿 佐地宏太 中田嘉信

2020年3月28日

## 目次

1	概要	2
2	原理	3
2.1	ねじれ振子 . . . . .	3
2.2	外場中のねじり振子 . . . . .	4
2.3	外場の具体的表式 . . . . .	4
2.3.1	微小角のねじれでかつ高さの差も十分小さいとき . . . . .	6
2.3.2	非線形振動 . . . . .	6
2.4	振子のねじれ以外の効果 . . . . .	7
3	装置	8
4	手順	14
5	結果	16
6	解析	17
6.1	周期の計算方法 . . . . .	17
6.2	実際の解析 . . . . .	18
7	考察	20
8	まとめ	21
補足 A	弾性理論	22

# 1 概要

1798年, Cavendish はねじれ秤を用いて地球の密度を決定する実験を行った [1]. これは約 1.8 m の天秤棒に 0.7 kg 程度の小鉛球を吊り下げ, 約 157 kg の鉛球を 2 つ用いて外場を作用させる大掛かりな実験であったが, この測定により, 地球の密度が水のそれに比して  $5.448 \pm 0.033$  倍<sup>\*1</sup>の値を持っていることが突き止められた. これは当時としてはかなり精度の高い測定である. この実験は, 地球密度のみならず, 万有引力定数をも決定することができるものであったが, 当時の Cavendish はその計算を行っていない.

万有引力定数  $G$  は, Newton の万有引力の法則  $F = GmM/r^2$  における比例定数として定義され, 普遍定数のひとつに数えられている. 地表近傍では, 地球からの引力は  $F = mg$  と書けるので,

$$G = \frac{gR^2}{M} = \frac{3g}{4\pi R\rho} \quad (1.1)$$

がわかる. ただし,  $g$  はその地点における重力加速度,  $R$  は地球の平均半径,  $\rho$  は地球の密度である. Cavendish は地球の平均直径として 41800000 ft を用いた<sup>\*2</sup>. ここでは,  $g$  として標準重力加速度を用い, 水の密度を  $999.972 \text{ kg m}^{-3}$  (4 °C, 標準大気圧下) として Cavendish の求めた比重を密度に換算したものを  $\rho$  に用いることとすると, 各パラメータが

$$g = 9.80665 \text{ m s}^{-2} \quad (1.2)$$

$$R \simeq 6.3703 \times 10^6 \text{ m} \quad (1.3)$$

$$\rho \simeq 5.448 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad (1.4)$$

と決定されるので,

$$G \simeq 6.746 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (1.5)$$

が得られる.

Cavendish から 200 年, 現在標準的に用いられている  $G$  の値としては,

$$G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (1.6)$$

がある (CODATA2018 推奨値). この測定精度 4 桁というのは, 基礎物理定数の中で最も悪い測定精度である. たとえば, 微細構造定数  $\alpha$  は 9 桁, 電子の  $g$  因子は 13 桁までの精度で測定が進んでいる. 万有引力定数の測定においては, 長さ, 質量, 時間の 3 つの計測精度を総合的に高めないと精度の改善が達成されない. にもかかわらずその現実的利益が薄いという理由で, こうした測定実験は積極的には取り組まれてこなかった. しかし近年では, インフレーションや重力波といった宇宙論的な動機, 逆 2 乗則の検証といった素粒子論的な動機もあり, 重力の精密測定への取り組みが活発化してきている [3].

現代において万有引力定数の値の決定に重要な寄与を果たした測定のひとつに, Luther と Towler による 1982 年の実験がある [4]. 彼らの実験においてもやはりねじれ秤が用いられた. 重力源となるおもり対がねじれ秤の平衡角度に沿った直線上にある場合の振動周期, および平衡角度と直交する直線上にある場合の振動周期をそれぞれ測定し, これらの振動の角振動数の 2 乗の差 (これが  $G$  に比例する!) を計算することによって  $G$  の値を求めた. これは time of swing 法と呼ばれるものである. Cavendish の装置と比べると, ねじれ秤の天秤棒は長さ約 29 mm, 重量 5 g 程度, 重力源のおもりは約 10.5 kg と大幅な「小型化」がなされた一方で, おもり

<sup>\*1</sup> 1798 年の論文で Cavendish が提出した比重の値は  $5.480 \pm 0.038$  であったが, 後に Baily によって「奇妙な」計算ミスが指摘され, 比重の値は  $5.448 \pm 0.033$  と修正された [2].

<sup>\*2</sup> 「厳密には, 地球の平均直径ではなく, この環境における重力と等しい引力を及ぼすような球の直径を用いるべきである. しかし, [鉛球が小鉛球に及ぼす重力と地球のそれとの比を考えるとときには] その違いを考慮する価値はない。」 ([1], p.510 脚注, 訳・[] 内は引用者)

の重量や直径が 8 桁の精度で測定されるなど、そのセットアップはかなり緻密なものとなった。最終的に彼らが得た  $G$  の値は

$$G = 6.6726(5) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (1.7)$$

である。

こうした先行研究を踏まえ、我々もまたねじり秤を用い、万有引力定数を測定することを目的とした実験を行った。Time of swing 法のように振動周期の測定によって  $G$  を得る方法を採用し、光てこを用いて変位を拡大することによって測定精度の向上を試みた。装置の設計から測定および解析方法の構築に至るまでを一から行い、2020 年 2 月 14 日から 3 月 11 日にかけて、計 11 回にわたる測定を行った。しかし、得られたデータを解析すると測定日によって異なる振動周期が得られてしまい、 $G$  のオーダーすらも再現できないという結果になってしまった。本論では、我々の用いた実験原理やセットアップ、解析方法等について解説したのち、周期の「時間依存性」について考察する。

## 2 原理

Cavendish の実験、Towler の実験 [5] を土台とした。Cavendish の実験ではおもりを置かない状態と置いた状態との変位角を求め、変位角から重力定数を測定するが\*3、今回の実験では変位角ではなくねじれ振子として、その周期をおもりの有り無しで重力の四重極成分を主成分としてトルクをかけることで周期の違いを生み、その違いから万有引力定数を測定した。

### 2.1 ねじれ振子

図 1 のように質量  $m$ 、ワイヤー中心軸周りの慣性モーメント  $I$  の物体 A が長さ  $l$ 、半径  $r$  の円柱状のワイヤー  $w$  に吊り下げられている場合を考える。但し、物体 A の重心はワイヤーの中心軸上にあると仮定する。

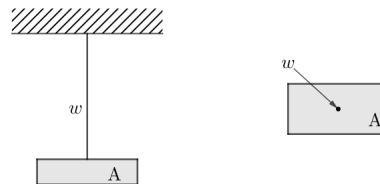


図 1: ねじれ振子 左：横から見た図，右：上から見た図

物体 A を静止した状態  $S$  からワイヤー中心軸周りにゆっくりと  $\theta_0$  だけ回転させてワイヤーにねじれをつけた状態を初期状態とする。このときの物体 A の運動は、ワイヤーについたねじれを復元力として次の運動方程式を満たす。但し、空気抵抗はここでは考えないものとする。

$$I\ddot{\theta} = -k\theta, k = \frac{H\pi r^4}{2l} \quad (2.1)$$

\*3 H. Cavendish は重力定数の測定ではなく地球の密度を測定することを目的としたが、後に重力定数の測定に用いられた。

ここで  $H$  はワイヤー  $w$  の剛性率,  $\theta$  は状態  $S$  からの変位角であり, 微小角とは限らない<sup>\*4</sup>. 従って  $\theta$  は初期状態からの時刻  $t$  を用いて

$$\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t, \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{I}} \quad (2.2)$$

と書くことができる. しかし, 実際には空気抵抗を考慮する必要があるので  $\theta$  の満たす運動方程式は次のように修正される.

$$I\ddot{\theta} = -k\theta - 2I\gamma\dot{\theta} \quad (2.3)$$

従って  $\theta$  は初期状態からの時刻  $t$  を用いて

$$\theta = \theta_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t, \omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (2.4)$$

となる.

## 2.2 外場中のねじり振子

次におもりをおくなどして外場を用意し, 外場中で 2.1 と同じ状況を考える. 但し,  $\theta$  を微小角であっても構わないものとし,  $\theta$  の満たす運動方程式が次のように書けるものと仮定する<sup>\*5</sup>.

$$I\ddot{\theta} = -(k + F)\theta - 2I\gamma\dot{\theta} \quad (2.5)$$

ここで, 空気抵抗を考慮に入れてある. この時には  $\theta$  は初期状態からの時刻  $t$  を用いて

$$\theta = \theta_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_F t, \omega_F \equiv \sqrt{\omega_0^2 + \frac{F}{I} - \gamma^2} \quad (2.6)$$

となる. ここで (2.4), (2.6) より

$$I(\omega_F^2 - \omega^2) = F \quad (2.7)$$

となる. 従って  $\theta$  を微小角であっても構わないものとし, ねじり振子へのトルクが  $-F\theta$  で書けると仮定すれば,  $\omega, \omega_F, I$  を測定することで外場の変位角への作用を知ることができる. 次節ではねじり振子の周りの適当な位置におもりを置いた際, 上記の仮定を満たすことを見るときに,  $F$  の具体的な表式を得る. また,  $F$  には重力定数  $G$  を含むと共に  $G$  のほかに測定可能な量しか含まれていないことを見る.

## 2.3 外場の具体的表式

状態  $S$  に対して図 2 のように質量  $M$  の球状で, 密度が一様なおもりを 2 つ固定したとする. このとき, 2 つのおもりの作る重力場のねじり振子へのトルクの表式がどういったものとなるかを考える. ここで, 2 つのおもりの重心  $G_{M_1}, G_{M_2}$  と物体  $A$  の重心  $G_A$  の位置関係について,  $G_{M_1}, G_{M_2}$  はワイヤー  $w$  に関して対称になるように,  $G_A$  を原点に選んだとき,  $G_{M_i}$  ( $i = 1, 2$ ) の高さを鉛直下向きを正として  $h$ , 水平方向の距離を  $R$  とする. 今, 重力場は Newton 重力で十分良い近似となるので Newton 重力を考える. 以下, 物体  $A$  の形状を円柱とする<sup>\*6</sup>. 今, 設置したおもりは球状であるので, おもりの作るおもりの外部での重力場は点  $G_{M_i}$  に質量  $M$  の質点を設置して作られる重力場と等価である<sup>\*7</sup>. 従って変位角  $\theta$  における振子には重心の高さの

<sup>\*4</sup> (2.1) における  $k$  の表式については補足 A にて解説することとする.

