

パラポジトロニウムの崩壊と Compton 散乱による
keV スケールでの CHSH 不等式の破れの検証
2025 年度京都大学理学部物理科学系 課題研究 P1

市川周 小林悠人 下釜翔悟 山田大樹

contents

1	実験目的	2
1.1	局所隠れた変数理論と量子論	2
1.2	CHSH 不等式の破れ	2
2	実験原理	3
2.1	entangled 2γ 生成	3
2.2	2γ の偏光測定	4
2.3	CHSH 不等式	5
2.4	相関関数の具体的な関数形	6
2.5	CHSH 不等式の破れ	7
2.6	Compton 散乱と偏光	8
3	実験方法	10
3.1	実験装置概要	10
3.2	実験器具	13
3.3	回路	13
4	実験結果	16
4.1	シンチレータごとの PMT 波形の特性	16
4.2	エネルギー較正	16
4.3	有効イベントの数え方	19
4.4	再実験のセットアップと有効イベントの数え方	21
4.5	再実験の結果とフィッティング	22
5	解析	25
5.1	解析方法	25
5.2	Geant4 シミュレーションによる A の算出	26
5.3	CHSH 不等式の評価と結果	28
6	考察・まとめ	29
7	謝辞	30

1 実験目的

1.1 局所隠れた変数理論と量子論

1935年に Einstein, Podolsky, Rosen の指摘したように、量子論では量子相関と呼ばれる非局所的な相関が存在する。これに対し、隠れた変数の導入により非局所的な相関を避け局所的な相関のみを考える隠れた変数理論が提唱された。隠れた変数理論は次を仮定する。

- (i). 物理量 A の測定値は実験で測定できない隠れた変数 $\lambda \in \Lambda$ に依存し、隠れた変数 λ は各測定ごとにランダムな値をとる。その測定値 $A(\lambda)$ は物理量 A に対応する演算子 A の固有値 a_i ($i = 1, 2, \dots$) のいずれかに一致する。
- (ii). 物理量の期待値は隠れた変数 $\lambda \in \Lambda$ に依存する確率分布関数 $\rho(\lambda)$ を用いて

$$\langle A \rangle_{\text{HV}} = \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) A(\lambda) d\lambda \quad (1.1)$$

で与えられる。

このような隠れた変数理論が量子論と整合するのであれば、量子論における物理量の期待値 $\langle A \rangle_{\text{QT}}$ は隠れた変数理論における期待値と一致するはずである。

1.2 CHSH 不等式の破れ

非局所的な相関を避けた隠れた変数理論においては、局所的な相関のみを認めたスピン相関関数について 1969年に Clauser, Horne, Shimony, Holt が提唱した CHSH 不等式が成立する。CHSH 不等式はより一般的な状況でも成り立つ意味で Bell の不等式の一般化である。しかし、非局所的な相関を持つ量子論においては CHSH 不等式は成立しない。

隠れた変数理論を考察する上で、次を仮定する。

- (i). 隠れた変数理論として様々なモデルを検討することができるが、今回はモデルの選択の恣意性について問うことはしない。
- (ii). 1γ の偏光について、測定される偏光方向は直交する。これは隠れた変数理論でも量子論でも共通の光の物理的な性質とする。
- (iii). 後述の Klein-仁科の公式についても、選択したモデルにおける仮定として扱うものとする。

パラポジトロニウムの 2γ 崩壊と Compton 散乱を利用して、keV のエネルギーを持つ現象でも量子力学が保証されることを確認することが本実験での目標である。

2 実験原理

2.1 entangled 2γ 生成

2.1.1 ^{22}Na の 511 keV スペクトル

^{22}Na の放射スペクトルには複数のピークが存在するが、本実験では、511 keV のピークを利用する。まず、その発生原理を定性的に説明する。

^{22}Na は β^+ 崩壊により陽電子 e^+ を放出する。放出された陽電子は、線源周囲の物質 (プラスチック等) 中の電子と結合し、ポジトロニウム (Ps) を形成する。511 keV のエネルギーピークには、パラポジトロニウム (p-Ps: 電子・陽電子の合成スピン 0 状態) が寄与する。p-Ps の寿命は 125 ps と短く、形成後ただちに 2 つの光子 (2γ) へと崩壊し、互いに真逆の方向へ放出される。このとき、エネルギー保存則により、 2γ は p-Ps の静止質量分のエネルギーを持っている。

これが、511 keV のエネルギーを持つ光子が back-to-back に対生成される原理である。

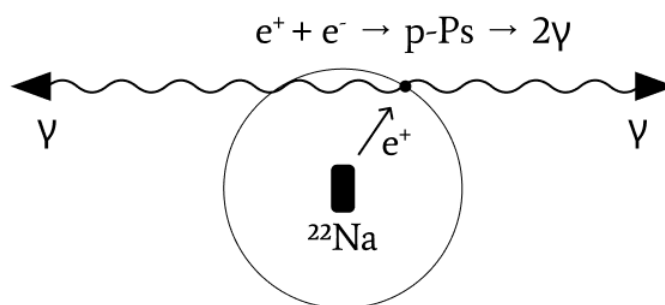


図 1 2γ 対生成

2.1.2 γ 線

ここでは、本章のノーテーションの導入を兼ね、単一光子状態の量子力学的扱いを概観する。

単一光子状態の角運動量の固有状態は右巻き偏光状態 $|R\rangle$ および左巻き偏光状態 $|L\rangle$ である。角運動量の量子化軸を z 軸にとると、 $|R\rangle$ と $|L\rangle$ は角運動量演算子 L_z の固有状態になっている。

$$\begin{cases} L_z|R\rangle = +|R\rangle \\ L_z|L\rangle = -|L\rangle \end{cases} \quad (2.1)$$

この $|R\rangle$ と $|L\rangle$ は単一光子状態の正規直交完全系をなす。

また、別の正規直交完全系として、直線偏光状態 $|x\rangle, |y\rangle$ を考える。これらの状態は x, y 軸偏光状態を表し、互いに直交している。偏光状態を測定する演算子 α を以下のように定義する。

$$\alpha = |x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y| \quad (2.2)$$

このとき、 $|x\rangle$ と $|y\rangle$ は α の固有状態である。

$$\begin{cases} \alpha|x\rangle = +|x\rangle \\ \alpha|y\rangle = -|y\rangle \end{cases} \quad (2.3)$$

円偏光基底 $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ と直線偏光基底 $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ の変換公式は以下で与えられる。

$$\begin{cases} |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \\ |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \end{cases} \quad (2.4)$$

2.1.3 entangled 2γ

最後に, p-PS の崩壊による 2γ 対生成を量子力学的に説明する。

p-PS は, スピン 0 なので角運動量保存より, 対生成された状態 $|2\gamma\rangle$ は次のように書ける。

$$|2\gamma\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|RL\rangle - |LR\rangle) \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|xy\rangle - |yx\rangle) \quad (2.6)$$

となる。これは 2-qubit の最大もつれ状態 (Bell state) とよばれる, 量子相関の一種である量子エンタングルメントが最大となっている状態である。最大もつれ状態は

$$|2\gamma\rangle = |\gamma\rangle \otimes |\gamma'\rangle \quad (2.7)$$

のように 2 つの系に分離した量子状態のテンソル積として書くことができない意味で非局所的な相関を持つ量子状態である。

2.2 2γ の偏光測定

2.2.1 状況設定

以下の図のように, 2γ 対生成点から互いに逆方向に離れた二地点において, 各光子の偏光を測定する系を考える。実際に, 511 keV の γ 線の偏光を直接測定することは実験的に容易ではないが, まずは理想的な測定が可能な状況を仮定して議論を進める。

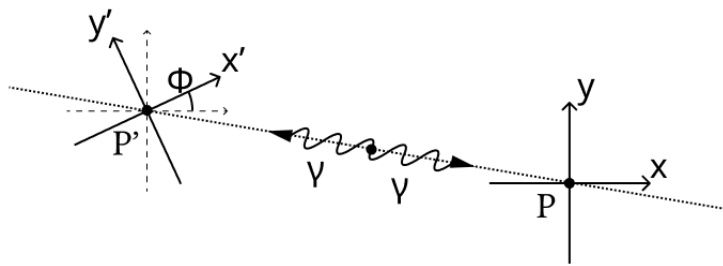


図2 偏光測定の配置図

地点 P では, x, y 軸に沿って偏光測定を行い, 地点 P' では, x, y 軸に対して角度 ϕ 回転した x', y' 軸に沿って偏光測定を行う。

それぞれの, 偏光測定演算子 α, α' を以下のように定義する。

$$\alpha = |x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y| \quad (2.8)$$

$$\alpha' = |x'\rangle\langle x'| - |y'\rangle\langle y'| \quad (2.9)$$

ここで、地点 P' における偏光の固有状態は、回転角 ϕ を用いて以下の基底変換によって与えられる。

$$|x'\rangle = \cos \phi |x\rangle + \sin \phi |y\rangle \quad (2.10)$$

$$|y'\rangle = -\sin \phi |x\rangle + \cos \phi |y\rangle \quad (2.11)$$

2.2.2 CHSH 不等式との関係

前節で求めた

$$|2\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|xy\rangle - |yx\rangle) \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \phi |xx'\rangle + \cos \phi |xy'\rangle - \cos \phi |yx'\rangle + \sin \phi |yy'\rangle) \quad (2.13)$$

なる最大もつれ状態における偏光相関を測定し、CHSH 不等式の破れを確認することで、古典論では説明不可能な量子論特有な相関の存在を検証する。

Bell の不等式の一般論によれば、相関関数 $\langle \alpha\alpha' \rangle(\phi)$ を角度 ϕ の関数として求めることで、不等式が破られているか否かを議論できる。実験では、この期待値 $\langle \alpha\alpha' \rangle$ の測定を目指す。

2.2.3 entangled 2γ の偏光測定

前述の Bell 状態を仮定し、演算子 $\alpha\alpha'$ の期待値を計算する。

状態 $|2\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \phi |xx'\rangle + \cos \phi |xy'\rangle - \cos \phi |yx'\rangle + \sin \phi |yy'\rangle)$ に対して、 $\langle \alpha\alpha' \rangle$ を計算すると、

$$\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{QT}} := \langle 2\gamma | \alpha\alpha' | 2\gamma \rangle = -\cos 2\phi \quad (2.14)$$

となる。

2.3 CHSH 不等式

本節では、隠れた変数理論から出発して CHSH 不等式を導出することを目標とする。本実験は back-to-back の 2γ 放出であり、自由度は 2 である。地点 P, P' における偏光の向きに対応する変数を $\alpha(\theta_i, \lambda), \alpha'(\theta'_j, \lambda)$ なる ± 1 の値をとる関数と定めると、相関関数は

$$\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_i, \theta'_j) := \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\theta_i, \lambda) \alpha'(\theta'_j, \lambda) d\lambda \quad (2.15)$$

と定義される。ここで、局所相関のみを考えることから、分離可能性の仮定として $P \neq P'$ のとき 2 つのスピン変数は独立であるとしている。隠れた変数理論におけるこの期待値に対して、次の不等式が成り立つ。

$$-2 \leq \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_1) - \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_2) + \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_2, \theta'_1) + \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_2, \theta'_2) \leq 2 \quad (2.16)$$

