

カシミール力の測定

繁村知宏* 田中隆寛† 湊修平‡

2022年3月11日

*京都大学理学部4回生
†京都大学理学部4回生
‡京都大学理学部4回生

目次

1	序論	4
2	理論値についての検証	4
2.1	ゼロ温度での Casimir 効果	4
2.2	有限温度での Casimir 効果	5
2.2.1	有限温度の場の量子論の復習	5
2.2.2	ガウス積分公式の復習	6
2.2.3	弱い境界条件の導入	8
2.2.4	汎関数行列式についての Gelfand-Yanglom の公式	9
2.2.5	Lifshitz formula	13
2.3	有限の誘電率の補正を含めた Casimir effect	17
2.3.1	平板-平板間に働く Casimir 力	17
2.3.2	平板-球面間に働く Casimir 力	20
3	セットアップ	22
3.1	実験回路	22
3.1.1	回路を構成する装置	22
3.1.2	回路の構成	22
3.2	ねじれ振子	23
3.2.1	カシミールプレートの要件について	24
3.2.2	振子の振れ幅と、ワイヤの要件について	24
4	測定原理	26
5	実験手順	29
5.1	キャリブレーション	29
5.1.1	力とフィードバック電圧について	29
5.1.2	力と絶対距離について	29
6	本年度の進捗と反省	30
6.1	回路	30
6.2	ねじれ振子	30
7	謝辞	30
A	PID 制御に用いたコード	31

図目次

2.1	ポテンシャルの概形	8
2.2	積分経路の取り方	11
2.3	平面波の透過	14
2.4	PFT 定理の概念図	20
2.5	球面から平面へ PFT 定理を適用した場合	21
3.1	カシミール力の測定に用いた回路の全体図	22
3.2	AC bridge 回路図	23
3.3	ねじれ振子子の外観	23
3.4	ねじれ振子子の設計図。長さの単位は mm で、上辺は 10mm。	24
4.1	フィードバック回路のプレート周りの回路図	26
4.2	キャリブレーション時のカシミールプレート周辺の回路図	27

表目次

1 序論

2枚の平面の金属板を真空中で非常に近い距離だけ離して設置したときに互いに引き合う現象をカシミール効果という。この現象は、1948年にカシミールとポルダーによって予想され、真空中で距離 a だけ隔てられた面積 A の2つの金属板の間にはたらく単位面積あたりのカシミール力の大きさ $\frac{F}{A}$ は、

$$\frac{F}{A} = \frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4} \quad (1.1)$$

とかける。ここで、 \hbar はディラック定数、 c は光速である。1997年には、ラモローらによってカシミール効果が実験的に観測された。これにより、場の量子論において零点エネルギーに物理的意味があることが分かった。

本実験では、ラモローらによるカシミール効果の観測方法を再現し、カシミール力と金属板(一方は平面で、一方は球面)の間の絶対距離の関係が理論から予想されるものと一致するかどうかを確かめることを目的とした。

本レポートでは、第3章で実験設定、第4章で測定原理、第5章で実験手順、第6章でまとめと今後の課題について見ていく。

2 理論値についての検証

2.1 ゼロ温度での Casimir 効果

1次元ポテンシャル問題などを考えてもわかるように、量子系は境界条件に強く依存する。Casimir効果とは、大きな空間のある小さな領域で特殊な境界条件に依存する量子系があらわれたとき、境界条件の影響を受けない大きな空間の量子系との不均衡によって力が生じるものである。まず、ゼロ温度、2枚の平行板間の電磁場による Casimir 効果を計算してみる。有限温度の効果や境界条件の効果によって計算の手法は変化するが、計算の手法自体は真空での方法と同様にできる。¹初めに、2つの極板間の電磁場による真空エネルギーを求めよう。この目的のためには、電磁場の物理的自由度である、横波2つの自由度をあらわに扱うだけで良いので、クーロンゲージを取るのが便利である。この場合、電磁場のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \{ \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \}$$

¹本稿では有限温度の場合に Gelfand-Yaglom の公式に基づいて理論値を計算したが、真空での計算と同様、ゼータ関数正則化を用いることもできる。場合によっては、一般化されたゼータ関数の漸近公式などを用いる必要があるが、計算自体はどの手法を用いてもそれほど複雑ではない。また、ここで言うゼータ関数を用いた方法は、本質的にはオイラーマクローリンの漸近公式の導出と等価なので、より一般の場合への拡張を考えないのであれば、ゼータ関数を利用する利点はそれほどない。

と書ける。これを電磁場の生成消滅演算子で書き換えると、運動量表示で、

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{p}^2} \sum_{\lambda=1,2} \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda$$

となる。次に、境界の効果を考える。理想的な金属板では、境界において電磁場は0になるので、金属板が x 軸方向に配置されている場合を考えると、上式で p_x に関する積分は離散化され、

$$H = \frac{1}{2} \sum_n \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + p_x^2 + p_y^2} \right) \sum_{\lambda=1,2} \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda$$

となる。これより、極板間の真空エネルギー密度は

$$\langle 0|H|0\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + p_x^2 + p_y^2}$$

と評価できる。ここで、 $\omega_n := \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + p_x^2 + p_y^2}$ とおいて、次の関数を定義する：

$$E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \omega_n^{-s}.$$

この積分は、極座標に移ると容易に計算できて、

$$\begin{aligned} E(s) &= -\frac{1}{4\pi(1-\frac{s}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{L}\right)^{-s+2} \\ &= -\frac{1}{4\pi(1-\frac{s}{2})} \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-s+2} \zeta(s-2) \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\zeta(s)$ はリーマンのゼータ関数である。今興味のある真空エネルギー密度は $s = -1$ の場合に相当する。 $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$ であるから、これを代入することで、

$$\langle 0|H|0\rangle_R = -\frac{\pi^2}{720L^3}$$

を得る。このエネルギーを Casimir エネルギーといい、これによって誘起される極板間引力を Casimir 力という。

2.2 有限温度での Casimir 効果

2.2.1 有限温度の場の量子論の復習

前節で計算した Casimir 力は理想的な境界条件として境界上で場が0になることを仮定していた。しかし、現実の物質に対してはこの境界条件はいささか強すぎる。例えば、よくある QED の Casimir 効果の計算を考えよう。このとき、境界上で電磁場がちょうど0になることは完全導体を仮定することに対応するが、そのような物質は存在しない。たとえ金属であっても有限の電気伝導

率をもつため、完全導体ではありえない。したがって、実験値と比較できる理論値を得るためには、前節で考えた境界条件よりも弱い境界条件のもとで Casimir 力がどのような表式になるのかを検証する必要がある。

まずは、真空のエネルギーが場の量子論の枠組みにおいてどのようにあらわされるか思い出そう。以下、簡単のために scalar 場で考えていくが、他の場の理論を考えた場合にも基本的には同様に考えることができる。古典作用を $S[\phi]$ とする。このとき、系の分配関数 $Z[\phi]$ を次で定義する：

$$\begin{aligned} Z[\beta] &\equiv \text{Tre}^{-\beta H} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ただし、ハミルトニアン H の固有値に縮退はないものとし、

$$E_0 < E_1 < E_2 < \dots,$$

とした。²ここで、多くの物理系は少なくとも一つの空間成分について並進対称性を持っていることに注目し、エネルギー密度 \mathcal{E} を $\mathcal{E} \equiv E/v$ で定義する。ここで、 v は並進対称性を持つ方向についての系の体積である。このとき、系の真空エネルギー密度 \mathcal{E}_0 を次のように取り出すことができる：

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{1}{\beta} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \ln Z[\phi]. \quad (2.2)$$

ここで、虚時間形式での経路積分を考えよう。すなわち、実時間 t を $-it = \tau$ というように虚時間 τ へと解析接続する。この形式に移ったご利益として、(2.1) 式を経路積分を用いて表すことができる。以下でこれを確かめよう。

まず、虚時間での時間発展演算子が $e^{-H\tau}$ で与えられることに注意する。この式を (2.1) と比べると、 $e^{-\beta H}$ を微小ステップの積へと分解し、その後各微小ステップに対応する状態の完全系を挟むことで、実時間と同様にして (2.1) 式を経路積分表示が得られるであろうことが容易にわかる。ただし、ここで注意しなければならない点がある。通常経路積分では始状態と終状態における場の値には何の制限もないため、汎関数積分は場の配位空間全体を走る。しかし、(2.1) 式を経路積分表示を考える際には Tr に注意する必要がある。このトレースのために、始状態と終状態での場の値は等しくなる。以上の点に注意すれば、(2.1) 式を経路積分表示は次で与えられる：

$$Z[\beta] = \int_{\phi(\beta)=\phi(0)} D\phi \exp\left(-S(\phi)\right), \quad (2.3)$$

ここで、作用 S の (虚) 時間積分は 0 から β まで行われることに注意する。

2.2.2 ガウス積分公式の復習

このようにして虚時間形式での経路積分と統計力学的な分配関数を関連付けることができたが、実際に経路積分を実行する際には汎関数ガウス積分を実行する必要があり、積分が虚時間について

²今は有限温度を考えているため、 β は有限である。もしゼロ温度の理論を考えたいならば、あとで $\beta \rightarrow \infty$ の極限をとればよい。