<sup>\*5</sup> このとき, 線形微分方程式という仮定のみならず  $k$  の値が外場によって変化することはないということも仮定している.

<sup>\*6</sup> 実験では円柱の真鍮に, ワイヤーを結ぶと共にレーザー光を反射するための鏡面の役割をもったステンレスを付属させている. 本来, 物体  $A$  は真鍮とアルミニウムの合成を考えなければならないが, 質量比とその位置からステンレスの効果は測定誤差に比べ無視できる程度の系統誤差と扱うことができると推定されるので以下ではステンレスとおもりの相互作用を無視して考える.

<sup>\*7</sup> より一般には密度が同心球状に変化しても構わない. しかし, おもりの形状が球状でなければおもりの作る重力場の多重極成分が振子に影響することとなり, 解析が複雑となる. 今回の実験ではおもりの密度分布を調べるには至らなかったが, 形状は球である.



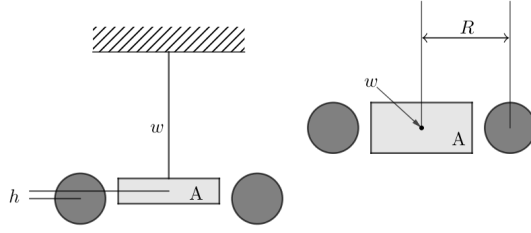


図 2: ねじれ振子とおもり 左: 横から見た図, 右: 上から見た図

違いに起因するおもりからの引力と, 変位角によるトルクがかかる. また, 以下では片方のおもりからの寄与のみを考え, 対称性を用いて 2 つのおもりがある場合の結果を述べることにする. まず, 振子におけるポテンシャルを考えるにあたり円筒座標で考える. 図 3 のような環状の領域におけるある 1 点をとり, そこでのポテンシャル  $\phi_{\text{ring}}$  を考えると,  $\rho$  を振子の質量密度とし,

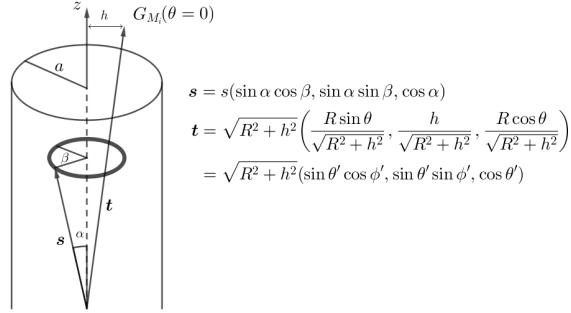


図 3: ねじれ振子 おもりの影響

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ring}} &= \frac{GM\rho}{\sqrt{s^2 + t^2 - 2st \cos \chi}} \left( z = s \cos \alpha, t = \sqrt{R^2 + h^2}, \cos \chi = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}}{|\mathbf{s}||\mathbf{t}|} \right) \\ &= \frac{GM\rho}{t} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{s}{t} \right)^l P_l(\cos \chi) \\ &= \frac{GM\rho}{t} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{s}{t} \right)^l \left( P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \alpha) P_l^m(\cos \theta') \cos m(\beta - \phi') \right) \quad (2.8) \end{aligned}$$

ここで, 多重極展開をしたのちに Legendre 多項式の加法定理を用いた. また,  $\theta', \phi'$  は次の通りである.

$$\theta' = \arccos \left( \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right), \phi' = \arccos \left( \frac{R \sin \theta}{\sqrt{R^2 \sin^2 \theta + h^2}} \right) \quad (2.9)$$

振子全体に関するポテンシャル  $\phi$  を求める際には  $r = s \sin \alpha, z = s \cos \alpha$  として次のように積分すればよい.

$$\begin{aligned} \phi(R, h, \theta; a, L) &= \int r dr dz d\beta \phi_{\text{ring}}(r, z, \beta; R, h, \theta) \\ &= \frac{2\pi GM\rho}{t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos \theta')}{t^l} \int_0^a r dr \int_{-L/2}^{L/2} dz s^l P_l(\cos \alpha) \\ &= \frac{2\pi GM\rho}{t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos \theta')}{t^l} \int_V P_l(x) s^{l+2} dx ds \quad (x = \cos \alpha) \quad (2.10) \end{aligned}$$

ここで、円柱状の振子を半径  $a$ 、高さ  $L$  とした。さらに  $\rho = \frac{m}{\pi a^2 L}$  を代入し、 $s$  で積分すると共に、Legendre 多項式の偶関数、奇関数性に注意すれば<sup>\*8</sup>、 $u = L/\sqrt{L^2 + 4a^2}$  として

$$\begin{aligned}\phi(R, h, \theta; a, L) &= \frac{2GMm}{a^2 L} \sum_{l=\text{even}}^{\infty} \frac{P_l(\cos \theta')}{(l+3)t^{l+1}} \left[ \frac{L^{l+3}}{2^{l+3}} \left( -\int_{-1}^{-u} - \int_1^u \right) \frac{P_l(x)}{x^{l+3}} dx + a^{l+3} \int_{-u}^u \frac{P_l(x)}{(1-x^2)^{\frac{l+3}{2}}} dx \right] \\ &= \frac{2GMm}{L} \sum_{l=\text{even}}^{\infty} \frac{P_l(\cos \theta')}{(l+3)} \left( \frac{L}{2\sqrt{R^2 + h^2}} \right)^{l+1} \left[ \frac{2u^2}{1-u^2} \int_u^1 \frac{P_l(x)}{x^{l+3}} dx + \frac{2P_{l+1}(u)}{(l+1)u^{l+1}} \right] \quad (2.11)\end{aligned}$$

また、おもりが2つあることを考慮し、ここまでの結果をまとめると、

$$\phi_{\text{tot}}(R, h, \theta; a, L) = \sum_{l=\text{even}}^{\infty} \phi_l(R, h, \theta; a, L) \quad (2.12)$$

$$\phi_l(R, h, \theta; a, L) = \frac{8GMmP_l(\cos \theta')}{L(l+3)} \left( \frac{L}{2\sqrt{R^2 + h^2}} \right)^{l+1} \left[ \frac{u^2}{1-u^2} \int_u^1 \frac{P_l(x)}{x^{l+3}} dx + \frac{P_{l+1}(u)}{(l+1)u^{l+1}} \right] \quad (2.13)$$

$$\theta'(h, \theta) = \arccos \left( \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right), u = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4a^2}} \quad (2.14)$$

### 2.3.1 微小角のねじれでかつ高さの差も十分小さいとき

特に  $\theta$  が微小角でかつ  $h \ll R$  のとき  $\cos \theta' = 1 - \mathcal{O}(\theta^2, (\frac{h}{R})^2)$  なので、ワイヤー中心軸周りのトルク  $T$  は

$$\frac{d}{dx} P_l(x) = \frac{l(l+1)}{2} x + \mathcal{O}(\theta^2, (\frac{h}{R})^2) \quad (l = \text{even}, x = 1 - \varepsilon) \quad (2.15)$$

を用いることができ、

$$T = \sum_{l=\text{even}}^{\infty} T_l + \mathcal{O}(\theta^2, (\frac{h}{R})^2) \quad (2.16)$$

$$T_l = \frac{-4l(l+1)GMm\theta}{(l+3)L} \left( \frac{L}{2R} \right)^{l+1} \left[ \frac{u^2}{1-u^2} \int_u^1 \frac{P_l(x)}{x^{l+3}} dx + \frac{P_{l+1}(u)}{(l+1)u^{l+1}} \right] \quad (2.17)$$

従って、 $\theta$  が微小角でかつ  $h \ll R$  のとき、 $\mathcal{O}(\theta^2, (\frac{h}{R})^2)$  を無視すれば (2.5) における  $F$  は

$$F = \frac{4GMm}{L} \sum_{l=\text{even}}^{\infty} \frac{l(l+1)}{l+3} \left( \frac{L}{2R} \right)^{l+1} \left[ \frac{u^2}{1-u^2} \int_u^1 \frac{P_l(x)}{x^{l+3}} dx + \frac{P_{l+1}(u)}{(l+1)u^{l+1}} \right] \quad (2.18)$$

であり、(2.7) より  $\omega, \omega_F, M, m, L, a, R$  を測定すれば  $G$  の値が  $\mathcal{O}(\theta^2, (\frac{h}{R})^2)$  と測定誤差に由来する誤差の範囲で求めることができる。

### 2.3.2 非線形振動

2.3.1 にて、 $\theta$  が微小角でかつ  $h \ll R$  としたが、この条件を満たしていない場合の考察を行う。このときには  $L \ll R$  とみなせる場合において数値的に近似解が得られる。この場合には、(2.12)、(2.13) から分かるように  $l$  の高次項を摂動として扱い、 $l = 2$  の主要項からの補正を考えればよい。特に、 $T_l$  の  $l = 2, 4, 6$  の結果を書く

$$T_2 = \frac{GMm}{4\sqrt{R^2 + h^2}} \frac{R \sin 2\theta}{\sqrt{R^2 + h^2}} \frac{L^2 - 3a^2}{R^2 + h^2} \quad (2.19)$$

$$T_4 = T_2 \left( \frac{L}{2\sqrt{R^2 + h^2}} \right)^2 \frac{L^4 - 10L^2 a^2 - 10a^4}{2L^2(L^2 - 3a^2)} (7 \cos^2 \theta' - 3) \quad (2.20)$$

$$T_6 = T_2 \left( \frac{L}{2\sqrt{R^2 + h^2}} \right)^4 \frac{L^6 - 21L^4 a^2 + 70L^2 a^4 - 35a^6}{8L^4(L^2 - 3a^2)} (99 \cos^4 \theta' - 90 \cos^2 \theta' + 15) \quad (2.21)$$

\*8 加えて積分公式  $\int \frac{P_l(x)}{(1-x^2)^{\frac{l+3}{2}}} dx = \frac{1}{l+1} \frac{P_{l+1}(x)}{(1-x^2)^{\frac{l+1}{2}}} + \text{const.}$  を用いた。

このとき、運動方程式は

$$I\ddot{\theta} + 2I\gamma\dot{\theta} + I\omega_0^2\theta + F_2 \sin 2\theta = f(\sin \theta, \cos \theta) \quad (2.22)$$