この不等式が CHSH 不等式である。

CHSH 不等式は、次のように導出される。相関関数の差 $\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_1) - \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_2)$ は

$$\begin{aligned} \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_1) - \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_2) &= \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) [\alpha(\theta_1, \lambda) \alpha'(\theta'_1, \lambda) - \alpha(\theta_1, \lambda) \alpha'(\theta'_2, \lambda)] d\lambda \\ &= \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\theta_1, \lambda) \alpha'(\theta'_1, \lambda) [1 \mp \alpha(\theta_2, \lambda) \alpha'(\theta'_2, \lambda)] d\lambda \\ &\quad - \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\theta_1, \lambda) \alpha'(\theta'_2, \lambda) [1 \mp \alpha(\theta_2, \lambda) \alpha'(\theta'_1, \lambda)] d\lambda \end{aligned} \quad (2.17)$$

と計算できる。両辺で絶対値をとり、右辺に対して三角不等式を用いる。すべての $\theta = \theta_i, \theta'_j (i = 1, 2), \lambda \in \Lambda$ について $0 \leq |\alpha(\theta, \lambda)| \leq 1$ より

$$\begin{aligned} |\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_1) - \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_2)| &\leq \left| \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\theta_1, \lambda) \alpha'(\theta'_1, \lambda) [1 \mp \alpha(\theta_2, \lambda) \alpha'(\theta'_2, \lambda)] d\lambda \right| \\ &\quad + \left| \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\theta_1, \lambda) \alpha'(\theta'_2, \lambda) [1 \mp \alpha(\theta_2, \lambda) \alpha'(\theta'_1, \lambda)] d\lambda \right| \\ &\leq \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) [1 \mp \alpha(\theta_2, \lambda) \alpha'(\theta'_2, \lambda)] d\lambda + \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) [1 \mp \alpha(\theta_2, \lambda) \alpha'(\theta'_1, \lambda)] d\lambda \\ &= 2 \mp [\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_2, \theta'_2) + \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_2, \theta'_1)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

と計算できる。ただし、 $1 \mp \alpha(\theta, \lambda) \alpha'(\theta', \lambda) \geq 0$ であることから絶対値記号を外した。従って

$$|\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_1) - \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_2)| \pm [\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_2, \theta'_2) + \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_2, \theta'_1)] \leq 2 \quad (2.19)$$

を得る。第1項の絶対値記号内が非負のとき複号で + を選べば

$$-2 \leq \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_1) - \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_1, \theta'_2) + \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_2, \theta'_2) + \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_2, \theta'_1) \leq 2 \quad (2.20)$$

となり、CHSH 不等式が示された。

2.4 相関関数の具体的な関数形

相関関数を隠れた変数理論において導出するにあたって、1.2節で述べたようなモデルの選択が重要となる。まず、すべてのモデルに共通する事項を述べよう。隠れた変数 λ に依存して直線偏光の向きに対応して固有値 ± 1 が測定される状況を考える。つまり、物理量の測定値としては

$$\alpha(\theta_i, \lambda) = \pm 1 \quad (2.21)$$

である。その期待値は確率分布関数 $\rho(\lambda)$ によって

$$\langle \alpha \rangle_{\text{HV}}(\theta_i) = \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\theta_i, \lambda) d\lambda \quad (2.22)$$

求められる。相関関数も同様に

$$\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\theta_i, \theta'_j) = \int_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\theta_i, \lambda) \alpha'(\theta'_j, \lambda) d\lambda \quad (2.23)$$

と表せる。ここで、相関関数の期待値の角度 θ_i, θ'_j に対する依存性について、 z 軸に関する回転対称性から2つの偏光の角度差

$$\phi_{ij} = \theta'_j - \theta_i \quad (2.24)$$

に対する依存性に言い換えることができるので、相関関数を $\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\phi_{ij})$ と表すことにする。以上を踏まえると、

- (i). $\alpha(\theta_i, \lambda)$ を具体的な関数形として書き表す。
- (ii). 確率分布 $\rho(\lambda)$ として様々な確率分布を仮定する。

など、様々なモデルを考えることができる。以降、各モデルについて説明することにする。

2.4.1 Bell の原論文に基づくモデル

ここで解説するモデルは、1964 年の Bell による EPR パラドックスに関する論文を基にしたものである。隠れた変数 λ に依存する確率分布関数 $\rho(\lambda)$ を一様分布 $\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$ とする。これは、隠れた変数 λ が測定者が値を知ることができないことを根拠とする。いま、完全反相関

$$\alpha(\theta_i, \lambda) = -\alpha'(\theta'_j, \lambda) \quad (\theta_i = \theta'_j) \quad (2.25)$$

が成り立つことから、相関関数は

$$\begin{aligned} \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\phi_{ij}) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \alpha(\theta_i, \lambda) \alpha'(\theta'_j, \lambda) d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\theta_i, \lambda) \alpha(\theta'_j, \lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.26)$$

とできる。ここで、偏光の向きを表す関数として

$$\alpha(\theta_i, \lambda) = \text{sgn}(\cos(\theta_i - \lambda)) \quad (2.27)$$

なる形を仮定する。このような関数形であれば積分が実行できて、相関関数は

$$\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\phi_{ij}) = -1 + \frac{\phi_{ij}}{\pi} \quad (2.28)$$

と計算できる。 $0 \leq \phi_{ij} \leq 2\pi$ において CHSH 不等式が守られている。

2.4.2 相関関数の依存性を角度 ϕ_{ij} の余弦関数とするモデル

Bell の原論文とは異なり、相関関数 $\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\phi_{ij})$ の角度 ϕ_{ij} に対する依存性が

$$\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\phi_{ij}) = -\kappa \cos 2\phi_{ij} \quad (2.29)$$

と余弦関数の定数倍となるモデルを考えてみる。この場合、隠れた変数理論においてユニバーサルに成り立つ式である CHSH 不等式を破らないためには

$$\kappa \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.30)$$

が必要なので、最大値を実現する可能性のある $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を採用する。これにより、相関関数の関数形として

$$\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\phi_{ij}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\phi_{ij} \quad (2.31)$$

を仮定するモデルであることが分かる。

2.5 CHSH 不等式の破れ

隠れた変数理論が量子論と整合するのであれば相関関数の期待値は一致し

$$\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{HV}}(\phi_{ij}) = \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{QT}}(\phi_{ij}) \quad (2.32)$$

である。量子論における相関関数は

$$\langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{QT}}(\phi_{ij}) = -\cos \phi_{ij} \quad (2.33)$$

と計算されるのであった。

$$\phi_{11} = 0, \phi_{12} = \frac{3\pi}{8}, \phi_{21} = \frac{\pi}{8}, \phi_{22} = \frac{\pi}{4} \quad (2.34)$$

として CHSH 不等式の相関関数部分に代入すると

$$\left| \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{QT}}(\theta_1, \theta'_1) - \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{QT}}(\theta_1, \theta'_2) + \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{QT}}(\theta_2, \theta'_2) + \langle \alpha\alpha' \rangle_{\text{QT}}(\theta_2, \theta'_1) \right| = 2\sqrt{2} \quad (2.35)$$

となる。この結果から、量子論においては CHSH 不等式は守られていないことがわかる。

以上により、本実験において

- 実験結果が CHSH 不等式に従うならば、非局所相関を許容する量子論は現実を記述する物理理論ではない。
- 実験結果が CHSH 不等式を破るならば、非局所相関を認めない隠れた変数理論は現実を記述せず、量子論のもつ非局所相関を肯定する。

のいずれかであることがわかる。

2.6 Compton 散乱と偏光

最後に、本実験において期待値 $\langle \alpha\alpha' \rangle(\phi)$ を実際に測定する方法について説明する。

2.6.1 Klein-仁科の公式

入射光子の偏光状態が決まっている場合の、Compton 散乱の微分散乱断面積は Klein-仁科の公式により求まる。特に、入射光子のエネルギーが 511 keV であり、光子が入射方向に対して垂直に散乱される場合を考える。散乱方向が入射光子の偏光面に対して角度 ψ をなすとき、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi) = C(5 - 4\cos^2\psi) \quad (2.36)$$

の式により、微分散乱断面積が求まる。(C は比例定数)

この式から、散乱分布は入射光子の偏光方向に依存し、散乱面に対して垂直方向に最も散乱されやすいことが分かる。

$\langle \alpha\alpha' \rangle$ を知るためには、入射光子の偏光の情報が必要だが、それを実験的に直接測定することは難しい。そのため、本実験では Compton 散乱の角度分布から間接的に $\langle \alpha\alpha' \rangle$ を導出するという戦略をとる。ただし、Klein-仁科の公式は 1.2 節で述べたように隠れた変数理論に従っていたとしても成立するとして、現象論的に認める方針をとることに注意されたい。

2.6.2 $\langle \alpha\alpha' \rangle$ の測定

Klein-仁科の公式から、Compton 散乱の角度分布 $P(\phi)$ に $\langle \alpha\alpha' \rangle$ の情報がエンコードされていることが分かった。ここでは、 $P(\phi)$ と $\langle \alpha\alpha' \rangle$ との関係を導出する。

下図に示すように、地点 P では x 軸方向、地点 P' では x' 軸方向に散乱光子検出器を配置する。

パラポジトロニウムの崩壊により生じた 2γ が散乱過程を経て同時に検出されるイベント数を測定する。散乱により量子もつれが破壊されないと仮定すると、各角度 ϕ における検出確率 $P(\phi)$ は以下のように求まる。

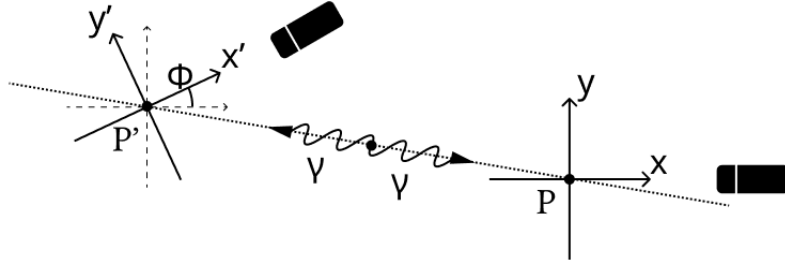


図3 本実験のセットアップ

地点 P での偏光成分 α の値 (x or y) と地点 P' での α' の値 (x' or y') を得る確率を $p_{\alpha\alpha'}$ と書く。系の対称性を考慮することにより, 以下の関係が成立する。

$$\begin{cases} p_{\circ}(\phi) := p_{xx'}(\phi) = p_{yy'}(\phi) \\ p_{\times}(\phi) := p_{xy'}(\phi) = p_{yx'}(\phi) \end{cases} \quad (2.37)$$

全確率の保存と偏光の固有状態の定義より

$$\begin{cases} p_{xx'} + p_{yy'} + p_{xy'} + p_{yx'} = 1 \\ p_{xx'} + p_{yy'} - p_{xy'} - p_{yx'} = \langle \alpha\alpha' \rangle \end{cases} \quad (2.38)$$

が成立するので, 各確率は期待値を用いて次のように表される。

$$\begin{cases} p_{\circ}(\phi) = \frac{1}{4}(1 + \langle \alpha\alpha' \rangle(\phi)) \\ p_{\times}(\phi) = \frac{1}{4}(1 - \langle \alpha\alpha' \rangle(\phi)) \end{cases} \quad (2.39)$$