のみ periodic $\phi(\beta) = \phi(0)$ な場合にも通常と同様に計算ができるのかは必ずしも自明ではない。以下では、通常の経路積分を計算する際に頻繁に用いられる公式

$$\int D\phi \exp \left\{ - \int \frac{1}{2} d^4x d^4y \phi(x) M(x, y) \phi(y) \right\} = (\text{Det} M)^{-\frac{1}{2}}$$

によく似た公式が periodic な経路積分においてもなりたつことをチェックしよう。

初めに通常の経路積分の場合と同様に連続的な label をもった行列 $M(x, y)$ の固有値方程式を考える。注意すべきことは、場の配位空間が periodic な場合には、演算子 M の作用する空間は periodic な関数のなす空間に限定される点である。つまり、今から考える固有値問題というのは $M|x\rangle = \lambda_x|x\rangle$ を満たす λ_x および $|x\rangle$ を見つけるという問題で、特に固有ベクトル $|x\rangle$ が (虚) 時間について periodic になっているような問題ということである。なぜならば、最終的な目標は (2.8) 式のように、煩雑な経路積分を M の固有ベクトルについての展開をうまく利用することで単純なガウス積分の無限積へと分解することなので、そのためには固有ベクトルが periodic であることが十分なのである。さて、ガウス積分の一般の性質から M は対称 $M(x, y) = M(y, x)$ である。議論を簡単にするため、ここでは特に M に対してエルミート性と固有値に縮退がなく離散的であることを仮定しておく。こうすると、有限次元の場合とのアナロジーから行列 M の異なる固有ベクトルは互いに直行することが期待される。つまり M の固有値を λ_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)、各固有値に対応する固有ベクトルを q_n とすると、

$$Mq_n = \lambda_n q_n \quad (2.4)$$

$$\int_0^\beta dx^0 \int d^3x q_n(x) q_m(x) = \delta_{n,m} \quad (2.5)$$

が成り立つだろう。固有ベクトルの set $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ は場の配位空間において完全系となるので、これらの固有ベクトルを用いて場 $\phi(x)$ を展開しておく:

$$\phi(x) = \sum_n c_n q_n \quad (2.6)$$

これを積分変数の変換とみなせば、積分測度について以下が成り立つ:

$$D\phi(x) = \mathcal{N} \prod_n dc_n \quad (2.7)$$

ここで \mathcal{N} は種々の定数や変数変換に伴うヤコビアンなどをまとめたもので、経路積分の定義をいじれば簡単に落ちるので、以下では無視することにする。以上の議論から、典型的なガウス型の経路積分が

$$\begin{aligned} & \int_{\phi(\beta) = \phi(0)} D\phi \exp \left\{ - \int \frac{1}{2} d^4x d^4y \phi(x) M(x, y) \phi(y) \right\} \\ &= \int \prod_n dc_n e^{-\frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2} \\ &= \text{Det}(M)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

と計算され、通常の経路積分の場合と類似の公式がなりたつことがわかる。

2.2.3 弱い境界条件の導入

先に述べたように、Casimir 力とは、境界条件が強く効いた量子系と自由な量子系との間の真空エネルギーの差として理解される。他方、作用が与えられれば系の真空エネルギーは (2.2) 式のように計算されるので、一般に Casimir energy を次で定義することとする:

$$\mathcal{E}_0^C = -\frac{1}{\beta} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \ln \frac{Z}{Z_0}. \quad (2.9)$$

ここで Z_0 は自由な理論の作用であり、(2.9) 式はまさに 2 つの系間の真空エネルギーの差を表している。さて、 Z に対して境界上で場が 0 になるようなディリクレ型の境界条件を課したいのであれば、境界条件をもつ作用 S のポテンシャルを下図のような 2 つの無限に高い壁にした上で、 δ を固定して $\frac{l}{\delta} \rightarrow 0$ の極限を考えればよい。しかし、前節でも述べたように、実際の物質に適用するにはこの境界条件は厳しすぎるため、適当にぼかされたポテンシャルを考える必要がある。以下では次のようなポテンシャルを考えよう:

$$\mathcal{L}_I \equiv \frac{1}{2} \int d^{d+1}x d^{d+1}y \delta(x_d - x'_d) V(x_d, x_0 - x'_0, x_{\parallel} - x'_{\parallel}) \phi(x) \phi(x'), \quad (2.10)$$

$$V(x_d, x_0 - x'_0, x_{\parallel} - x'_{\parallel}) = V_1(x_d - \frac{l}{2}) f_1(x_0 - x'_0, x_{\parallel} - x'_{\parallel}) + V_2(x_d + \frac{l}{2}) f_2(x_0 - x'_0, x_{\parallel} - x'_{\parallel}). \quad (2.11)$$

このポテンシャルは x^d を除く時空の並進に関して不変であり、 $x_d = \frac{l}{2}$ を中心に δ_1 程度の幅で局在したポテンシャル $V_1(x_d - \frac{l}{2})$ が、 $x_d = -\frac{l}{2}$ の周りに δ_2 程度の幅で十分局在したポテンシャル $V_2(x_d - \frac{l}{2})$ がそれぞれ存在するようなものである。ここで、 f_1 および f_2 はそれぞれのポテンシャルに対応した応答関数である。この部分は現実の物質により近いものを考えるため、ポテンシャルの定義の中に組み込んだが、すぐ後の解析を見ればわかるようにこの部分は本質的な役割を果たさない。次に、空間成分について十分離れた点での境界条件を考える。無限遠に存在する場が原点近傍に局在した系に対して影響を及ぼすとは考えにくいから、この系は十分大きな箱の中にすっぽりと入っていて、箱の境界上ではディリクレ型の境界条件 $\phi = 0$ を要請することにする。ここで、箱の大きさは $i = 1, 2, \dots, d-1$ のときには $-\frac{L_{\parallel}}{2} \leq x_i \leq \frac{L_{\parallel}}{2}$ とし、 $i = d$ については $-\frac{L}{2} \leq x_d \leq \frac{L}{2}$ と

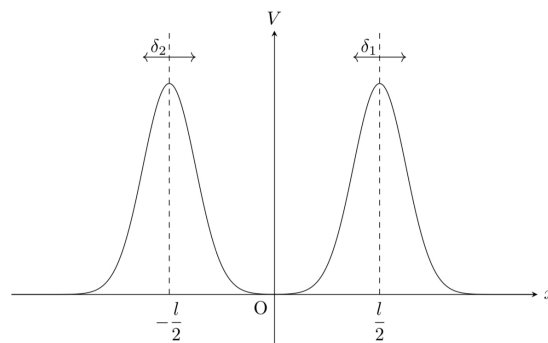


図 2.1: ポテンシャルの概形

する。ここで、 L と L_{\parallel} を分けたのは、 x_d 軸と直交する方向については箱の大きさは十分大きく、実質的には $L_{\parallel} \rightarrow \infty$ とするのに対して、 L は当座有限にとどめておくためである。さらに、時間成分については $x^0 \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ という有限の領域のみを考え、周期的境界条件を課すことにする。このような構成の下で、(2.9) 式を計算していく。

前節でもとめた (2.8) 式を用いれば、(2.9) 式は

$$\mathcal{E}_0^C = \frac{1}{2\beta} \lim_{L_{\parallel} \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \ln \frac{\text{Det}(-\partial^2 + m^2 + V)}{\text{Det}(-\partial^2 + m^2)}, \quad (2.12)$$

と書き換えられる。さらに、汎関数行列式を運動量基底で評価することで、以下を得る：

$$\mathcal{E}_0^C = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \ln \frac{\text{Det}(-\partial_d^2 + \Omega(k)^2 + \tilde{V}(x_d, k))}{\text{Det}(-\partial_d^2 + \Omega(k)^2)}, \quad (2.13)$$

ここで、 k_{\parallel} は $x_i (i = 1, 2, \dots, d-1)$ の共役運動量であり、 Ω と \tilde{V} はそれぞれ以下で定義される：

$$\Omega(k) \equiv \sqrt{\omega_n^2 + k_{\parallel}^2 + m^2}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{V}(x_d, k) \equiv V_1(x_d - \frac{l}{2})\tilde{f}_1(k) + V_2(x_d - \frac{l}{2})\tilde{f}_2(k) =: \tilde{V}_1(x_d, k) + \tilde{V}_2(x_d, k). \quad (2.15)$$

ここで ω_n は松原周波数である。このように定義された \mathcal{E}_l^C は2つのポテンシャル間に働く自己エネルギーの寄与を除去できていないことに注意する。すなわち、今求めたいのは $x_d = \frac{l}{2}$ と $x_d = \frac{l}{2}$ にあるポテンシャル間にたまるエネルギーと外部のエネルギーとの差なのだが、この formalism ではそれぞれのポテンシャルによる自己相互作用の影響を除去できないのである。しかし、このような自己エネルギーはポテンシャル間の距離に依存しないものと考えられるため、 \mathcal{E}_l^C を l について微分することで定義される Casimir 力にはなんら影響を及ぼさない。

2.2.4 汎関数行列式についての Gelfand-Yanglom の公式

前節で求めた (2.13) 式を計算するためには、2つの汎関数行列式の比

$$\frac{\text{Det}(-\partial_d^2 + \Omega(k)^2 + \tilde{V}(x_d, k))}{\text{Det}(-\partial_d^2 + \Omega(k)^2)}$$