の形であって、

$$F_2 = \frac{GMm}{4\sqrt{R^2+h^2}} \frac{L^2-3a^2}{R^2+h^2} \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \quad (2.23)$$

$$f(\sin \theta, \cos \theta) = F_2 \sin 2\theta (F_4(\cos^2 \theta) + F_6(\cos^2 \theta) + \dots) \quad (2.24)$$

である。ここで、 $F_l$  ( $l = 4, 6, \dots$ ) は  $\phi_l$  による寄与とした。すなわち

$$F_4(\cos^2 \theta) = \left( \frac{L}{2\sqrt{R^2+h^2}} \right)^2 \frac{L^4 - 10L^2a^2 - 10a^4}{2L^2(L^2 - 3a^2)} (7 \cos^2 \theta' - 3) \quad (2.25)$$

$$F_6(\cos^2 \theta) = \left( \frac{L}{2\sqrt{R^2+h^2}} \right)^4 \frac{L^6 - 21L^4a^2 + 70L^2a^4 - 35a^6}{8L^4(L^2 - 3a^2)} (99 \cos^4 \theta' - 90 \cos^2 \theta' + 15) \quad (2.26)$$

このとき解  $\theta$  を  $\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)}$ ,  $\theta^{(1)} \ll \theta^{(2)}$  の形に書き、逐次近似法で解くこととなる。

## 2.4 振子のねじれ以外の効果

2.1 やそれ以降では振子はねじれる以外の運動を考えてこなかったが、ここで図4のようにねじれる方向でない、一様重力による振子の運動や、天井  $C$  という外部環境の影響を考える [6]。但し、簡単のため一様重力による振子の運動ではその振れ角は十分に小さく、また天井  $C$  が振動するなどしていてもその振動は摂動的に扱うことができるものとする。また、簡単のためおもりなどの外場は考えないものとする。この場合、

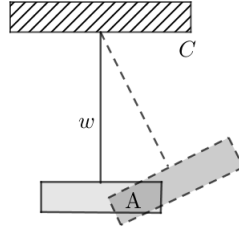


図4: ねじれ以外の効果

ワイヤーの断面の様子が時間変化することで、ねじり剛性  $k$  が時間変化することを考慮し、物体 A の運動方程式は次の通りである。

$$I\ddot{\theta} = -k(t)\theta - 2I\gamma\dot{\theta} \quad (2.27)$$

$k(t)$  の関数形は (A.18) および表5にあるような Prandtl の応力関数  $\chi$  の関数形より定まる。例えば  $t = 0$  では断面が半径  $r$  の円形ワイヤーが何らかの影響を受けてその断面が時刻  $t$  では一様に半軸  $a(t)$ ,  $b(t)$  の楕円形となっていたとする。但し、断面積は時刻によらず一定であるとする。このとき、 $a(t)b(t) = r^2$  より

$$k(t) = \frac{H\pi a^2 r^6}{l(a^4 + r^4)} \quad (2.28)$$

となる。特に  $k(t) = k - 2\kappa \sin \xi t$  のとき、 $\theta$  については Mathieu 関数が解となるが、一般に  $k$  が時間変化するような場合、その厳密解を解析的に求めることはできないことが多く、摂動的に求めることとなる。

### 3 装置

装置についての説明に入る。まず以前（2013年度）の実験で使われていた太さ 0.1mm のタングステンワイヤーに予備があったため、それを振り子の腕として用いることにした。また、タングステンワイヤーの引っ張り強度から吊るせる重りの質量を約 1kg と見積もった。これについては後でワイヤー特性の項目として考察する。続いて新たに用意したものを列挙していく。我々の実験では光てこ<sup>\*9</sup>を用いて高精度測定を行うことを目標とするため、変位を振り子から離れて測定する必要がある。さらに空気抵抗による振動の減衰を避ける目的で真空内に振り子を設置することにした。これら両方に適うよう以下のようなアクリルパイプを用意した（図 5）。式 (2.5) によればワイヤーが長いほど外力（重力）に対するねじれ応力の効果が小さくなる、つまり重力の影響が大きくなる。しかし、屋内で扱いやすいサイズであるほうが好ましいだろうということで長さ 1000mm、内径 100mm の筒を使うことにした。また、この規格は量産されているため、オーダーメイドで作るよりも安上がりであるところにも利点があった。アクリルパイプの厚さに関しては、内径  $2r$  [mm]、厚さ  $t$  [mm] の薄肉円筒の限界外圧  $P$  [Pa] の表式が、筒を構成する素材のヤング率を  $E$  [Pa]、ポアソン比を  $1/m$  として

$$P = E \left[ \frac{m^2}{4(m^2 - 1)} \right] \left( \frac{t}{r} \right)^3 \quad (3.1)$$

と与えられることから [7]、内径 100mm のアクリルパイプ（ヤング率 2400 ~ 2900MPa、ポアソン比 0.35）を代入すると

$$2400 \frac{1/0.35^2}{4(1/0.35^2 - 1)} \left( \frac{5}{50} \right)^3 = 0.6837\text{MPa} > 0.1013\text{MPa} \quad (3.2)$$

より、厚さ 5mm で十分、大気圧に耐えられる計算となる。

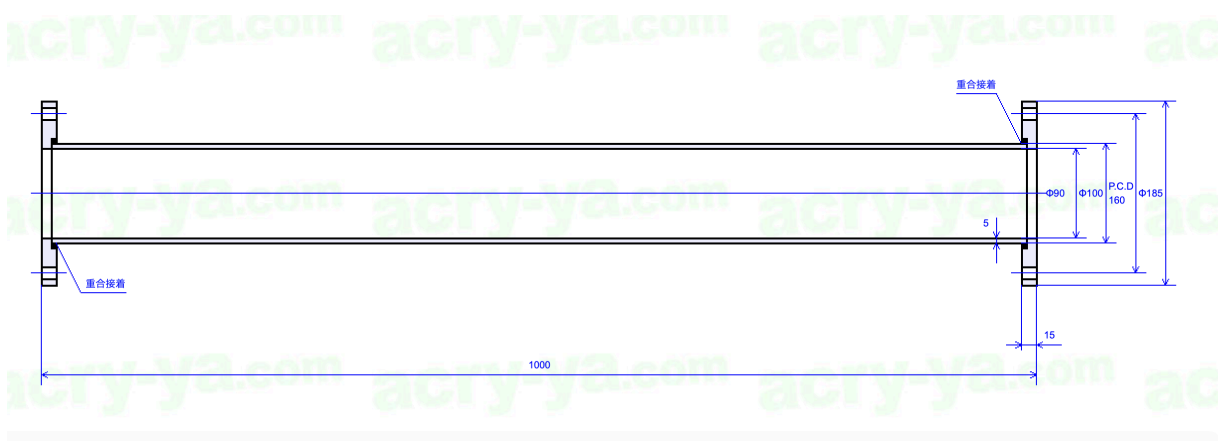


図 5: アクリルパイプ

規格説明用の図面は 3D CAD ソフト「Inventor」を用いて作成した。図 6 は中に吊り下げられる円柱状の重りである。鉛に比べれば重さは劣るが、傷のつきにくい真鍮製のものを選んだ。

<sup>\*9</sup> 「光てこ」とは、変動部分に取り付けられたミラーに光を当て反射光を遠方に投影することで変位を視覚的に増大させて観測精度を上げる技術のことである。

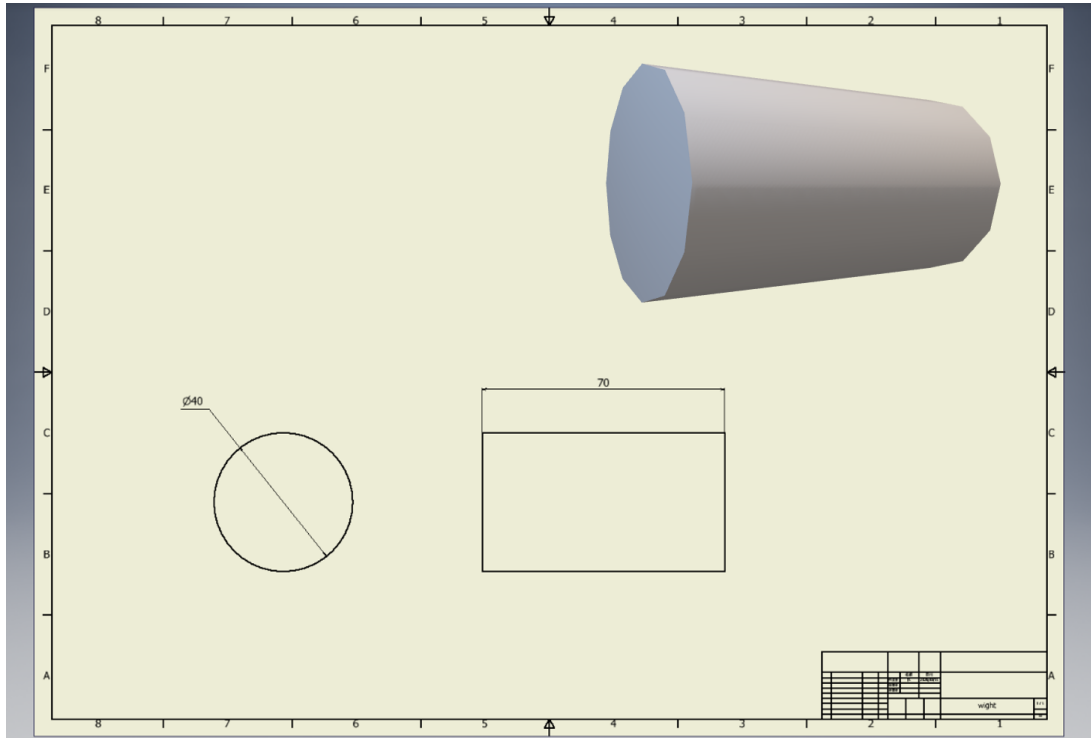


図 6: 規格「重り小」(真鍮)

円柱の直径と高さについては, ワイヤーによる復元力に対し重力の影響が最も顕著に現れるよう選んだ [図 7].

