# Positronium Hyperfine Structure in Its Ground State

*T.Sumida, M.Fujita, K.Iida, S.Sugiyama*

June 2, 2001

**Abstract**

Positronium, the bound state of an electron and a positron, is an ideal system for a test of quantum electrodynamics because only a lepton and its antiparticle are present. The energy separation in the ground state between $^3S_1$ state and $^1S_0$ state, which is called Hyperfine Structure, $\Delta\nu$, is the important quantity, which has been determined for positronium previously. We did a redetermination of $\Delta\nu$ in the experiment similar to earlier experiments. And we obtained the result for $\Delta\nu$ which is $\Delta\nu_{\rm exp} = (2.0454 \pm 0.0063) \times 10^2$[GHz]. This value is in reasonable agreement with the theoretical value of $\Delta\nu_{\rm theor} = 2.03427 \times 10^2$[GHz].

# Contents


**1 THEORY** **1**
- 1.1 Hyperfine Structure . . . 1
- 1.2 Spin Eigenstates and Decay Rates . . . 2
- 1.3 Mixing Effect of Static Magnetic Field . . . 3
- 1.4 Effects of Oscillating Magnetic Field . . . 7
- 1.5 The Number of 2 $\gamma$ Decays . . . 10
- 1.6 The Resonant Line Shape . . . 12

**2 APPARATUS** **17**
- 2.1 Schema of Set Up . . . 17
- 2.2 Magnetic Field . . . 18
  - 2.2.1 Electromagnet and Shim . . . 18
  - 2.2.2 Measurement of Magnetic Field . . . 20
- 2.3 Microwave System . . . 21
  - 2.3.1 SSG , FD, BPF . . . 21
  - 2.3.2 Amp, Power Meter, Directional Coupler . . . 22
  - 2.3.3 Cavity . . . 22
  - 2.3.4 Microwave in Cavity . . . 23
  - 2.3.5 Feed Back System using DBM . . . 25
- 2.4 $^{22}$Na Positron Source . . . 26
- 2.5 Gas-Handling System . . . 26
- 2.6 $\gamma$-Ray Detectors . . . 27
  - 2.6.1 Geometry . . . 27
  - 2.6.2 NaI . . . 28
  - 2.6.3 Photo Multiplier Tube . . . 28
- 2.7 DAQ System . . . 28
  - 2.7.1 Trigger Logic . . . 28
  - 2.7.2 Analog to Digital Converter . . . 29
  - 2.7.3 Time to Digital Converter . . . 29

**3 EXPERIMENT** **31**
- 3.1 Counts Estimation . . . 31
- 3.2 Histogram . . . 32
- 3.3 The History of the Data . . . 34

**4 ANALYSIS** **37**
- 4.1 Linear Fit . . . 37
- 4.2 Signal Confidence . . . 38

**5 RESULTS** **41**
- 5.1 Fitting Resonance Curve . . . 41
- 5.2 Pressure Dependence of Ps HFS . . . 42
- 5.3 The Final Value . . . 43

**6 DISCUSSION** **45**
6.1 Causes of Difference . . . . . 45
6.2 Improvement in the Future . . . . . 45

**7 ACKNOWLEDGMENTS** **47**
7.1 Acknowledgments . . . . . 47
7.2 Special Thanks . . . . . 47
7.3 Lastly . . . . . 47

**A The Positronium Hyperfine Structure** **51**
A.1 The Bethe Salpeter Equation . . . . . 51
A.2 The Bethe-Salpeter Equation for Positronium . . . . . 56
A.3 The Bethe-Salpeter Equation In Lowest Order . . . . . 56
A.4 The Nonretarded Limit . . . . . 57
A.5 Nonrelativistic Reduction of the Two-Body Equation Applied to Positronium . . . . . 60

**B The Selection Rules for Positronium** **63**
B.1 Charge Conjugation Operator : $C$ . . . . . 63
B.2 The Selection Rules . . . . . 64

**C An Approximation** **67**

# Chapter 1

# THEORY

## 1.1 Hyperfine Structure

positronium(以下 Ps) は、electron ($e^-$) と positoron ($e^+$) の束縛状態である。$e^-$ と $e^+$ の間には spin-spin

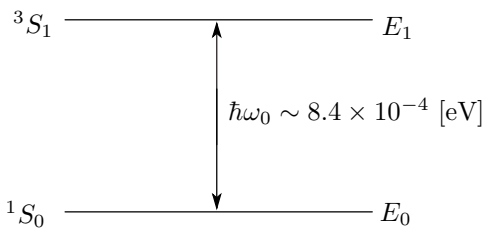



Fig. 1.1: Energy Level Splitting

相互作用が存在するために、Ps の基底状態は 3 重項状態 ( $^3S_1$ ; ortho - Ps ) と 1 重項状態 ( $^1S_0$ ; para - Ps ) に分化している。このエネルギー差を Hyperfine Structure (HFS) と呼ぶ。それぞれのエネルギー固有状態を $E_1, E_0$ とすると、QED より

$$E_1 - E_0 = \hbar\omega_0 = 8.41306 \times 10^{-4} \text{ [eV]} \tag{1.1}$$

$$\Delta\nu = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi\hbar} \sim 2.03427 \times 10^2 \text{ [GHz]} \tag{1.2}$$

となる[1]。また $^3S_1$,$^1S_0$ の Ps は、それぞれ崩壊確率

$$\lambda_1 = 7.23 \times 10^6 \text{ [sec}^{-1}\text{]} \quad , \quad \lambda_0 = 8.05 \times 10^9 \text{ [sec}^{-1}\text{]} \tag{1.3}$$

で崩壊し、選択則より $^3S_1$ は $3\gamma$ に、$^1S_0$ は $2\gamma$ にそれぞれ崩壊する。

以下では Ps の系に静磁場及び振動磁場を加えたときの $2\gamma$ の崩壊数の変化から、いかにして HFS の値を求めるかを論じる。ここで問題は semi-classical に扱う。つまり、系に加わる電磁場の量子論的効果は無視できると仮定する。

また計算に必要な物理定数の値については、Particle Data Group のものを用いる。

$$\begin{aligned} \hbar &= 6.582\ 118\ 89(26) \times 10^{-22} \text{ [MeV} \cdot \text{s]} \\ \mu_B &= \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788\ 381\ 749(43) \times 10^{-11} \text{ [MeV} \cdot \text{T}^{-1}\text{]} \\ g^- &= -g^+ = g' = 2(1.001\ 159\ 65) \end{aligned} \tag{1.4}$$

[1] Appendix A 参照

## 1.2 Spin Eigenstates and Decay Rates

Ps の spin 固有状態 $|\,Sm\,\rangle$ は、$e^-, e^+$ の spin の z 成分 $S_z^-, S_z^+$ の線形結合で書くと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
|\,1\,1\,\rangle &= |\,\uparrow\uparrow\,\rangle \\
|\,1\text{-}1\,\rangle &= |\,\downarrow\downarrow\,\rangle \\
|\,1\,0\,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,|\,\uparrow\downarrow\,\rangle + |\,\downarrow\uparrow\,\rangle\,) \\
|\,0\,0\,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,|\,\uparrow\downarrow\,\rangle - |\,\downarrow\uparrow\,\rangle\,)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

これらを基底に取ると、状態は

$$|\,\psi\,\rangle = \sum_n c_n\,|\,n\,\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_{\,1\,1} \\ c_{\,1\text{-}1} \\ c_{\,1\,0} \\ c_{\,0\,0} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

と書ける。また、この時の Hamiltonian は、${}^3S_1, {}^1S_0$ のエネルギーが $E_1, E_0$ であることから、

$$H_0 \doteq \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_1 & & \\ & & E_1 & \\ & & & E_0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

と書くことができる。

崩壊のある系の運動方程式は、hermite でない Hamiltonian を考えることによって記述されることが Weisplof 等によって示された。つまり、崩壊率が $\lambda$ である系の時間発展は、

$$|\,\psi(t)\,\rangle = |\,\psi(0)\,\rangle \exp(-i\frac{E}{\hbar}t)\exp(-\frac{\lambda}{2}t) \tag{1.8}$$

であり、これは次の Schrödinger eq. によって記述されている。

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\psi(t)\,\rangle &= (H - i\hbar\Gamma)|\,\psi(t)\,\rangle \\
\text{eigenvalue of } (H - i\hbar\Gamma) &= E - \frac{i}{2}\lambda
\end{aligned} \tag{1.9}$$

いま我々の考えている系では、${}^3S_1, {}^1S_0$ の崩壊確率が $\lambda_1, \lambda_0$ であることから

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \gamma_1 & & \\ & & \gamma_1 & \\ & & & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_i = \frac{1}{2}\lambda_i \quad (i = 1, 0) \tag{1.10}$$

という崩壊行列を考えると、次の式で系は記述される。

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_0 &= H_0 - i\hbar\Gamma_0 \\
&= \begin{pmatrix} E_1 - i\hbar\gamma_1 & & & \\ & E_1 - i\hbar\gamma_1 & & \\ & & E_1 - i\hbar\gamma_1 & \\ & & & E_0 - i\hbar\gamma_0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\psi(t)\,\rangle = \tilde{H}_0|\,\psi(t)\,\rangle \tag{1.12}$$

ただしここで、 hermite でないことを強調するために、Hamiltonian $H_0$ の上に $\sim$ を付けている。

## 1.3 Mixing Effect of Static Magnetic Field

静磁場中の Ps の系を記述する Hamiltonian を $\tilde{\mathcal{H}}_0$ と書くと、

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_0 &= \tilde{H}_0 - \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}^- + \boldsymbol{\mu}^+ \\ &= -g^-\,\mu_B\boldsymbol{S}^- + (-g^+\mu_B\boldsymbol{S}^+) \\ &= -\frac{1}{2}g'\mu_B(\boldsymbol{\sigma}^- - \boldsymbol{\sigma}^+) \\ \boldsymbol{B}_0 &= B_0\,\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{1.13}$$

となる。ここで静磁場の向きを $z$ 軸にとっている。また $\boldsymbol{\sigma}^\pm$ は Pauli 行列である。したがって、$\tilde{\mathcal{H}}_0$ は次のように書ける。

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \tilde{H}_0 + \frac{1}{2}g'\mu_B B_0(\sigma_z^- - \sigma_z^+) \tag{1.14}$$

$\tilde{\mathcal{H}}_0$ の行列表示を求めたいので、まず $\sigma_z^- - \sigma_z^+$ が spin 固有状態 $|\,Sm\,\rangle$ にかかるとどうなるか調べる。

$$\begin{aligned}(\sigma_z^- - \sigma_z^+)|\,1\,1\,\rangle &= (\sigma_z^- - \sigma_z^+)|\,\uparrow\uparrow\,\rangle = |\,\uparrow\uparrow\,\rangle - |\,\uparrow\uparrow\,\rangle = 0 \\ (\sigma_z^- - \sigma_z^+)|\,1\text{-}1\,\rangle &= (\sigma_z^- - \sigma_z^+)|\,\downarrow\downarrow\,\rangle = -|\,\downarrow\downarrow\,\rangle + |\,\downarrow\downarrow\,\rangle = 0 \\ (\sigma_z^- - \sigma_z^+)|\,1\,0\,\rangle &= (\sigma_z^- - \sigma_z^+)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,\uparrow\downarrow\,\rangle + |\,\downarrow\uparrow\,\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{(|\,\uparrow\downarrow\,\rangle + |\,\uparrow\downarrow\,\rangle) + (-|\,\downarrow\uparrow\,\rangle - |\,\downarrow\uparrow\,\rangle)\Big\} = 2\,|\,0\,0\,\rangle \\ (\sigma_z^- - \sigma_z^+)|\,0\,0\,\rangle &= (\sigma_z^- - \sigma_z^+)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,\uparrow\downarrow\,\rangle - |\,\downarrow\uparrow\,\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{(|\,\uparrow\downarrow\,\rangle + |\,\uparrow\downarrow\,\rangle) - (-|\,\downarrow\uparrow\,\rangle - |\,\downarrow\uparrow\,\rangle)\Big\} = 2\,|\,1\,0\,\rangle\end{aligned} \tag{1.15}$$

したがって、 $\tilde{\mathcal{H}}_0$ を行列表示すると次のようになる。

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \begin{pmatrix} E_1 - i\hbar\gamma_1 & & & \\ & E_1 - i\hbar\gamma_1 & & \\ & & E_1 - i\hbar\gamma_1 & \\ & & & E_0 - i\hbar\gamma_0 \end{pmatrix} + g'\,\mu_B B_0 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

つまり、静磁場の存在は $|\,1\,\pm 1\,\rangle$ 状態の Ps には全く影響を与えない。一方、 $|\,1\,0\,\rangle, |\,0\,0\,\rangle$ の状態は静磁場によって混ざることになる。そこで、しばらくの間 $|\,1\,\pm 1\,\rangle$ は考えずに、$|\,1\,0\,\rangle, |\,0\,0\,\rangle$ の系を考えることにする。また簡便のために、エネルギー基準値を $\frac{1}{2}(E_1 + E_0) = 0$ と取り直して、$E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\ ,\ E_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ と表し、

$$x = \frac{2\,g'\mu_B B_0}{\hbar\omega_0} \tag{1.17}$$

というパラメータを導入すると、

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} + \frac{\hbar\omega_0}{2}\,x\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix}1 & x \\ x & -1\end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H} - i\hbar\Gamma_0 &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix}1 & x \\ x & -1\end{pmatrix} - i\hbar\begin{pmatrix}\gamma_1 & \\ & \gamma_0\end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\omega_0 - 2i\gamma_1 & x\omega_0 \\ x\omega_0 & -\omega_0 - 2i\gamma_0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.19}$$

となる。

$\tilde{\mathcal{H}}_0$ の固有値を求める。固有値を $\frac{\hbar}{2}\lambda$ 書くと、$\lambda$ は

$$\left|\tilde{\mathcal{H}}_0 - \frac{\hbar}{2}\lambda I\right| = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \Big\{(\omega_0 - 2i\gamma_1 - \lambda)(-\omega_0 - 2i\gamma_0 - \lambda) - (x\omega_0)^2\Big\} = 0$$
$$\lambda = -i(\gamma_0 + \gamma_1) \pm \sqrt{\{\omega_0 + i(\gamma_0 - \gamma_1)\}^2 + x^2\omega_0^2} \tag{1.20}$$

であるので、 $\tilde{\mathcal{H}}_0$ の固有値 $\tilde{E}_\pm$ は

$$\tilde{E}_\pm = \frac{\hbar}{2}\left[-i(\gamma_0 + \gamma_1) \pm \sqrt{\{\omega_0 + i(\gamma_0 - \gamma_1)\}^2 + x^2\omega_0^2}\right] \tag{1.21}$$

となる。(ここで $\sqrt{\ }$ の 中身が複素数であるが、$\sqrt{\ }$ は常に偏角の小さい方の値を取る操作とする)

固有値 $\tilde{E}_+$ に属す固有状態を $|\,\psi_+\,\rangle \doteq \dfrac{1}{\sqrt{1+|\alpha_+|^2}}\begin{pmatrix}1\\ \alpha_+\end{pmatrix}$ と書くと、$\alpha_+$ は次のようになる。

$$(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{E}_+)\begin{pmatrix}1\\ \alpha_+\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\omega_0 - 2i\gamma_1 - \frac{2}{\hbar}\tilde{E}_+ & x\omega_0\\ x\omega_0 & -\omega_0 - 2i\gamma_0 - \frac{2}{\hbar}\tilde{E}_+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \alpha_+\end{pmatrix} = 0$$
$$\alpha_+ = \frac{-1}{x\omega_0}(\omega_0 - 2i\gamma_1 - \frac{2}{\hbar}\tilde{E}_+)$$
$$= \frac{1}{x\omega_0}\Big\{-\omega_0 - i(\gamma_0 - \gamma_1) + \sqrt{\{\omega_0 + i(\gamma_0 - \gamma_1)\}^2 + x^2\omega_0^2}\Big\} \tag{1.22}$$

同様に固有値 $\tilde{E}_-$ に属す固有状態を $|\,\psi_-\,\rangle \doteq \dfrac{1}{\sqrt{1+|\alpha_-|^2}}\begin{pmatrix}\alpha_-\\ 1\end{pmatrix}$ とすると、$\alpha_-$ は次のようになる。

$$(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{E}_-)\begin{pmatrix}\alpha_-\\ 1\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\omega_0 - 2i\gamma_1 - \frac{2}{\hbar}\tilde{E}_- & x\omega_0\\ x\omega_0 & -\omega_0 - 2i\gamma_0 - \frac{2}{\hbar}\tilde{E}_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_-\\ 1\end{pmatrix} = 0$$
$$\alpha_- = \frac{1}{x\omega_0}(\omega_0 + 2i\gamma_0 + \frac{2}{\hbar}\tilde{E}_-)$$
$$= \frac{1}{x\omega_0}\Big\{\omega_0 + i(\gamma_0 - \gamma_1) - \sqrt{\{\omega_0 + i(\gamma_0 - \gamma_1)\}^2 + x^2\omega_0^2}\Big\}$$
$$= -\alpha_+ \tag{1.23}$$

ここで、次のパラメータを導入する。

$$\gamma' = \gamma_0 - \gamma_1$$
$$\kappa = \frac{\gamma'}{\omega_0}$$
$$\varepsilon = \alpha_+ = \frac{1}{x\omega_0}\Big\{-\omega_0 - i\gamma' + \sqrt{(\omega_0 + i\gamma')^2 + x^2\omega_0^2}\Big\} \tag{1.24}$$
$$= \frac{1}{x}\Big\{-1 - i\kappa + \sqrt{(1+i\kappa)^2 + x^2}\Big\}$$