これらを用い, 特定の散乱角 ϕ における検出率 $P(\phi)$ を計算する。

$$P(\phi) \propto p_{xx'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi=0) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi=0) \quad (2.40)$$

$$+ p_{yy'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi=\frac{\pi}{2}) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi=\frac{\pi}{2}) \quad (2.41)$$

$$+ p_{xy'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi=0) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi=\frac{\pi}{2}) \quad (2.42)$$

$$+ p_{yx'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi=\frac{\pi}{2}) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\psi=0) \quad (2.43)$$

$$\propto 9 + 4\langle \alpha\alpha' \rangle(\phi) \quad (2.44)$$

上式により, 実験的に得られる $P(\phi)$ と相関関数 $\langle \alpha\alpha' \rangle(\phi)$ は等価な情報を持っていることが示された。

なお, 上式の比例係数は以下の条件により決定される。

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \alpha\alpha' \rangle(\phi) d\phi = 0 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\phi) d\phi = 1 \end{cases} \quad (2.45)$$

($\phi \rightarrow \phi + \frac{\pi}{2}$ の変換に対して $\langle \alpha\alpha' \rangle$ の符号が反転することや, $\phi \rightarrow -\phi$ の変換に対して $\langle \alpha\alpha' \rangle$ は不変であることを考慮すると分かる。)

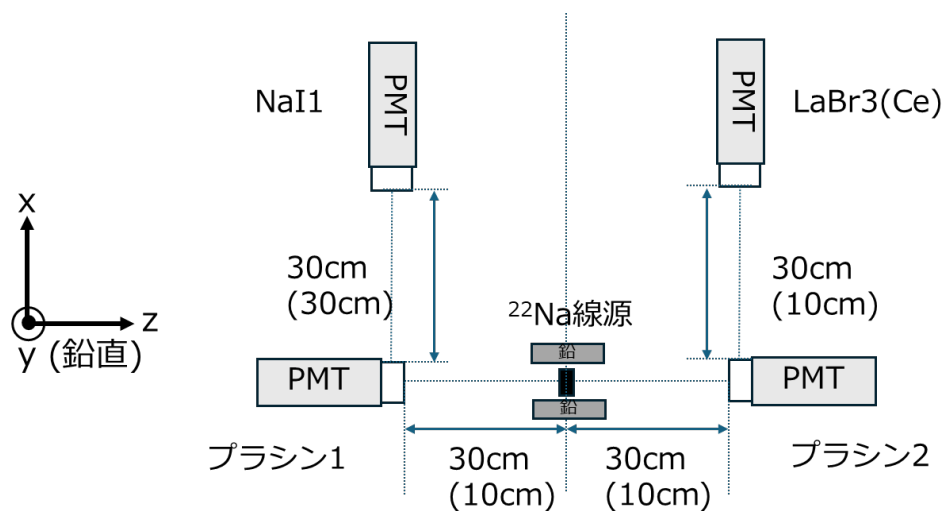
3 実験方法

3.1 実験装置概要

実験装置は図4, 図5のように組み立てた。 ^{22}Na 線源が β^+ 崩壊を起こし陽電子(e^+)を放出する。この e^+ は線源を囲うプラスチックケース中の電子(e^-)と結合しポジトロニウム(Ps)を生成する。このうちパラポジトロニウム(p-Ps)は電子対消滅により511 keV γ 線をback-to-backに放出する。この γ 線を左右のプラスチックシンチレーターでCompton散乱させ、約 90° で散乱されたものをNaIおよびLaBr₃(Ce)シンチレーターで検出することが本実験装置の目的である。なお、本実験はセットアップを変えて二回に分けて行った。

NaIシンチレーターは理論で定義した角度 ϕ の異なる4点に配置した。角度はそれぞれ $\phi = 0^\circ, 31^\circ, 55^\circ, 90^\circ$ であった。なお、NaIの角度はLaBr₃(Ce)と同じ角度に散乱する場合を $\phi = 0^\circ$ と定義した。 ^{22}Na 線源から放出され γ 線が直接NaIシンチレーターに入るのを防ぐため、線源の周りを鉛で囲った。

なお、 ^{22}Na 線源はオルソポジトロニウム(o-Ps)も生成するが、o-Psは 3γ 崩壊を起こすため γ 線はback-to-backに放出されない。したがって、シンチレーターのcoincidenceをとることでo-Psの影響を除去することができると思われる。



()内は2回目実験時の値

図4 装置模式図(上)

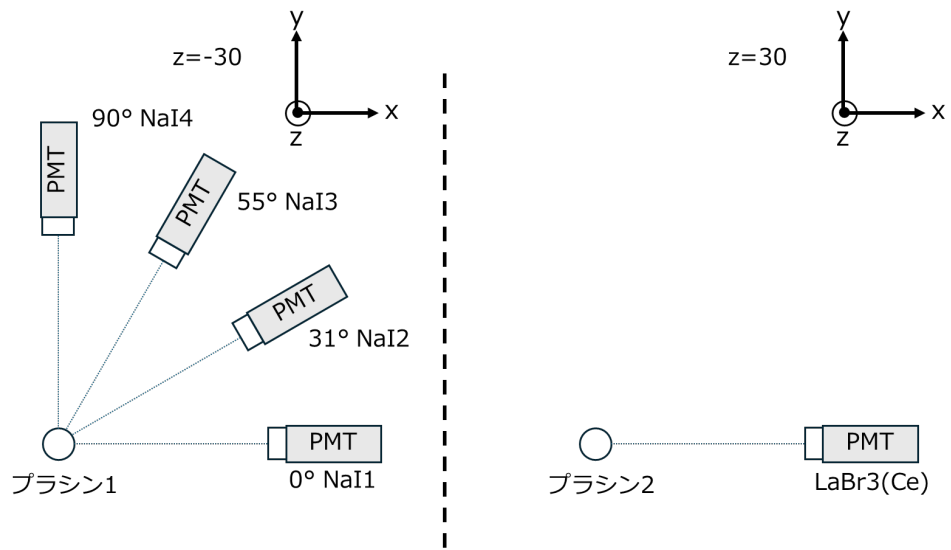


図5 装置模式図(横)

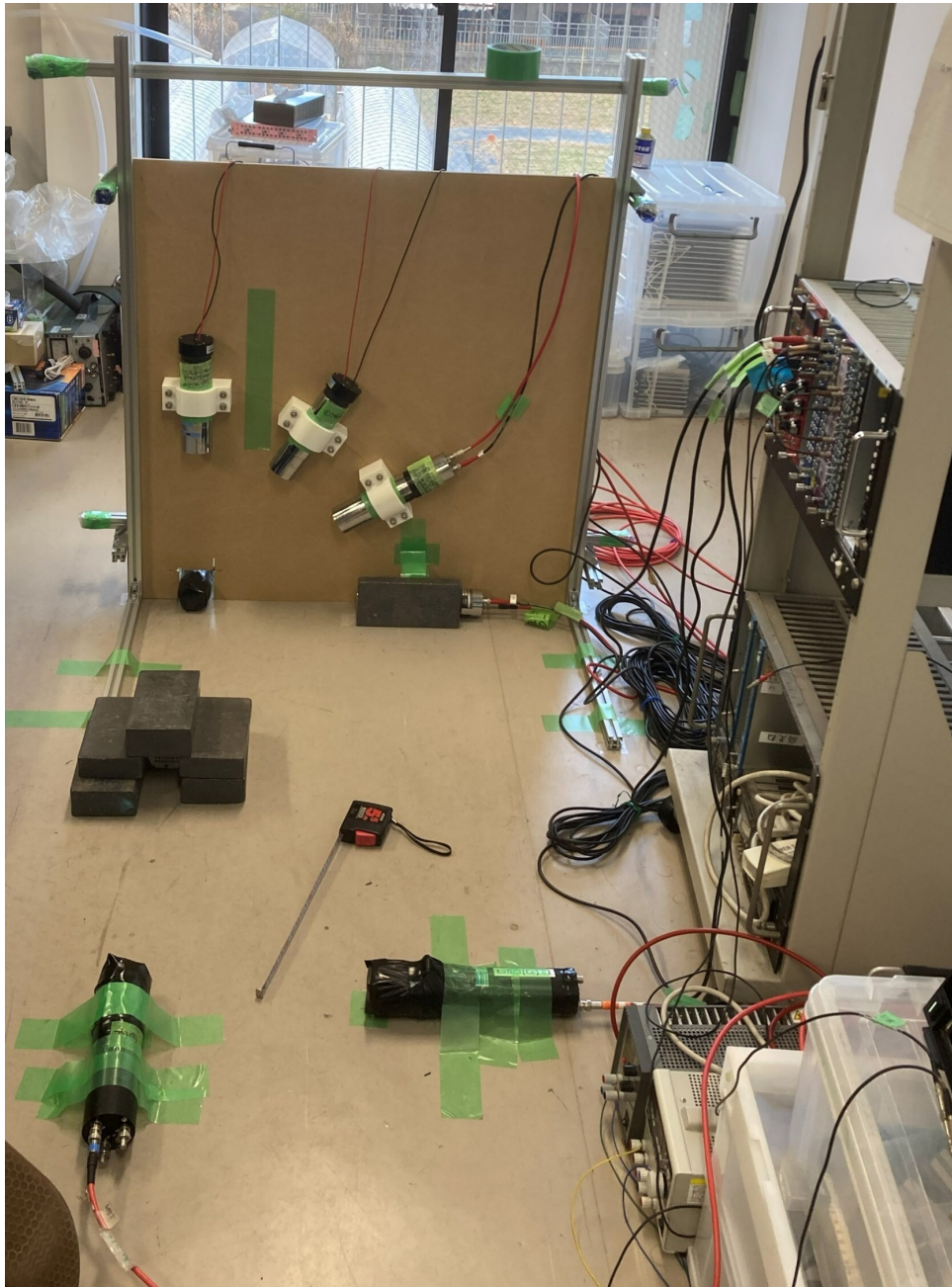


図 6 実験装置

3.2 実験器具

- ^{22}Na 線源: 実験時, 放射能は 1 Mbq であった。
- プラスチックシンチレーター: 半径 2.5 cm, 厚さ 3 cm の円柱形であった。
- NaI シンチレーター
- LaBr₃(Ce) シンチレーター
- 光電子増倍管 (PMT)
- 鉛ブロック: 線源からの γ 線が直接 NaI シンチレーターに入るのを防ぐために使用した。
- 回路モジュール: 図 3.3.2 を参照

3.3 回路

3.3.1 回路概要

回路図は図 7 のように組み立てた。本回路は大きく二つの部分に分けられる。

一つはシンチレーターの信号を digitizer に入力する raw signal 部分であり, これはシンチレーターの信号を Amp で増幅する機構である。digitizer の仕様として, digitizer を使用すると信号強度が低下してしまうという問題があった。そのため, 信号を Amp で増幅してから入力することでこの問題を緩和している。また, NaI, LaBr₃(Ce) の信号をそのまま Amp に入力すると波形が歪んだので, divider を経由して信号強度を 1/3 に落としたうえで Amp に入力している。プラスチックシンチレーターの信号は長さが 20 ns 程度と非常に短く, digitizer のサンプリングレートでは波形を十分に記録できないという問題があった。そのため, LPF である shaper を利用することで信号を引き延ばしてから digitizer に入力した。