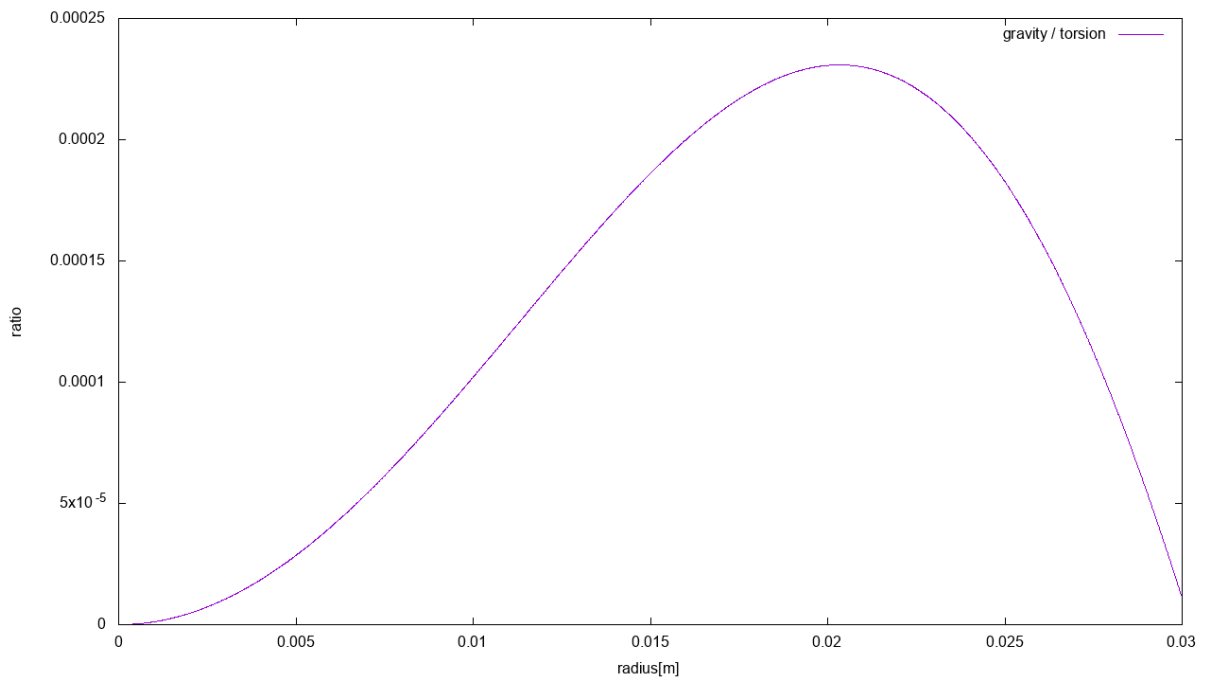


図 7: ねじれ応力に対する重力の大きさの半径依存性

続いて光てこを実現するための反射鏡である. 我々の実験では変位の詳しい測定はしないが, センサーの空間的広がりを軽減する働きがある.

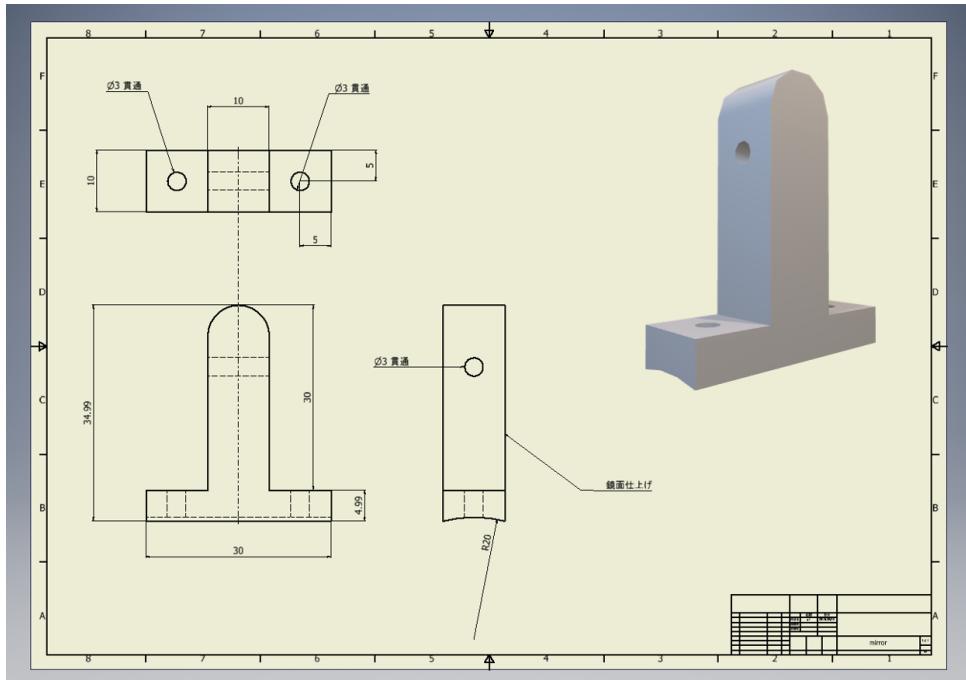


図 8: 規格「反射鏡」(ステンレス)

反射鏡面の加工は鏡面仕上げを依頼していたが、加工面に残る縦方向の筋により反射光が横方向に広がってしまい、光の通過時刻に幅が出てしまうという懸念から、市販の「ピカール金属磨き」を用いて鏡面加工の精度をあげる工夫を施した。

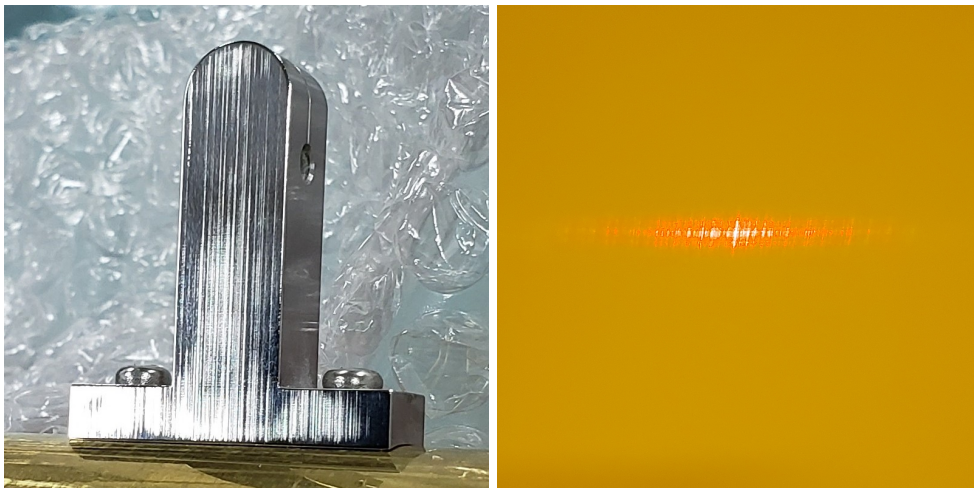


図 9: 元の反射鏡とその反射像

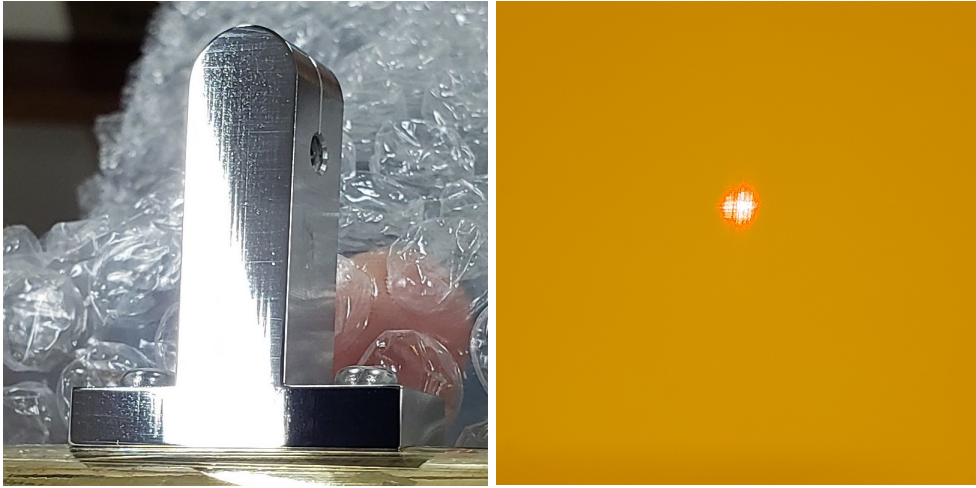


図 10: 磨いた後の反射鏡とその反射像

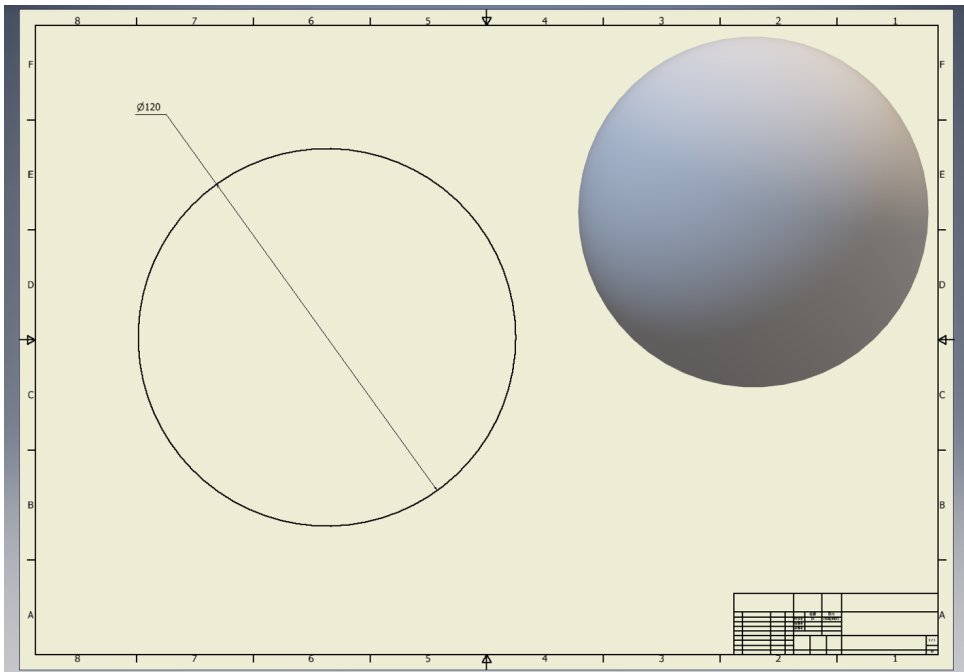


図 11: 規格「重り大」(鉛)

重力源として鉛球（約 10kg）をふたつ用意した. 直径 120mm という規格で発注しているため重さは測定から決める必要があった.