を計算する必要がある。このような量を計算するための公式として、Gelfand-Yanglom の定理というものが知られている。この節ではこの公式の導出を行う。

以下では次のような問題設定を立てる。 $x_d \in [-L/2, L/2]$ 上の演算子 $D = -\partial_d^2 + W$ がエルミート³として、ディリクレ境界条件を課す：

$$\varphi(\frac{L}{2}) = \varphi(-\frac{L}{2}) = 0.$$

これはただの1次元の固有値問題であるが、一般には解くことが難しい。簡単のため、 D の固有

³より厳密には自己共役

値に縮退はなく、すべての固有値は正であると仮定する。もし負の固有値が存在しても、有限な最小固有値が存在するならば、以下の証明は全く同様にしてなりたつ。汎関数行列式とは行列の適切な境界条件の下での固有値 λ_n を用いて次のように定義される:

$$\text{Det}(-\partial_t^2 + W) \equiv \prod_n \lambda_n. \quad (2.16)$$

したがって、この右辺の無限積を計算することは、演算子 D についての固有値方程式

$$D\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

を解くことに帰着される。この微分方程式は一般には解くことが難しい。Gelfand-Yanglom の定理とは、この固有値問題を解く代わりに、 $\psi_\lambda(-L/2) = 0$, $\partial_d \psi_\lambda(-L/2) = 0$ という初期条件を満たす解 ψ_λ が見つかったとすると⁴、この ψ_λ を用いて (2.16) を

$$\frac{\text{Det}(-\partial_d^2 + \Omega(k)^2 + \tilde{V}(x_d, k))}{\text{Det}(-\partial_d^2 + \Omega(k)^2)} = \frac{\psi_0, V(T/2)}{\psi_0(T/2)} \quad (2.17)$$

というように計算できることを主張するものである。以下の証明では、途中いくつかの仮定をするため、もとの定理よりやや弱い主張を示すことになるが、新たに加える仮定はまともなポテンシャルに対しては成り立つようなものなので、それほど神経質になる必要はないものと考えられる。

さて、上で定義した ψ_λ を考えよう。この ψ_λ に対して、もとのディリクレ問題の境界条件 $\psi_\lambda(L/2) = 0$ を課す。いまや、固有値を決めるための条件はこの1つの条件のみなので、 $\psi_\lambda(L/2) = 0$ という条件は

$$\psi_\lambda\left(\frac{L}{2}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_n} = 0 \quad (2.18)$$

という条件と同値である。つまり、 $\psi_\lambda(L/2)$ を λ の関数としてみたとき、 $\psi_\lambda(L/2)$ が $\lambda = \lambda_n$ にゼロ点を持つということである。以下、これらのゼロ点がすべて1位のゼロ点であることを仮定する。1次元散乱問題等を念頭に置けばわかるように、まともなポテンシャルを考える限り、この条件は満たされる。この仮定のもとで、 $\psi_\lambda(L/2)$ は次のように分解される:

$$\psi_\lambda(L/2) = \left(\prod_n (\lambda - \lambda_n) \right) f(\lambda), \quad (2.19)$$

$$\forall n, f(\lambda_n) \neq 0. \quad (2.20)$$

このとき、

$$\frac{d}{d\lambda} \ln(\psi_\lambda(L/2)) = \frac{1}{\lambda - \lambda_n} + (\text{regular terms})$$

は $\lambda = \lambda_n$ に1位の極をもち、それらの極での留数はすべて1である。ここで、演算子 D に対す

⁴ V が考えている区間内で x_d について連続かつ特異的でないならば、このような初期値問題の一意的な解が存在する。

るゼータ関数を次式で定義する:

$$\zeta_D(s) \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-s},$$

$$\therefore \zeta'_D(s) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-s} \ln(\lambda_n).$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} \ln \text{Det} D &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \lambda_n \\ &= -\zeta'_D(s=0) \end{aligned} \tag{2.21}$$

という簡潔な表式を得る。他方、このゼータ関数は $\psi_\lambda(L/2)$ を用いて、次のようにあらわすことができる:

$$\begin{aligned} \zeta_D(s) &\equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-s} \\ &= \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{2\pi i} \exp(-s \ln \lambda) \frac{d}{d\lambda} \ln \psi_\lambda(L/2). \end{aligned} \tag{2.22}$$

ここで、積分経路 γ は下の図%のようにとった。この式は $\frac{d}{d\lambda} \ln \psi_\lambda(L/2)$ が $\lambda = \lambda_n$ に単純極を持ち、その点での留数が1であることに注意すれば容易に導くことができる。(2.21) 式と (2.22) 式を用いれば、

$$\frac{\text{Det} D}{\text{Det} D^0} = \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{2\pi i} \exp(-s \ln \lambda) \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{\psi_\lambda(L/2)}{\psi_\lambda^0(L/2)} \tag{2.23}$$

を得る。ここで、 D^0 は D の自由場に関する部分である。次に、積分経路 γ を虚軸まわりの Γ へと移す。この際、 λ^{-s} の分岐に注意する必要がある。 λ^{-s} は複素関数として多価関数なので、積分経路を変更する際に分岐を跨ぐようだと都合が悪い。今回は負の実軸上に分岐をとっておく。こう

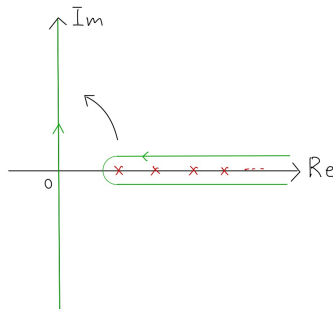


図 2.2: 積分経路の取り方

すると、(2.23) 式から

$$\zeta'_D(s) - \zeta'_{D^0}(s) = e^{i\pi s} \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int_{i0}^{i\infty} d\lambda |\lambda|^{-s} \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{\psi_\lambda(L/2)}{\psi_\lambda^0(L/2)}, \quad (2.24)$$

$$\therefore \frac{\text{Det}D}{\text{Det}D^0} = - \int_{i0}^{i\infty} d\lambda |\lambda|^{-s} \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{\psi_\lambda(L/2)}{\psi_\lambda^0(L/2)} \quad (2.25)$$

が成り立つ。ここで、 $\lambda \rightarrow \infty$ のときにはポテンシャル項からの寄与は主要にはならず、

$$\frac{\psi_\lambda(L/2)}{\psi_\lambda^0(L/2)} \rightarrow 1$$

となることを期待してよいだろう。以上から、

$$\frac{\text{Det}D}{\text{Det}D^0} = \ln \left\{ \frac{\psi_{\lambda=0}(L/2)}{\psi_{\lambda=0}^0(L/2)} \right\} \quad (2.26)$$

を得る。

結論として、上で用いた ψ_λ を使って、

$$\frac{\text{Det}(-\partial_d^2 + \Omega(k)^2 + \tilde{V}(x_d, k))}{\text{Det}(-\partial_d^2 + \Omega(k)^2)} = \frac{\psi_{\lambda=0}(L/2)}{\psi_{\lambda=0}^0(L/2)} \quad (2.27)$$

が成り立つ。□

この結果を用いると、(2.13) の Casimir energy を

$$\mathcal{E}_0^C = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \ln \frac{\psi_{\lambda=0}(L/2)}{\psi_{\lambda=0}^0(L/2)} \quad (2.28)$$

と表すことができる。最終的に求めたいのは Casimir 力であり、それは (2.28) を l について微分することで得られる。ここで注意しなければならないのは、 $\psi_{\lambda=0}^0(L/2)$ は l 依存性を持たない点である。もともと l はポテンシャル間の距離なのだから、ポテンシャルを持たない自由な理論にかかわる量が l 依存性を持たないのは当然である。これに注意すると、(2.28) より、Casimir 力を次のように定義することができる：

$$\mathcal{F}^C = -\frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \lim_{L/l \rightarrow \infty} \ln \left[\psi_{\lambda=0}(L/2) \right] \right\}_{L=\text{fixed}}. \quad (2.29)$$

すなわち、外部の系の大きさのスケールを変化させることなく、2つのポテンシャル間の距離を量子効果が無視できないほど微小な距離まで近づけた極限としてあらわれる力が Casimir 力である。次節では、この Casimir 力の公式をより便利な形に書き換える Lifshitz の公式を導入する。

2.2.5 Lifshitz formula

前節で導出した公式を用いれば、汎関数行列式を計算する必要はなく、単に1次元微分方程式の初期値問題を解けばよいことが分かった。以下、この初期値問題の解を構成していく。実際にはポテンシャルの具体形を与えていないため、我々が計算できるのは高々形式解のみである。それにも関わらず、 $\psi(x)$ の形式解を用いて $\psi(L/2)$ を表すと、(2.27) 式、ひいては (2.28) や (2.29) を単純な1次元散乱問題の反射係数を用いて表すことができる。この公式を Lifshitz の公式という⁵。以下、この目的のために、転送行列の方法を用いて形式解を求めていくことにしよう。

まず、転送行列の方法を簡単に復習する。簡便のために、前節での $\psi_{\lambda=0}$ を単に ψ と書くことにして、 ψ とその微分を一つのベクトル $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x)/\Omega \end{pmatrix}$ としてまとめて表記する。ここで、 Ω は次元合わせのためにいれている。今考えているのは線形2階微分方程式なので、初期値問題は一意的な解を与える。すなわち、ある点 x_0 での軌道 $\Psi(x_0)$ を定めれば、任意の点 x での軌道 $\Psi(x)$ が一意的に定まる。特に、 $\Psi(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ としたときの解を $\xi_1(x)$ 、 $\Psi(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ としたときの解を $\xi_2(x)$ とする。これらの解は線形独立である。なぜならば、今考えている拡張された単振動型の微分方程式の場合、ロンスキアンは x_d について一定であり、したがって考えている区間内のある一点でロンスキアンが0でない値をとれば2つの解が線形独立であることが言えるが、初期条件からこれになりたつのは明らかであるためである。したがって、これらの解を用いて任意の軌道 $\Psi(x)$ と $\Psi(x_0)$ を次のように関連付けることができる：