このとき、$\tilde{E}_\pm$ は、

$$\tilde{E}_\pm = \frac{\hbar}{2}\Big[-i(\gamma_0 + \gamma_1) \pm \{(\varepsilon x + 1)\omega_0 + i\gamma'\}\Big] \tag{1.25}$$

となるので、$\varepsilon = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$ と $\varepsilon$ を実部と虚部に分けると、$\tilde{E}_\pm$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_+ &= \frac{\hbar}{2}\Big\{(\varepsilon x+1)\omega_0 - 2i\gamma_1\Big\} \\
&= \frac{\hbar\omega_0}{2}(\varepsilon_1 x+1) - i\hbar(\gamma_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 x\omega_0) \\
\tilde{E}_- &= \frac{\hbar}{2}\Big\{-(\varepsilon x+1)\omega_0 - 2i\gamma_0\Big\} \\
&= -\frac{\hbar\omega_0}{2}(\varepsilon_1 x+1) - i\hbar(\gamma_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2 x\omega_0)
\end{aligned} \tag{1.26}$$

また 固有状態 $|\,\psi_\pm\,\rangle$ は

$$\begin{aligned}
|\,\psi_+\,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}\big(|\,1\,0\,\rangle + \varepsilon|\,0\,0\,\rangle\big) \\
|\,\psi_-\,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}\big(-\varepsilon|\,1\,0\,\rangle + |\,0\,0\,\rangle\big)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

である。ただし このとき、$\langle\,\psi_+|\psi_+\,\rangle = \langle\,\psi_-|\psi_-\,\rangle = 1$ であるが、

$$\begin{aligned}
\langle\,\psi_+|\psi_-\,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}(-\varepsilon+\varepsilon^*) \\
&= \frac{-2i\,\mathrm{Im}(\varepsilon)}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} = \frac{2i\varepsilon_2}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \equiv i\xi \neq 0
\end{aligned} \tag{1.28}$$

であることに注意する。これは Hamiltonian が hermite でないために、その固有状態が直行しないことに起因する。

以上より、静磁場をかけることで spin 固有状態 $|\,1\,0\,\rangle$ , $|\,0\,0\,\rangle$ は混ざりあって次のような Hamiltonian の固有状態 $|\,\psi_\pm\,\rangle$ になることが分かる。

| | | |
|---|---|---|
| 固有状態 | $\|\,\psi_+\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\|\varepsilon\|^2}}(\|\,1\,0\,\rangle + \varepsilon\|\,0\,0\,\rangle)$ | $\|\,\psi_-\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\|\varepsilon\|^2}}(-\varepsilon\|\,1\,0\,\rangle + \|\,0\,0\,\rangle)$ |
| 固有値 | $\tilde{E}_+ = \frac{\hbar}{2}\Big\{(\varepsilon x+1)\omega_0 - 2i\gamma_1\Big\}$ | $\tilde{E}_- = \frac{\hbar}{2}\Big\{-(\varepsilon x+1)\omega_0 - 2i\gamma_1\Big\}$ |
| エネルギー | $E_+ = \frac{\hbar\omega_0}{2}(\varepsilon_1 x+1)$ | $E_- = \frac{-\hbar\omega_0}{2}(\varepsilon_1 x+1)$ |
| 崩壊率 | $\gamma_+ = \gamma_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\, x\, \omega_0$ | $\gamma_- = \gamma_0 - \frac{1}{2}\varepsilon_2\, x\, \omega_0$ |

但し $\varepsilon = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$ , $\langle\,\psi_+|\psi_-\,\rangle = \dfrac{2i\varepsilon_2}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \equiv i\xi \neq 0$ (1.29)

また、記法を統一するために、$|\,1\pm1\,\rangle = |\,\psi_{1\pm1}\,\rangle$ と書き、基底 $\{|\,\psi_{1\pm1}\,\rangle\,,\ |\,\psi_\pm\,\rangle\}$ で、Hamiltonian $\tilde{\mathcal{H}}_0$ を行列表示すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_0 &= \mathcal{H}_0 - i\hbar\Gamma \\
&= \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_1 & & \\ & & E_+ & \\ & & & E_- \end{pmatrix} - i\hbar \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \gamma_1 & & \\ & & \gamma_+ & \\ & & & \gamma_- \end{pmatrix} \\
\langle\,\psi_i|\psi_j\,\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & i\xi \\ & & -i\xi & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

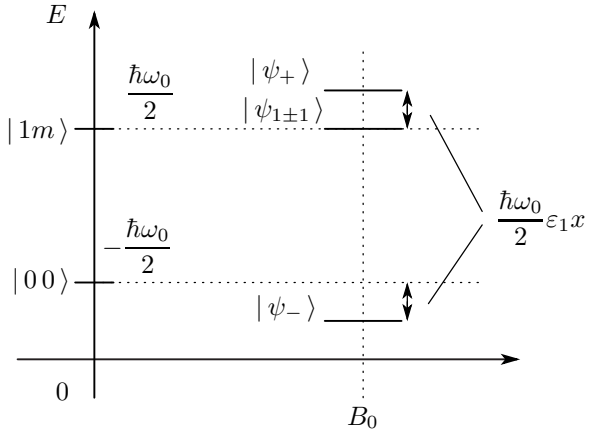



Fig. 1.2: Mixing Effect

今後は特に断らない限り、この基底を用いる。

ここで、導入したパラメータ $x$ , $\gamma'$ , $\kappa$ , $\varepsilon$ , $\xi$ のオーダーを評価しておく。実験は、$B_0 \simeq 0.6$ [T] で行うのでこの値を (1.17) に代入すると

$$x \sim 0.17 \tag{1.31}$$

となる。また、$\gamma_1 = \frac{1}{2}\lambda_1 \sim 3.6 \times 10^6\,\mathrm{sec}^{-1}$ , $\gamma_0 = \frac{1}{2}\lambda_0 \sim 4.0 \times 10^9\,\mathrm{sec}^{-1}$ , $\omega_0 = 2\pi\Delta\nu \sim 1.3 \times 10^{12}$ rad$\cdot\mathrm{sec}^{-1}$ であるから、

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma_0 - \gamma_1 \sim 4.0 \times 10^9\,\mathrm{sec}^{-1} \\ \kappa &= \frac{\gamma'}{\omega_0} \qquad\qquad \sim 3.1 \times 10^{-3} \end{aligned} \tag{1.32}$$

である。$\varepsilon$ については、$\kappa x \approx 6.0 \times 10^{-4}$ よりも小さい項は無視するとして考えると、$x^5 \sim 1.9 \times 10^{-4}$ までは考えるので、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{x}\Big\{-1 - i\kappa + \sqrt{(1+i\kappa)^2 + x^2}\Big\} = \frac{1}{x}\Big\{ -1 - i\kappa + \sqrt{1 + (x^2 - \kappa^2 + 2i\kappa)}\Big\} \\ &\simeq \frac{1}{x}\Big\{-1 - i\kappa + 1 + \frac{1}{2}(x^2 - \kappa^2 + 2i\kappa) - \frac{1}{8}(x^2 - \kappa^2 + 2i\kappa)^2 + \frac{1}{16}(x^2 - \kappa^2 + 2i\kappa)^3\Big\} \\ &\simeq \frac{1}{x}\Big\{-i\kappa + \frac{1}{2}(x^2 + 2i\kappa) - \frac{1}{8}(x^4 + 4i\kappa x^2) + \frac{1}{16}x^6\Big\} \\ &= \frac{1}{x}\Big\{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + -\frac{i}{2}\kappa x^2\Big\} = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8}\right) - \frac{i}{2}\kappa x \end{aligned} \tag{1.33}$$

(ちなみにこの近似の範囲においては、$\varepsilon \simeq \frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2} - 1) - \frac{i}{2}\kappa x$ と書くことも出来る)
即ち、

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\simeq \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8}\right) \simeq \frac{x}{2} \sim 0.08 \\ \varepsilon_2 &\simeq \frac{1}{2}\kappa x \sim 2.4 \times 10^{-4} \\ \xi \ &= \frac{2\varepsilon_2}{1 + |\varepsilon|^2} \simeq \frac{\kappa x}{1 + \frac{x^2}{4}} \\ &\simeq \kappa x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \simeq \kappa x \ \sim 6 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{1.34}$$

である。このことから、$E_\pm$ については、静磁場による mixing の効果がわずかに見られることが分かる。また $\gamma_+$ についてはその効果が非常に大きく現れるのに対し、$\gamma_-$ については、効果が殆ど見られないことも分かる。

## 1.4 Effects of Oscillating Magnetic Field

$z$ 軸方向に静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ がかかっている系に、さらに $y$ 軸方向に直線偏向した振動磁場

$$\boldsymbol{B}_1 = B_1 \cos\omega t \ \boldsymbol{e}_y \tag{1.35}$$

を加えたときの影響を考える。このとき、系の Hamiltonian $\tilde{\mathcal{H}}$ は

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_0 - \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_1 = \mathcal{H}_0 - i\hbar\Gamma - \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_1 \tag{1.36}$$

となる。この系を $\tilde{\mathcal{H}}_0$ の固有状態 $|\,\psi_n\,\rangle$ に摂動 $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_1$ が加わったとして、相互作用表示で考える。(基底の変換には、Hamiltonian の Hermite な部分 $\mathcal{H}$ のみを使う)

基底の変換

$$|\,\psi(t)\,\rangle_{\rm I} = e^{i\frac{\mathcal{H}_0}{\hbar}t}|\,\psi(t)\,\rangle \tag{1.37}$$

を考えると、運動方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\psi(t)\,\rangle_{\rm I} &= \tilde{\mathcal{H}}_{\rm int}(t)|\,\psi(t)\,\rangle_{\rm I} \\ \tilde{\mathcal{H}}_{\rm int}(t) &= e^{i\frac{\mathcal{H}_0}{\hbar}t}(-i\hbar\Gamma - \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_1)e^{-i\frac{\mathcal{H}_0}{\hbar}t} \end{aligned} \tag{1.38}$$

そこで、$|\,\psi(t)\,\rangle = \sum_n a_n(t)|\,\psi_n\,\rangle (n=(1\pm1),(\pm))$ と展開して、係数 $a_n(t)$ についての方程式を導く。

$$\begin{aligned} i\hbar\sum_n \frac{da_n(t)}{dt}|\,\psi_n\,\rangle &= \sum_{l,m}|\,\psi_l\,\rangle\langle\,\psi_l\,|\tilde{\mathcal{H}}_{\rm int}(t)|\,\psi_m\,\rangle a_m(t) \\ \sum_n\langle\,\psi_k|\psi_n\,\rangle\dot{a}_n(t) &= \sum_{l,m}\langle\,\psi_k|\psi_l\,\rangle\Big\{e^{i\frac{E_l-E_m}{\hbar}t}(-\gamma_m)\langle\,\psi_l|\psi_m\,\rangle a_m(t) - \frac{i}{\hbar}e^{i\frac{E_l-E_m}{\hbar}t}\langle\,\psi_l\,|-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_1|\,\psi_m\,\rangle a_m(t)\Big\} \end{aligned} \tag{1.39}$$

ただしここで $\langle\,\psi_k|\psi_n\,\rangle$ は直交しない、即ち

$$\langle\,\psi_k|\psi_n\,\rangle = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & i\xi \\ & & -i\xi & 1 \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

であることに注意する。

この方程式を解くために、まず $\langle\,\psi_l\,|-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_1|\,\psi_m\,\rangle$ を求める。

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_1 &= \frac{1}{2}g'\mu_B B_1\cos\omega t\ (\sigma_y^- - \sigma_y^+) \\ (\sigma_y^- - \sigma_y^+)|\,1\,1\,\rangle &= (\sigma_y^- - \sigma_y^+)|\,\uparrow\uparrow\,\rangle = i|\,\downarrow\uparrow\,\rangle - i|\,\uparrow\downarrow\,\rangle = -i\sqrt{2}|\,0\,0\,\rangle \\ (\sigma_y^- - \sigma_y^+)|\,1\text{-}1\,\rangle &= (\sigma_y^- - \sigma_y^+)|\,\downarrow\downarrow\,\rangle = -i|\,\uparrow\downarrow\,\rangle + i|\,\downarrow\uparrow\,\rangle = -i\sqrt{2}|\,0\,0\,\rangle \\ (\sigma_y^- - \sigma_y^+)|\,1\,0\,\rangle &= (\sigma_y^- - \sigma_y^+)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,\uparrow\downarrow\,\rangle + |\,\downarrow\uparrow\,\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\big(i|\,\downarrow\downarrow\,\rangle + i|\,\uparrow\uparrow\,\rangle\big) + \big(-i|\,\uparrow\uparrow\,\rangle - i|\,\downarrow\downarrow\,\rangle\big)\Big\} = 0 \\ (\sigma_y^- - \sigma_y^+)|\,0\,0\,\rangle &= (\sigma_y^- - \sigma_y^+)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\,\uparrow\downarrow\,\rangle - |\,\downarrow\uparrow\,\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\big(i|\,\downarrow\downarrow\,\rangle + i|\,\uparrow\uparrow\,\rangle\big) - \big(-i|\,\uparrow\uparrow\,\rangle - i|\,\downarrow\downarrow\,\rangle\big)\Big\} = \sqrt{2}\,i\big(|\,1\,1\,\rangle + |\,1\text{-}1\,\rangle\big) \end{aligned} \tag{1.41}$$

これと $|\,\psi_{1\pm1}\,\rangle = |\,1\pm1\,\rangle$ , $|\,\psi_{+}\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}\big(|\,1\,0\,\rangle + \varepsilon|\,0\,0\,\rangle\big)$ , $|\,\psi_{-}\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}\big(-\varepsilon|\,1\,0\,\rangle + |\,0\,0\,\rangle\big)$ であることより

$$\langle\,\psi_l\,|-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_1|\,\psi_m\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hbar v\cos\omega t\begin{pmatrix} 0 & & i\varepsilon & i \\ & 0 & i\varepsilon & i \\ -i\varepsilon^* & -i\varepsilon^* & 0 & \\ -i & -i & & 0 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

$$v = \frac{B_1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}\,g'\mu_B/\hbar$$

となる。(1.40) に注意して (1.39) を書き下すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{1\,1} &= -\gamma_1 a_{1\,1} + \frac{1}{\sqrt{2}}v\cos\omega t\Big\{e^{i\frac{E_1-E_-}{\hbar}t}\varepsilon a_+ + e^{i\frac{E_1-E_-}{\hbar}t}a_-\Big\} \\
\dot{a}_{1\text{-}1} &= -\gamma_1 a_{1\text{-}1} + \frac{1}{\sqrt{2}}v\cos\omega t\Big\{e^{i\frac{E_1-E_-}{\hbar}t}\varepsilon a_+ + e^{i\frac{E_1-E_-}{\hbar}t}a_-\Big\} \\
\dot{a}_+ + i\xi\dot{a}_- &= T_+ + i\xi T_- \\
-i\xi\dot{a}_+ + \dot{a}_- &= -i\xi T_+ + T_-
\end{aligned} \tag{1.43}$$

ここで $T_\pm$ は (1.39) の $l=\pm$ の項で、

$$\begin{aligned}
T_+ &= -\gamma_+ a_+ + e^{i\frac{E_+-E_-}{\hbar}t}(-\gamma_-)(i\xi)a_- + \frac{1}{\sqrt{2}}v\cos\omega t\Big\{e^{i\frac{E_+-E_1}{\hbar}t}(-\varepsilon^*)(a_{1\,1}+a_{1\text{-}1})\Big\} \\
T_- &= -\gamma_- a_- + e^{i\frac{E_--E_+}{\hbar}t}(-\gamma_+)(-i\xi)a_- + \frac{1}{\sqrt{2}}v\cos\omega t\Big\{e^{i\frac{E_--E_1}{\hbar}t}(-1)(a_{1\,1}+a_{1\text{-}1})\Big\}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

である。さらに

$$\begin{aligned}
\frac{E_+-E_1}{\hbar} &= \frac{1}{2}\varepsilon_1 x\omega_0 && \equiv\omega_+ \\
\frac{E_1-E_-}{\hbar} &= \frac{1}{2}\varepsilon_1 x\omega_0 + \omega_0 && \equiv\omega_- \\
\frac{E_+-E_-}{\hbar} &= \frac{(E_+-E_1)+(E_1-E_-)}{\hbar} && = \omega_+ + \omega_-
\end{aligned} \tag{1.45}$$

を用いて (1.43) を書き換えると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{1\pm1} &= -\gamma_1 a_{1\pm1} + \frac{1}{\sqrt{2}}v\cos\omega t\Big\{e^{-i\omega_+ t}\varepsilon a_+ + e^{i\omega_- t}a_-\Big\} \\
\dot{a}_+ &= -\gamma_+ a_+ - i\xi\gamma_- e^{i(\omega_++\omega_-)t}a_- - \frac{1}{\sqrt{2}}v\cos\omega t\varepsilon^*\ e^{i\omega_+ t}(a_{1\,1}+a_{1\text{-}1}) \\
\dot{a}_- &= -\gamma_- a_- + i\xi\gamma_+ e^{-i(\omega_++\omega_-)t}a_+ - \frac{1}{\sqrt{2}}v\cos\omega t\ e^{-i\omega_- t}(a_{1\,1}+a_{1\text{-}1})
\end{aligned} \tag{1.46}$$