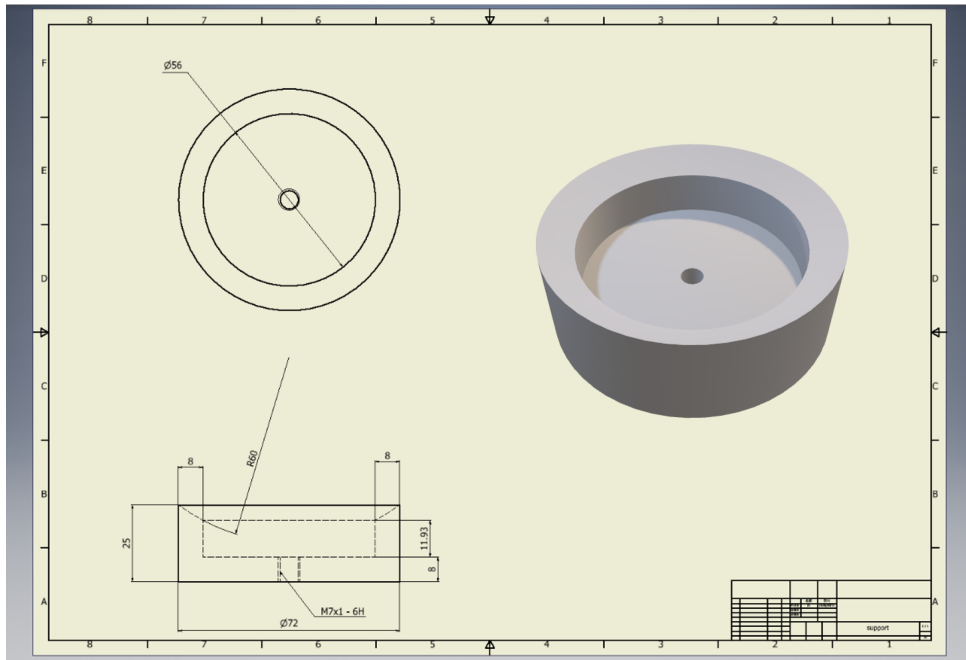


図 12: 規格「重り支え」(PLA 樹脂)

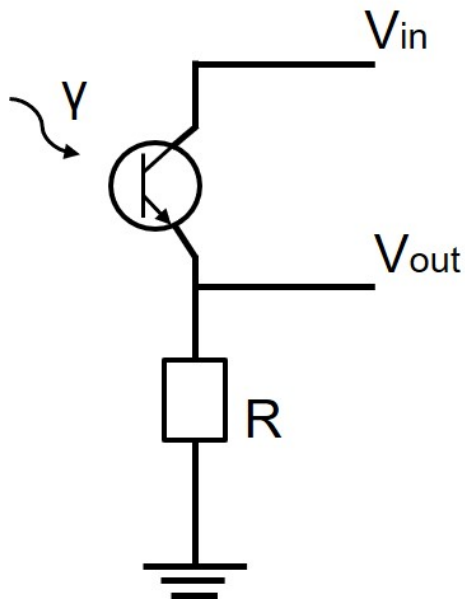


図 13: フォトトランジスタの回路図

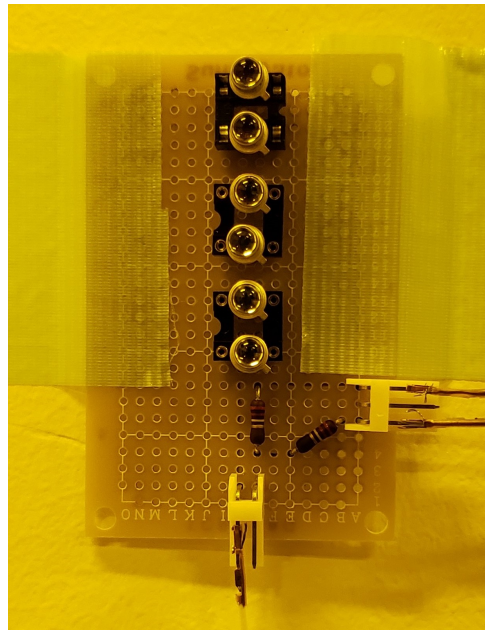


図 14: 実際に作成した光センサ

フォトトランジスタでは外部からの光がトランジスタの足のひとつの役割を担っており、外部からの光を受けることで入力電圧に対し抵抗値に応じた出力電圧を返す仕組みとなっている。今回の実験に用いたフォトトランジスタは東芝フォトトランジスタ「シリコン NPN エピタキシャルプレーナ TPS601A(F)」である。図 14 にフォトトランジスタが複数見受けられるのは、横揺れによる反射光の大きな上下動を受光領域に収めるためである。その他に我々が発注したものは別に用意してもらったものとして防振台と真空ポンプがある。





図 15: 防振台



図 16: 防振台用の空気ポンプ



図 17: 真空ポンプ

以上が用意した装置に関する説明である. 最後に解析に必要なデータを一覧にまとめておく.

表 1: 周期を除く解析に必要なデータ

物理量	記号	値
重り小の質量	$m$	0.776(2) kg
反射鏡の質量	$m_{mirror}$	0.03267(2) kg
円柱重りの高さ	$L$	70.00(5) mm
円柱重りの半径	$a$	40.00(5) mm
重り大の質量	$M$	10.19(2) kg
重り間の重心距離	$R$	0.1500(1) m

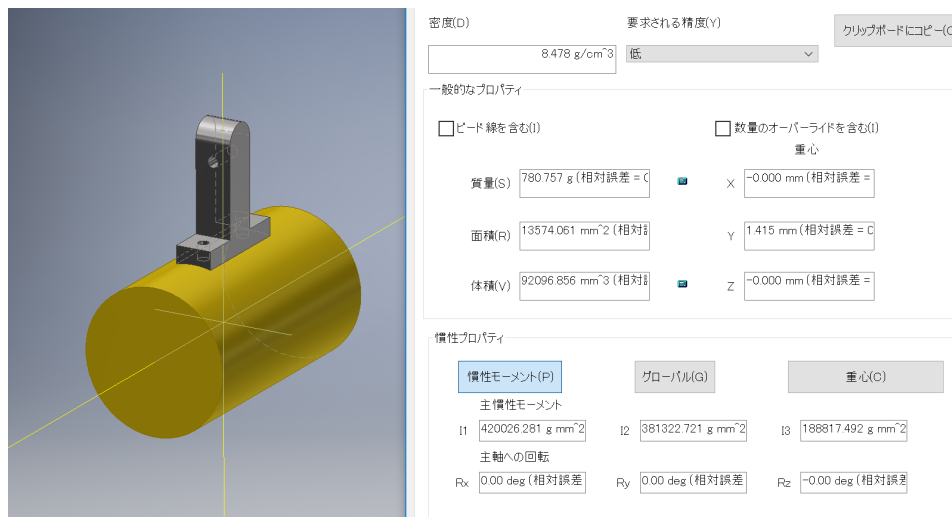


図 18: 重り小の慣性モーメント

## 4 手順

装置の組み立ては以下の流れで行った。

### 1. 防振台の設置

まず、光を投影する壁と防振台の上に乗せる予定の亚克力パイプとの間に障害物が入らないよう、防振台を動かす。続いて防振台の説明書に従って水平を確かめながらキャスターをすべて地面から浮かす。さらに空気圧制御用のレギュレータを介して防振台用の空気ポンプと接続できれば防振台の設置は完了である。空気ポンプのバルブを開けば防振台が浮く。

### 2. 吊るす重りの組み立て

円柱重りと反射鏡をねじ止めする。この際、反射鏡面に触れぬよう注意する必要がある。続いてワイヤーの準備をする。亚克力パイプ内に収まるよう 90cm 程度の適当な長さでワイヤーをカットし、片方に小さな輪っかをあらかじめ作っておく。反射鏡上部に空いている穴に輪っかをくぐらせたなら、反対の端をくぐらせた輪っかに通し引き上げることで円柱と反射鏡を合わせた部分（重り小）を吊ることができる。

### 3. 重り小を亚克力パイプ内に入れる

前の手順で作った重り小から延びるワイヤーの端にフックを取り付ける。ワイヤーをフックに結ぶ際、亚克力パイプの高さと比較しながら実際の高さを検討すると良い。フックにワイヤーを結ぶことができたならフックにさらにビニールひもを結び、ビニールひもを亚克力パイプ内に通す。これはパイプ内に重りを降ろすはずみでパイプの内側を傷つけないためである。下側のフランジの上にクッションをひき、その上に重り小とワイヤー、フックをまとめて乗せ亚克力パイプをかぶせ、下のフランジをボルトとナットで固定する。フランジとパイプの間にワイヤーが巻き込まれないよう注意する。その後、防振台の中央にパイプを立てて設置する。

### 4. 重りを吊るす

亚克力パイプ内を通るビニールひもを引きフックがパイプから出るまで持ち上げる。フックを保持する係とフランジを回す係にわかれ、ワイヤーを切らぬよう慎重にフックを上側のフランジに固定する。上側のフランジも下と同様、ボルトとナットを用いてパイプと固定できれば、重りを吊るす工程は終わりである。

### 5. パイプの仮固定

上側のフランジに真空用のホースを指し、防振台とパイプとをビニールひもで仮固定する。地震などによっ

てパイプが倒れ, 装置が破壊されることを防ぐためである. 真空ポンプはスイッチ一つで作動する.

#### 6. 光源とセンサーの設置

重り小の反射鏡部分に光が当たるようレーザー光源の高さを調整しながら設置し, その反射像の映る壁にセンサーをテープで固定する.