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \xi_1(x) & \xi_2(x) \\ \xi_1'(x)/\Omega & \xi_2'(x)/\Omega \end{pmatrix} \Psi(x_0). \quad (2.30)$$

この関係を用いると、任意の初期時刻 x_i における軌道 $\Psi(x_i)$ と、任意の停止時刻 x_f における軌道 $\Psi(x_f)$ の間に

$$\Psi(x_f) = \begin{pmatrix} \xi_1(x_f) & \xi_2(x_f) \\ \xi_1'(x_f)/\Omega & \xi_2'(x_f)/\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(x_i) & \xi_2(x_i) \\ \xi_1'(x_i)/\Omega & \xi_2'(x_i)/\Omega \end{pmatrix}^{-1} \Psi(x_i)$$

という関係を見出すことができる。この右辺の行列を

$$A(x_f, x_i) \equiv \begin{pmatrix} \xi_1(x_f) & \xi_2(x_f) \\ \xi_1'(x_f)/\Omega & \xi_2'(x_f)/\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(x_i) & \xi_2(x_i) \\ \xi_1'(x_i)/\Omega & \xi_2'(x_i)/\Omega \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.31)$$

とおくことにしよう。この A を転送行列という。(2.27) 式を見ればわかるように、我々の最終的な目標は $\psi(L/2)$ の具体的な表式を得ることである。他方、(2.27) 式を求めるために必要な初期値条

⁵ この Lifshitz は Landau-Lifshitz の Lifshitz である。

件は $\Psi(-L/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であった。これらに注意すると、(2.30) 式から $\psi(L/2)$ を

$$\psi(L/2) = A_{12}(L/2, -L/2) \quad (2.32)$$

と求めることができる。 A_{12} は行列 A の 12 成分を意味している。

さて、上の結果を所与の初期値問題を解くために利用しよう。今考えているポテンシャルは次のようなものであった。

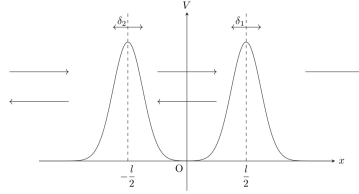


図 2.3: 平面波の透過

図に示したように、ポテンシャルの存在する領域とポテンシャルの存在しない領域が存在するため、それぞれの部分で独立な転送行列を定義すれば、ポテンシャルの寄与がある厄介な部分とポテンシャルの寄与がない自由な部分とを分離することができるだろう。この目的のため、ポテンシャルが存在する場合の転送行列を A^{V_i} 、自由な転送行列を A^0 とおく。上付きの V_i は左右のポテンシャルを表したもので、対称なポテンシャルを考えている場合には 1 つ定義しておけば十分である。これらを用いると、 $x_d = -L/2$ での軌道を $x = L/2$ での軌道へと移す転送行列 $A(-L/2, L/2)$ を次のように分解できる:

$$A(-L/2, L/2) = A^0(L/2, l/2 + \delta_2) A^{V_2}(l/2 + \delta_2, l/2) A^0(l/2, -l/2) \quad (2.33)$$

$$\times A^{V_1}(-l/2, -l/2 - \delta_1) A^0(-l/2 - \delta_1, -L/2). \quad (2.34)$$

自由な場合に考えるべき微分方程式は

$$(-\partial_d^2 + \Omega(k)^2)\psi(x) = 0 \quad (2.35)$$

である。転送行列は 2.31 式のように初期条件を $\Psi(-L/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ としたときの解 $\xi_1(x)$ および $\Psi(-L/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ としたときの解 $\xi_2(x)$ を用いて定義されていたが、上の議論からも明らかのように、初期条件の選び方はロンスキアンが 0 にならないように選ぶことだけが重要で、 $\Psi(-L/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ および $\Psi(-L/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という初期条件の選び方に殊更深い意味があるわけではなかった。そこで、以下では、 $\Psi(-L/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\Psi(-L/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ という初期条件に対応する解を用いることにする。このように選んでも初期時刻でのロンスキアンが 0 でないこと、すなわちこのような初期条件によって得られる解が線形独立であることは明らかである。この場合、(2.35) 式の 2 つの線形独

立な解はそれぞれ $e^{\Omega x}$ および $e^{-\Omega x}$ で与えられ、対応する転送行列は

$$A^0(\Delta x) \equiv A^0(x_f, x_i) = \begin{pmatrix} \cosh(\Omega \Delta x) & \sinh(\Omega \Delta x) \\ \sinh(\Omega \Delta x) & \cosh(\Omega \Delta x) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

である。また、 $\Delta x \equiv x_f - x_i$ とした。(2.32) 式と (2.36) 式の結果を用いると、 $\psi(L/2)$ を

$$\psi(L/2) = u_2^\top A^{V_2} A^0 A^1 v_1 \quad (2.37)$$

と書ける。ここで、 $u_i = \begin{pmatrix} \cosh(\Omega l_i) \\ \sinh(\Omega l_i) \end{pmatrix}$ および $v_i = \begin{pmatrix} \sinh(\Omega l_i) \\ \cosh(\Omega l_i) \end{pmatrix}$ とした。(ただし、 $l_i \equiv (L - l)/2 - \delta_i$.) 以上で $\psi(L/2)$ の形式的な表式を得ることができた。他方、(2.29) によれば、我々が計算すべき量は

$$\ln [\psi_{\lambda=0}(L/2)]$$

である。この目的のため、(2.37) の l 微分を求めておく。単純な計算から、

$$\frac{\partial \psi(L/2)}{\partial l} = \Omega \left[u_2^\top A^{V_2} B^0 A^1 v_1 - \frac{1}{2} \left(v_2^\top A^{V_2} A^0 A^1 v_1 + u_2^\top A^{V_2} A^0 A^1 u_1 \right) \right] \quad (2.38)$$

を得る。ここで、

$$B^0 \equiv \begin{pmatrix} \sinh(\Omega \Delta x) & \cosh(\Omega \Delta x) \\ \cosh(\Omega \Delta x) & \sinh(\Omega \Delta x) \end{pmatrix}$$

である。Casimir 力を計算するためにはさらに L を固定して $L/l \rightarrow \infty$ の極限をとる必要がある。(2.37) と (2.38) で l に依存するのは u_i, v_i, A^0 および B^0 である。 A^{V_i} の引数も見かけ上 l に依存するが、実際にはポテンシャルの厚さ δ_i にのみ依存することは明らかである。したがって、(2.37) と (2.38) の中のこれらの量が上記の極限でどのようにふるまうかを確認する必要がある。きちんと極限をとろうと思うと多少厄介だが、極限が収束すると仮定して部分部分で極限をとっていけばそれほど難しくはない。まず、 u_i および v_i は今考えている極限で等しくなる:

$$u_i, v_i \xrightarrow{L/l \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\Omega L}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

次に、この極限を先にとりしめてから (2.38) の極限を考える。このとき極限に関与してくる量は $(B^0 - A^0)$ のみであることが容易にわかるので、あとはこの極限が

$$(B^0 - A^0) \xrightarrow{L/l \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \exp(-\Omega l) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

で与えられることがわかれば、(2.37) と (2.38) の極限も容易に計算できる。 $C \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ お

よび $w_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、結果は以下ようになる:

$$\frac{\partial \log \psi(L/2)}{\partial l} \xrightarrow{L/l \rightarrow \infty} \Omega e^{-\Omega l} \frac{w_1^\top A^{V_2} C A^1 w_1}{w_1^\top A^{V_2} A^0 A^1 w_1}. \quad (2.41)$$

この結果は、ベクトル空間の基底を $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ と選んだときの結果だが、実際の計算の際にはこれらの基底を 45 度ねじって、 $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ とした方が便利である。このような基底の取り換えの下で、それぞれの行列やベクトルが

$$\begin{aligned} w_1^\top &= (1, 1) \longrightarrow w_1'^\top = (0, 1) \\ A^0 &\longrightarrow T^0 \\ A^i &\longrightarrow T^i \\ C &\longrightarrow D \end{aligned}$$

のように変化するものとする、⁶(2.41) は次のように書き換えられる:

$$\frac{\partial \log \psi(L/2)}{\partial l} \xrightarrow{L/l \rightarrow \infty} \Omega e^{-\Omega l} \frac{w_1'^\top T^{V_2} D T^1 w_1'}{w_1'^\top T^{V_2} T^0 T^1 w_1'}. \quad (2.42)$$

この式に D や T^0 の具体形を代入して (2.29) へと戻せば、

$$\mathcal{F}^C = -\frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\partial}{\partial l} \ln \left[1 + \frac{T_{12}^{V_2} T_{21}^{V_1}}{T_{11}^{V_2} T_{11}^{V_1}} e^{-2\Omega l} \right] \quad (2.43)$$