ここで振動磁場の振動数 $\omega$ は、$\omega\sim\omega_+$ となるような共鳴状態を考える。$\cos\omega t = (e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})/2$ と分解すると、$e^{\pm i(\omega-\omega_+)t}$ に比例する項以外は、$\omega_0$ のオーダーで激しく振動するので、方程式の解には殆んど寄与しないと考えられる。そこで、$\omega' = \omega-\omega_+$ とし、共鳴項以外は 0 と近似して方程式を書き直す。

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{1\pm1} &= -\gamma_1 a_{1\pm1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon v\ e^{i\omega' t}a_+ \\
\dot{a}_+ &= -\gamma_+ a_+ - \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^* v\ e^{-i\omega' t}(a_{1\,1}+a_{1\text{-}1}) \\
\dot{a}_- &= -\gamma_- a_-
\end{aligned} \tag{1.47}$$

この方程式を解くために $b_n(t) = a_n(t)e^{\gamma_n t}$ という変数を導入する。すると $b_n$ についての方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{1\pm1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon v\ e^{i\omega' t}e^{(\gamma_1-\gamma_+)t}b_+ \\
\dot{b}_+ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^* v\ e^{-i\omega' t}e^{(\gamma_+-\gamma_1)t}(b_{1\,1}+b_{1\text{-}1}) \\
\dot{b}_- &= 0
\end{aligned} \tag{1.48}$$

したがって $b_-(t)$ は

$$b_-(t) = b_-(0) \tag{1.49}$$

である。また $b_+(t)$ については

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}b_+ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^* v\ e^{(-i\omega'+\gamma_+-\gamma_1)t}\Big\{(-i\omega'+\gamma_+-\gamma_1)(b_{1\,1}+b_{1\text{-}1})+(\dot{b}_{1\,1}+\dot{b}_{1\text{-}1})\Big\} \\
&= (-i\omega'+\gamma_+-\gamma_1)\frac{d}{dt}b_+ - \frac{1}{8}|\varepsilon|^2v^2\cdot 2b_+ \\
\leftrightarrow\quad &\Big\{\frac{d^2}{dt^2}-(-i\omega'+\gamma_+-\gamma_1)\frac{d}{dt}+\frac{1}{4}|\varepsilon|^2v^2\Big\}b_+ = 0
\end{aligned} \tag{1.50}$$

であるので、$b_+$ は 2 つの定数 $c_\pm$ を用いて

$$\begin{aligned}
b_+(t) &= c_+e^{\delta_+ t}+c_-e^{\delta_- t} \\
\delta_\pm &= \frac{1}{2}\Big\{(-i\omega'+\gamma'')\pm\sqrt{(-i\omega'+\gamma'')^2-|\varepsilon|^2v^2}\Big\} \\
\gamma'' &= \gamma_+-\gamma_1
\end{aligned} \tag{1.51}$$

と書ける。これより

$$\begin{aligned}
b_+(0) &= c_++c_- \\
\dot{b}_+(0) &= c_+\delta_++c_-\delta_- = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^* v\big\{b_{1\,1}(0)+b_{1\text{-}1}(0)\big\}
\end{aligned} \tag{1.52}$$

である。これを $c_\pm$ について解くと

$$\begin{aligned}
c_+ &= \frac{1}{\delta_+-\delta_-}(\dot{b}_+(0)-\delta_-b_+(0)) = \frac{-1}{\delta_+-\delta_-}\Big\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^* v(b_{1\,1}(0)+b_{1\text{-}1})+\delta_-b_+(0)\Big\} \\
c_- &= \frac{-1}{\delta_+-\delta_-}(\dot{b}_+(0)-\delta_+b_+(0)) = \frac{1}{\delta_+-\delta_-}\Big\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^* v(b_{1\,1}(0)+b_{1\text{-}1})+\delta_+b_+(0)\Big\}
\end{aligned} \tag{1.53}$$

となる。

$b_{1\pm1}$ については、$b_{1\,1}$ と $b_{1\text{-}1}$ の間にもう 1 つ関係を仮定しないと解けない。ここで、静磁場は $|\,\psi_{1\pm1}\,\rangle$ の状態に全く影響を及ぼさなかったことと、系に磁場をかけなければ、系は等方的であることを考えると、$a_{1\,1}(0) = a_{1\text{-}1}(0)$ であると考えられる。これは即ち

$$b_{1\,1}(0) = b_{1\text{-}1}(0) \tag{1.54}$$

ということである。$b_{1\pm1}$ は同じ方程式に従うので、初期条件が同じであれば、これらは等しい。従って $b_{1\pm1}$ は $(1.48)$,$(1.52)$ から

$$b_{1\,1}(t) = b_{1\text{-}1}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon^* v}e^{-(-i\omega'+\gamma'')t}\left(c_+\delta_+e^{\delta_+ t}+c_-\delta_-e^{\delta_- t}\right) \tag{1.55}$$

となることが分かる。

以上より振動磁場のかかった系の状態は、次のように表せる。

$$
\begin{aligned}
|\,\psi(t)\,\rangle &= e^{-i\frac{\mathcal{H}_0}{\hbar}t}|\,\psi(t)\,\rangle_{\rm I} \\
&= e^{-i\frac{\mathcal{H}_0}{\hbar}t}\sum_n |\,\psi_n\,\rangle a_n(t) = \sum_n e^{-i\frac{\mathcal{H}_0}{\hbar}t}|\,\psi_n\,\rangle e^{-\gamma_n t} b_n(t) \\
&= \sum_n |\,\psi_n\,\rangle e^{(-i\frac{E_n}{\hbar}-\gamma_n)t} b_n(t) \\
b_{1\pm1} &= -\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon^* v} e^{-(-\omega'+\gamma'')t}\left(c_+\delta_+ e^{\delta_+ t} + c_-\delta_- e^{\delta_- t}\right) \\
b_+(t) &= c_+ e^{\delta_+ t} + c_- e^{\delta t} \\
b_-(t) &= a_-(0) \\
c_+ &= \frac{-1}{\delta_+ - \delta_-}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^* v\, a_{1\,1}(0) + \delta_- a_+(0)\right\} \\
c_- &= \frac{1}{\delta_+ - \delta_-}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^* v\, a_{1\,1}(0) + \delta_+ a_+(0)\right\}
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

一方で、振動磁場のかかっていない状態は $B_1 = 0$ 、つまり $v = 0$ であったから、(1.48) より $\dot{b}_n = 0$ である。つまり、このときは、$b_n(t) = a_n(0)$ である。したがって、振動磁場が系に加わったとき、$|\,\psi_-\,\rangle$ の状態は全く影響を受けないのに対して、$|\,\psi_{1\pm1}\,\rangle$ と $|\,\psi_+\,\rangle$ の状態は混ざり合うことが分かる。

## 1.5 The Number of 2 $\gamma$ Decays

選択則から Ps の ${}^3S_1$ は $3\gamma$ に、${}^1S_0$ は $2\gamma$ にそれぞれ崩壊する。したがって、Ps が形成されてから時間 $t$ が経つまでにおきた $2\gamma$ 崩壊数を $N_{2\gamma}(t)$ 、$t = 0$ での Ps の数を $N_0$ とすると、

$$
N_{2\gamma}(t+\Delta t) = N_{2\gamma}(t) + N_0 \cdot |\langle\, 0\,0|\psi(t)\,\rangle|^2 2\gamma_0 \Delta t \tag{1.57}
$$

という関係が成り立つ。これから $N_{2\gamma}(t)$ は

$$
N_{2\gamma}(t) = \int_0^t dt' |\langle\, 0\,0|\psi(t)\,\rangle|^2 2\gamma_0 N_0 \tag{1.58}
$$

実際に観測できるのは、Ps が形成されてから無限の時間が経ったときまでの崩壊数 $N_{2\gamma}(\infty)$ に比例する量であるので、これからは形成された Ps が $2\gamma$ 崩壊する確率

$$
P = \frac{N_{2\gamma}(\infty)}{N_0} \tag{1.59}
$$

について考えることにする。

初期状態は

$$
|\,\psi(t=0)\,\rangle = \sqrt{p_{1\,1}}|\,\psi_{1\,1}\,\rangle + \sqrt{p_{1\,1}}|\,\psi_{1\text{-}1}\,\rangle + \sqrt{p_+}e^{i\Delta_+}|\,\psi_+\,\rangle + \sqrt{p_-}e^{i\Delta_-}|\,\psi_-\,\rangle \tag{1.60}
$$

であるとする。状態は incoherent に結合していると考えるので、状態間の位相差 $\Delta_\pm$ は、特定の値を取らない。したがって、観測量は位相差について平均した値と考えられる。位相差について平均するという操作を $\overline{P}$ のように と書いて表すことにすると

$$
\overline{P} = \int_0^\infty dt\ \overline{|\langle\, 0\,0|\psi(t)\,\rangle|^2} \times 2\gamma_0 \tag{1.61}
$$

と書ける。

**A.** 静磁場も振動磁場も存在しないとき

$B_0 = B_1 = 0$ であるから $\varepsilon = 0$ となり、このとき $|\,\psi_+\,\rangle = |\,1\,0\,\rangle$ , $|\,\psi_-\,\rangle = |\,0\,0\,\rangle$ である。よって初期状態は $|\,S\,m\,\rangle$ の記法で次のように書ける。

$$|\,\psi(t=0)\,\rangle = \sqrt{p_{1\,1}}\,|\,1\,1\,\rangle + \sqrt{p_{1\,1}}\,|\,1\text{-}1\,\rangle + \sqrt{p_+}\,e^{i\Delta_+}|\,1\,0\,\rangle + \sqrt{p_-}\,e^{i\Delta_-}|\,0\,0\,\rangle \tag{1.62}$$

これから時刻 $t$ の状態を求めると

$$|\,\psi(t)\,\rangle = \big(\sqrt{p_{1\,1}}\,|\,1\,1\,\rangle + \sqrt{p_{1\,1}}\,|\,1\text{-}1\,\rangle + \sqrt{p_+}\,e^{i\Delta_+}|\,1\,0\,\rangle\big)\,e^{(i\frac{\hbar\omega_0}{2}-\gamma_1)t} + \sqrt{p_-}\,e^{i\Delta_-}|\,0\,0\,\rangle e^{(-i\frac{\hbar\omega_0}{2}-\gamma_0)t} \tag{1.63}$$

であるので、$\overline{P}$ は

$$\overline{P} = 2\gamma_0\int_0^\infty dt\,\overline{|\langle\,0\,0|\psi(t)\,\rangle|^2} = 2\gamma_0\cdot p_-\int_0^\infty dt\,e^{-2\gamma_0 t} = p_- \tag{1.64}$$

となる。

**B.** 静磁場のみが存在するとき

(1.56) より、時刻 $t$ の状態は次のように表せる。

$$\begin{aligned} |\,\psi(t)\,\rangle &= \sum_n |\,\psi_n\,\rangle e^{(-i\frac{E_n}{\hbar}-\gamma_n)t}b_n(t) \\ b_n(t) &= a_n(0) \\ a_{1\,1}(0) = a_{1\text{-}1}(0) &= \sqrt{p_{1\,1}}\ ,\ a_+(0) = \sqrt{p_+}\,e^{i\Delta_+}\ ,\ a_-(0) = \sqrt{p_-}\,e^{i\Delta_-} \end{aligned} \tag{1.65}$$

したがって $\overline{P}$ は、

$$\begin{aligned} \overline{P} &= 2\gamma_0\int_0^\infty dt\,\overline{|\langle\,0\,0|\psi(t)\,\rangle|^2} \\ &= 2\gamma_0\int_0^\infty dt\,\overline{\sum_n |\langle\,0\,0|\psi_n\,\rangle e^{(-i\frac{E_0}{\hbar}-\gamma_n)t}b_n(t)|^2} \\ &= 2\gamma_0\int_0^\infty dt\,\overline{|\langle\,0\,0|\psi_+\,\rangle e^{(-i\frac{E_0}{\hbar}-\gamma_+)t}b_+(t) + \langle\,0\,0|\psi_-\,\rangle e^{(-i\frac{E_0}{\hbar}-\gamma_-)t}b_-(t)|^2} \\ &= 2\gamma_0\int_0^\infty dt\,\frac{1}{1+|\varepsilon|^2}\,\overline{\Big\{|\varepsilon|^2e^{-2\gamma_+t}|b_+(t)|^2 + e^{-2\gamma_-t}|b_-(t)|^2 + \varepsilon\,e^{i\frac{(E_+-E_-)}{\hbar}t}e^{-(\gamma_++\gamma_-)t}b_+^*(t)b_-(t) + \text{c.c}\Big\}} \\ &= \frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\int_0^\infty dt\big\{|\varepsilon|^2e^{-2\gamma_+t}\overline{|b_+(t)|^2} + e^{-2\gamma_-t}\overline{|b_-(t)|^2}\big\} \end{aligned} \tag{1.66}$$

(1.65) を代入して

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\int_0^\infty dt\big\{|\varepsilon|^2e^{-2\gamma_+t}p_+ + e^{-2\gamma_-t}p_-\big\} \\ &= \frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\int_0^\infty dt\Big\{p_+\frac{|\varepsilon|^2}{2\gamma_+} + p_-\frac{1}{2\gamma_-}\Big\} \end{aligned} \tag{1.67}$$

となる。

**C.** 振動磁場が存在するとき

静磁場に加え、振動磁場が存在するときには、前節で見たように (1.65) における $b_n(t)$ が、

$$\begin{aligned} b_-(t) &= \sqrt{p_-}\,e^{i\Delta_-} \\ b_+(t) &= c_+e^{\delta_+t} + c_-e^{\delta_-t} \\ &= \frac{1}{\delta_+-\delta_-}\Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^*v\sqrt{p_{1\,1}}\,(-e^{\delta_+t}+e^{\delta_-t}) + \sqrt{p_+}\,e^{i\Delta_+}(-\delta_-e^{\delta_+t}+\delta_+e^{\delta_-t})\Big\} \end{aligned} \tag{1.68}$$

となる。これを (1.66) に代入する。

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\int_0^\infty dt\Big[e^{-2\gamma_+ t}\frac{|\varepsilon|^2}{|\delta_+-\delta_-|^2}\Big\{\frac{1}{4}|\varepsilon|^2v^2p_{1\,1}\,|-e^{\delta_+ t}+e^{\delta_- t}|^2 \\ &\qquad\qquad +p_+\,|-\delta_-e^{\delta_+ t}+\delta_+e^{\delta_- t}|^2\Big\}+p_-e^{-2\gamma_- t}\Big] \\ &= p_{1\,1}\frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\frac{1}{|\delta_+-\delta_-|^2}\frac{|\varepsilon|^4v^2}{4}\int_0^\infty dt\,e^{-2\gamma_+ t}|e^{\delta_+ t}-e^{\delta_- t}|^2 \\ &\quad +p_+\frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\frac{1}{|\delta_+-\delta_-|^2}|\varepsilon|^2\int_0^\infty dt\,e^{-2\gamma_+ t}|\delta_-e^{\delta_+ t}-\delta_+e^{\delta_- t}|^2+p_-\frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\frac{1}{2\gamma_-} \qquad (1.69)\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty dt\,e^{-2\gamma_+ t}|e^{\delta_+ t}-e^{\delta_- t}|^2 \\ &\qquad=\int_0^\infty dt\,e^{-2\gamma_+ t}\big\{e^{(\delta_++\delta_+^*)t}+e^{(\delta_-+\delta_-^*)t}-e^{(\delta_++\delta_-^*)t}-e^{(\delta_+^*+\delta_-)t}\big\} \\ &\qquad=\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_+^*)}+\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_-+\delta_-^*)}-\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_-^*)}-\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_+^*+\delta_-)} \\ &\int_0^\infty dt\,e^{-2\gamma_- t}|\delta_-e^{\delta_+ t}-\delta_+e^{\delta_- t}|^2 \\ &\qquad=\frac{|\delta_-|^2}{2\gamma_--(\delta_++\delta_+^*)}+\frac{|\delta_+|^2}{2\gamma_--(\delta_-+\delta_-^*)}-\frac{\delta_+^*\delta_-}{2\gamma_--(\delta_++\delta_-^*)}-\frac{\delta_+\delta_-^*}{2\gamma_--(\delta_+^*+\delta_-)} \qquad (1.70)\end{aligned}$$

であるから、$\overline{P}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\overline{P} &= p_{1\,1}\,\frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\frac{1}{|\delta_+-\delta_-|^2}\frac{|\varepsilon|^4v^2}{4}\Big\{\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_+^*)}+\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_-+\delta_-^*)}-\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_-^*)}-\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_+^*+\delta_-)}\Big\} \\ &\quad+p_+\frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\frac{1}{|\delta_+-\delta_-|^2}|\varepsilon|^2\Big\{\frac{|\delta_-|^2}{2\gamma_--(\delta_++\delta_+^*)}+\frac{|\delta_+|^2}{2\gamma_--(\delta_-+\delta_-^*)}-\frac{\delta_+^*\delta_-}{2\gamma_--(\delta_++\delta_-^*)}-\frac{\delta_+\delta_-^*}{2\gamma_--(\delta_+^*+\delta_-)}\Big\} \\ &\quad+p_-\frac{2\gamma_0}{1+|\varepsilon|^2}\frac{1}{2\gamma_-} \qquad (1.71)\end{aligned}$$