もう一つの部分は coincidence をとる logic signal 部分である。本実験では欲しいイベントを検出するために, プラスチックシンチレーター 1, 2, LaBr₃(Ce), および NaI 1~4 のいずれかの計 4 つの信号の coincidence をとる。coincidence をとる際は各信号を discriminator に入力し, そこで得たパルス波を使用している。discriminator の threshold は最低値に設定した。これは, discriminator の反応頻度が NaI シンチレーター 4 つで異なると統計に影響を与える可能性があり, それを回避するためである。この場合環境放射線等ノイズを拾いやすくなるが, これは coincidence をとることで除去できると考えられる。

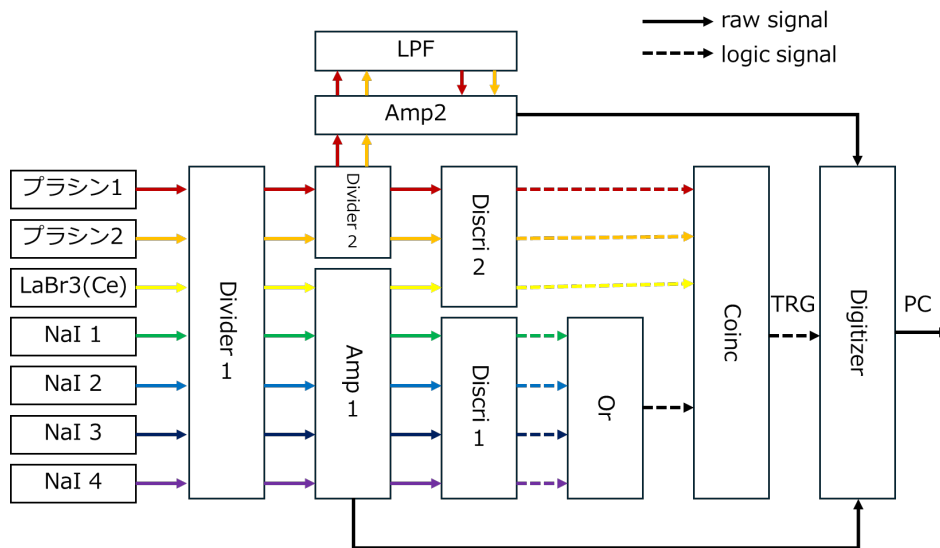


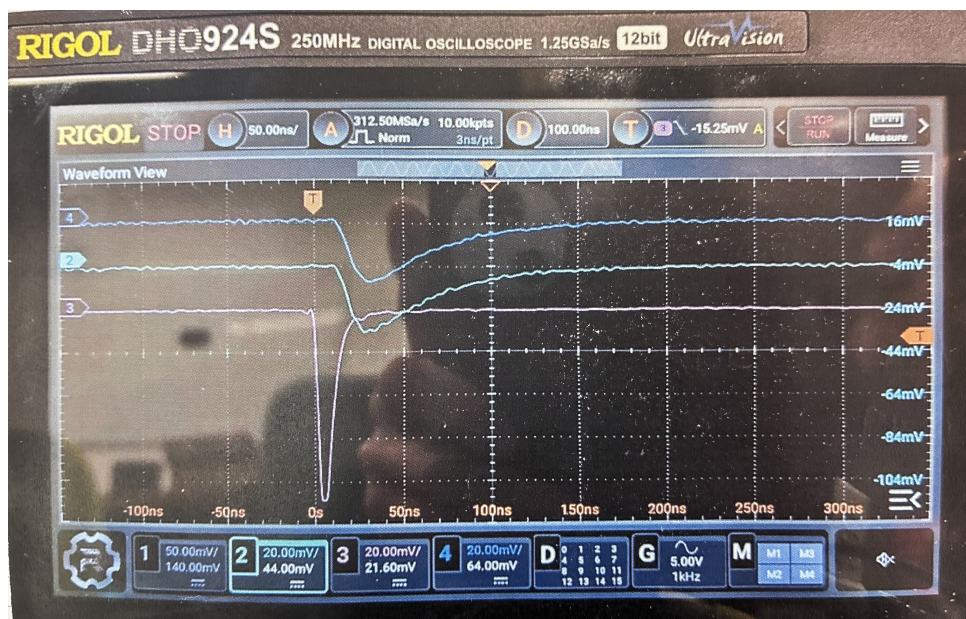
図 7 回路図

表 1 印加電圧表

	ch	threshold[mV]	印加電圧 [V]
NaI 1	0	-84.5	1200
NaI 2	2	42.3	1200
NaI 3	4	0.6	1200
NaI 4	6	-114.2	1200
ブラシン 1	8	-17.4	-1500
ブラシン 2	10	-17.3	-1500
LaBr3(Ce)	12	-17.3	-1200

3.3.2 回路モジュール

- divider1 信号を 3 分岐させ、信号強度は 1/3 になる
- divider2 信号を 2 分岐させ、信号強度は 1/2 になる
- Amp1,2 入力信号を 10 倍に増幅する
- shaper 信号を引き延ばす (回路図 Fig.8)
- discriminator1,2 閾値を超えた入力に対しパルスを出力する
- logic unit OR 回路
- coincidence unit AND 回路
- digitizer TRG 入力があるとき信号を PC に記録する。サンプリングレートは 62.5 MHz である。



511keV ガンマ線に対するプラシンの応答。ch.3がプラシンの生信号であり、ch.2,4はshaperを通したプラシンの信号である。shaperを通すことで信号が引き延ばされていることが確認できる。

図8 shaperの動作イメージ

4 実験結果

4.1 シンチレータごとの PMT 波形の特性

今回実験で使用したシンチレータはプラスチックシンチレータ, NaI(Tl) シンチレータ, LaBr₃ シンチレータである。この3種類のシンチレータでとった波形を見てみよう。(図 9, 図 10, 図 11) NaI(Tl) シンチレータの時定数は, 約 400 ns, LaBr₃(Ce) シンチレータの時定数は約 80 ns, プラスチックシンチレータの時定数は約 112 ns である。プラスチックシンチレータの元の時定数が, 約 20 ns のためシェイパーで約 5.6 倍に引き伸ばされていることが分かる。Digitizer のサンプリングレートは 62.5 MHz であるため, サンプリング周期は 16 ns である。波形の積分値が, PMT の電荷に対応し, シンチレータに入射した粒子が落としたエネルギーに対応する。そのためエネルギーを正確に測る場合には, サンプリング周期に対して, シンチレータの時定数が十分大きいことが望ましいが, 今回の実験では, エネルギー分解能をそこまで必要としないため, この時定数で十分と考えた。

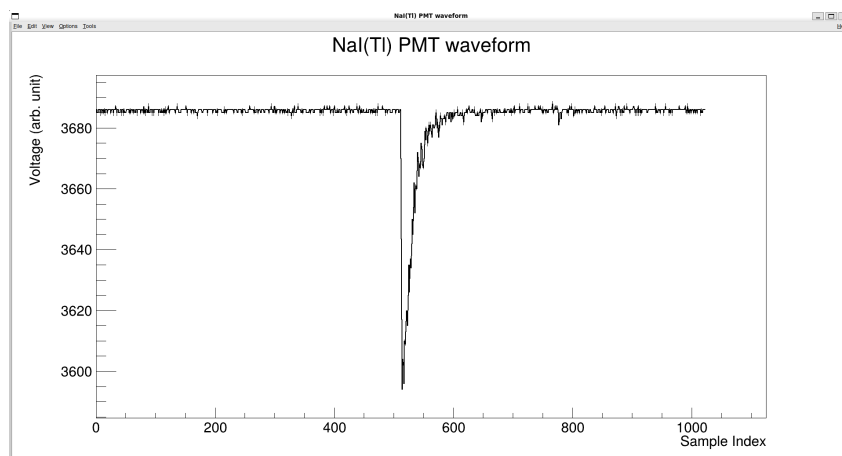


図 9 NaI(Tl) シンチレータの波形

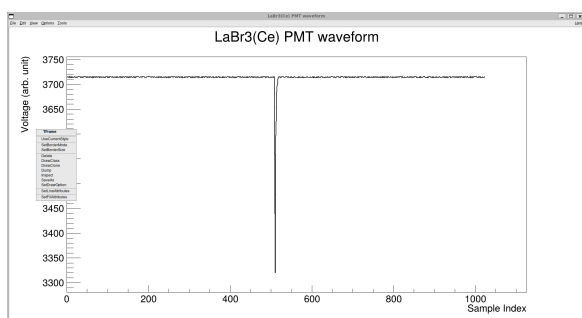


図 10 LaBr₃(Ce) シンチレータの波形

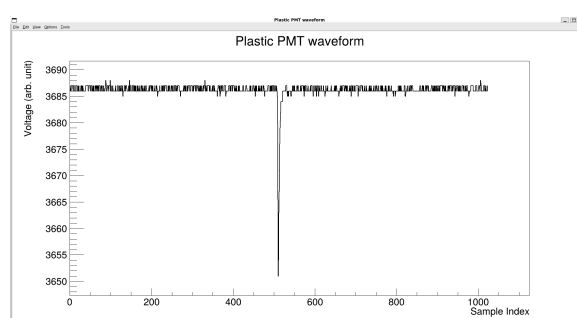


図 11 プラスチックシンチレータの波形

4.2 エネルギー較正

今回の実験では, 511 keV のガンマ線が back-to-back にプラスチックシンチレータで 90 度散乱し, その後 NaI(Tl) シンチレータで検出されることを利用して, エネルギー較正を行った。NaI(Tl) シンチレータと

LaBr₃(Ce) シンチレータに入るイベント数を測定する。このとき、この有効なイベントとそうでないイベントを区別するために、各シンチレータでエネルギーを測定したい。シンチレータにつなげる PMT の波形を積分した値 (ADC 値) とエネルギーを対応させるために、エネルギーが既知の線源で ADC 値とエネルギーの対応関係を出す。これをエネルギー較正という。

今回我々は、511 keV のガンマ線を放出する ²²Na と、662 keV のガンマ線を放出する ¹³⁷Ce を用いた。

NaI(Tl) シンチレータと LaBr₃(Ce) シンチレータは、コンプトン散乱と光電効果の両方でガンマ線を検出する。(表 2, 表 3) 今回はエネルギーが分かりやすい光電効果によるエネルギースペクトルのピークを見た。フィッティングはガウス関数でフィットした。図 12, 図 13, 図 14, 図 15 は NaI(Tl) シンチレータと LaBr₃(Ce) シンチレータの ²²Na と ¹³⁷Ce のエネルギースペクトルである。

プラスチックシンチレータは、ほぼコンプトン散乱でのみガンマ線を検出する。(表 4) そのため、コンプトンエッジでエネルギーを測定する。フィッティングは、ガウス関数と階段関数の畳み込みとして定義される、ガウスの誤差関数 erf(x) でフィットした。