を得る。

$\frac{T_{12}^{V_2}}{T_{11}^{V_2}}$ および $-\frac{T_{21}^{V_1}}{T_{11}^{V_1}}$ が、右からの進行波 e^{ikx} はそれぞれポテンシャル V_1 および V_2 で散乱されたときの反射係数を表すことがわかるので、これらの反射係数をそれぞれ r_R^1 および r_L^2 とおけば、

$$\mathcal{F}^C = -\frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\partial}{\partial l} \ln \left[1 - r_R^1 r_L^2 e^{-2\Omega l} \right] \quad (2.44)$$

を得る。これを Lifshitz の公式といい、2つのポテンシャル間に働く Casimir 力をポテンシャルの反射係数を用いて表すことができた。したがって、実際に Casimir 力を計算する際にすべきことは、適切な境界条件とそれに対応するポテンシャルを定めて、そのポテンシャルに対応する散乱問題を解くことだけである。

⁶ここでは省略したが、 A^0 や C は考えている極限では単純な行列で与えられるので、具体的に基底の変換を計算することができる。その意味で、ここでの未知の行列はポテンシャルの具体形に依存する A^{V_i} および T^{V_i} だけである。

2.3 有限の誘電率の補正を含めた Casimir effect

2.3.1 平板-平板間に働く Casimir 力

(2.44) を用いて無限に広い平板-平板間に働く Casimir 力を計算する⁷。Lifshitz の公式は非完全導体に対する補正を取り入れた公式になっており、この公式を導く際には有限温度の効果も取り入れておいたので、(2.44) は有限の誘電率からくる補正と有限温度からくる補正の両方を取り入れた式になっている。

以下、次のような問題設定で考える。まず、2つの平板はどちらも現実的な金属板でできているものとして、誘電率は $\epsilon(\omega)$ とする。また、2枚の金属板の中間の領域は真空になっているものとする。金属の表面や空間中に電荷や電流はたまっていないものとする。このとき、この系の Maxwell 方程式は次のようになる：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = 0 \end{cases} .$$

ここでは、 $\mathbf{D} \equiv \epsilon(z)\mathbf{E}$ ⁸ および $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}$ (すなわち、全ての領域で $\mu = 1$) とする。このとき、金属面での反射係数を求めていく。この結果はよく知られていて、

$$r = \begin{cases} \frac{\epsilon(\omega)q-k}{\epsilon(\omega)q+k} & (\text{s 偏光の場合}) \\ \frac{q-k}{q+k} & (\text{p 偏光の場合}) \end{cases}$$

となる。ここで、 k は $|z| > l/2$ のときの平面波の波数の z 成分で、 q は $|z| < l/2$ のときの平面波の波数の z 成分である。極板と垂直な方向の波数を \mathbf{k}_{\parallel} とすると、 k と q はそれぞれ

$$-\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + k^2, \quad -\frac{\omega^2}{c^2} + \mathbf{k}_{\parallel}^2 + q^2$$

を満たす。これらの結果を用いると、(2.44) から

$$\mathcal{F}^C = -\frac{\partial}{\partial l} \left\{ \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left(\ln \left[1 - \left(\frac{\epsilon(i\xi_n)q_n - k_n}{\epsilon(i\xi_n)q_n + k_n} \right)^2 e^{-2q_n l} \right] + \ln \left[1 - \left(\frac{q_n - k_n}{q_n + k_n} \right)^2 e^{-2q_n l} \right] \right) \right\} \quad (2.45)$$

となる。ここで $q_n = \sqrt{\frac{\xi_n^2}{c^2} + k_{\parallel}^2}$, $k_n = \sqrt{\epsilon(i\xi_n)\frac{\xi_n^2}{c^2} + k_{\parallel}^2}$ および $\xi_n = 2\pi n/\beta$ である。⁹

⁷ 広さについての仮定は金属板間の距離が外部系の長さのスケールに比べて十分小さいという極限において正当化される。

⁸ この仮定のために見かけ上 Casimir 力が真空エネルギーと関係するだけで、Casimir 力自体は本質的にただの極板間にはたらく電磁気力ではないかという批判もある。詳しくは付録を参照。

⁹ 積分をユークリッド化した影響で ω は ξ に置き換えられ、有限温度を考えているため ω は連続ではなく離散的になっている。

plasma モデルの場合 以下では plasma モデルを考えることにして、 $\epsilon(\omega) = \left(1 - \omega_p^2/\omega^2\right)$ を採用する。積分を無次元化するため、 $y = 2aq_n$ としておく。このとき、

$$r = \begin{cases} \frac{\epsilon y - \sqrt{(\epsilon-1)\left(2l\frac{\xi_n}{c}\right)^2 + y^2}}{\epsilon y + \sqrt{(\epsilon-1)\left(2l\frac{\xi_n}{c}\right)^2 + y^2}} & (\text{s 偏光の場合}) \\ \frac{y - \sqrt{(\epsilon-1)\left(2l\frac{\xi_n}{c}\right)^2 + y^2}}{y + \sqrt{(\epsilon-1)\left(2l\frac{\xi_n}{c}\right)^2 + y^2}} & (\text{p 偏光の場合}) \end{cases} \quad (2.46)$$

となり、積分は

$$\mathcal{E}^C = \frac{1}{16\beta l^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{|2l\xi_n/c|}^{\infty} \frac{dy}{(2\pi)} y \left(\ln \left[1 - r_s^2 e^{-y} \right] + \ln \left[1 - r_p^2 e^{-y} \right] \right) \quad (2.47)$$

と書き換えられる。ここで、 r_s および r_p はそれぞれ s 偏光の場合の反射係数および p 偏光の場合の反射係数である。(2.46) を参照のこと。) ここで、この変数変換によって n に依存する量が ξ_n の 1 つにまとめられたことに注意する。ポアソンの和公式

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(n) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(2\pi n) \\ c(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

を用いれば、 ξ_n についての和を連続変数 ξ についての積分と n についての和へと分解することができる。簡単のために $\tilde{\xi}_n \equiv 2l\xi_n/c$ と定義しておく。実際、いまの場合は

$$\begin{aligned} b(n) &= \frac{1}{32\pi\beta l^3} \int_{|n|\tau}^{\infty} dy y f(\tilde{\xi}_n, y) \\ f(\tilde{\xi}_n, y) &\equiv \ln \left[1 - r_s^2 e^{-y} \right] + \ln \left[1 - r_p^2 e^{-y} \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

であり、これに対応する $c(2\pi n)$ は

$$c(2\pi n) = -\frac{1}{32\pi^2 l^3} \int_0^{\infty} dx \cos(2\pi n x) \int_{x\tau}^{\infty} dy y f(x\tau, y) \quad (2.49)$$

となり、 ξ_n についての和を連続変数 x の積分と n の和に分解することができた。

ここで、 ξ_n の定義から

$$\tilde{\xi}_n = \frac{4\pi l}{\beta c}$$

であることおよび $\tau \equiv (4\pi l/\beta c)$ と定義した。¹⁰特に $c(k) = c(-k)$ に注意する。以上から、 $T_{\text{eff}} \equiv$

¹⁰ τ については、(2.48) において積分の下端も n に依存するため、ポアソンの和公式を使う際の便利のために定義した。

$c/(2k_B l)$ とすれば、

$$\mathcal{E}^C = -\frac{c}{32\pi^2 l^4} \sum'_{n=0} \int_0^\infty d\tilde{\xi} \cos\left(n\tilde{\xi} \frac{T_{\text{eff}}}{T}\right) \int_{\tilde{\xi}}^\infty dy y f(\tilde{\xi}, y) \quad (2.50)$$

を得る。ここで積分変数を $\tilde{\xi} \equiv \tau x$ とした。また、プライム付きの和は

$$\sum'_{n=0} \equiv (n=0 \text{ の項}) + 2\left\{ \sum_{n>1} (n \text{ の項}) \right\}$$

で定義され、 $c(k) = c(-k)$ に対応している。さらに、後の便利のために新しい積分変数 $v \equiv \tilde{\xi}/y$ を定義しておく。積分変数を $\tilde{\xi}$ から $v = \tilde{\xi}/y$ におきかえると、(2.3.1) 式は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^C &= -\frac{c}{32\pi^2 l^4} \sum'_{n=0} \int_0^\infty dy \int_0^y d\tilde{\xi} \cos\left(n\tilde{\xi} \frac{T_{\text{eff}}}{T}\right) y f(\tilde{\xi}, y) \\ &= -\frac{c}{32\pi^2 l^4} \sum'_{n=0} \int_0^\infty dy \int_0^1 dv \cos\left(vyn \frac{T_{\text{eff}}}{T}\right) y^2 f(v, y) \end{aligned} \quad (2.51)$$

と書き換えられる。

特に、プラズマ振動数に付随する長さのスケール $\delta = c/\omega_p$ よりも極板間の距離 l が十分に小さい ($\delta/l \ll 1$) とき、

$$\epsilon(i\xi_n) = 1 + \left(\frac{l}{\delta}\right)^2 \frac{4}{\tilde{\xi}_n^2}$$

に注意して r の極限を考えると、

$$r = \begin{cases} 1 - \frac{\delta}{l} \frac{\tilde{\xi}_n^2}{y} & (\text{s 偏光の場合}) \\ -1 + \frac{\delta}{l} y & (\text{p 偏光の場合}) \end{cases}$$

が成り立つ。(ただし、 $\tilde{\xi} = 2l \frac{\xi_n}{c}$) これを (2.48) に代入すると、 δ/l の最低次で f は

$$f(v, x) \approx 2 \ln(1 - e^{-y}) + 2 \frac{y}{e^y - 1} (1 + v^2) \frac{\delta}{l}$$