## 1.6 The Resonant Line Shape

振動磁場の有無による $2\gamma$ 崩壊数の変化を $P_T$ と書くと $P_T$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}P_T &= \overline{P}_{B_1\neq0}-\overline{P}_{B_1=0} \\ &= \frac{|\varepsilon|^2}{1+|\varepsilon|^2}\frac{2\gamma_0}{|\delta_+-\delta_-|^2}\Big[p_{1\,1}\frac{|\varepsilon|^2v^2}{4}\Big\{\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_+^*)}+\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_-+\delta_-^*)}-\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_-^*)}-\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_+^*+\delta_-)}\Big\} \\ &\quad+p_+\Big\{\frac{|\delta_-|^2}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_+^*)}+\frac{|\delta_+|^2}{2\gamma_+-(\delta_-+\delta_-^*)}-\frac{\delta_+^*\delta_-}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_-^*)}-\frac{\delta_+\delta_-^*}{2\gamma_+-(\delta_+^*+\delta_-)}-\frac{|\delta_+-\delta_-|^2}{2\gamma_+}\Big\}\Big] \qquad (1.72)\end{aligned}$$

ここでまず、

$$\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_+^*)}+\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_-+\delta_-^*)}-\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_++\delta_-^*)}-\frac{1}{2\gamma_+-(\delta_+^*+\delta_-)}\equiv A \qquad (1.73)$$

の部分について考える。$\delta_\pm=\frac{1}{2}\big\{(-i\omega'+\gamma'')\pm\sqrt{(-i\omega'+\gamma'')^2-|\varepsilon|^2v^2}\big\}$ の根号の中に注目し、

$$(-i\omega'+\gamma'')^2-|\varepsilon|^2v^2=-\omega'^2+\gamma''^2-|\varepsilon|^2v^2-2i\omega'\gamma''\equiv r^2e^{2i\theta}\qquad(r>0) \qquad (1.74)$$

とおく。即ち、

$$r^2\cos 2\theta = -\omega'^2 + \gamma''^2 - |\varepsilon|^2 v^2$$
$$r^2\sin 2\theta = -2\omega'\gamma'' \tag{1.75}$$

である。すると $\delta_\pm$ は

$$\delta_\pm = \frac{1}{2}\{(-i\omega' + \gamma'') \pm re^{i\theta}\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(\gamma'' \pm r\cos\theta) - i(\omega' \mp r\sin\theta)\} \tag{1.76}$$

と書ける。よって

$$\delta_\pm + \delta_\pm^* = 2\,\mathrm{Re}\,\delta_\pm = \gamma'' \pm r\cos\theta$$
$$\delta_+ + \delta_-^* = \gamma'' + \frac{1}{2}(re^{i\theta} - re^{-i\theta}) = \gamma'' \pm ir\sin\theta \tag{1.77}$$

であるので、$A$ は

$$A = \frac{1}{\gamma_+ + \gamma_1 - r\cos\theta} + \frac{1}{\gamma_+ + \gamma_1 + r\cos\theta} - \frac{1}{\gamma_+ + \gamma_1 - ir\sin\theta} - \frac{1}{\gamma_+ + \gamma_1 + ir\sin\theta}$$
$$= \frac{2(\gamma_+ + \gamma_1)}{(\gamma_+ + \gamma_1)^2 - r^2\cos^2\theta} - \frac{2(\gamma_+ + \gamma_1)}{(\gamma_+ + \gamma_1)^2 + r^2\sin^2\theta}$$

簡単のため $\gamma \equiv \gamma_+ + \gamma_1$ とおくと

$$= \frac{2\gamma r^2}{\gamma^4 - \gamma^2(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) - r^4\cos^2\sin^2}$$
$$= \frac{2\gamma r^2}{\gamma^4 - \gamma^2 r^2\cos 2\theta - \frac{1}{4}r^4\sin^2 2\theta}$$
$$= \frac{2\gamma r^2}{\gamma^4 - \gamma^2(-\omega'^2 + \gamma''^2 - |\varepsilon|^2 v^2) - \omega'^2\gamma''^2}$$
$$= \frac{2\gamma r^2}{\omega'^2(\gamma^2 - \gamma''^2) + \gamma^2(\gamma^2 - \gamma''^2 + |\varepsilon|^2 v^2)}$$

ここで $\gamma^2 - \gamma''^2 = (\gamma_+ + \gamma_1)^2 - (\gamma_+ - \gamma_1)^2 = 4\gamma_+\gamma_1$ であるから

$$= \frac{2\gamma r^2}{\omega'^2 \cdot 4\gamma_+\gamma_1 + \gamma^2(4\gamma_+\gamma_1 + |\varepsilon|^2 v^2)} \tag{1.78}$$

となる。次に、

$$\frac{|\delta_-|^2}{2\gamma_+ - (\delta_+ + \delta_+^*)} + \frac{|\delta_+|^2}{2\gamma_+ - (\delta_- + \delta_-^*)} - \frac{\delta_+^*\delta_-}{2\gamma_+ - (\delta_+ + \delta_-^*)} - \frac{\delta_+\delta_-^*}{2\gamma_+ - (\delta_+^* + \delta_-)} - \frac{|\delta_+ - \delta_-|^2}{2\gamma_+} \equiv A_+ \tag{1.79}$$

について考える。

$$|\delta_\pm|^2 = \frac{1}{4}\{(\gamma'' \pm r\cos\theta)^2 + (-\omega' \pm r\cos\theta)^2\}$$
$$= \frac{1}{4}\{(\gamma''^2 + \omega'^2 + r^2) \pm 2(\gamma' r\cos\theta - \omega' r\sin\theta)\}$$
$$\delta_+^*\delta_- = \frac{1}{2}\{(i\omega' + \gamma'') + re^{-i\theta}\} \cdot \frac{1}{2}\{(-i\omega' + \gamma'') - re^{i\theta}\}$$
$$= \frac{1}{4}\{(\gamma''^2 + \omega'^2 - r^2) - 2i(\omega' r\cos\theta + \gamma''\sin\theta)\} \tag{1.80}$$

これより、

$$\begin{aligned}
&\frac{|\delta_-|^2}{2\gamma_+ - (\delta_+ + \delta_+^*)} + \frac{|\delta_+|^2}{2\gamma_+ - (\delta_- + \delta_-^*)} \\
&\qquad = \frac{|\delta_-|^2}{\gamma - r\cos\theta} + \frac{|\delta_+|^2}{\gamma + r\cos\theta} \\
&\qquad = \frac{1}{\gamma^2 - r^2\cos^2\theta}\Big\{\frac{1}{2}(\gamma''^2 + \omega'^2 + r^2)\gamma + (-\gamma'' r^2\cos^2\theta + \omega' r^2\sin\theta\cos\theta)\Big\} \\
&\frac{\delta_+^*\delta_-}{2\gamma_+ - (\delta_+ + \delta_-^*)} + \frac{\delta_+\delta_-^*}{2\gamma_+ - (\delta_+^* + \delta_-)} \\
&\qquad = \frac{\delta_+^*\delta_-}{\gamma - ir\sin\theta} + \frac{\delta_+\delta_-^*}{\gamma + ir\sin\theta} \\
&\qquad = \frac{1}{\gamma^2 + r^2\sin^2\theta}\Big\{\frac{1}{2}(\gamma''^2 + \omega'^2 - r^2)\gamma + (\omega' r^2\cos\theta\sin\theta + \gamma'' r^2\sin^2\theta)\Big\} \qquad (1.81)
\end{aligned}$$

である。また

$$|\delta_+ - \delta_-|^2 = |re^{i\theta}|^2 = r^2 \qquad (1.82)$$

であるので、(1.78) と合わせて、$A_+$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
A_+ &= \frac{A}{2\gamma r^2}\Big[\Big\{\frac{1}{2}(\gamma''^2 + \omega'^2 + r^2)\gamma + (-\gamma'' r^2\cos^2\theta + \omega' r^2\sin\theta\cos\theta)\Big\}(\gamma^2 + r^2\sin^2\theta) \\
&\qquad - \Big\{\frac{1}{2}(\gamma''^2 + \omega'^2 - r^2)\gamma + (\omega' r^2\cos\theta\sin\theta + \gamma'' r^2\sin^2\theta)\Big\}(\gamma^2 - r^2\cos^2\theta)\Big] - \frac{r^2}{2\gamma_+} \\
&= \frac{A}{2\gamma r^2}\Big\{(r^2\gamma^3 - r^2\gamma^2\gamma'' r^2 + \frac{1}{2}(\gamma''^2 + \omega'^2)\gamma r^2 - \frac{1}{2}r^2\gamma r^2\cos 2\theta) + \omega' r^4\cos\theta\sin\theta\Big\} - \frac{r^2}{2\gamma_+} \\
&= \frac{A}{2\gamma r^2} r^2\Big\{\gamma''^2(\gamma - \gamma'') + \frac{1}{2}(\gamma''^2 + \omega'^2)\gamma - \frac{1}{2}\gamma r^2\cos 2\theta) + \frac{1}{2}\omega' r^2\sin 2\theta - \frac{1}{2\gamma_+}\frac{2\gamma r^2}{A}\Big\} \\
&= \frac{A}{2\gamma r^2}\frac{r^2}{2\gamma_+}\Big[2\gamma_+\Big\{\gamma''^2(\gamma - \gamma'') + \frac{1}{2}(\gamma''^2 + \omega'^2)\gamma - \frac{1}{2}\gamma(-\omega'^2 + \gamma''^2 - |\varepsilon|^2 v^2) + \frac{1}{2}\omega'(-2\omega'\gamma'')\Big\} \\
&\qquad - \big\{\omega'^2\cdot 4\gamma_+\gamma_1 + \gamma^2(4\gamma_+\gamma_1 + |\varepsilon|^2 v^2)\big\}\Big] \\
&= \frac{A}{2\gamma r^2}\frac{r^2}{2\gamma_+}\Big[\omega'^2\big\{2\gamma_+(\gamma - \gamma'') - 4\gamma_+\gamma_1\big\} + |\varepsilon|^2 v^2(\gamma_+\gamma - \gamma^2) + 4\gamma_+\gamma_1\gamma^2 - \gamma^2\cdot 4\gamma_+\gamma_1\Big] \\
&= \frac{A}{2\gamma r^2}\frac{r^2}{2\gamma_+}|\varepsilon|^2 v^2\cdot 2\gamma_1\gamma \qquad (1.83)
\end{aligned}$$

これより、$P_T$ は、

$$\begin{aligned}
P_T &= \frac{|\varepsilon|^2}{1 + |\varepsilon|^2}\cdot\frac{2\gamma_0}{r^2}\cdot\frac{1}{\omega'^2\cdot 4\gamma_+\gamma_1 + \gamma^2(4\gamma_+\gamma_1 + |\varepsilon|^2 v^2)}\cdot\frac{1}{2\gamma_+}\Big\{p_{1\,1}|\varepsilon|^2 v^2 r^2\gamma\gamma_+ + p_+ r^2|\varepsilon|^2 v^2\cdot 2\gamma_1\gamma\Big\} \\
&= \frac{|\varepsilon|^2}{1 + |\varepsilon|^2}\cdot\frac{1}{\omega'^2\cdot 4\gamma_+\gamma_1 + \gamma^2(4\gamma_+\gamma_1 + |\varepsilon|^2 v^2)}\cdot\frac{\gamma_0}{2\gamma_+}|\varepsilon|^2 v^2\gamma\Big\{p_{1\,1}\gamma_+ + p_+\cdot 2\gamma_1\Big\} \\
&= \frac{|\varepsilon|^2}{1 + |\varepsilon|^2}\cdot\frac{\gamma\gamma_0}{\omega'^2 + \gamma^2(1 + \frac{|\varepsilon|^2 v^2}{4\gamma_+\gamma_1})}\frac{|\varepsilon|^2 v^2}{4\gamma_+\gamma_1}(p_{1\,1} + \frac{2\gamma_1}{\gamma_+}p_+) \qquad (1.84)
\end{aligned}$$

と書けることが分かる。

以上のまとめとして、パラメータの定義を再掲しておく。

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{x}\Big\{ -1 - i\kappa + \sqrt{(1+i\kappa)^2 + x^2}\Big\}\ ,\ x = \frac{2g'\mu_B B_0}{\hbar\omega_0}\ ,\ \kappa = \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\omega_0} \\
\omega' &= \omega - \omega_+ \qquad\qquad \varepsilon_1 = \mathrm{Re}\,\varepsilon \\
\omega_+ &= \frac{1}{2}\varepsilon_1 x\omega_0 \qquad\qquad \varepsilon_2 = -\mathrm{Im}\,\varepsilon \\
\gamma_+ &= \gamma_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 x\omega_0 \\
\gamma &= \gamma_+ + \gamma_1 \\
v &= \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}\frac{g'\mu_B B_1}{\hbar}
\end{aligned}
\tag{1.85}
$$

さて、実際の実験では、振動磁場の振動数 $\omega$ をパラメータとして変化させるよりも、静磁場 $B_0$ を変化させる方が簡単なので、$\omega$ を

$$
\omega = 2\pi\cdot 1280\times 10^6\ [\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}] \tag{1.86}
$$

に固定し、$B_0$ を動かすことになる。実験での振動磁場の値 $B_1 \sim 4\,[\mathrm{Gauss}]$ を $P_T$ に代入し、$p_{1\,1} = p_+ = \dfrac{1}{4}$ と仮定して、横軸を磁場 (Gauss) に、縦軸を $P_T$ に取ってグラフを描いてみると、図 (1.3) のようになる。

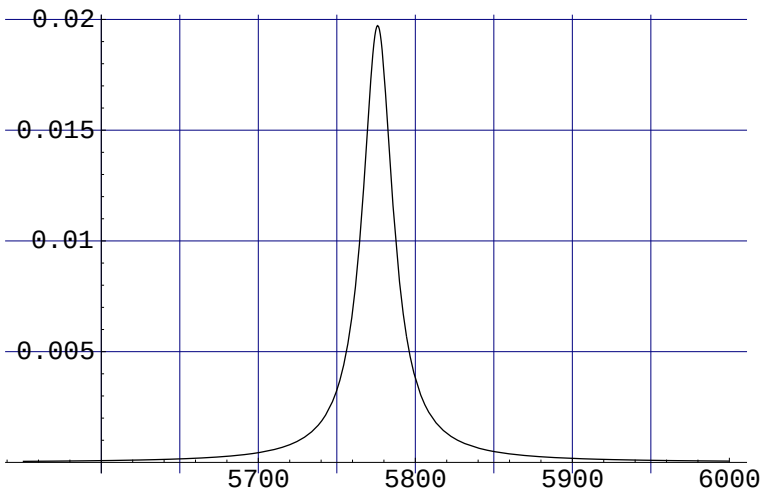



Fig. 1.3: Resonance Line

$P_T$ は 厳密には Lorentzian ではないが、$\omega_+$ 以外の部分の磁場依存性が小さいために、Lorentzian に似た図になっており、図 (1.3) での Peak の磁場は、ほぼ共鳴条件 $\omega = \omega_+$ となる値である。つまり、図 (1.3) より、Ps の $2\gamma$ 崩壊数は共鳴点において、2% 程度増加することがわかる。実験では、$2\gamma$ の崩壊数を測定し、それと $P_T$ を比較して、共鳴点の磁場の値から、$\omega_0 (= 2\pi\Delta\nu)$ を求める。共鳴磁場の理論値は、(1.85),(1.86) より

$$
B_{0r} = 5776.0\ [\mathrm{Gauss}] \tag{1.87}
$$

となる。[2]

[2]過去の論文ではここからさらに近似を用いて計算を進めているが、かなり疑問が残るものであったので、我々は手計算での近似は用いず、計算機を使って共鳴磁場を求めた。その近似については Appendix C 参照