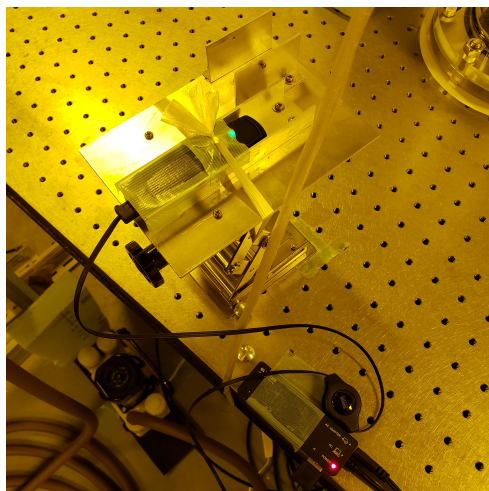


図 19: 固定されたレーザー光源

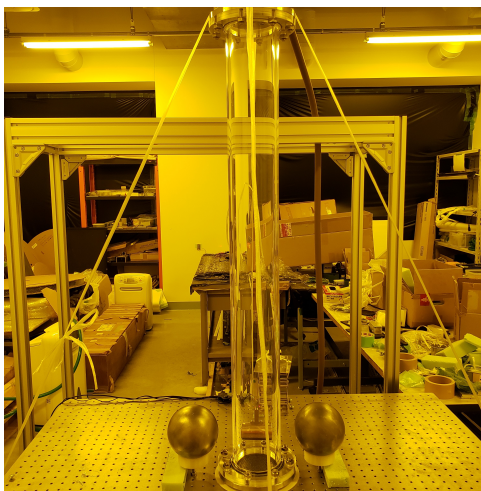


図 20: 装置の外観

以上のようにして装置の設置が終われば, 中の重り小に初期位相となるねじれを与えることで測定ができる.

## 5 結果

我々は2月中旬から3月上旬にかけて周期の測定を行った。以下は測定時の状況である<sup>\*10</sup>。

表 2: 測定条件

データ名	重り支え	重り大	防振台	真空引き	測定時間
0214_2	なし	なし	あり	あり	86400
0221_1	-	-	-	-	5
0221_2	なし	なし	なし	あり	172800
0226_1	あり	あり	あり	なし	7200
0227	あり	あり	バルブ閉じ	スイッチ OFF	54000
0228_1	あり	なし	バルブ閉じ	スイッチ OFF	7200
0304	あり	なし	バルブ閉じ	スイッチ OFF	86400
0305	あり	あり	バルブ閉じ	スイッチ OFF	72000
0306	あり	なし	バルブ閉じ	スイッチ OFF	86400
0308	あり	あり	バルブ閉じ	スイッチ OFF	86400
0309	あり	なし	バルブ閉じ	スイッチ OFF	86400
0311	あり	あり	バルブ閉じ	スイッチ OFF	45000

取得時間	usleep	備考
5432	1000	usleep は $\mu\text{sec}$ のプログラム休止
5	10	ラズベリーパイの clocktest
6333	10	
7138	800	
39181	800	振動をできる限り絶つため換気扇も切った
7090	800	換気扇 OFF
30622	800	換気扇 OFF_開始 15 °C-終了 10 °C
35251	800	換気扇 OFF_開始 14 °C-終了 12 °C
75302	800	換気扇 OFF_開始?°C-終了 12 °C_ワイヤー手入れ
32015	800	換気扇 OFF_開始 14 °C-終了 15 °C
56127	800	換気扇 OFF_開始 15 °C-終了 15 °C
28139	800	換気扇 OFF_開始 15 °C-終了 15 °C

次節では各データを解析し、定数導出の最後のピースとなる周期を求める。

<sup>\*10</sup> 「バルブ閉じ」は防振台に空気の残った状態でバルブだけを閉じ、追加で空気が送り込まれることのないようにした状態。  
「スイッチ OFF」は真空ポンプのスイッチだけを切り、ホースは外さないためごくわずかずつ空気の流入を許す状態。

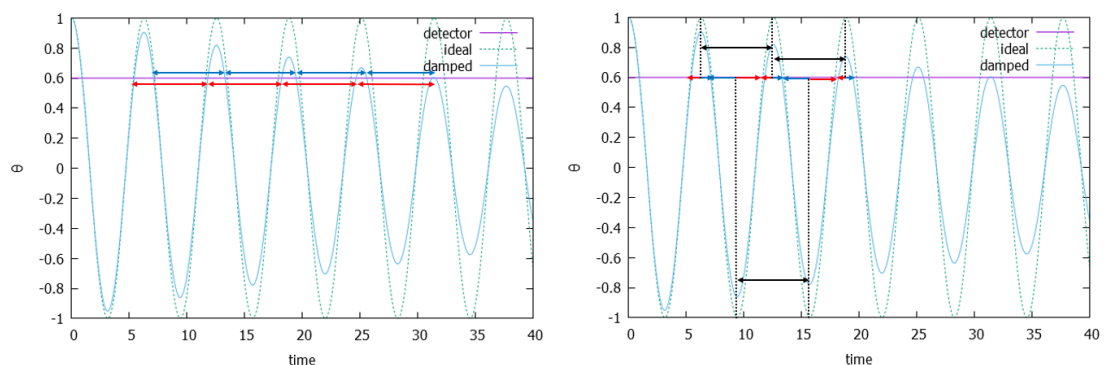
## 6 解析

前述のとおり,  $\omega$  および  $\omega_F$ , すなわち外場がないときとあるときそれぞれの振動の周期  $T, T_F$  を測定することができれば, 万有引力定数  $G$  の値を求めることができる ((2.7),(2.18) を見よ) . そこでここでは, 測定により得られた生データから周期を求めるために我々が用いた方法, およびそれによって得られた解析結果を説明する.

### 6.1 周期の計算方法

我々が取得できる生データは, レーザー光線の反射像が光センサー上を通過したときの時刻である. 我々の用いたセンサーには空間分解能がなく, 反射像がセンサーのどの部分を通っているのかという情報は得られないため, 振動全体をフィッティングすることによって周期を求めるという方法は現実的でない. そのため, 各通過時刻の差を取るによって周期を求めることを考える. 理想的には単純な差を取ることで周期を求められるはずであるが, 現実の解析においては, 振動の減衰, 光センサーおよび反射像の空間的広がり, 振子の横揺れ等といった問題を考慮せねばならない.

まず, 減衰振動によって生じる問題を考える. 図 21 を参照されたい. 図 (a) において, 紫色の実線が光センサーを表す. 我々がデータとして得られるのは, 光センサーを表す直線と減衰振動を表す曲線 (水色の実線) との交点の時刻である. 単にこれら通過時刻の差を取ることで振動の周期を求めようとする, 計算された「周期」の一方は次第に短くなり, 他方は次第に長くなるということが起こる. 図を見れば明らかなように, これは計算上生じた誤りであって, 実際の物理を反映したものではない. これを補正するためには, 隣接して得られたふたつの通過時刻を平均し, それらの差を以て周期とすればよい (図 21(b)). もちろん, 光センサーがちょうど振動中心の位置に来るように振動を与えた場合にはこうした問題は考慮する必要はないが, 我々の実験では手で初期位相を与えているため, そのような状況を用意することは現実的ではない.



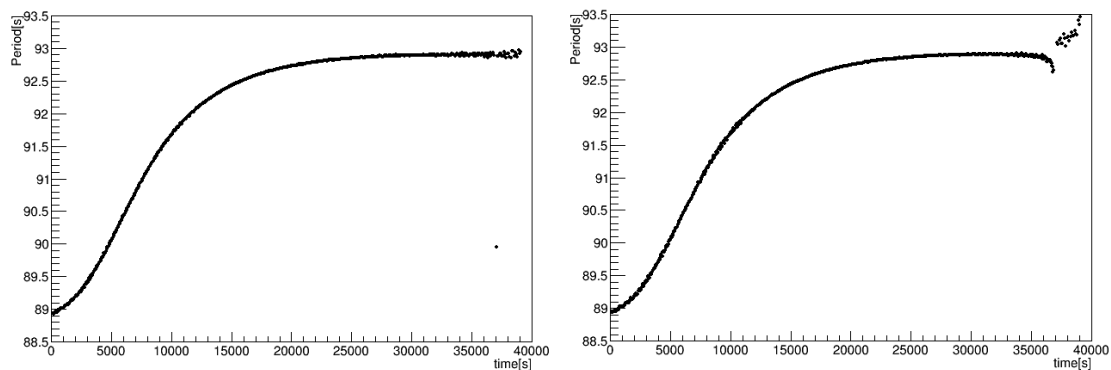
(a) 各通過時刻の差によって計算された「周期」の一方は次第に短くなり (青矢印), 他方は次第に長くなる (赤矢印). (b) 隣接する通過時刻を平均したものの差を取るによって周期を計算すれば, 正しい値を得ることができる.

図 21: 減衰振動の解析のための概念図.

ところで, この節では光センサーが反射像を検出した時刻を指すのに「通過時刻」という言葉を用いてきたが, 実際の解析においてこの時刻を定めるのはそれほど容易ではない. これは主に上述した「光センサーおよび反射像の空間的広がり」に起因する問題である. 実際の実験において, レーザー光線の反射像が光センサー上を通過したタイミングで取得される時刻データはただ一点のものではない. センサーにも反射像にも大きさがあるために, 実際に得られる時刻データには幅ができてしまう. 一度の通過で得られるデータ数およびその時間幅は実験開始からの時間 (すなわち, 振動の減衰の程度) によって変わるが, 我々のセットアップでは, 反射像が光センサー上を一度通過するたびに数百~数千個のデータが得られ, 大きいときには 5 秒程度の時間幅を持つ

ことになる。どのようにこれらのデータから通過時刻を決定するかによって、計算される周期の値は変わり得るのである。我々は通過時刻の候補として、「反射像が光センサー上を一度通過したときに得られたすべての時刻データの平均」と「反射像が光センサー上を一度通過したときに得られた時刻データのもっとも先頭のもの」とを検討することとした。実際に得られたデータについて、これらの定義によって通過時刻を定めて周期を求めた解析の一例を図 22 に示す。これを見ると、後者の定義を用いると、測定終盤に取得されたデータから周期を計算すると不自然な振る舞いが現れてしまっていることがわかる (図 (b))。他方、前者の定義を用いた場合にはそのような挙動は見られない (図 (a))。我々はこれを計算上の問題に起因する非物理的な振る舞いであると考え、通過時刻の定義として「反射像が光センサー上を一度通過したときに得られたすべての時刻データの平均」を採用することとした。