という展開を持つので、これを (2.51) に戻して積分を実行することで、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^C &= \mathcal{E}_0^C \left\{ 1 + \frac{45}{\pi^3} \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{1}{t_n^3} \coth(\pi t_n) + \frac{\pi}{t_n^2 \sinh^2(\pi t_n)} \right] - \frac{1}{t_1^4} - 4 \frac{\delta}{l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{180}{\pi^4} \frac{\delta}{l} \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{\pi \coth(\pi t_n)}{2t_n^3} - \frac{2}{t_n^4} + \frac{\pi^3 \cosh(\pi t_n)}{t_n \sinh^3(\pi t_n)} + \frac{\pi^2}{2t_n^2 \sinh(\pi t_n)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.52)$$

を得る。ここで $t_n \equiv nT_{\text{eff}}/T$ であり、 \mathcal{E}_0^C は展開の $n=0$ の項からくる真空中の Casimir energy で、平板-平板間の場合には

$$\mathcal{E}_0^C = \frac{\hbar c \pi^2}{720 l^3}$$

である。ここで \hbar をあらわに表記しておいた。

2.3.2 平板-球面間に働く Casimir 力

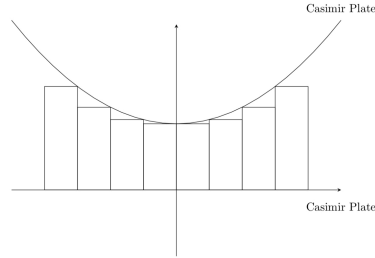


図 2.4: PFT 定理の概念図

Proximity force theorem 一般に、複雑な形状の物体間に働く力を正確に計算することは難しい。ただし、その力がポテンシャルに由来する力の場合には Proximity force theorem(PFT 定理) と呼ばれる便利な公式がある。以下では、球面と平板の場合に限って PFT 定理を示していく。

図 2.3.2 にあるように、平板の上に半球が配置されているような状況を考える。このとき、球面と平板の間に働く力を求めたい。しかし、厳密に求めることは困難なので、以下では平板と球面間の空間を図 2.4 の赤線で示したような長方形で分割して、平板と球面の間にたまるエネルギーを各長方形区間にたまるエネルギーの総和として求めることにする。これが PFT 定理のアイディアである。もしも平板-平板間に溜まるエネルギー密度 \mathcal{E}_{pp} が既知であるなら、球面と平板の間に溜まるエネルギー密度 \mathcal{E}_{sp} は

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{sp} &= \int_{\Sigma} dx dy \mathcal{E}(D(x, y)) \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) R^2 \mathcal{E}(D(x, y)) \\ &= 2\pi R \int_l^{l+R} dD \mathcal{E}(D) \\ &\approx 2\pi R \int_l^R dD \mathcal{E}(D)\end{aligned}$$

と書ける。ただし、2 行目から 3 行目では積分変数を θ から平板と球面間の距離 D に取り直し、3 行目から 4 行目では $l \ll R$ から、積分の上端を R に置き換えた。以上の結果から、球面と平板の間に単位面積あたりに働く力は l/R について 0 次の leading な近似として

$$\begin{aligned}F &\approx -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} \\ &= 2\pi R \mathcal{E}(l)\end{aligned}\tag{2.53}$$

と求まる。

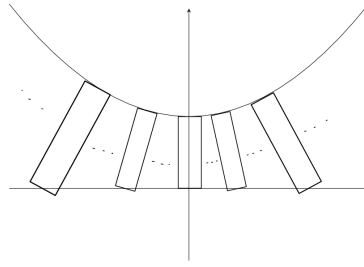


図 2.5: 球面から平面へ PFT 定理を適用した場合

この結果は球面と平板の場合の PFT 定理と呼ばれている。この結果は便利で使いやすいが、例えば、図 2.5 のように球面の側から平面へと長方形を伸ばした場合には見かけ上全く異なる表式が得られるだろう。この意味でも、PFT 定理は 2 つの面の間に働く力を一意的に決定するわけではない。

平面-球面の Casimir 力 (2.51) および (2.53) の結果を合わせれば、球面と平板の間に働く Casimir 力を次のように求めることができる¹¹:

$$\mathcal{F}_{\text{sp}}^C \approx -\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{sp}}^C}{\partial l} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{sp}}^C = 2\pi R \mathcal{E}_0^C \left\{ 1 + \frac{45}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{t_n^3} \coth(\pi t_n) + \frac{\pi}{t_n^2 \sinh^2(\pi t_n)} \right] - \frac{1}{t_1^4} - 4 \frac{\delta}{l} \right. \\ \left. + \frac{180}{\pi^4} \frac{\delta}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\pi \coth(\pi t_n)}{2t_n^3} - \frac{2}{t_n^4} + \frac{\pi^3 \cosh(\pi t_n)}{t_n \sinh^3(\pi t_n)} + \frac{\pi^2}{2t_n^2 \sinh(\pi t_n)} \right] \right\}. \quad (2.55) \end{aligned}$$

これを用いれば、温度や誘電率の効果を無視する leading な近似で球面と平板の間に働く Casimir 力が

$$\mathcal{F}_0^C \approx 2\pi R \frac{\hbar c \pi^2}{720 l^3}$$

と求まる。(2.54) 式は漸近公式であるが、適当な次数で打ち切ることで、低温でのカシミール効果を評価することができる。

¹¹ この結果を導出する際には、無限乗積展開やそれに伴う無限級数を利用する。計算は大変だが、単純計算ではある。

3 セットアップ

3.1 実験回路

3.1.1 回路を構成する装置

以下に回路を構成する各装置の詳細を記す。

ADALM2000

PC に繋いで操作可能な多機能デバイス。本実験ではオシロスコープ、電圧元、ファンクションジェネレータとして用いる。PC からは Scopy という専用のアプリケーションや python に対応した API によってアクセスできる。

Kikusui Power Supply

直流安定化電源。PC からは SCPI という規格によってアクセスできる。

AC bridge

2つの位相が等しい交流信号の振幅差を直流電圧として出力する回路。図 3.2 のような回路を作成した。

この回路の動作原理については 4 章で述べる。

3.1.2 回路の構成

以下の図 3.1、図 3.2 の回路を作り、カシミール力の測定を行った。ADALM2000 その 1 はオペアンプへの電源供給と、図 3.2 の 4.2kHz、2V_{pp} の交流電源として、ADALM2000 その 2 は AC bridge から出てくる信号 V_{out} を読み取るオシロスコープとして用いた。PID 制御は python で行い、Kikusui Power Supply でフィードバック電圧をかけた。

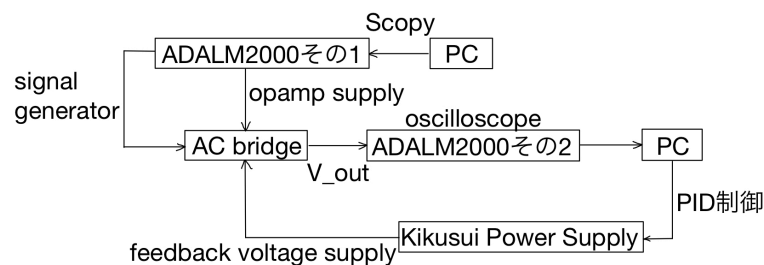


図 3.1: カシミール力の測定に用いた回路の全体図

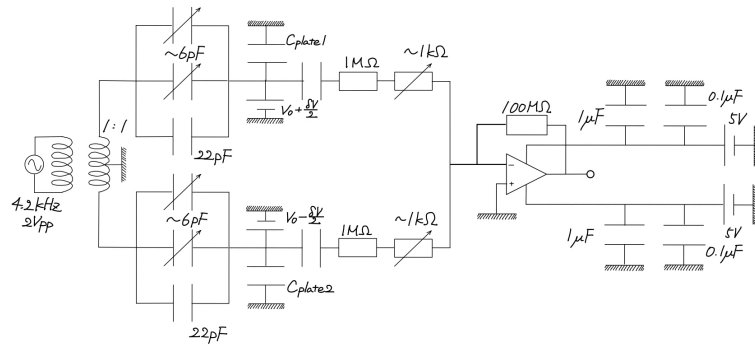


図 3.2: AC bridge 回路図

3.2 ねじれ振り子

ねじれ振り子の外観は以下の図 3.3 のようにした。

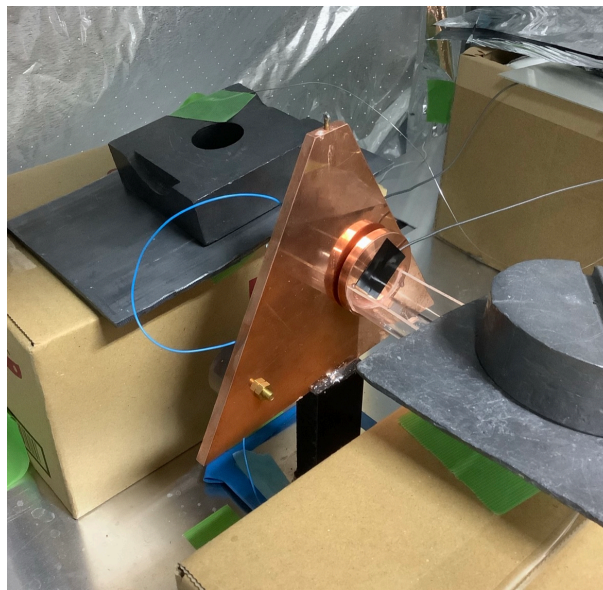


図 3.3: ねじれ振り子の外観

本実験ではねじれ振り子を接地する際¹²、グラウンドと振り子とをタングステンワイヤで繋いだ。この際、振り子とワイヤを電氣的に接触させるため、振り子の上部に穴を開けて、そこに黄銅でできた筒を打ち込み、その中にワイヤを繋いだ。