# Chapter 2

# APPARATUS

## 2.1 Schema of Set Up

図 (2.1) は、静磁場とそれに直行する振動磁場中での Ps の $2\gamma$ 崩壊を捕らえるための大まかなセットアッ

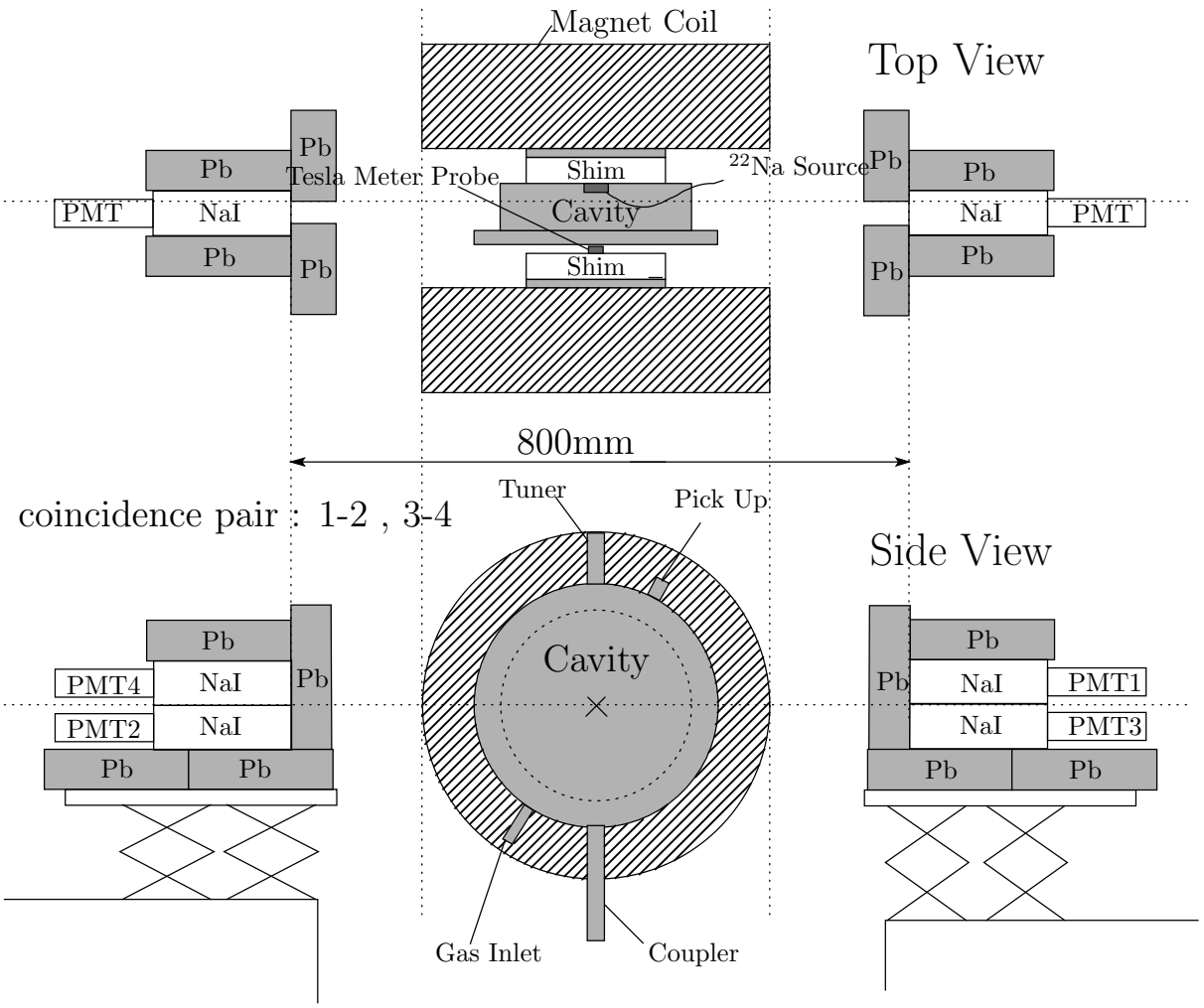



Fig. 2.1: Set up

プである。以下で、それぞれの装置等について説明する。

## 2.2 Magnetic Field

### 2.2.1 Electromagnet and Shim

実験では、静磁場は約 6000 gauss 必要である。しかも、できるだけ同じ磁場の場所で崩壊する Ps を捕らえたいので、崩壊する空間全体で一様な静磁場が求められる。共鳴曲線の半値幅が、図 (1.3) より 25 gauss 程度であることを考えると、磁場は、Ps の崩壊領域中で、少なくとも ±5 gauss 程度の範囲で収まっている必要がある。そのため我々は、元々使用できる電磁石のコイル間に Shim と呼ばれる磁束を集めるための鉄を付けて磁場の一様化を図ることにした。目的に沿った Shim の形状を決定する際には、磁場解析ソフト Poisson を用いた。結果的には、一様な磁場を得るためには Shim の表面が 平面ではなく、球面となる方が良いことが分

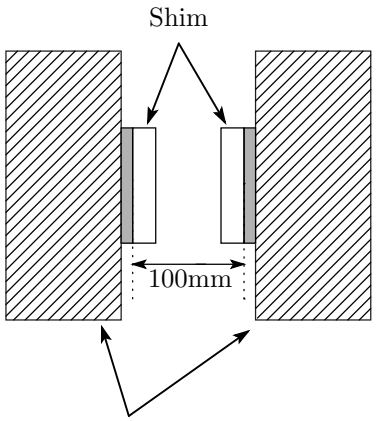


Fig. 2.2: Side View of Magnet System

かった。しかし、鉄を滑らかな球面に加工することは技術的に難しかったため、球面にできるだけ近くなるよう、Shim に段差を付けることにした。ただし、この球面の半径は Shim に比べて大きく、段差は小さいものとなる。図 (2.3) は、その様に設計し、実験で用いた Shim の図である。ただし、段差は強調するために大きくデフォルメされている。図 (2.4) は、この Shim を電磁石に取り付けた状態で適当な電流を流し、中心磁場を 5790 gauss にしたときの Poisson の解析結果である。2 つの coil の中心の、ちょうど真ん中を原点に円柱座標を取り、2 つの中心を貫く方向を z 軸に、coil の半径方向を r 軸に取っている。r 軸にマイナス方向の座標値があるのは、磁場が角度方向で一様でない場合に対応するためである。これを見ると、原点付近では十分な一様性が実現されていることが分かる。しかし、中心からある程度離れると、急激に磁場の値が変化する。このため、最終的に我々は磁場の最大値と最小値の差を 20 gauss 程度と見積もっている。これは、目標の ±5 gauss には達しておらず、磁場の systematic error は解析の際にも dominant になったが、致命的なものではなかった。我々はこの原点付近で Ps を作り、崩壊させる。

ちなみに、この Magnet に電流を流す電源 (菊水 PAD35-50L) は、35 V - 50 A のもので、電流を最大で 51.8 A 流したときに、磁場は 6512.65 gauss になる。これは実験に必要な磁場に十分達している。

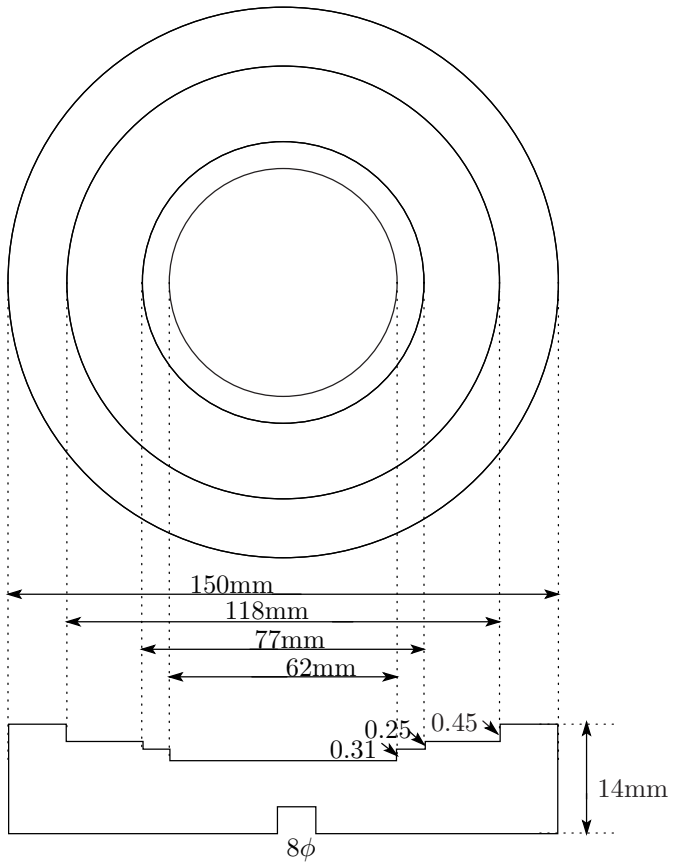



Fig. 2.3: Shim

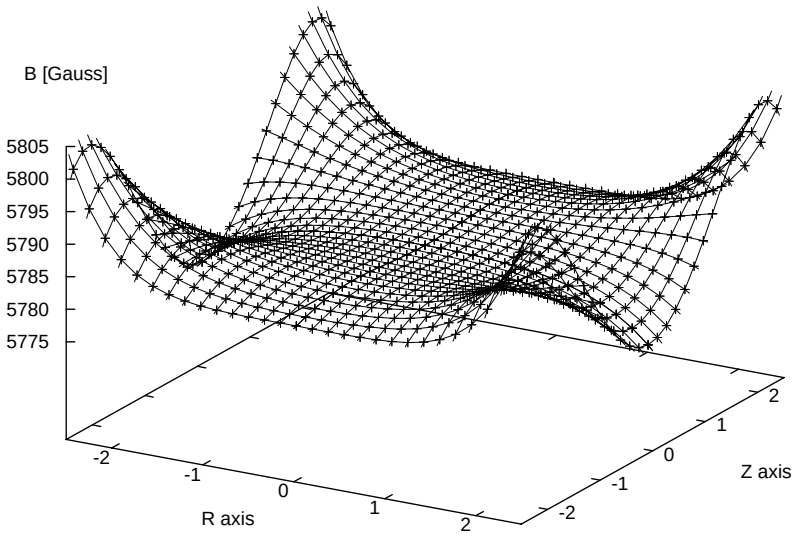



Fig. 2.4: Z and R dependence of Magnet Field

### 2.2.2 Measurement of Magnetic Field

図 (2.1) の様に、測定中は Magnet Coil の間に Cavity が入っており、直接 Ps の崩壊領域の磁場を測定することができないので、Coil 間の中心から離れた Shim の表面に、Tesla Meter(Group3 DTM-151) の Probe を張り付け、これで磁場を測定する。ただし、Cavity を入れる前に、中心磁場を NMR 磁場測定器 (エコー電子

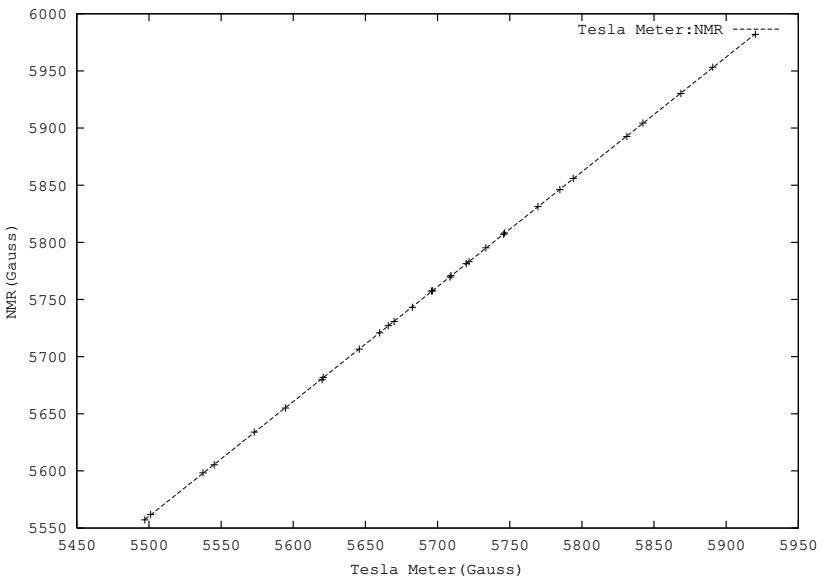



Fig. 2.5: Caribration of Magnetic Field

EFM-3000AX) で同時に測定し、Tesla Meter で測定した磁場と caribration することで、実際にかかっている中心の磁場を知ることができる。図 (2.5) を見ると、 2 つの磁場の関係は、ほぼ正確に linear であることが分かる。また、図 (2.6) は静磁場を 5775 Gauss に設定したときの、磁場の時間安定性を測ったグラフである。1

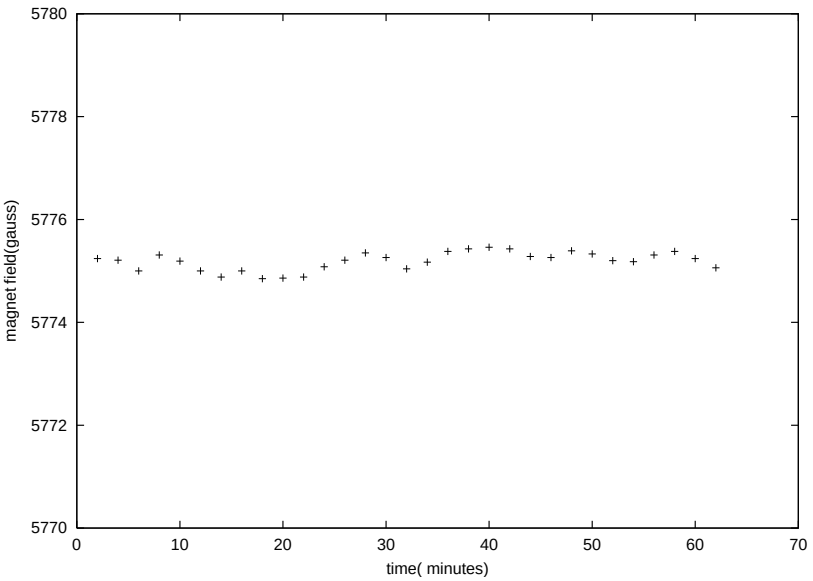



Fig. 2.6: Stability

回の連続な測定に費した時間は、最大で 1 時間であるが、これを見ると、磁場の値は、測定中において必要な精度の範囲で安定であることが分かる。

## 2.3 Microwave System

我々は、実験に必要な振動磁場を Microwave によって得た。図 (2.7) は Microwave を Cavity に入れて共

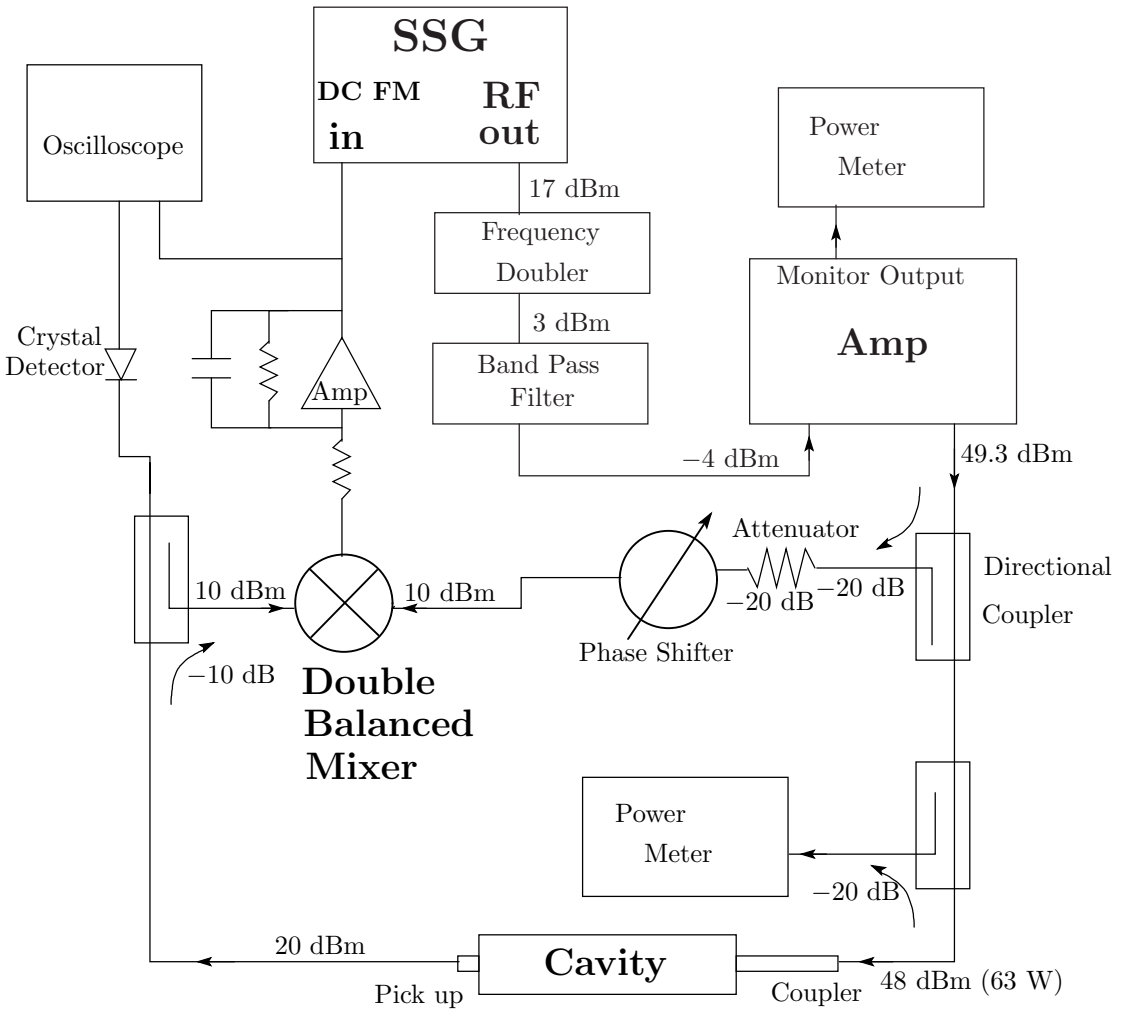



Fig. 2.7: Microwave System

鳴させ、その状態をモニターするためのシステムである。各部での Microwave の Power もここに書かれている。以下で、この図について Microwave 出力の流れに沿って説明する。

### 2.3.1 SSG , FD, BPF

Microwave は、まず Standard Signal Generator (SSG: Anritsu MG645B) より発振される。発信周波数は、ほぼ 1 KHz 単位で調整が可能である。ここで発振できる周波数は最大 1000 MHz であるので、SSG で発振する Microwave の周波数は 640 MHz にしておき、Frequency Doubler(FD) で周波数を 2 倍にする。しかし、FD は、2 倍波の他に 3 倍波、4 倍波等も作ってしまう上、これを透過する基本波も存在する。Band Pass Filter(BPF) はこれらをカットするため使用する。

SSG からの出力は、ほぼ最大で利用し、これが 17 dBm(50 mW) である。Microwave が FD、 BPF やこれらをつなく同軸ケーブルを通ることで、Power は、図のように減衰する。

また SSG には、直流電圧の入力による Frequency Modulation(FM) 機能があり、Cavity の温度変化による共振周波数の微妙な変化を Feed Back して対応するため利用したが、これについては後に説明する。