また、我々の実験では手で初期位相を与えていることもあり、振子の横揺れ (ワイヤーのねじれによるものではない振動) は避けられない。横揺れがある場合の力学の解析は複雑であることが予想される。しかし、実際の振子の様子や実験データを観察すると、横揺れはねじれによる振動に比べて十分速く減衰していると考えられる。例えば図 22 を見ると、 $t = 0$  s から  $t = 25000$  s 程度までの範囲で見られる周期の大きな時間変動は、主に横揺れに起因するものと考えられる。そこで、初期位相を与えてから測定開始まで待ち時間を設ける、十分に長い時間測定を続ける等の方法により横揺れの影響のないデータを測定できるようにすることで、横揺れに対する解析は省略できるようにした。



(a) 一度の通過で得られたすべての時刻データの平均で通過時刻を定義した場合。 (b) 一度の通過で得られた時刻データのうちもっとも先頭の時刻で通過時刻を定義した場合。

図 22: 通過時刻の定義方法の比較。横軸はセンサーが最初に反射像を検出した時間を  $t = 0$  としたときの時刻、縦軸は各定義方法で計算した周期。実際の実験で得られたデータ (測定 0227) を用いている。

## 6.2 実際の解析

図 23 に実際の解析の様子を示す。各測定において周期は一定の値に収束しているように見えるが、他の測定との間で収束値が異なってしまっている。また、測定 0227 から測定 0308 まで収束値は増加しているが、測定 0309 では再び測定 0307 と同程度まで収束値が小さくなっていることがわかる。このことから、振動周期そのものがかなり長い周期で振動している可能性がある。

周期に時間依存性があるとするならば、異なる測定における収束値を単純に比較することに意義があるかどうかは難しい問題となる。しかし、測定 0304 と測定 0305 を見ると、比較的近い時間のうちに外場のない場合の測定と外場のある場合の測定とが同程度の周期の収束値を持っていることがわかる。そこでこれら 2 測定の周期の収束値を比較する。

周期の収束値を求めるには、定数関数によるフィッティングを用いた。周期が一定値に収束している (時間変化が十分小さくなっている) と思われる部分について様々な区間でフィッティングを行い、そのときのフィット誤差が最も小さくなるような区間を探した。ただし、フィット区間が狭すぎるとは定数フィッティング



の意味がなくなってしまうと考え、区間幅は 5000 s 以上とした。その結果、測定 0304 のデータについては区間 [22000, 27000]、測定 0305 のデータについては区間 [24000, 31000] でフィッティングした場合にそれぞれのフィット誤差が最小になるとわかった。これらの区間での実際のフィッティングの様子を図 24 に示す。このようなフィッティングによって得られた「収束値」をそのまま振動の周期として採用すれば、

$$T = 93.61 \pm 0.001628 \text{ s} \quad (6.1)$$

$$T_F = 93.62 \pm 0.001795 \text{ s} \quad (6.2)$$

となる。いま、我々は外場の存在による周期の減少を見たいのであったが、おもり大（外場）があるときのほうが周期が増大するという結果となってしまった。これは、図 23 において測定 0308 まで収束値が増加し続けていたことを思い出せば、外場の影響による周期の減少よりも系の何らかの時間依存性に起因する周期の増大（あるいは振動）の効果が上回ってしまったことによるものと考えられる。この時間依存性については考察の節で検討する。

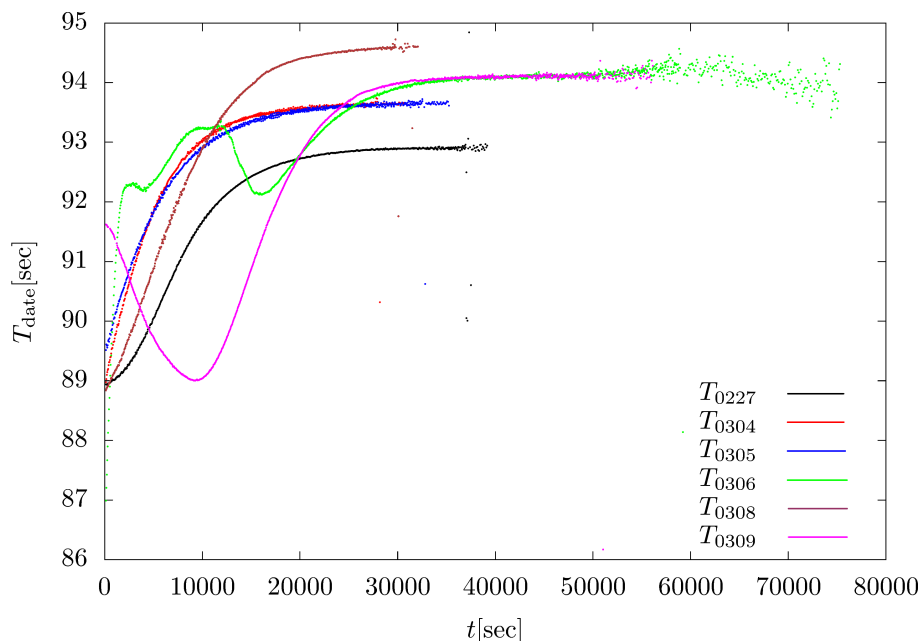
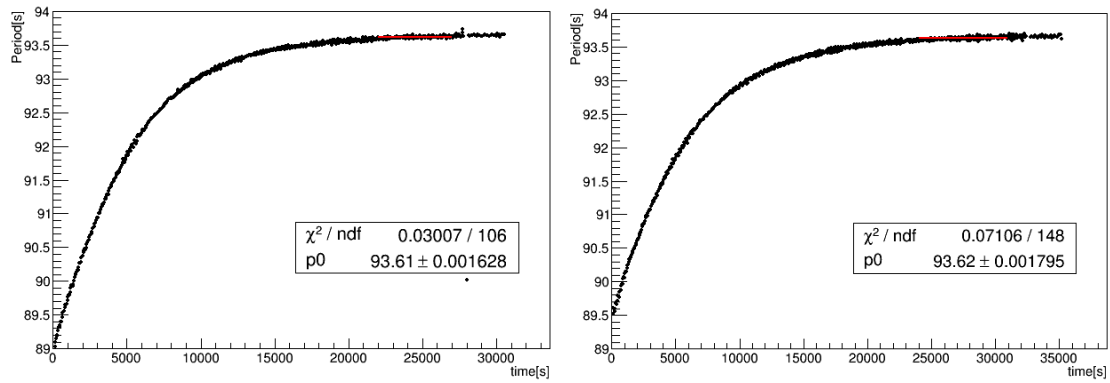


図 23: 実際の解析の様子。横軸は各測定においてセンサーが最初に反射像を検出した時間を  $t = 0$  としたときの時刻、縦軸は周期。また、 $T$  の添え字は測定開始日を表す。

表 3: 測定条件と図 23 との対応表。

測定開始日	おもり大（外場）の有無	測定時間 [s]
0227	有	54000
0304	無	86400
0305	有	72000
0306	無	86400
0308	有	86400
0309	無	86400



(a) 測定 0304 の場合. フィット区間は [22000, 27000] となった. (b) 測定 0305 の場合. フィット区間は [24000, 31000] となった.

図 24: 収束部分の定数フィッティングの様子. 長さ 5000 s 以上で, fit error が最小となるような範囲を探した.

## 7 考察

図 23 において, 我々は収束している周期の値の変化が想定される約 0.01 sec よりもはるかに大きいという問題に直面した. これは重力によるものではないのは明らかであるので, そのほかの要因を探ることにする. 最初に, 我々の用いたワイヤーの特性をまとめておく<sup>\*11</sup>.

表 4: ワイヤーの特性

名称	仕様
素材	タングステン
半径	0.05 mm
長さ	82.55(1) cm
ヤング率	345 GPa
ポアソン比	0.284 (20 °C)
線形膨張係数	$4.5 \times 10^{-6} / K$

上のデータをもとに求めた理論的な周期は 89.772 sec. 重り小によってワイヤーが伸びていることを想定し, ヤング率・ポアソン比から求めたワイヤーの伸びと周期はそれぞれ 2.31 mm, 90.041 sec である. 重力の影響 (約 0.01 sec) が埋もれる周期差であるが, 解析ではワイヤーのみの特性を差し引くため, この差は問題ではないと考えられる. さらに弾性による伸びだけでは説明できない理由はもう一つあり, それはこの問題の本質が単調な増加や減少ではなく, 「1~3 週間程度の時間スケールをもって周期的に変化している現象がある」ということである. 縮む原因がなければこれは説明できない. ワイヤーが温度変化によって伸び縮みしているということも考えられるが,  $4.5 \times 10^{-6} / K$  という線形膨張係数をもつタングステンにとっては, たとえ温度変化が 100 K あったとしても, 周期の変化は 0.043 sec で, 弾性による変化の 16% ほどである. ラズパイの Clock が狂っているのではないかという懸念もあるかもしれないが ClockTest データ” 0221\_1” をプロットしてみたところ図 25 にあるように  $10 \mu\text{sec}$  のプログラム休止に対し  $300 \mu\text{sec}$  程度のバックグラウンドが見られるものの, その後の測定では  $800 \mu\text{sec}$  というプログラム休止を設けているため, 累積するようなものでなければプログラム休止中に無視されてしまい 0.01 sec というオーダーにはかかってこない.