¹²回路全体で同じグラウンドをとっておかないと、正しい結果が得られない。

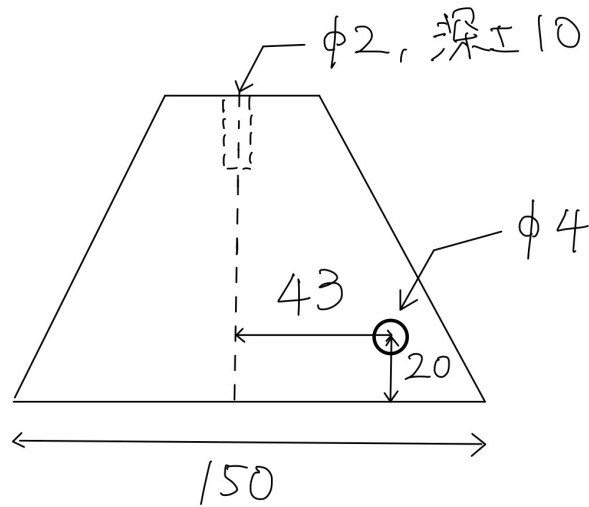


図 3.4: ねじれ振り子の設計図。長さの単位は mm で、上辺は 10mm。

また、カシミール力の測定のために平面のカシミールプレートが銅板に接着した。これは、銅板にネジ穴（図 3.4 の右の穴）を開け、そこにネジ頭と接着したカシミールプレートを挿しこむことで実現した。

3.2.1 カシミールプレートの要件について

カシミール力の計算は平板平板間のものが有名であるが、その計算は、2 枚の平板が完全に並行であるという仮定の下でのみ有効である。しかし、現実にはそのようなセットアップを実現するのは甚だ困難であるため、実際の実験では球面平板間というセットアップを用いる。この場合、球面の対称性から平板平板の場合のような問題は起こらない。また、一般の物質の間にはカシミール力以外の力も働く。カシミール力を選択的に測定するためには、カシミールプレート（球面・平板）の距離を μ メートル単位まで近づける必要がある。この際、プレートの表面が μ メートルより短い order で平坦でないと、表面の凹凸が無視できない誤差をもたらす。そのため、本実験では、カシミールプレートとして optical flat なレンズや石英等を用いて、それらの表面に金を蒸着することで、精度の良い平坦な金属面を導入した。

3.2.2 振り子の振れ幅と、ワイヤの要件について

振り子の慣性モーメントを I 、ワイヤの剛性率を H とすると、カシミール力が働いたとき、振り子の運動方程式は次のように近似できる:

$$I\ddot{\theta} = L \times (2\pi R) \frac{\hbar c \pi^2}{720} \frac{1}{a^3} - \frac{H \pi r^4}{2l} \theta$$

ここで、 r はワイヤの太さ、 r はワイヤの太さ、 L は振り子の中心からカシミールプレートまでの腕の長さ¹³をそれぞれ表す。典型的な振り子の揺れの order は上の θ についての運動方程式を解いて、 θ の典型的な振れ幅を求めれば、(振れ幅) \times (振り子の腕の長さ) としてもとまる:

$$L \times \left\{ L \times (2\pi R) \frac{\hbar c \pi^2}{720} \frac{1}{a^3} \times \frac{2l}{H\pi r^4} \right\} \sim 10^{-11} \frac{l}{Hr^4}.$$

実際の実験では、 $r \sim 10^{-2}$ [mm] 程度の order で、 $l \sim 100$ [mm] 程度の order であり、タングステンワイヤの剛性率は $H \sim 10^5$ [N/mm²] なので、上式より、この振り子はカシミール力によって典型的に 10^{-6} 程度揺れる。もしもこの振れ幅が振り子（あるいはカシミールプレート）と極板との距離よりも大きかった場合、カシミールプレートと極板が接触してしまい、カシミール力を正しく測定することができない。本実験ではこれらの距離を μ メートルに設定しているため、 μ メートル程度の order の振れは非常に微妙だが、実際には空気抵抗などその他の要因でカシミールプレートは μ メートルオーダーより小さくなるものと期待して、このセットアップで実験を行った。¹⁴

¹³ 図 3.4 を参照。この場合、43mm。

¹⁴ この点については注意深く考察する必要があるだろう。

4 測定原理

今回の実験では、平面の金属板と球面 (正確にはその一部) の金属板 (以下、これらをカシミールプレートと呼ぶ) の間にはたらくカシミール力を測定するため、第3章にあるような回路を作成した。ねじれ振り子についての平面のカシミールプレートと球面のカシミールプレートが向かい合っており、その間にカシミール力がはたらき、振り子がねじれ、振動する。振り子は導体でできており、AC bridge の2つの金属板 (以下、これらを単にプレートと呼ぶ) と向かい合っており、それぞれがコンデンサーを形成する。振り子が振動することで、2つのコンデンサーの容量は異なる値に変化する。AC bridge はこの容量の差異を検知し、ねじれ振り子が平衡位置に来る (容量が等しくなる) ように、一方のプレートには $V_0 + \frac{\delta V}{2}$ を、もう一方のプレートには $V_0 - \frac{\delta V}{2}$ の電圧をかけるフィードバック回路の役割を果たす。本実験では、ピエゾを利用してカシミールプレート間の距離を変え、各距離でのフィードバック電圧 δV を測定した。

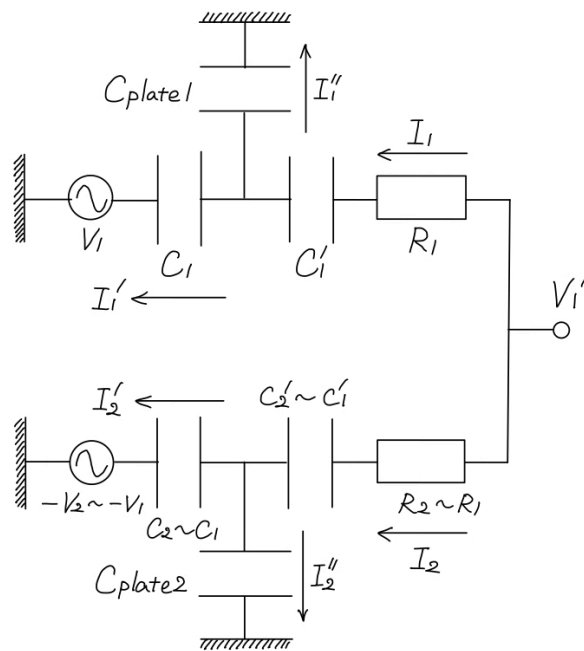


図 4.1: フィードバック回路のプレート周りの回路図

AC bridge の左半分の回路について、適当にコンデンサーや抵抗の合成を行うと、図 4.1 のようになる。回路の方程式と電荷保存則は、

$$-V_1 + \frac{1}{i\omega C_1} I_1' = \frac{1}{i\omega C_{plate1}} I_1'' \quad (4.1)$$

$$V_1 + \frac{1}{i\omega C_1} I_2' = \frac{1}{i\omega C_{plate2}} I_2'' \quad (4.2)$$

$$I_1 + I_2 = 0 \quad (4.3)$$

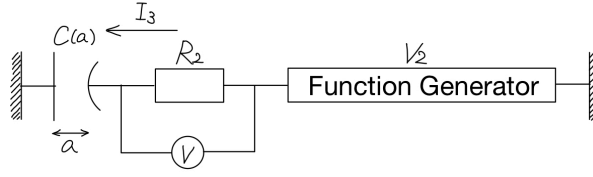


図 4.2: キャリブレーション時のカシミールプレート周辺の回路図

となる。これら 3 式から、反転増幅前の電圧は、

$$\begin{aligned} V_1' &= \left(R_1 + \frac{1}{i\omega C_1'} \right) I_1 + \frac{1}{i\omega C_{\text{plate1}}} I_1'' + \left(R_1 + \frac{1}{i\omega C_1'} \right) I_2 + \frac{1}{i\omega C_{\text{plate2}}} I_2'' \\ &= \frac{C_{\text{plate2}} - C_{\text{plate1}}}{(C_{\text{plate1}} + C_1)(C_{\text{plate2}} + C_1)} \left(\frac{I_1}{i\omega} + V_1 \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

と計算できる。これを反転増幅したものが V_{out} で、確かに $C_{\text{plate1}} - C_{\text{plate2}}$ に比例する。しかし、一般には C_1 や R_1 が図 4.1 の上下で厳密に同じ値にはならず、このときは、

$$V_1' \propto V_1 \left(\beta_C \frac{C_1 - C_2}{C_1} + \beta_{C'} \frac{C_1' - C_2'}{C_1'} + \beta_{\text{plate}} \frac{C_{\text{plate1}} - C_{\text{plate2}}}{C_{\text{plate1}}} + \beta_R \frac{R_1 - R_2}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{V_1} \right) \quad (4.5)$$