### 2.3.2 Amp, Power Meter, Directional Coupler

BPM からの 1280 MHz の Microwave を Amp(NEC HPB-2403) に入れて増幅する。Microwave の Power が大きい方が、振動磁場の値も大きくなり、共鳴の Peak も見えやすくなるので、Amp の出力は最大で用いる。この Amp は、仕様書によるとパルス発振で最大 500 W の出力が可能であるが、我々は Continuous Wave で用いたので、最大出力は 49.3 dBm(87 W) であった。また、この Amp には Output モニター用の端子がついている。ここからの出力は、実際の出力の $-40.7$ dB である。ここに Power Meter(HP 8900C) つないで出力を常にモニターした。Ps の $3\gamma$ から $2\gamma$ への遷移確率は振動磁場の 2 乗、つまり Microwave の Power に比例するが、出力の安定性として 5 % 程度のシステム誤差を仮定したとしても、$2\gamma$ 崩壊数の 2 % の遷移における 5 % の変化は、我々の求める精度としてはほとんど問題ない。データはないが、モニター出力はこの意味で十分安定であった。

Amp からの出力は、そのまま Cavity に入れるのではなく、ここから Feed Back システムに必要なわずかな Power を Directional Coupler で分ける。Derectional Coupler は、図 (2.7) の矢印方向に $-20$ dB で couple している。逆方向からの coupling は $-43$ dB である。

また、Cavity で上手く Microwave が共鳴しない場合、大きな反射が生じる恐れがある。その状態が長時間続き、Amp に大きな Power が入ると Amp を壊してしまう恐れがあるので、もう一つ Directional Coupler を用いて、これを Power Meter(HP E4418B) につなぎ、Cavity からの反射をモニターした。通常の良い共鳴状態では、Cavity への入力 63 W のとき、反射は 5 mW 以下に抑えられる。このため、反射としてこの Power Meter へはいる Power は、Amp から Directional Coupler を逆方向に通過して入ってくる Power よりも小さくなる。よって、Cavity からの反射の正確な値は分からないが、常に十分小さいことを確認しながら実験を行った。

### 2.3.3 Cavity

Microwave を共鳴させる Cavity は、去年の課題研究 P2 で製作されたもので、これの共振周波数が 1280 MHz であり、先に説明した静磁場の値はここから決まった。Cavity の材質はアルミで、5$\mu$m の銅メッキがされている。側面の厚みは 10 mm で、内部の領域は直径が 142.8 mm 、高さが 42 mm の円筒形である。

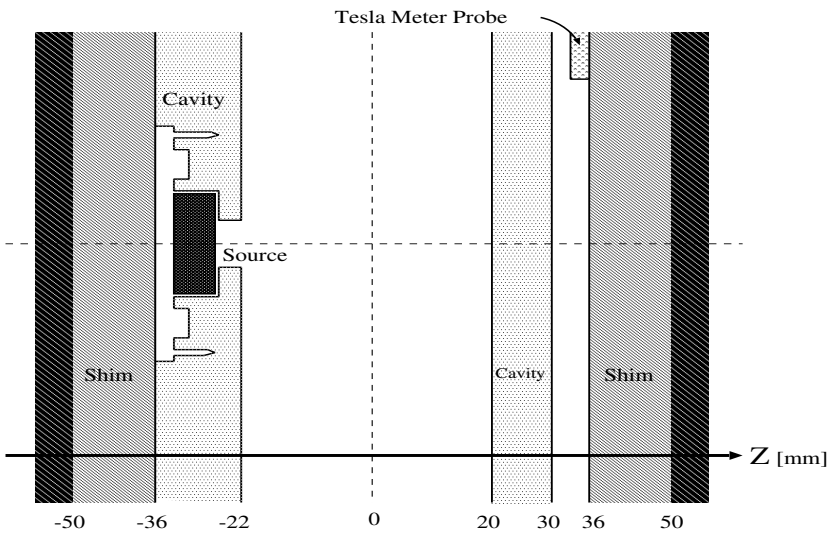



Fig. 2.8: Gap between Shims

図 (2.8) のように、Cavity の底の中心部には $^{22}$Na の Positron Source が、外側から入るようになっている。

ここから出てきた Positron が Cavity 中の気体でエネルギーを失い、electron の Coulomb ポテンシャルにつかまって束縛状態を作り Ps が生成される。つまり、Ps は崩壊時にほとんど boost していないので、$2\gamma$ 崩壊の $\gamma$ は、Cavity の中心からほぼ back-to-back に出てくることになる。

### 2.3.4 Microwave in Cavity

**Electromagnetic Field in Cavity**

Cavity には Microwave を中に入れるための Coupling が側面に差し込まれている。Coupling は同軸の先がループになっており、Cavity と磁場 coupling している。Cavity 中の Microwave は $\mathrm{TM}_{110}$ mode を用いる。円筒型 Cavity の空洞の中心を原点として $(\rho, \phi, z)$ の円筒座標を取ると、この mode は、磁場が $z$ 方向 (静磁場の方向) に対して垂直の成分しか持たず、磁場の大きさは $z$ に依存しない。これは、静磁場とそれに直行する振動磁場という実験の条件を満たしている。このときの Cavity 内の電磁場は、円筒座標において周囲が導体という境界条件で Laplace eq. を解いたときに得られる Bessel 関数で表される。具体的には、Microwave による電場と磁場はそれぞれ

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 J_1(\gamma_{11}\,\rho)\cos\phi\cos\omega t\hat{z} \\ \vec{H} &= \frac{E_0}{\mu\omega}\left\{\hat{\rho}\frac{J_1(\gamma_{11}\,\rho)}{\rho}\sin\phi + \hat{\phi}\gamma_{11}J_1'(\gamma_{11}\,\rho)\cos\phi\right\}\sin\omega t\end{aligned} \tag{2.1}$$

と書ける。ここで $\gamma_{11}, x_{11}$ は、

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &\equiv \frac{x_{11}}{R} \\ J_1(x_{11}) &= 0\end{aligned} \tag{2.2}$$

で定義される量である。また $R$ は共鳴空洞の半径である。[1]

**Q value**

Cavity 内部にたまった microwave の power を $W$、角周波数を $\omega$、壁によって消費される power を $P_u$ すると、これに対して、unloaded $Q_u$

$$Q_u = \frac{\omega W}{P_u} \tag{2.3}$$

という量がある。また、外部からの coupling による損失 power $P_c$ に対しては coupling $Q_c$

$$Q_c = \frac{\omega W}{P_c} \tag{2.4}$$

がある。一方、測定で得られる $Q$ は

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_u} + \frac{1}{Q_c} \tag{2.5}$$

で与えられる $Q$ である。一般に $Q$ 値は共振空洞の共鳴の良さを表す。

unloaded $Q_u$ は、理論によって求めることができ、それは次の式で与えられる。

$$Q_u = \frac{1}{1+\frac{d}{R}}\frac{d}{\delta} \tag{2.6}$$

ここで $\delta$ は skin depth であり、これは microwave が壁にしみこむ深さを表す。$d$ は円筒の高さである。1280 MHz における銅の skin depth $\delta$ は

$$\delta = 1.847\times10^{-6}\,\mathrm{m} \tag{2.7}$$

[1] $\mathrm{TM}_{110}$ mode や、$Q$ 値を求める式の導出等の詳しい説明は [6] 参照

であり、これよりこの Cavity の unloaded $Q_u$ の理論値は $1.9 \times 10^4$ となる。

また、 $Q$ は Cavity に microwave を入れてその反射の大きさを測定して求めた。Cavity の共振周波数 を $\omega_0$ とすると、microwave の周波数 $\omega$ に対する 振幅反射率 $r$ は

$$r = \left\{ \frac{\frac{\omega_0}{Q_c}}{(\omega - \omega_0) - i\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)} \right\} - i \tag{2.8}$$

で与えられる。ここで

$$\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0 \tag{2.9}$$

とおくと、power の反射率 $R = |r|^2 = r^* \cdot r$ は、

$$\begin{aligned} R =& \frac{\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{2Q} - \frac{1}{Q_c}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \\ =& \frac{\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left\{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - \left(\frac{1}{Q_c}\right)^2\right\}}{\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q_u} + \frac{1}{Q_c}\right)^2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

である。これより、$\Delta\omega = 0$ のときの電力反射率を $R_0$ とすると

$$R_0 = \left\{ \frac{\left(\frac{1}{Q_u}\right) - \left(\frac{1}{Q_c}\right)}{\left(\frac{1}{Q_u}\right) + \left(\frac{1}{Q_c}\right)} \right\}^2 \tag{2.11}$$

となる。$Q_u = Q_c$ の時の coupling を臨界結合とよび、(2.11) よりこのとき反射がなくなる。また、$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$ の時の反射 R は完全反射 $R = 1$ と $\omega = \omega_0$ の時の反射 $R_0$ との半分の $\frac{1+R_0}{2}$ となるので、SSG の発振周波数を動かして、反射波の power が $\frac{1+R_0}{2}$ になるときの $\Delta\omega$ を調べれば $Q$ 値が求まる。測定した結果、Cavity の共振周波数 1280 MHz に対して、反射が入力の半分になる全幅は、0.3310 MHz であった。よって $Q$ は

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{1280}{0.3310} \simeq 3867 \tag{2.12}$$

となる。去年の時点 [8] で測定された $Q$ が 6000 程度であったことを考えると、やや $Q$ が悪くなっていることがわかる。

### Oscillating Magnetic Field

臨界結合している Cavity が平衡状態に達すると、壁による損失 $P_u$ は入射 power と等しくなり、この実験においては $P_c = P_u = 63\,W$ となる。(2.3), (2.4), (2.5) と測定した $Q$ の値から、Cavity 内にたまっている microwave の power は $1.24 \times 10^{-5} W$ となる。これと (2.1) の電磁場を比較すると、中心での振動磁場の大きさ $B_1$ は

$$B_1 \sim 4 \times 10^{-4}\mathrm{T} \tag{2.13}$$

となる。ただし、実際の振動磁場は測定することができないので、この $B_1$ は、解析においては free parameter として扱っている。

### Pick up

Cavity 内には Pick up と呼ばれる Microwave の電場を少し拾うための小さなアンテナがある。ここからの出力は、次に説明する Feed back System に用いる他、Cavity で共鳴が保たれていることを確認するため、図 (2.7) の様に Crystal Detector で直流にして Oscilloscope でその電圧を見ている。

### 2.3.5 Feed Back System using DBM

DBM は、2 つの入力の積を出力するモジュールであり、これを用いて、温度変化による Cavity の共鳴周波数の微妙な変化を Feed back して共鳴を維持するシステムを作った。

図 (2.1) の様に、Cavity に入れる前の Microwave を少し取ってきて、これと、pick up でひろった Microwave との積を取る。このとき、Phase Shifter(実際には可変長同軸管) をうまく調整すると、Cavity に入れる前の Microwave を $\cos\omega t$ (振幅は 1 とする) としたときに、Cavity の pick up からの DBM への入力を $A\sin(\omega t+\phi)$ とすることができる。ここで、$A$ は Cavity 内の Microwave の power に比例する量である。Cavity 内の power

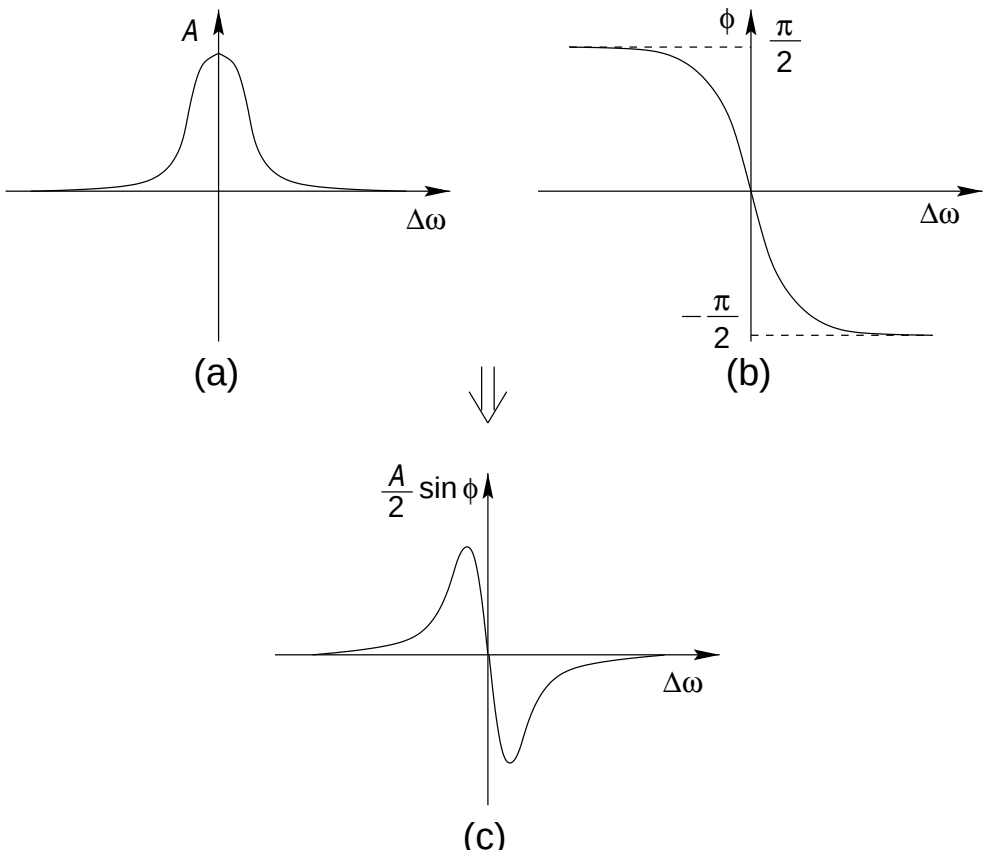



Fig. 2.9:

は、Microwave の共鳴周波数からのずれを $\Delta\omega$ としてこれを横軸に取ると、図 (2.9) の (a) の様に Lorentzian になる。また、$\phi$ 共鳴状態からの位相のずれである。Cavity を LCR 共振回路との類推で考えると、$\Delta\omega$ を横軸に取ったときの $\phi$ は、図 (2.9) の (b) の様になる。

DBM は 2 つの入力の積を取るので、その出力は

$$A\sin(\omega t+\phi)\cos\omega t = \frac{A}{2}\Big\{\sin(2\omega t+\phi)+\sin\phi\Big\} \tag{2.14}$$

となる。このうち $\sin(2\omega t+\phi)$ という 2 倍の周波数の成分を filter してやると、$\dfrac{A}{2}\sin\phi$ という直流の出力が得られる。これは $\phi$ が小さいときには、ほぼ位相変化に比例した出力となる。この直流電圧を SSG に入力し、正の電圧に対しては周波数を大きくする方向に modulation するようにすれば、SSG の発振する周波数から Cavity の共振周波数がずれたときに、共鳴を保つ方向に周波数が自動的に調整される。ちなみにこの電圧は Oscilloscope でモニタしている。我々はこのようにして、共鳴の長時間における安定を図った。

## 2.4 $^{22}$Na Positron Source

前にも少し触れたが、Ps は Cavity の中心に置いた $^{22}$Na Source から、図 (2.10) のように崩壊して出てきた positron が electron に捕まって生成される。positron は Cavity 中の Ar で、元々の運動エネルギー 545 KeV

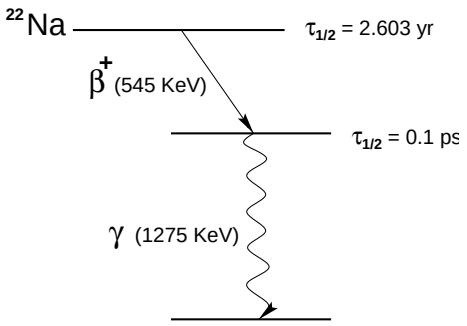



Fig. 2.10: Decay of $^{22}Na$

のほとんどを失って Ps を作るので、Ps が崩壊してできる $2\gamma$ の energy は、運動量保存からそれぞれ電子の質量と同じ 511 KeV になる。このとき、図 (2.10) にあるように、1275 KeV の $\gamma$ も出てくるが、これは 511 KeV の $2\gamma$ coincidence を取ってやることや、$\gamma$ の energy を測定することで取り除ける。つまり、detector は単に $\gamma$ が来たことが分かれば良いのではなく、その energy も測定できる必要がある。これについては後で述べる。

今回使用した $^{22}$Na Source は、93 年度に購入されたもので、そのときの強度が 30 $\mu$Ci であった。$^{22}$Na の半減期が 2.603 年であるので、我々が実験を行った時期には

$$30 \times 2^{-\frac{2001-1993}{2.603}} \sim 3\,\mu\mathrm{Ci} \tag{2.15}$$

となる。

## 2.5 Gas-Handling System

我々は、実験当初は Cavity 内部を空気のままにして測定を行っていたが、思い通りの結果が出なかったため、過去の実験に倣い、Cavity に Ar の気体を入れて実験をすることにした。Cavity 内が空気のときと Ar のときのデータの違いについては次章で述べる。