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (4.1)$$

図 16, 図 17 はプラスチックシンチレータの ²²Na と ¹³⁷Ce のエネルギースペクトルである。

各シンチレータごとのエネルギーと ADC の対応を、511 keV, 662 keV, 0 keV の 3 点があったので、線形補完してエネルギーと ADC の対応関係を出した。代表して、NaI(Tl) の較正直線を図 18 に示す。

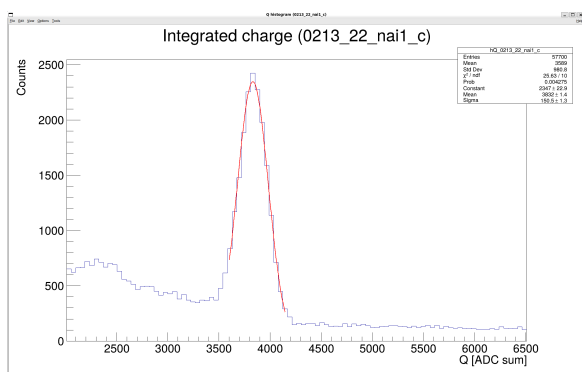


図 12 NaI(Tl) ²²Na のエネルギースペクトル (511 keV の光電ピーク)

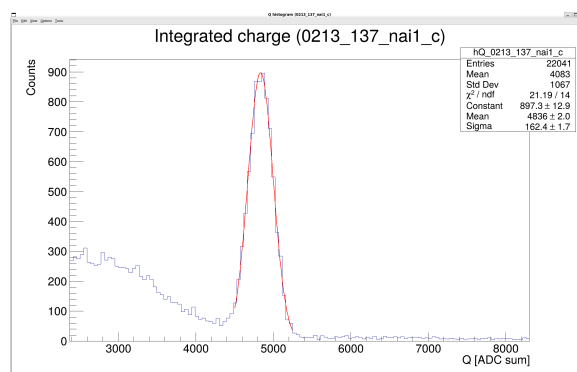


図 13 NaI(Tl) ¹³⁷Cs のエネルギースペクトル (662 keV の光電ピーク)

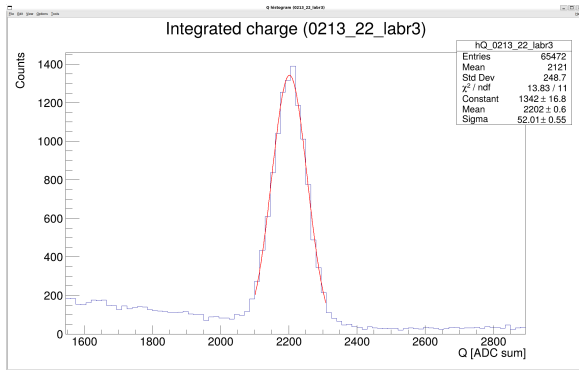


図 14 $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ ^{22}Na のエネルギースペクトル (511 keV の光電ピーク)

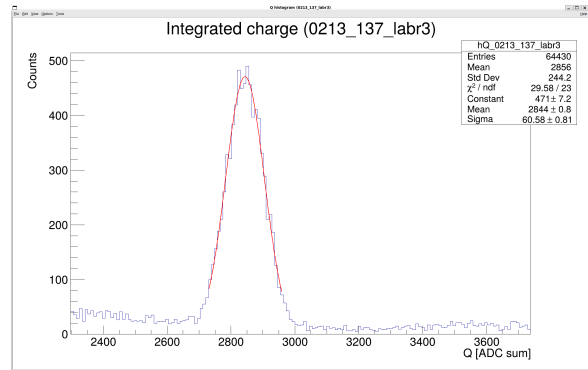


図 15 $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ ^{137}Cs のエネルギースペクトル (662 keV の光電ピーク)

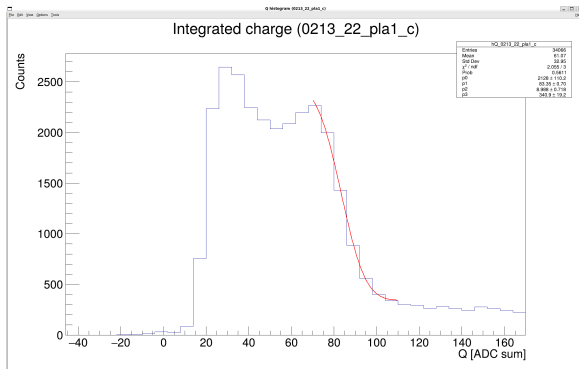


図 16 プラスチック ^{22}Na のエネルギースペクトル (341keV のコンプトンエッジ)

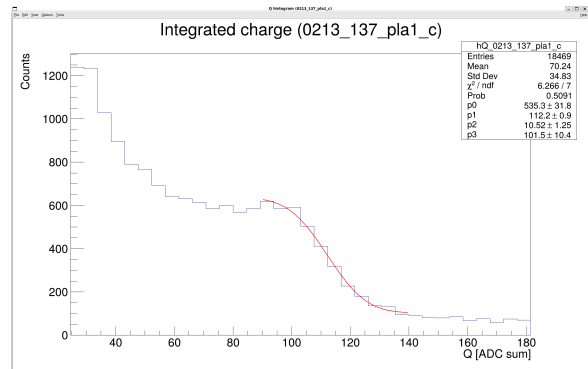


図 17 プラスチック ^{137}Cs のエネルギースペクトル (477keV のコンプトンエッジ)

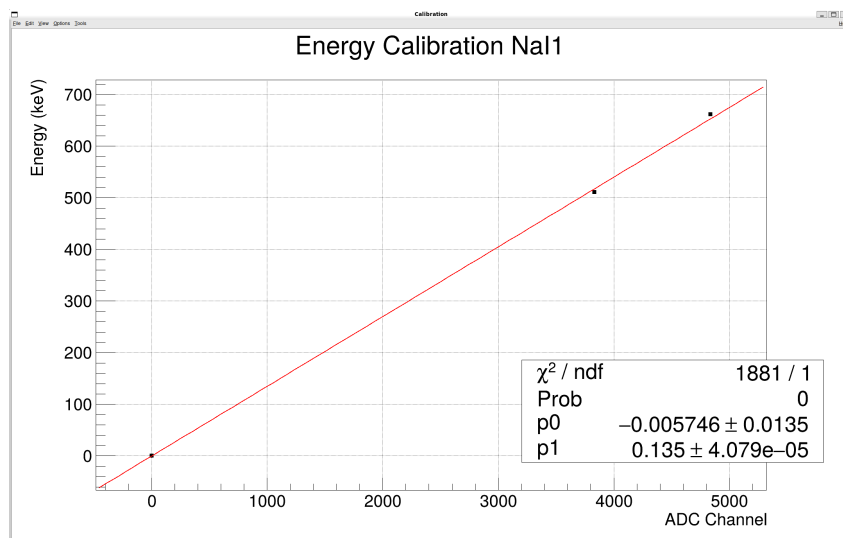


図 18 $\text{NaI}(\text{Tl})$ のエネルギー較正

表 2 NaI(Tl) の質量減衰係数 [6]

エネルギー [keV]	コンプトン散乱 [cm^2/g]	光電効果 [cm^2/g]
511	0.07287	0.01595
662	0.06540	0.00854

表 3 LaBr₃(Ce) の質量減衰係数 [6]

エネルギー [keV]	コンプトン散乱 [cm^2/g]	光電効果 [cm^2/g]
511	0.07310	0.01163
662	0.06557	0.00623

表 4 プラスチックの質量減衰係数 [6]

エネルギー [keV]	コンプトン散乱 [cm^2/g]	光電効果 [cm^2/g]
511	0.09306	0.00001
662	0.08320	0.000005

4.3 有効イベントの数え方

トリガーが反応したイベント (928 イベント) のうち、どれが有効イベントであるかを選ぶ必要がある。線源から放出された 511 keV のガンマ線対が、プラシンで 90 度散乱し、NaI(Tl) シンチレータ 1~4 ($0^\circ, 31^\circ, 55^\circ, 90^\circ$) のどれかに入射しかつ、LaBr₃(Ce) シンチレータで検出されるイベントが欲しいイベントである。このイベントを適切に選択する。

プラスチックシンチレータのエネルギースペクトルで 255 keV あたりのピークのうち、 -1.5σ から $+2.0\sigma$ の範囲にあるデータを選ぶ。左右非対称にしたのは、低エネルギー側に肩が見えたのでそこを除外するためである。LaBr₃(Ce) シンチレータのエネルギースペクトルのうち、Threshold よりも大きい 100 keV から、255 keV の光電ピークから 2σ の範囲にあるデータを選ぶ。(図 19, 図 20)

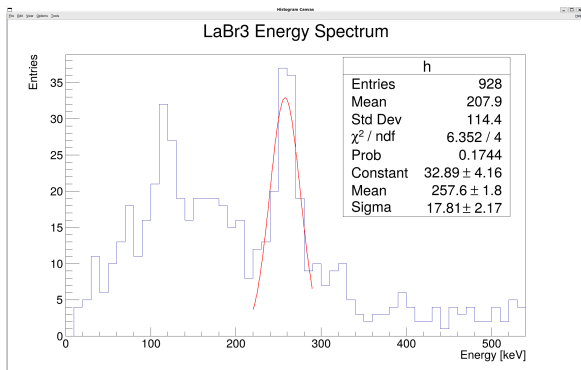


図 19 LaBr₃(Ce) の本実験でのエネルギースペクトル

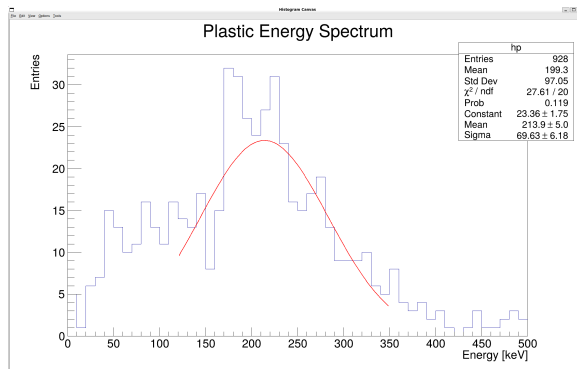


図 20 プラスチックシンチレータの本実験でのエネルギースペクトル

こうして選んだイベントの、各 NaI(Tl) シンチレータごとのエネルギースペクトルが図 21 から図 24 である。期待されるのは、255 keV に光電ピークが見えることであり、当初の予定ではこの光電ピークを有効イベントとするはずであった。しかし実際のデータでは 31° と 90° の NaI(Tl) シンチレータで 255 keV のピークが見えなかった。

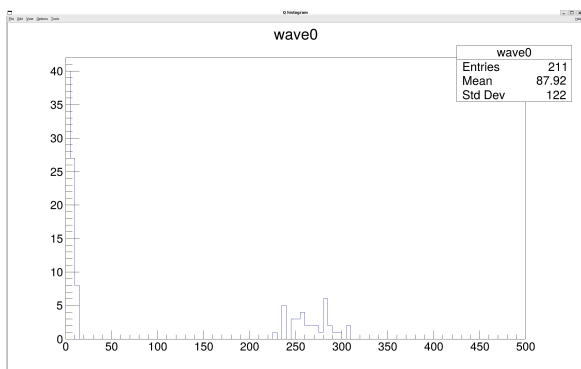


図 21 NaI(Tl)1 の本実験でのエネルギースペクトル (filterd)(横軸エネルギー keV, 縦軸イベント数)