となるが、 C_1 、 C_{plate1} 、 C_1' 、 R_1 などのインピーダンスのオーダーが等しいとき、各 β のオーダーも等しく、うまく選ぶことで、(4.5) 式のカシミールプレート以外の項を相殺することができる。

キャリブレーションとして、カシミールプレート間にはたらく力 F とフィードバック電圧 δV の間の関係を求めるものと、力 F とカシミールプレート間の絶対距離 a の間の関係を求めるもの 2 種類を行った。

まず、前者について、カシミールプレート間に電位差 V をかけると、カシミールプレート間には $F_1 = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{da}$ の電氣的な力がはたらく。ここで、 C はカシミールプレートが形成するコンデンサーの容量である。よって、 $\frac{dC}{da}$ が分かれば、 V は我々がコントロールする量なので、 F_1 が求まり、カシミールプレートにその力がはたらいた時のフィードバック電圧を測定すれば、 F と δV の関係が求まる。 $\frac{dC}{da}$ については、図 4.2 のような回路を作った。カシミールプレートが、カシミール力が無視できる程には離れているが、互いに十分近くにあるとき、電圧が発生する。この電圧を相殺するために、Function Generator にオフセット電圧をのせ、これは $\delta V = 0$ となるように決めた。そのもとで、回路の方程式は、各素子のインピーダンスを考えることで、

$$V_2 = I_3 \left(\frac{1}{i\omega C(a)} + R_2 \right) \quad (4.6)$$

$$\therefore \left| \frac{V_2}{I_3} \right|^2 = \frac{1}{\omega^2 C(a)^2} + R_2^2 \quad (4.7)$$

となる。ここで、 R_2 は抵抗そのものと導線の抵抗の合成、 V_2 は交流電圧、 I_3 は回路を流れる電流

である。 V_2 は我々がコントロールする量であり、 I_3 は電流計からわかるので、(4.6) 式から、各絶対距離 a でのカシミールプレートが形成するコンデンサーの容量 $C(a)$ が求まり、 $\frac{dC}{da}$ が求まる。次に後者について、カシミールプレート間の絶対距離はピエゾを利用して変化させるが、各測定間のカシミールプレート間の絶対距離の差が分かるだけで、絶対距離自体は分からない。前者のキャリブレーションと同様にして絶対距離 a だけ離れたカシミールプレート間に電位差 V_3 をかけると、単位面積あたりのポテンシャルエネルギー E は、

$$E = \frac{1}{2} \frac{C}{A} V_3^2 \quad (4.8)$$

である。ここで、 A は平面のカシミールプレートの面積である。このとき、PET 定理から、カシミールプレート間のはたらく電氣的な力 $F_2(a)$ は、

$$F_2(a) = \frac{\pi \varepsilon_0 R V_3^2}{a} \quad (4.9)$$

となる。ここで、 ε_0 は真空の誘電率、 R は球面のカシミールプレートの曲率半径である。よって、前のキャリブレーションから δV と $F_2(a)$ の関係がわかっているので、それと (4.8) 式を a をパラメーターとしてフィッティングすれば、カシミール力と絶対距離の関係が求まる。

5 実験手順

5.1 キャリブレーション

以下、フィッティングの詳細な方法は第6章で説明することにする。

5.1.1 力とフィードバック電圧について

1. カシミールプレートの金属接触による電圧を相殺するための直流電圧 V_2 をフィードバック電圧が0になるように決め、 $V_2 \sim 500$ mVとして、図4.2のように回路をつくった。ここで、初期のカシミールプレート間の距離 a_0 を固定した。 $\omega = 1 \sim 2$ MHzと変えて、各 ω での電流計の示す数値を測った。
2. ω^2 と $\left| \frac{V_2}{I_3} \right|^2$ をプロットし、(4.7)式における $C(a_0)$ と R_2 をフィッティングして、 $C(a_0)$ を求めた。
3. ピエゾを用いてカシミールプレート間の絶対距離の差 Δa を段階で変え、1の操作を繰り返した。各段階での $C(a)$ を直線でフィッティングし、初期位置 a_0 における $\frac{dC}{da}(a_0)$ を求めた。
4. 絶対距離を a_0 に戻し、カシミールプレート間に直流電圧 $V = 20$ mV をかけたときの、フィードバック電圧 δV を測った。
5. 各直流電圧での δV と $F = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{da}(a_0)$ をプロットし、 δV と F の関係を求めた。

5.1.2 力と絶対距離について

1. 絶対距離 a_0 において、カシミールプレート間に直流電圧 $V = 20$ mV をかけ、そのときの δV を求め、5.1.1で分かった力とフィードバック電圧の関係から、このときのカシミールプレート間にかかる力 $F_e(a_0)$ を読み取った。
2. 絶対距離を段階で変え、1の操作を繰り返した。
3. 得られた $F_e(a)$ のデータを(4.9)式でフィッティングし、絶対距離と力との関係を求めた。

6 本年度の進捗と反省

6.1 回路

進捗としては、AC bridge 回路を作成し、測定可能な精度を実現できた。また、フィードバック制御を実現するためのセットアップの構成も完了し、キャリブレーションが実行可能な状態まで到達できた。反省としては、回路の製作に関する当初の見積もりが不十分であり、結果として大幅な遅れを生じさせてしまった。事前にパーツの誤差の影響を十分に検討してから回路を設計し、ブレッドボードで試作して表面実装で完成品を作るなどの、各工程の所要時間を考慮した進行をするべきであった。

6.2 ねじれ振り子

振り子はおおむね完成し、実験で実際の振る舞いを確認することができた。ただし、正確にカシ米尔力を測定する際の、振り子の振れ幅については再度検討する必要がある。また、本年度は振り子の構造が脆弱かつ複雑だったため、実験中何度もタングステンワイヤが切れてしまった。この問題はワイヤの太さを太くすれば解決するが、その場合、3.2.2 節で扱ったように、振り子の振れ幅が小さくなることに注意する必要がある。振れ幅があまり小さくなると、コンデンサの静電容量の変化も小さくなり、回路設計、ひいては各回路素子についての要件がより厳しいものとなる。したがって、ワイヤの太さを変更する場合は、そのワイヤの太さのもとの振り子の振れ幅が、回路の検知できる振れ幅の上限の中に収まっていることに注意する必要がある。

7 謝辞

指導教官の田島さん、鈴木さん、TA の栗林さん、河本さんには実験について多大なるご指導を賜りました。一年間ありがとうございました。

A PID制御に用いたコード

以下にPID制御に用いたPythonのコードのメインコードを載せる。

```
1 import libm2k
2 import kikusui
3 import numpy as np
4 import time
5 from matplotlib import pyplot as plt
6
7
8 # Kikusui Power Supplyの初期化
9 kikusui1 = kikusui.Kikusui('169.254.53.136')
10 kikusui2 = kikusui.Kikusui('169.254.35.156')
11
12
13 ctx=libm2k.m2kOpen()
14 if ctx is None:
15     print("Connection Error: No ADALM2000 device available/connected to your PC.")
16     exit(1)
17
18
19 Count=10000000
20 N=int(1000)
21 freq=int(4200)
22 Vth=0.01
23 V_offset=7.0
24 StopNum=10
25 TF=int(0)
26 e1=0
27 e2=0
28 Kp=0.1
29 Ki=0.1
30 Kd=0.1
31
32
33 stop_counter:int=0
34
35 for i in range(Count):
36
37
38
39     # Adalmの入力信号に関するチャンネルへ接続
40     ctx.calibrateADC()
41     ain=ctx.getAnalogIn()
42     ain.enableChannel(0,True)
43     ain.enableChannel(1,True)
44     # getSample関数の区間の指定
45     sect=np.multiply(float(N), freq)
46     ain.setSampleRate(sect)
47     # 入力信号の取り出し
48     samples=ain.getSamples(N)
49     # ch1は観測データ
50     input=np.array(samples[0])
51     # ch2は位相のずれを検出するための参照用データ
52     reference=np.array(samples[1])
```

```

53 # 位相のずれを検出し同じ位相なら+1,逆位相ならば-1をfloat型で出力
54 Phsign=np.sign(((input-input.mean()*(reference-reference.mean()))).mean())
55
56
57
58 # 入力信号をフーリエ変換
59 F=np.fft.fft(input, n=None)
60 # 上のフーリエ成分に対応する周波数
61 fr=np.fft.fftfreq(N, 1/(freq*float(N)))
62 # フーリエ成分の絶対値
63 amp= np.abs(F)
64 # 規格化
65 F_amp=amp/N*2
66 F_amp[0]=F_amp[0]/2
67 # フーリエ成分の最大値を出力
68 Vamp=max(F_amp)
69 # 符号の情報を付与
70 Vout=Phsign*Vamp
71
72
73 # 入力電圧が十分小さければ終了
74 if Vamp<=Vth:
75     stop_counter+=1
76     if stop_counter>StopNum-1:
77         break
78     pass
79 else:
80     stop_counter=0
81
82
83 # PID制御
84 M=Vout
85 M1=M
86 e2=e1
87 e1=e
88 e=-Vout
89 M=M1+Kp*(e-e1)+Ki*e+Kd*((e-e1)-(e1-e2))
90
91
92 # 電圧出力
93 print(kikusui1.set_voltage(V_offset+float(M)))
94 print(kikusui2.set_voltage(V_offset-float(M)))
95
96
97
98 time.sleep(0.1)
99
100 libm2k.contextClose(ctx)

```

ソースコード 1: PID 制御のメインコード