図 (2.11) は、Cavity を真空にして、そこへ Ar を入れるためのシステムである。Ar 注入の手順は以下の

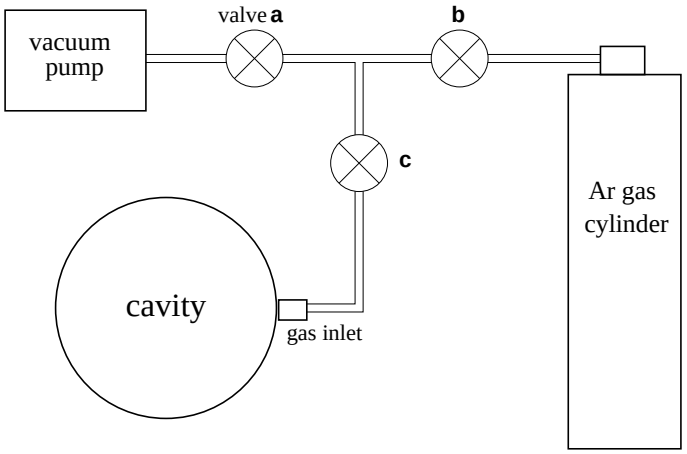



Fig. 2.11: Gas System

通り。

1. まず全てのバルブを閉めた状態で真空ポンプのスイッチを入れる。
2. a と c のバルブを順に開けて十分な時間をかけ Cavity を真空にする。
3. バルブ a, c を閉め、b, c を開けて Ar を注入する。このとき Ar のガスボンベの圧力は 1 気圧よりも高くしておく。
4. ガスの流れが止まった後、b を閉めてガスボンベをはずす。
5. ゆっくりと b を開け、Ar が流れ出すのを確認し、それが止まった時点で内部が 1 気圧であると見なし、b, c を閉める。

この方法は、人間の操作による不定性がかなり入っている。この方法を取らざるを得なかったのは、今回我々が pressure gauge が入手できず、Cavity 内部の正確な圧力を知ることができなかったためである。さらにこの方法では、手順の途中段階の真空がどの程度達成されているか分からない。そこで、1 回の実験につき上の手順を 3 回行うことにして、Ar の純度を上げることにした。例えば、1 回ではまだ空気が $\frac{1}{10}$ 残っていたとしても (そんなに多いことはあり得ないが)、3 回やれば $\frac{1}{1000}$ になる。しかし、Ar 中の空気の effect がどの程度なのかわからないので、実験の今後の improvement として、正確な圧力を知る、ということは重要である。

## 2.6 $\gamma$-Ray Detectors

### 2.6.1 Geometry

図 (2.12) は、今回使用した $\gamma$ を捕らえるための Detector である。実際は NaI が 2 段に重なった状態で実験

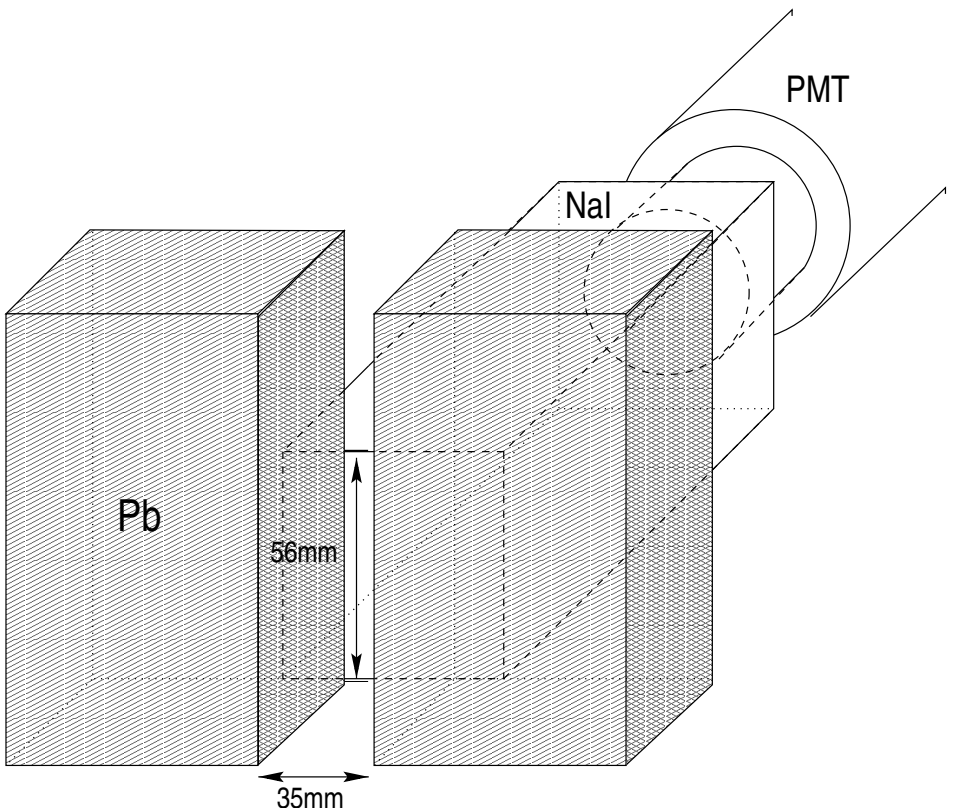



Fig. 2.12: PMT with NaI as $\gamma$ Detector

を行い、左右にも room background を取り除くための鉛が置いてある。我々が捕らえたいものは、$^{22}$Na Source から出てきた positron が、Ar 中で electron につかまって形成された Ps の $2\gamma$ 崩壊である。先に述べたように、Ps は崩壊するときにほとんど boost していないので、Ps の崩壊でできる $2\gamma$ は、ほぼ back-to-back に Cavity の中心から出てくる。これを同時に捕らえれば、$2\gamma$ event の signature となるので、Detector の配置は、図 (2.1) のように Cavity の中心に対して点対称になっている。しかし、positron が Cavity の Al で electron と対消滅して出てきた $2\gamma$ は background になるので、これはできるだけ取り除きたい。そのため、図 (2.1) の様に、Detector からは、Source のある底の部分と反対の天井が直接見えないように鉛を置いている。しかし、$2\gamma$ に対する efficiency は下げないように、上の条件を満たす範囲で、鉛の間隔はできるだけ広く取る。これため Ps の $3\gamma$ 崩壊からの $\gamma$ でも trigger がかかりやすくなってしまうが、次章で述べるように、$3\gamma$ の efficiency の estimate はきちんと行われており、問題はない。

### 2.6.2 NaI

detector は NaI と PMT が一体になったものを使用したのだが、それぞれについて説明する。これまで述べた様に、今回の実験では 511 KeV の $\gamma$ の energy を正確に測ってやる必要がある。このため scintillator は、$\gamma$ に対して energy resolution の良い NaI crystal を用いる。次章で述べるが、最終的な Set up での energy resolution は 3 % 程度である。逆に、NaI は光量が落ちるのに約 300 ns と比較的時間がかかり time resolution は良くないが、今回の実験での count rate では問題ない。

### 2.6.3 Photo Multiplier Tube

NaI の信号は PMT で増幅される。上で述べたように、NaI と PMT は元々一体になっているもので、この PMT は一般的によく使われる 2 inch のものよりも細くなっている。discriminator の threshold が一定なので、PMT からの gain をそろえるために、それぞれの PMT にかける High Voltage を調整し、問題ない程度であれば energy resolution の良いところに設定している。最終的な HV は次の通り。energy calibration に関しては次章で述べる。

| PMT | HV [V] |
|---|---|
| PMT1 | 1120 |
| PMT2 | 1160 |
| PMT3 | 1100 |
| PMT4 | 1120 |

Table 2.1: High Voltage

## 2.7 DAQ System

図 (2.13) は今回の実験の DAQ システムの schema である。以下で data の流れを説明する。

### 2.7.1 Trigger Logic

まず、NaI に $\gamma$ が入り PMT から信号が出てくると、その信号は 2 つに分けられる。(実際には 3 つに分けて、そのうち 2 つを discriminator に入れたのだが、図 (2.13) の回路と違いはない上、分かりにくくなるのでこの様に描いた) そのうち一方を、NIM の discriminator に入れて、論理パルスに変換する。このときの threshold は 15mV で、これは 511 KeV の $\gamma$ による compton 散乱の peak よりも低く設定してある。つまり、Photoelectric peak 以外のものも、最初の段階としては取っているわけだが、これは当初、$3\gamma$ の data も解析に使おうという計画があったためである。最終的には光電ピークの count のみを使用したので、エネルギーの低い $\gamma$ が入ってきたときの dead time があるが、後で説明する様にこれらは問題のない rate であった。また、パルス幅は 50ns で、これは coincidence を取るのに問題のない長さに設定してある。

このパルスのうち、点対称な位置の PMT 同士のものを NIM の coincidence に入れて AND を取る。PMT は 4 本あり、2 つの pair のうちどちらかで coincidence が取れれば gate が開くように、2 つの coincidence からの信号を FANIN/FANOUT という NIM に入れて OR を取る。この信号を、同じく NIM の gate generator

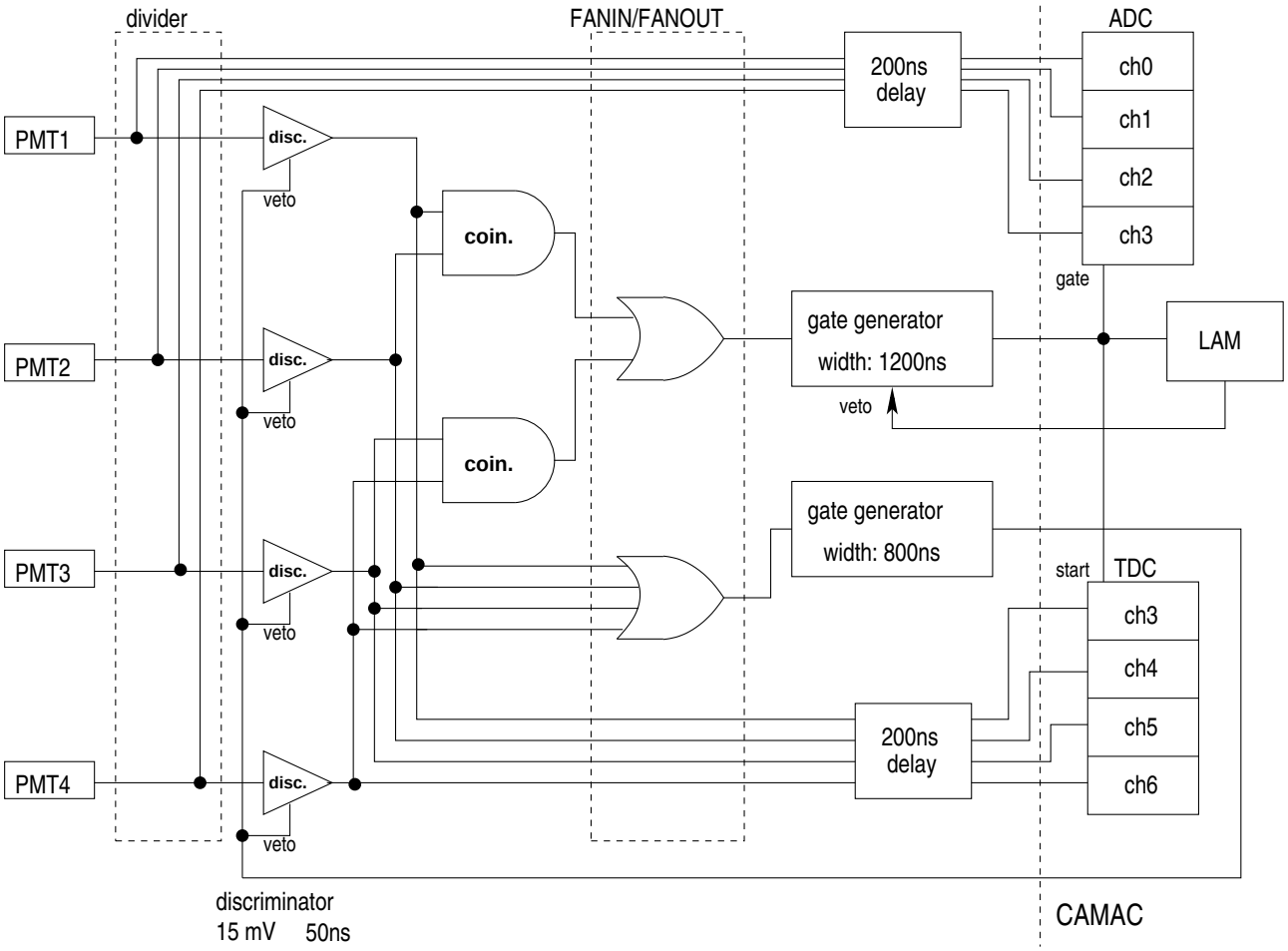



Fig. 2.13: DAQ System

に入れて、ADC の gate と TDC の start 信号を作る。この gate 幅は $1.2\mu s$ で、NaI の信号がほぼちょうど収まる大きさになっている。実際の count rate は 20 Hz(count/50 ms) 以下であり、gate 幅による dead time は問題ないと考えられる。また、gate 信号は CAMAC の LAM 発生に使われ、自分自身で veto をかけている。このため、続けて信号が入ってきても、gate が続けて出て gate 幅が広くなってしまうことはない。

### 2.7.2 Analog to Digital Converter

元の信号から 2 つに分けられたもののうちもう 1 つの方は、40m の同軸ケーブルで 200ns の delay をかけ、CAMAC の ADC に入れる。ADC では、gate が開いている間に入ってきた信号の電荷量をデジタルに変換し、元の粒子のエネルギーを測定する。今回使用した ADC は入力が 16 ch あり、このうち 0 ch から 3 ch までを使う。また data は 12 bit、即ち、 0 から 4095 までの値で返ってくる。

### 2.7.3 Time to Digital Converter

discriminator の信号は、200ns の delay をかけて、TDC にも入れられている。TDC は、start 信号が来てから各チャンネルに信号が来るまでの時間をデジタル化する module である。$2\gamma$ の coincidence event で、どちらも 511 KeV の Photoelectric Peak の energy であるものを選んだ後、さらに同じ時刻に来た $2\gamma$ を選ぶことで、background を減らすことができる。実際、時間情報を用いたことで、accidental な event は、解析でかなり cut することができた。

TDC は 8ch あり、0 ch から 2 ch が死んでいたので 3 ch から 6 ch を用いた。ADC と同様に、返ってくる値は 0 から 4095 で、各チャンネルに stop の信号が来ない場合は 4095 を返す。

また、図 (2.13) には、discriminator の信号から、直接 FANIN/FANOUT に入れているものも描かれているが、この出力は gate generator に入れられ、discriminator への veto に使われている。これによって、PMT から続けて信号が出てきたときに、他の TDC に discriminator の信号が入るのを防いで、時間情報を正確にしている。

# Chapter 3

# EXPERIMENT

## 3.1 Counts Estimation

我々が実験で見たいものは、静磁場の共鳴点における Ps の $2\gamma$ 崩壊数の増加であるが、実際の観測では、図 (1.3) のようなグラフが直接得られるわけではない。count の中には、Ps から back-to-back に崩壊する $2\gamma$ の他に $e^+$ が Ps を形成せずに $e^-$ と対消滅して $2\gamma$ になる場合や、$3\gamma$ に崩壊しても、図 (3.1) の様に back-to-back

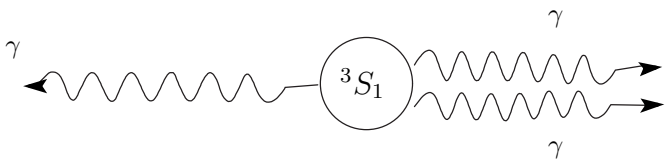



Fig. 3.1: A Case of 3 $\gamma$ Decay

に 2 個 と 1 個 の $\gamma$ が Detector に入って count されてしまう場合が含まれる。また我々は、 Ps の $2\gamma, 3\gamma$ 崩壊数の磁場依存性については理論から知っているが、対消滅についてはその磁場依存性がよくわかっていない。そこで、以下の場合を考える。

$$\begin{aligned} P^0 &= N_p g_p + N_a g_p + N_o g_p \\ P^1 &= N_p g_p + N_a g_p + N_o g_o \\ P^2 &= N_p g_p + N_a g_p + N_o (1 - P_T) g_o + N_o P_T g_p \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで、$N_a$ , $N_p$ , $N_o$ はそれぞれ、$e^+$- $e^-$ 対消滅, para - Ps, ortho - Ps, の数である。また $g_p$ , $g_o$ はそれぞれ $2\gamma, 3\gamma$ に対する Detector の efficiency である。つまり $P^0$ は、$N_a$ , $N_p$ , $N_o$ が全て $2\gamma$ の efficiency で Detector に入ってくるときの count となる。通常の実験ではこのような count は得られないが、Ar に少量の一酸化窒素 (NO) を入れた混合気体では NO による ortho - Ps から para - Ps へのスピン交換衝突が起こり、全ての Ps が $2\gamma$ に崩壊する [2]。我々は実験にあたって、1 $l$ の NO を入手したが、この NO は、溶接で封をしたガラスの密閉容器に入っており、そこから少量のみを取り出して Cavity に入れ残りを保存しておく、ということは非常に難しいことであったため、これの使用を断念した。そのため $P^0$ は、解析において free parameter として扱っている。また、$P^0$ は、全ての positron が最終的に $2\gamma$ になったときの count であるから、磁場に依らない constant であると仮定している。

$P^1$ は 対消滅と para - Ps が $2\gamma$ に、ortho - Ps が $3\gamma$ になっているので、これは共鳴が起っていないときの count である。つまりこれは、 Microwave をかけずに計測したときの count になるわけであるが、実際には、Microwave をかけない状態では、かけている状態との温度の違いによる geometry の変化や、電力消費の違いによる PMT の gain の変化が現れる可能性があるので、実験は常に、Microwave をかけた状態で行った。ここで、磁場の共鳴領域の外の count の磁場依存性は、磁場の絶対値に対して小さな範囲では linear になっている、という仮定をおき、この直線を $P^1$ とする。この仮定をおかざるを得ないのは、前述のように、対消滅に対しては理論的な count の磁場依存性がわからないためである。この後、実際の data を見て貰えば、この仮定をおくことがそれほど不自然でないことが分かって頂けるであろう。