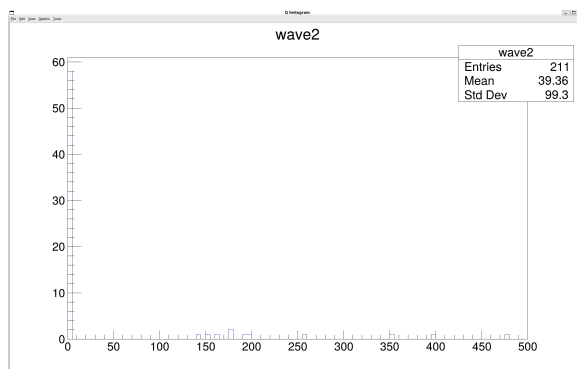


図 22 NaI(Tl)2 の本実験でのエネルギースペクトル (filterd)(横軸エネルギー keV, 縦軸イベント数)

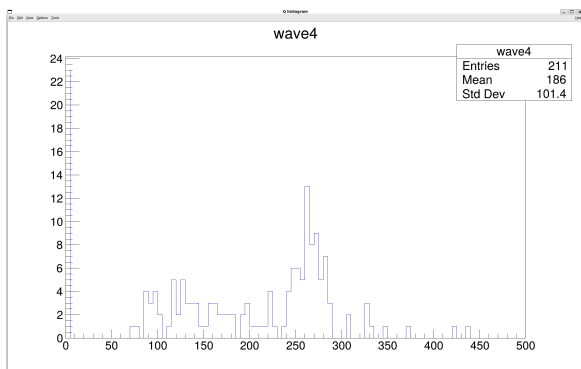


図 23 NaI(Tl)3 の本実験でのエネルギースペクトル (filterd)(横軸エネルギー keV, 縦軸イベント数)

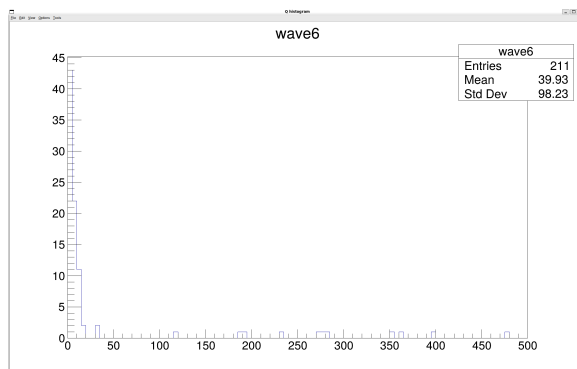


図 24 NaI(Tl)4 の本実験でのエネルギースペクトル (filterd)(横軸エネルギー keV, 縦軸イベント数)

原因が Threshold が高すぎる可能性があるため、エネルギー較正の時にとった、エネルギースペクトル (図 25 から図 28) を見てみると、確かに 31° と 90° の NaI(Tl) シンチレータでは、255 keV よりも上にピークがあるように思えた。これを踏まえて、Threshold が 255 keV を下回るセットアップで再実験することにした。

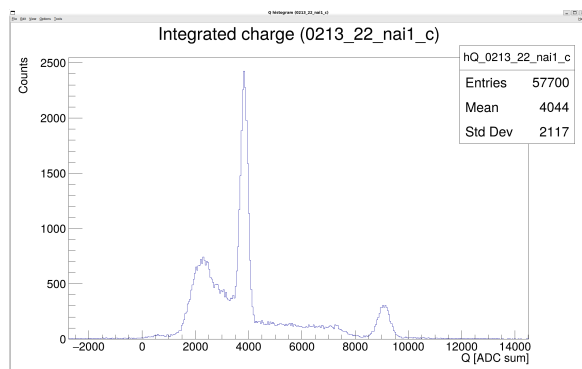


図 25 NaI(Tl)1 のエネルギースペクトル

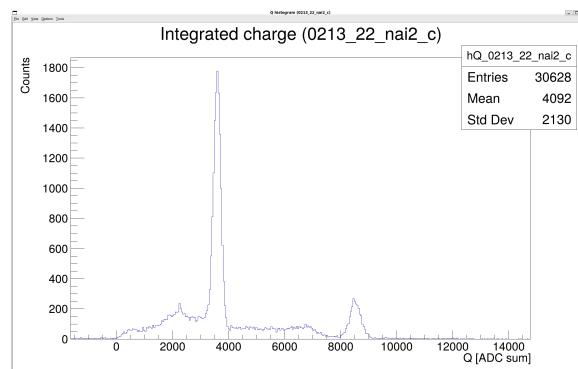


図 26 NaI(Tl)2 のエネルギースペクトル

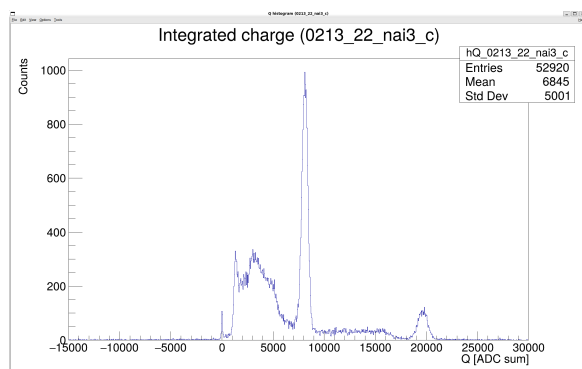


図 27 NaI(Tl)3 のエネルギースペクトル

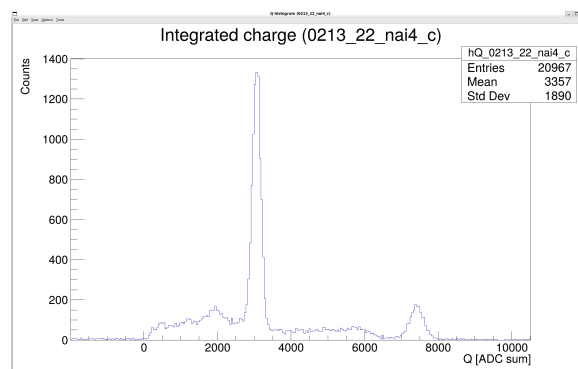


図 28 NaI(Tl)4 のエネルギースペクトル

4.4 再実験のセットアップと有効イベントの数え方

再実験では、Threshold を 255 keV を下回るようにしたかったが、一回目の実験の時 Threshold は限界まで下げていたため、NaI(Tl) シンチレータの PMT にかかる電圧を 1200 V から 1300 V に上げることにした。電圧を変えることによってエネルギー較正も変わるため、再度エネルギー較正を行う必要があるが、時間の都合と一回目の実験の結果を踏まえ、エネルギー較正を行わなくとも、有効イベントが数えられると考え、再実験のエネルギー較正は行わなかった。また、時間の都合上、カウント数を稼ぐため、プラスチックシンチレータから線源までの距離、プラスチックシンチレータから LaBr₃(Ce) シンチレータまでの距離を 10 cm にした。

再実験において、有効イベントの数え方も変わる。プラスチックシンチレータは 255 keV のピークのうち $-\sigma$ から $+\sigma$ の範囲のデータ、LaBr₃(Ce) シンチレータは Threshold よりも大きい ADC 値が 400 から 255 keV の光電ピークから 2σ の範囲にあるデータを選ぶ。(図 29, 図 30)

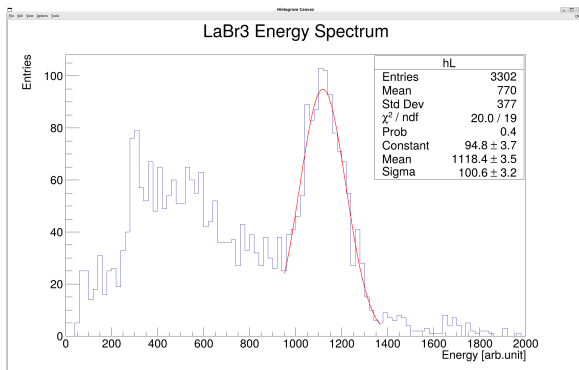


図 29 再実験:LaBr₃(Ce) のエネルギースペクトル

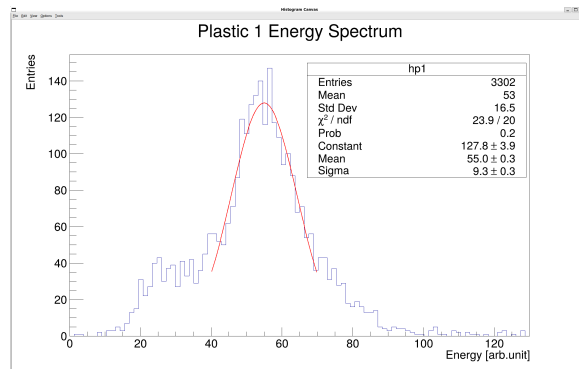


図 30 再実験: プラスチックシンチレータのエネルギースペクトル

4.5 再実験の結果とフィッティング

再実験でプラスチックシンチレータと LaBr₃(Ce) シンチレータのエネルギースペクトルから有効イベントを選んだ後、各 NaI(Tl) シンチレータのエネルギースペクトルを図 31 から図 34 に示す。有効イベントは -2σ から 2σ の範囲にあるデータとした。こうして算出された角度ごとの有効イベントをまとめた表が表 5 である。