<sup>\*11</sup> タングステンの基本物性

<https://www.takeishi.co.jp/technology/leading01.html>



## Clock Test

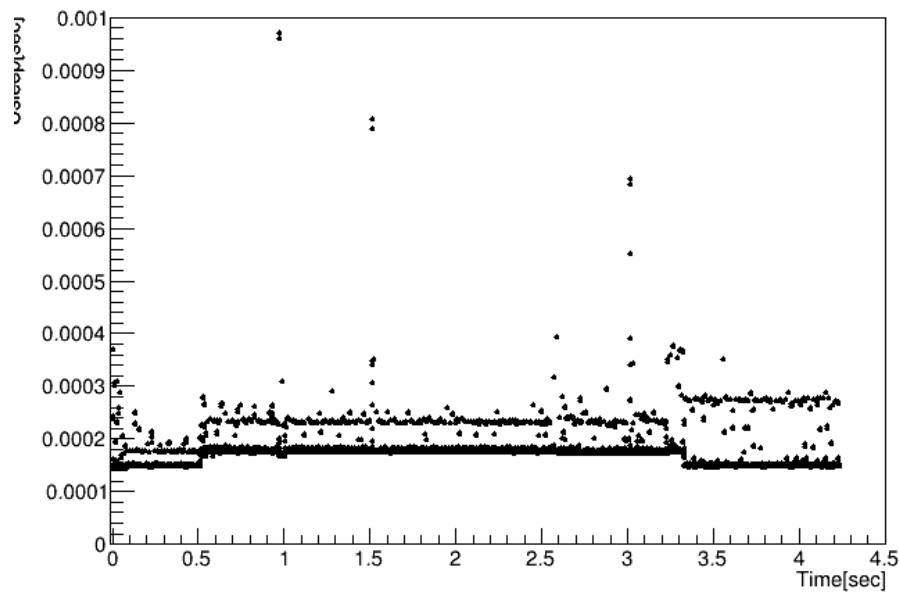


図 25: ラズパイ時計の検証

現時点では、気温による周期の変化が測定日ごとの違いを説明するのに有力ではあるが 100 K に対して 0.043 sec という変化は約 1 sec ある測定日ごとの差を説明するにはいささか小さすぎる気がする。振動の影響を嫌い、測定の直前に真空引きを止めたことによる空気抵抗の増加も改善の余地があるだろう。

## 8 まとめ

今回、周期を測定するにあたり光てこを用いて測定精度を高めようとしたものの、万有引力定数  $G$  について実験から計算される値はアクリル管内のおもりの初期の横揺れによって本来一定であるはずの周期の時間変化や、温度やワイヤーの伸びだけでは説明できない程の日付によって変化する周期の収束値などにより、過去の研究のような測定精度 4 桁どころかそのオーダーすら合わないという結果となってしまった。

## 謝辞

前期のスパークチェンバー実験で装置や解析について教えていただいた D3 の潘 晟さん、後期のグループごとの実験で装置開発に協力していただいた D2 の中村 和広さん、M2 の三野 裕哉さん、そして年間を通してご指導・サポートしていただいた市川 温子先生と TA の末野 慶徳さんにはここで感謝を述べたいと思います。1 年間ありがとうございました。

## 補足 A 弾性理論

(2.1)における  $k$  の表式, およびトルクの表式についてここで述べておくこととする [6]. 細い棒のねじりを考察するにあたり, 棒の回転軸方向を  $z$  軸にとる. いま, 単位長さあたりの回転角  $\tau$  を導入すると, 距離  $dz$  にある 2 つの無限近接面が互いに角  $d\varphi = \tau dz$  だけ回転するといえるが, この  $\tau$  について,  $z$  軸に垂直な断面の典型的な長さを  $r$  としたとき  $\tau r \ll 1$  と仮定する.

ある点  $\boldsymbol{x}$  の近傍で棒から微小長さの分だけ注目し, 棒の点の変位  $\boldsymbol{u}$  を求めると

$$u_x = -\tau z y, u_y = \tau z x \quad (\text{A.1})$$

であるが,  $z$  軸方向の変位については  $\tau = 0$  のときには存在しないが一般に棒の点はねじられた際  $z$  軸方向の変位も行い, いま  $\tau$  が小さいならば  $\tau$  に比例すると考えることができ,

$$u_z = \tau \psi(x, y) \quad (\text{A.2})$$

となる. これと体積弾性率を  $K$ , 剛性率を  $H$  としたときの歪テンソル  $u_{ik}$ , 応力テンソル  $\sigma_{ik}$  の公式

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_{ik} = K u_{ll} \delta_{ik} + 2H \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) \quad (\text{A.4})$$

より応力テンソル  $\sigma_{ik}$  が求まり,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \sigma_{zx} = H\tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \sigma_{yz} = H\tau \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad (\text{A.5})$$

従って, 棒におけるつりあいの方程式  $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k = 0$  は

$$\Delta \psi(x, y) = 0 \quad (\text{A.6})$$

を与える.

ここで, 棒の側面での境界条件を考える. いま棒の側面上に働く外力は棒内の内部応力に比べて微小であるといえるので,  $n_k$  を側面の法線ベクトルの  $k$  成分とすると

$$\sigma_{ik} n_k = 0 \quad (\text{on 側面}) \quad (\text{A.7})$$

(A.5) と  $n_z = 0$  より

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) n_y + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) n_x = 0 \quad (\text{on 側面}) \quad (\text{A.8})$$

従って,  $\psi(x, y)$  の満たすべき式は (A.6), (A.8) である.

さて, 断面に作用するモーメント  $M_{ik}$  は  $\boldsymbol{n}$  を断面の法線ベクトルとして,

$$M_{ik} = \int dS n_l (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) \quad (\text{A.9})$$

であるので,  $M_{xy}$  は

$$\begin{aligned} M_{xy} &= H\tau \int dS \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) y - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) x \\ &= H\tau \int_S dx dy \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} x \right) - H\tau \int_S dx dy (x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる.

まず  $\psi = 0$  であるような場合を考える。特に一様な円形の断面をもつ棒は通常この場合に含まれる。このとき (A.10) および  $\theta = \tau l$  より

$$M_{xy} = -H\tau \int_S dx dy (x^2 + y^2) \quad (\text{A.11})$$

であるが、特に一様な円形の断面をもつ棒の場合

$$M_{xy} = -\frac{H\pi r^4}{2l}\theta \quad (\text{A.12})$$

となり、当初の目的であった (2.1) における  $k$  と、トルクの表式を得た。

一般には  $\psi = 0$  とは限らないので、この場合には

$$2\frac{\partial\chi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} - y \quad (\text{A.13})$$

$$-2\frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + x \quad (\text{A.14})$$

として Prandtl の応力関数  $\chi$  を用意すると、(A.10) より

$$\begin{aligned} M_{xy} &= 2H\tau \int_S dx dy \left( \frac{\partial\chi}{\partial x}x + \frac{\partial\chi}{\partial y}y \right) \\ &= -4H\tau \int_S \chi dx dy + 2H\tau \oint_{\partial S} \chi (x dy - y dx) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

となる。さらに Prandtl の応力関数  $\chi$  の満たす式はその定義と (A.6), (A.8) より

$$\Delta\chi = -1 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}dx + \frac{\partial\chi}{\partial y}dy = d\chi = 0 \quad (\text{on 側面}) \quad (\text{A.17})$$

となるので、いま棒の断面が図 26 のようになっているとすると、モーメントは

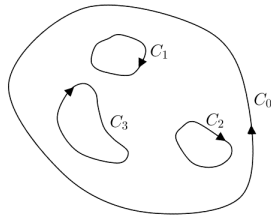


図 26: 棒のねじれ 断面図

$$M_{xy} = -4H\tau \int_S \chi dx dy - 4H\tau \sum_k \chi_k S_k \quad (\text{A.18})$$

となる。ここで、 $\chi_k$  は曲線  $C_0$  にそって  $\chi = 0$  としたときの曲線  $C_k$  にそった  $\chi$  の値であり、 $S_k$  は曲線  $C_k$  の右手側に囲まれた部分の面積である。従って、棒のねじりに由来するモーメントを求めるという問題は (A.16), (A.17), 更には  $\chi = 0$  (on  $C_0$ ),  $\chi = \chi_k$  (on  $C_k$ ) を満たす  $\chi$  の関数形を決めるという問題に帰着した。

また、 $\chi_k$  の値を決める条件を考える。これは変位  $u_z = \tau\psi(x, y)$  が 1 価関数であるという条件から

$$\oint_{C_k} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \right) = 0 \quad (\text{A.19})$$

であるが、これを  $\chi$  を用いて書き直すと、

$$\oint_{C_k} \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} dy - \frac{\partial \chi}{\partial y} dx \right) = S_k \quad (\text{A.20})$$

であり、これが  $\chi_k$  の値を決める条件である。  $\chi$  の関数形は断面の形状に依存するのでここでは数個だけ表 5 に例をあげておくにとどめることとする。よって、 $\tau$  が  $z$  によらず一定であるような場合、モーメント  $M_{ik}$  は表 6 の通りである。

表 5: 様々な断面に対する Prandtl の応力関数

断面	$\chi(x, y)$
半径 $r$ の円	$\frac{r^2 - x^2 - y^2}{4}$
半軸 $a, b$ の楕円	$\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$
1 辺 $a$ の正三角形	$\frac{\sqrt{3}}{6a} \left( y - \sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}} \right) \left( y + \sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}} \right) \left( y + \frac{2a}{\sqrt{3}} \right)$
内半径 $r_1$ , 外半径 $r_2$ の円管	$\frac{(r_2)^2 - x^2 - y^2}{4}$

表 6: 様々な断面に対するモーメント

断面	$M_{xy}$
半径 $r$ の円	$-\frac{H\pi r^4}{2l}\theta$
半軸 $a, b$ の楕円	$-\frac{H\pi a^3 b^3}{(a^2 + b^2)l}\theta$
1 辺 $a$ の正三角形	$-\frac{\sqrt{3}Ha^4}{80l}\theta$
内半径 $r_1$ , 外半径 $r_2$ の円管	$-\frac{H\pi [(r_2)^4 - (r_1)^4]}{2l}\theta$

## 参考文献

- [1] Cavendish, H. (1798). XXI. Experiments to determine the density of the earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, (88), 469-526.
- [2] Baily, F. (1843). Experiments with the Torsion Rod for Determining the Mean Density of the Earth: Forming Vol. XIV. of the *Memoirs of the Royal Astronomical Society* (Vol. 14). Royal Astronomical Society and sold at their apartments, Somerset House. pp. 88-91.
- [3] 黒田和明. (1997). 万有引力定数  $G$  の測定精度は 4 桁でよいか?. *日本物理学会誌*, 52(10), 752-758.
- [4] Luther, G. G., & Towler, W. R. (1982). Redetermination of the Newtonian gravitational constant  $G$ . *Physical Review Letters*, 48(3), 121.
- [5] W. R. Towler et al. , *Precision Measurement and Fundamental Constants: Proceedings of the International Conference*, Nat. Bur. Stand. (U.S.) Spec. Publ. No.343 (U.S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1971), p. 485.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Second Revised and Enlarged Edition, 1970, Pergamon Press, pp. 68-75.
- [7] 大西清. (1997/1/5 第 9 版第 1 刷). *JIS にもとづく機械設計便覧*. 理工学社