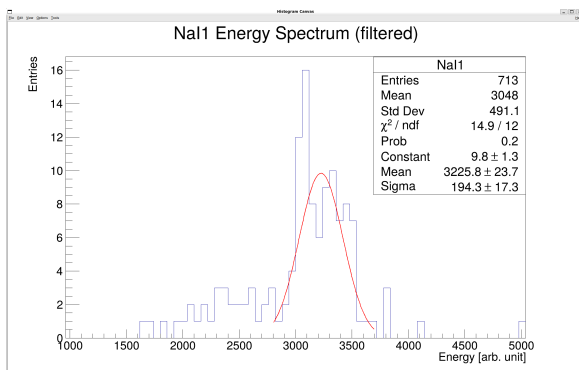


図 31 NaI(Tl)1 のエネルギースペクトル

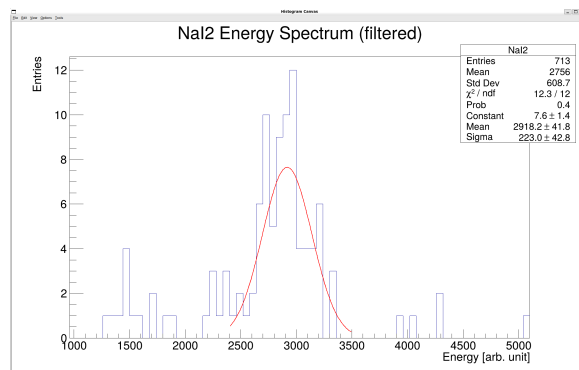


図 32 NaI(Tl)2 のエネルギースペクトル

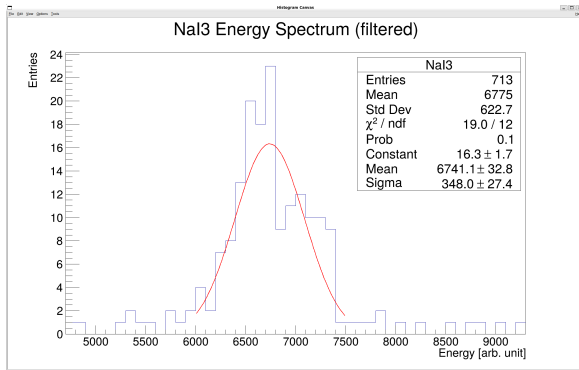


図 33 NaI(Tl)3 のエネルギースペクトル

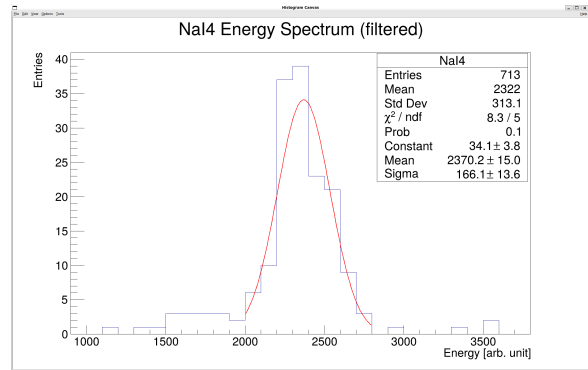


図 34 NaI(Tl)4 のエネルギースペクトル

表 5 角度ごとの有効イベント数

角度 [deg]	有効イベント数	統計誤差
0	90	9.49
31	78	8.83
55	155	12.45
90	143	11.96

また、各 NaI(Tl) シンチレータの PMT の感度の違いを補正するために、プラスチックシンチレータ 1 と NaI(Tl) シンチレータのみでコインシデンスをとって得た有効カウント数 (表 6) を用いた。表 5 の有効イベント数を割ることで、NaI(Tl) シンチレータの感度の違いを補正した有効イベント数を表 7 に示す。

表 6 プラスチックシンチレータ 1 と NaI(Tl) シンチレータのコインシデンスで得た有効イベント数

角度 [deg]	有効イベント数	統計誤差
0	4465	66.82
31	3405	58.35
55	4278	65.41
90	4016	63.37

表 7 角度ごとの規格化した有効イベント数

角度 [deg]	有効イベント数	統計誤差
0	0.0202	0.00213
31	0.0229	0.00262
55	0.0362	0.00296
90	0.0356	0.00302

規格化した有効イベント数をグラフにしてフィッティングしたのが、図 35 である。フィッティングは、量

子論を参考に、 $N(\phi) = N_0(1 - k \cos(2\phi))$ で行った。(参照したい数式)(変数 k , N_0) また量子論の理論式は $1 - 0.421 \cos(2\phi)$ である。

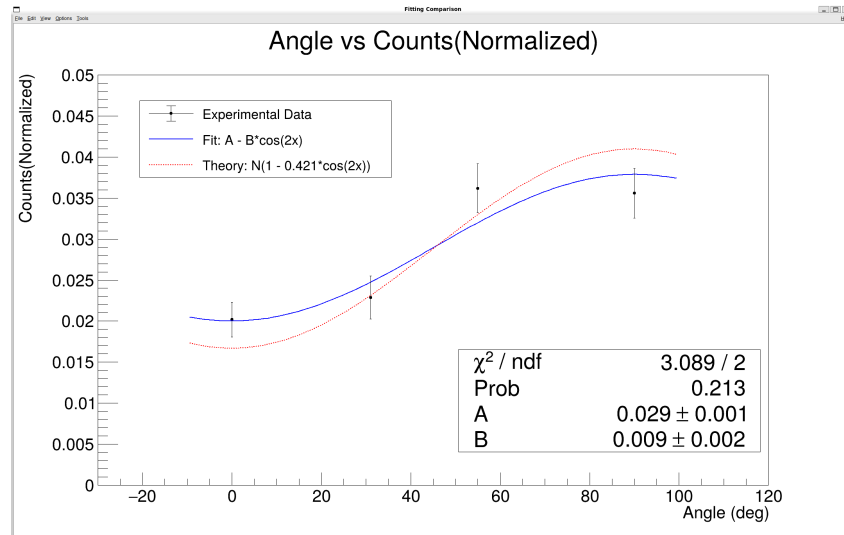


図 35 角度ごとの規格化した有効イベント数のフィッティング

フィッティング結果は $k = 0.31 \pm 0.06$ であった。量子論は $k = 0.421$ である。この量子論の予測値は次の節のシミュレーションで詳しく述べるが、角度のセットアップが、 0° , 30° , 60° , 90° であるときのものである。これがフィッティング結果が理論値よりも小さいことの大きな原因と考える。

5 解析

5.1 解析方法

本実験の最終的な目的は、プラシン位置における真の偏光相関 $\langle\alpha\alpha'\rangle$ を評価し、局所実在論の限界を示す CHSH 不等式の破れを検証することである。本実験では NaI シンチレーターの設置角度が等間隔からずれているものの、仮に $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ と等間隔に並んでいるとして各測定角における真の偏光相関を用いれば、CHSH 不等式のパラメータ S が最大化されるとき以下のように構成される。

$$|S| = |\langle\alpha\alpha'\rangle(0^\circ - 30^\circ) - \langle\alpha\alpha'\rangle(0^\circ - 90^\circ) + \langle\alpha\alpha'\rangle(60^\circ - 30^\circ) + \langle\alpha\alpha'\rangle(60^\circ - 90^\circ)| \quad (5.1)$$

ここで、測定系に幾何学的な回転不変性が成り立つと仮定すれば、相関関数について $\langle\alpha\alpha'\rangle(\phi) = -\langle\alpha\alpha'\rangle(\phi + 90^\circ)$ が成り立つため、上式は測定角 30° および 90° のみを用いて次のように簡略化できる。

$$|S| = |3\langle\alpha\alpha'\rangle(30^\circ) - \langle\alpha\alpha'\rangle(90^\circ)| \quad (5.2)$$

5.1.1 観測量と真の相関関数の関係導出

前節の不等式を評価するためには真の相関 $\langle\alpha\alpha'\rangle$ を知る必要がある。理論的には (2.44) 式より導出可能である。(2.44) 式より、NaI シンチレーターに入射する粒子数の分布は以下のように表されると予想される。

$$N(\phi) = N_0[1 + A \cdot \langle\alpha\alpha'\rangle(\phi)] \quad (5.3)$$

ここで、 N_0 は実験的に決まる定数であり、 A は Compton 散乱の偏光識別能と、検出器の幾何学的なアクセプタンスによって定義される、システム全体の偏光解析能を表す補正係数である。仮に検出器の幾何学的アクセプタンスを考慮せず、検出器を点として扱った場合 (2.44) 式より $A = \frac{4}{9}$ となる。実際の実験では検出器が有限の大きさを持つため後述の「修正 Klein-仁科の式」を用いて A を算出する必要があり、 A はこの理想値よりも小さくなることが予想される。

系の対称性より $\langle\alpha\alpha'\rangle(\phi) = -\langle\alpha\alpha'\rangle(\phi + 90^\circ)$ であるため、

$$N(\phi) + N(\phi + 90^\circ) = 2N_0 \quad (5.4)$$

$$N(\phi) - N(\phi + 90^\circ) = 2N_0A \cdot \langle\alpha\alpha'\rangle(\phi) \quad (5.5)$$

となる。これより

$$\langle\alpha\alpha'\rangle(\phi) = \frac{N(\phi) - N(\phi + 90^\circ)}{N(\phi) + N(\phi + 90^\circ)} \cdot \frac{1}{A} \quad (5.6)$$

となり、実験で得られる粒子数の分布 $N(\phi)$ を用いて、真の偏光相関 $\langle\alpha\alpha'\rangle$ を求めることができる。

一方 A については以下のように考えることも可能である。実測された計数率 $N(\phi)$ を用いて、 $E_{\text{obs}}(\phi)$ を次のように定義する。

$$E_{\text{obs}}(\phi) = \frac{N(\phi) - N(\phi + 90^\circ)}{N(\phi) + N(\phi + 90^\circ)} \quad (5.7)$$

これは、Compton 散乱の偏光識別能の低さ、および有限の立体角を持つ検出器の幾何学的なボケ（角度なまし効果）によって薄まった、「見かけの相関関数」である。この見かけの相関 $E_{\text{obs}}(\phi)$ は、真の偏光相関 $\langle\alpha\alpha'\rangle$ に、装置全体の「偏光識別能」 A が掛かったものとして観測される。したがって、各測定角における真の偏光相関は以下のように逆算できる。

$$\langle\alpha\alpha'\rangle(\phi) = \frac{E_{\text{obs}}(\phi)}{A} \quad (5.8)$$

5.1.2 補正係数 A の算出

本実験ではプラシン 1 と NaI(1~4), およびプラシン 2 と LaBr3 の 2 部分でそれぞれ独立に γ 線の散乱角を測定する。これらをアームと呼ぶことにし, 各単一アームについて a をプラシン 1, NaI のアーム偏光識別能, b をプラシン 2, LaBr3 のアーム偏光識別能とする。実際の測定系では, 検出器の有限の大きさにより方位角 ϕ および極角 θ に幾何学的な広がりが生じる。これを補正するため, 検出器の重み関数 $W(\theta, \phi)$ と, Klein-仁科の微分散乱断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ を畳み込んだ「修正 Klein-仁科の公式」 $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ を定義すると, a (or b) は次のように求まる。

$$a(\text{or } b) = \frac{\frac{d\sigma'}{d\Omega}(90^\circ) - \frac{d\sigma'}{d\Omega}(0^\circ)}{\frac{d\sigma'}{d\Omega}(90^\circ) + \frac{d\sigma'}{d\Omega}(0^\circ)} \quad (5.9)$$

なお, 「修正 Klein-仁科の公式」については次節で詳細に定義し, Geant4 シミュレーションによる結果を用いて具体的に数値を算出する。各アームでの測定は独立に行われると考えられるため, 単一アームの偏光識別能を用いて, システム全体の補正係数 A は $A = ab$ と表されることが考えられる。

5.2 Geant4 シミュレーションによる A の算出

5.2.1 修正 Klein-仁科の公式

本実験では, 検出器が有限の立体角を持つため, 単一の極角 θ および方位角 ϕ ではなく, ある程度の広がりを持った平均的な散乱断面積を観測している。この角度のなまし効果を厳密に考慮するため, 理想的な Klein-仁科の公式 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ に対して, 検出器のアクセプタンスに応じた重み関数 $W(\delta\theta, \delta\phi)$ を導入する。観測される「修正 Klein-仁科の公式」 $\frac{d\sigma'}{d\Omega}(\theta, \phi)$ は, 以下のような二重積分による畳み込みとして定義される。

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega}(\theta, \phi) = \iint W(\delta\theta, \delta\phi) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi) d(\delta\theta)d(\delta\phi) \quad (5.10)$$

ここで, $\delta\theta$ および $\delta\phi$ は, 散乱体の中心と検出器の中心を結ぶ理想的な光軸からの極角および方位角のズレを表す。重み関数 $W(\delta\theta, \delta\phi)$ は, 検出器の形状および配置に基づく幾何学的なアクセプタンスを表す関数であり, $\delta\theta, \delta\phi$ の組み合わせに対して, 検出器がどの程度の割合で粒子を検出するかを示す。

この $\frac{d\sigma'}{d\Omega}$ を用いることで, 前述の (5.9) 式における単一アームの偏光識別能 a, b が, 実際の実験系を再現した場合の値として算出される。本実験では Geant4 モンテカルロ・シミュレーションによって現実での実験系を再現し, 統計を取ることで重み関数 $W(\delta\theta, \delta\phi)$ をヒストグラムの形で求め, (5.10) 式をモンテカルロ積分によって数値的に計算し, 最終的に a, b の値を決定した。

なお, 解析により一回目実験時は欲しいイベントを正しくカウントできていなかったと考えられたため, a, b については二回目実験時のセットアップにおける値のみを求めている。

5.2.2 シミュレーション条件

- **線源:** 511 keV 単一 γ 線 (^{22}Na による γ 線放射を再現)
- **射出条件:** 計算効率向上のため, γ 線は散乱体の方向へ角度を絞って射出した。
- **散乱体および検出器:** 2 回目の実験で使用したプラスチックシンチレータおよび NaI/LaBr₃(Ce) シンチレータの形状・配置を再現した。
- **角度定義:** θ のずれに関しては, 光速に対する散乱後の速度の入射光軸に水平な速度成分の比率より求めた。 ϕ のずれについては, プラシンと NaI/LaBr₃ における散乱地点の座標を x - y 平面に射影し, その

偏角の基準面からのずれを求めた。

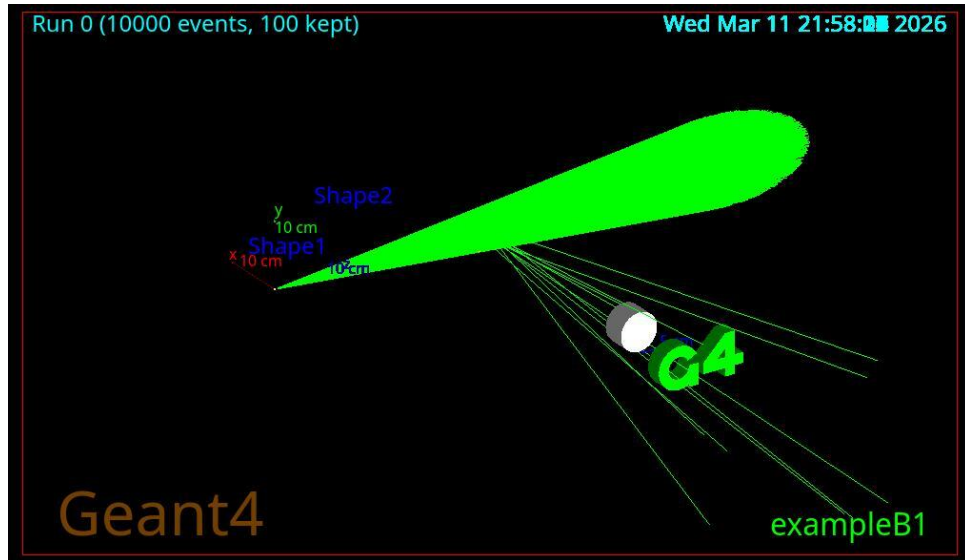


図 36 シミュレーション

5.2.3 シミュレーション結果

シミュレーションにおける γ 線放出回数を N_{inj} , 各アームにおけるコインシデンス回数を $N_i (i = a, b)$ と表す。方位角 $\phi = 0^\circ$ (平行) および $\phi = 90^\circ$ (垂直) における修正 Klein-仁科の微分断面積, および算出された補正係数の結果を表 8 に示す。なお, a, b の定義式 (5.9) 式より, 修正微分断面積に任意定数がかかっているにもかかわらず打ち消されるため, 重み関数 $W(\delta\theta, \delta\phi)$ の規格化は行っておらず, また (5.10) 式を計算する際の Klein-仁科の公式は定数倍部分を除いて計算した。

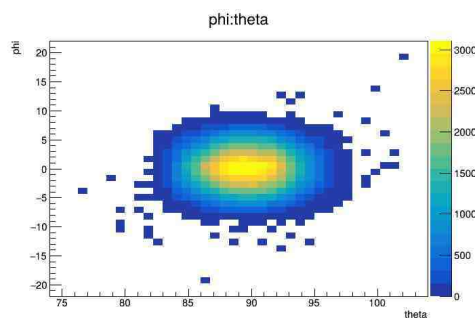


図 37 アーム 1 の $\delta\theta, \delta\phi$ の分布図

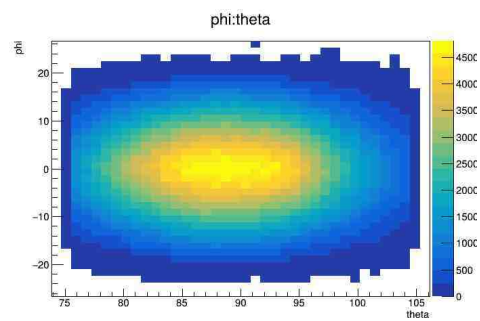


図 38 アーム 2 の $\delta\theta, \delta\phi$ の分布図

算出されたシステム全体のアナライザー性能は $A = 0.4213 \pm 0.0011$ となった。理想的な点検出器での値 $A = \frac{4}{9} \approx 0.44444$ と比較して, 有限の検出器サイズによる角度なまし効果が影響していることが確認できる。

表 8 Geant4 シミュレーションによる解析能評価結果

項目	値
ビーム射出回数 N_{inj}	2.0×10^9
コインシデンス回数 N_a	259,375
コインシデンス回数 N_b	1,637,920
単一アーム解析能 a	0.6627 ± 0.001558
単一アーム解析能 b	0.6358 ± 0.0006610
補正係数 A	0.4213 ± 0.0011

5.3 CHSH 不等式の評価と結果

前節で得られたシステム全体のアナライザー性能 A を用いて、実験で得られた粒子数分布 $N(\phi)$ から真の偏光相関 $\langle \alpha\alpha' \rangle$ を算出し、CHSH 不等式を評価する。(5.2) 式における $|S|$ は (5.7) 式、(5.8) 式および前節で得た A を用いて以下のように表される。

$$|S| = \left| 3 \frac{E_{obs}(30^\circ)}{A} - \frac{E_{obs}(90^\circ)}{A} \right| \quad (5.11)$$

$$= \frac{1}{A} \left| 3 \frac{N(30^\circ) - N(120^\circ)}{N(30^\circ) + N(120^\circ)} - \frac{N(90^\circ) - N(180^\circ)}{N(90^\circ) + N(180^\circ)} \right| \quad (5.12)$$

$$= \frac{1}{A} \left| 3 \frac{N(30^\circ) - N(60^\circ)}{N(30^\circ) + N(60^\circ)} - \frac{N(90^\circ) - N(0^\circ)}{N(90^\circ) + N(0^\circ)} \right| \quad (5.13)$$

しかし本実験では NaI シンチレーターの設置角度が等間隔からずれているため $N(30^\circ)$, $N(60^\circ)$ のデータが存在せず、式 (5.2) 式をそのまま適用することはできない。そのため不等式評価によって $|S|$ を評価する。本実験のセットアップの条件より $N(\phi)$ は $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ の範囲で単調増加であると仮定すると、以下の大小関係が成り立つ。

$$\frac{N(30^\circ) - N(60^\circ)}{N(30^\circ) + N(60^\circ)} \leq \frac{N(31^\circ) - N(55^\circ)}{N(31^\circ) + N(55^\circ)} \leq 0 \quad (5.14)$$

一方、 $N(\phi)$ が単調増加であることから、 $N(90^\circ) - N(0^\circ) > 0$ であるため、式 (5.13) 式の第二項は負の値を取ることがわかる。したがって、式 (5.13) 式は以下のように評価することができる。

$$|S| = \frac{1}{A} \left| 3 \frac{N(30^\circ) - N(60^\circ)}{N(30^\circ) + N(60^\circ)} - \frac{N(90^\circ) - N(0^\circ)}{N(90^\circ) + N(0^\circ)} \right| \quad (5.15)$$

$$\geq \frac{1}{A} \left| 3 \frac{N(31^\circ) - N(55^\circ)}{N(31^\circ) + N(55^\circ)} - \frac{N(90^\circ) - N(0^\circ)}{N(90^\circ) + N(0^\circ)} \right| \quad (5.16)$$

よって、式 (5.16) 式に実験で得たデータを代入することで、CHSH 不等式の破れを評価するための下限値を得ることができる。実験データを代入すると、

$$|S| \geq 2.3 \pm 0.5 \quad (5.17)$$

となった。

6 考察・まとめ

実験によって得られた CHSH 不等式の下限值は、誤差を見なければ 2(古典の上限) 以上であるが、誤差を含めると CHSH 不等式の破れを結論づける望ましい結果は得られなかった。

誤差が大きいことが問題であるが、これは統計量の少なさに起因すると考えられる。本実験では一回目セットアップ作成時に角度分解能を上げるため各シンチレーターの距離をある程度離して設置したが、これが統計量不足を招いたと思われる。また、二回目セットアップでの実験は時間が足りなかったことが統計量不足を招いたと考えられる。後にシミュレーションによって補正をかけることで角度分解能を補えることがわかったので、シンチレーター同士を近く設置したうえで十分な時間実験を行うことで誤差を改善できると考えられる。

また、二回目セットアップにおけるフィッティングを見ると、相関がなまった \cos カーブのように見えた。これより、量子もつれが途中で壊れた可能性も考えられる。こちらは真空を引く、鉛で周囲を広く囲うなどして環境との相互作用を減らすことで改善できると考えられる。加えて NaI シンチレーターの設置角度が CHSH を最大限に破る組み合わせでなかったこと、 \cos カーブの山が見える範囲でなかったことなどセットアップにおける改善可能な点もあった。

さらに、今回の実験ではある方向に 4 つの PMT、逆方向に 1 つの PMT を置く配置であったが、3 つと 2 つに分けて配置すれば単純計算ではあるが 1.5 倍のイベント数を稼ぐことができる。このことも改善点として挙げられる。

7 謝辞

指導教官の田島さんと鈴木さん, TA の笠井さんと藤本さん, また課題研究 P1 の CMB 班や実験器具を貸してくれた課題研究 P2 の皆様には大変お世話になりました。1 年間ありがとうございました。

参考文献

- [1] 近藤慶一, 「量子力学講義Ⅱ -原子から量子もつれまで-」, 共立出版, 2023.
- [2] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, *Physics Physique Fizika* **1**, 195–200 (1964).
- [3] 矢崎裕二, 「Klein-仁科の公式導出の仮定 (I) -理研の仁科資料を中心に-」, 日本物理学会年会講演, 1984.
- [4] 檜野幸将, 竹田大地, 「Bell の不等式の破れの検証」, 2019 年度京都大学理学部課題研究 P1 レポート, 2020.
- [5] 前田涼太, 高原彰吾, 「Compton 散乱を用いた Bell の不等式の破れの検証」, 2022 年度京都大学理学部課題研究 P1 レポート, 2023.
- [6] <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>
- [7] W. R. Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Springer-Verlag, 1994.