$P^2$ は、$P_T$ の割合で $3\gamma$ から $2\gamma$ への遷移が起っているので、これは共鳴が起ったときの count である。よって、この $P^2$ が実際に Microwave をかけ磁場を変化させたときに得られる count となる。これらより、本来求めたい $P_T$ は

$$P_T = \frac{P^2 - P^1}{P^0 - P^1} \tag{3.2}$$

と書ける。図 (3.2) は、$P^0$ , $P^1$ のパラメータに適当な値を代入し、$P_T$ の Peak と振動磁場の値に理論値を当

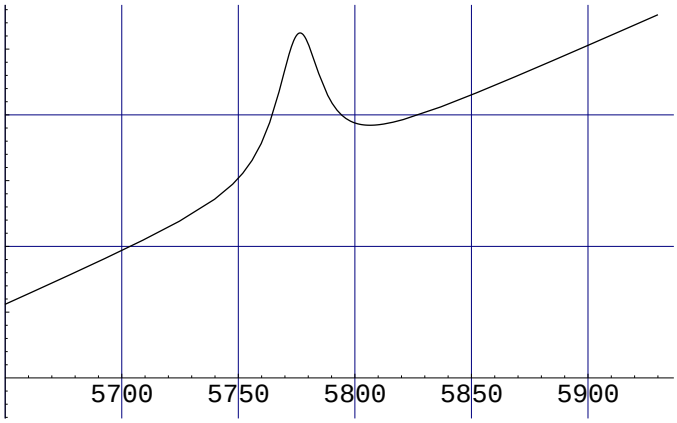



Fig. 3.2: Expected $P^2$

てたときのグラフである。我々は、このような count の変化を予想して実験を行った。

## 3.2 Histogram

実験は、5 分ごとの測定を必要な時間だけ繰り返す形で行われた。つまり以下で「10 分間の測定」とあれば、それは $5 \times 2 = 10$ 分の測定を行ったということである。図 (3.3) はその 5 分間の測定で得られた ADC の

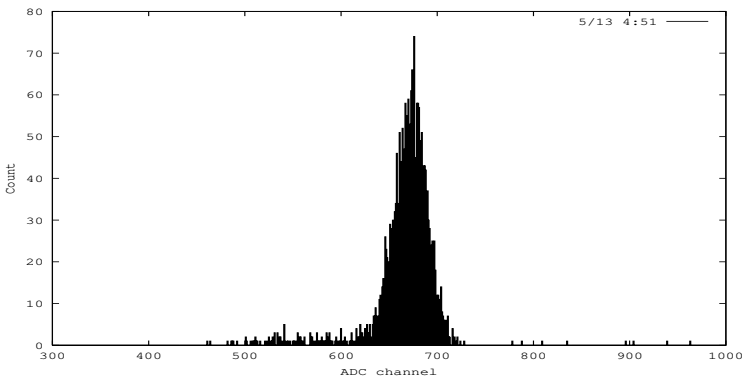



Fig. 3.3: Histogram

spectrum の例である。ただし TDC の時間情報を用いて、実際に信号が来た、即ち TDC が 4095 以外のもののみを取っている。よって、このグラフに Pedestal は入っていない。実際には Pedestal は 100 ch [1]付近にある。これを見ると、511 KeV の $\gamma$ の photoelectric peak がきれいに見えていることが分かる。pair となる PMT からの Pedestal も含めた生の Histogram を、2 次元で plot したものが 図 (3.4) である。これらの plot

[1]ここでの “ch” は前章で説明した ADC への入力の数ではなく、ADC の返すデジタルの値のことである。

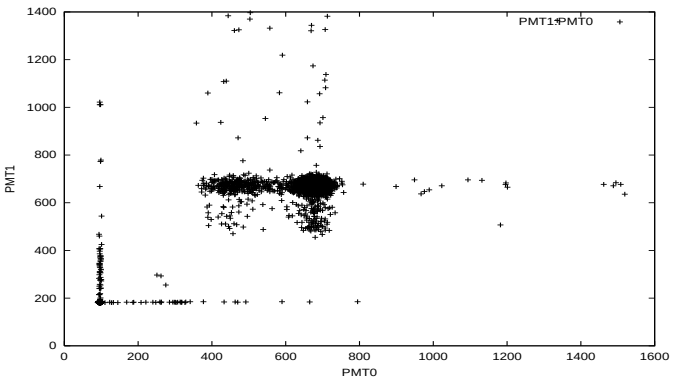



Fig. 3.4: 2D Histogram

された data のうち、必要なものは、どちらも 511 KeV の photoelectric peak に入っている中心付近のものだけである。この $2\gamma$ event を取り出すために software に行わせた作業の logic は以下の通り。

1. 0 - 300 ch の間で一番 count の多い channel を探し、そこを 0 KeV とみなす。
2. 300 ch より大きい範囲で、図 (3.3) の histogram を取り出し、この範囲で一番 count の多い channel を探す。
3. その channel の両側で、count が $\frac{1}{10}$ になるところを探し、その範囲で histogram に gaussian fit を行う。
4. 上の作業を、PMT の pair のそれぞれについて行う。
5. 2 つの gaussian の peak を指定すると、図 (3.4) の中で、511 KeV - 511 KeV の点が定まる。
6. この点の上下左右 $2\sigma$ の範囲の count について 、TDC の data を入れた、正しい時間に来た event のみの sum を取る。

実は、長時間の測定を行うと Pedestal は 最大で 10 ch 程度動くことが分かっており、測定時間を短く区切っ

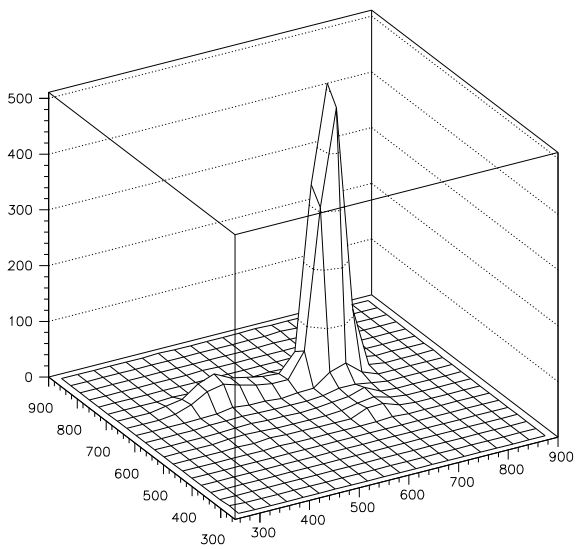



Fig. 3.5: 2D Histogram(2)

たのはこのためである。この短い時間で、Pedestal を 0 KeV、peak を 511 KeV として、毎回 calibration をすることで、Pedestal の変動や PMT の gain の変化の影響を抑えている。

図 (3.4) で見ると、peak 以外の compton 散乱等の count も多いように見えるかも知れないが、peak の数が非常に多いので、1 次元の histogram を取れば図 (3.3) の様になる。ちなみに、3 次元で event を積み上げると図 (3.5) のようになる。

## 3.3 The History of the Data

以下では、得られた data の変遷を追いながら、それぞれの data について説明を行う。図 (3.6) にあるように、 3/14 に、初めてまとまった count と scan point 数の data が得られた。1.6 節で述べた通り、我々は、共

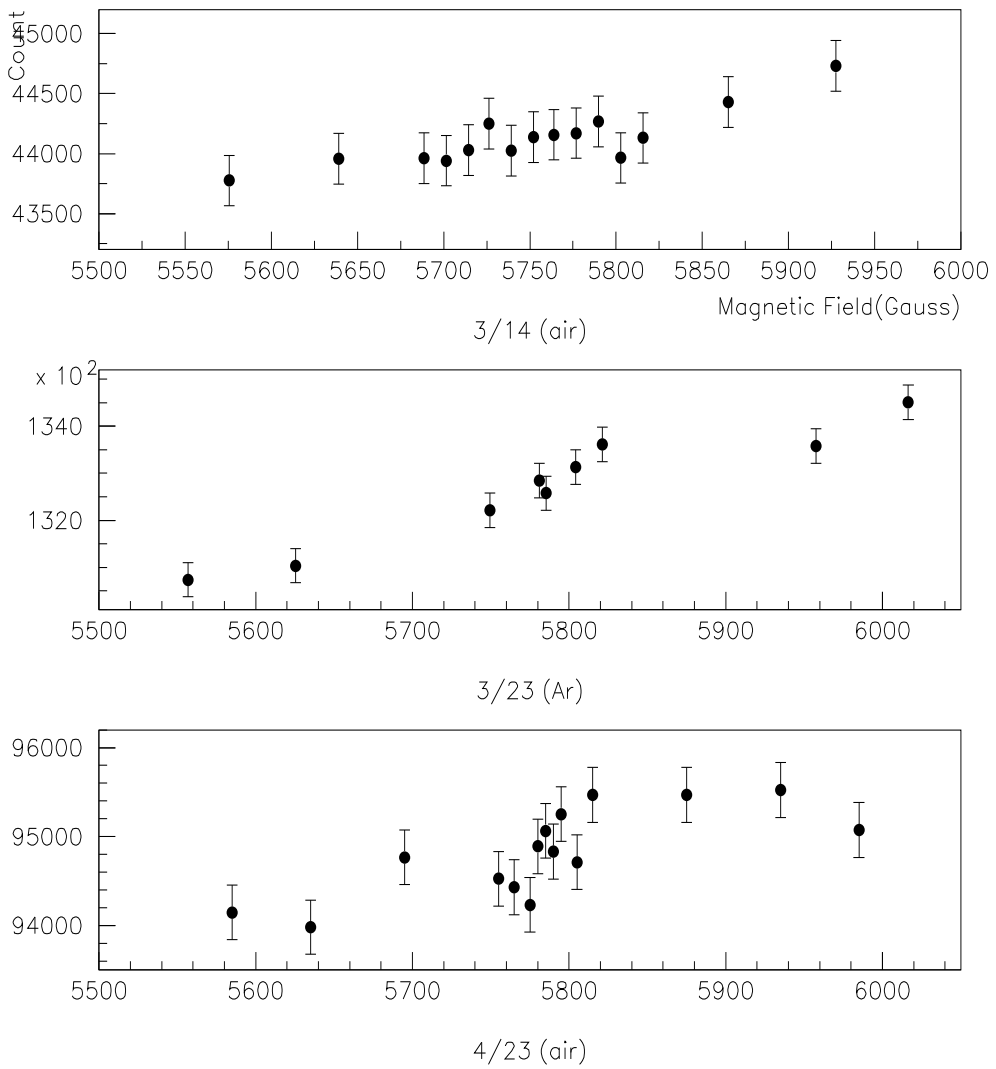



Fig. 3.6: Data With No Peak

鳴の Peak での count の変化を 2 % 程度と見積もっていたので、少なくとも 1 data point についての統計誤差を 0.5 % 程度に抑えなければ Peak は見えないだろう、と考えていた。これは、1 つの point につき 40000 counts は必要ということである。よって、1 point あたりの run time は、手に入る $^{22}$Na ソースの強度で少なくともそれだけの count が得られるように設定した。3/14 については、run time を $10 \times 2 = 20$ minutes、3/23 は $10 \times 6 = 60$ minutes、4/23 は $120 \times 1 = 120$ minutes にしてそれぞれ count の normalize を行って

いる。count rate が毎回違うのは、PMT と Cavity の距離、鉛スリットの幅などの set up が違うためである。前章で説明した set up は、解析に用いた最終 data を取ったときのものである。

さて、count としては問題がないものの、3 つの data はどれも Peak が見えていない。当初我々は、Tesla Meter で直接磁場を測定するのではなく、Magnet に流す電流をモニターして、電流の値と磁場の値の Caribration を元に、実際の実験での中心磁場を設定していた。しかし、この時は鉄のヒステリシスを考慮しておらず、後に測定し直してみると、同じ電流値でも最大時と最小時では 30 Gauss 程度の差があった。3/14, 3/23 の data はいずれも磁場を直接測定していないときのものであり、複数回の測定で同じ磁場が実現できていたとは考えにくい。3/23 の data は比較的 $P^1$ の直線がきれいに現れているが、上記の理由で Peak が均らされてしまったと考えられる。

4/23 の data は、初めて Tesla Meter を使用してみたときのものである。この時は Cavity 内が空気のままで測定を行い、その結果、よく分からない data になってしまっている。Ar については、過去の実験で使用されていたから、という理由のみで使用したのだが、空気のデータを見る限り、結果的には必要であったと思われる。先にのべたように、Ar 中に少量の NO を混合した気体では、Ps は全て $2\gamma$ で崩壊するが、このように混合気体中では、それぞれの崩壊について未知の効果が現れているのではないかと思われる。今回は考えきれなかったが、「何故空気では駄目なのか」という点については、study が必要である。

図 (3.7) は、初めて Peak が見えたと思われる data である。[2] この時は、前述のように、Cavity を真空に

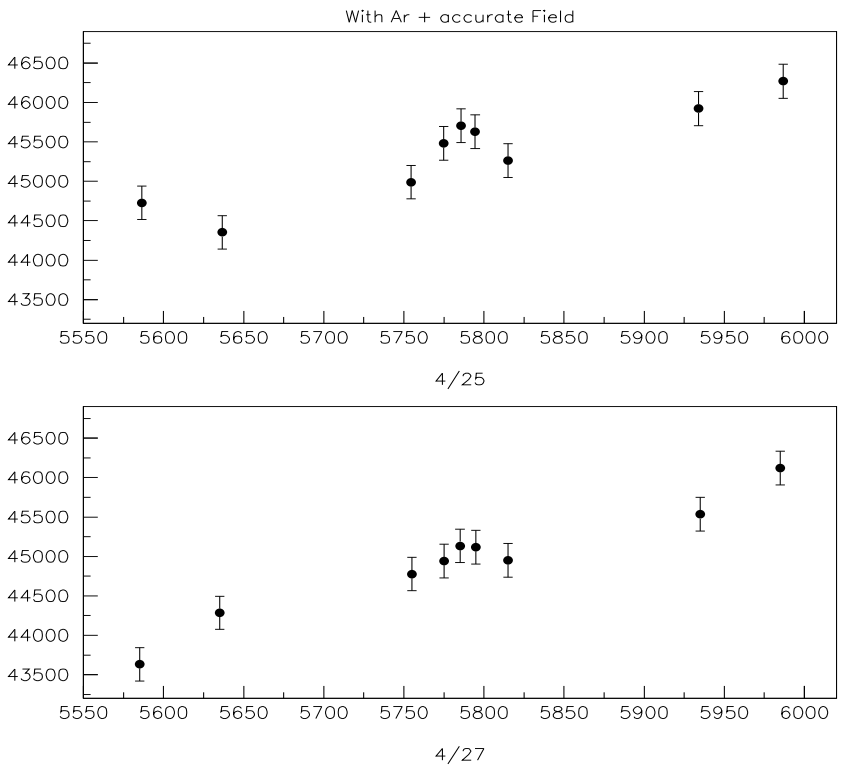



Fig. 3.7: The First Peak Appearance

してから Ar を入れるという作業を 3 回繰り返し、高純度の Ar 1 気圧で data を取ってみた。共鳴領域について 5 点、その左右について 2 点ずつ data を取り、それを 2 回行ったが、2 回とも、非共鳴領域ではほぼ直線に乗っており、共鳴領域では、そこからの enhance が見られる。2 回続けてそれらしい data が得られたことで、この現象には再現性があるものとし、さらに多い data point で実験することにした。

その後、細かい調整を行い、最終的に得られた data が図 (3.8) である。この時は、全く同じ set up で 2 回続けて scan し、2 回とも比較的きれいな Peak が見えている。統計的にはもう少し count をためたかったが、時間もあまりなかったので[3]ここで実験を打ち切った。これらは同じ磁場の点で data を取っており、そのまま

[2]これが得られたときの感動は筆舌に尽くしがたいものがある。このことについて語り始めると、ただでさえエッセイ色の強いこのレポートが、ますます日記のようになっていくのでやめておく。

[3]一応 4 回生の学生実験なので、すでに (翌年度の) 5/13 というのは問題ではある。

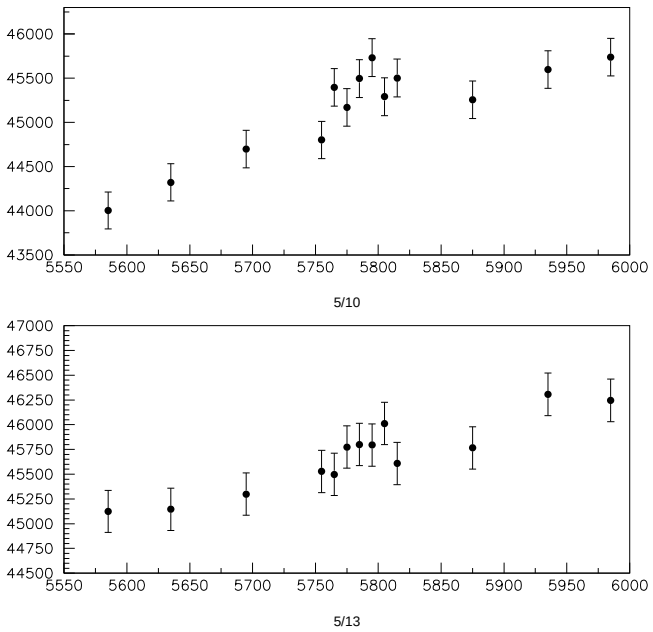



Fig. 3.8: Latest Data

2 つを加えたものが、図 (3.9) である。以後、この data について解析を行う。

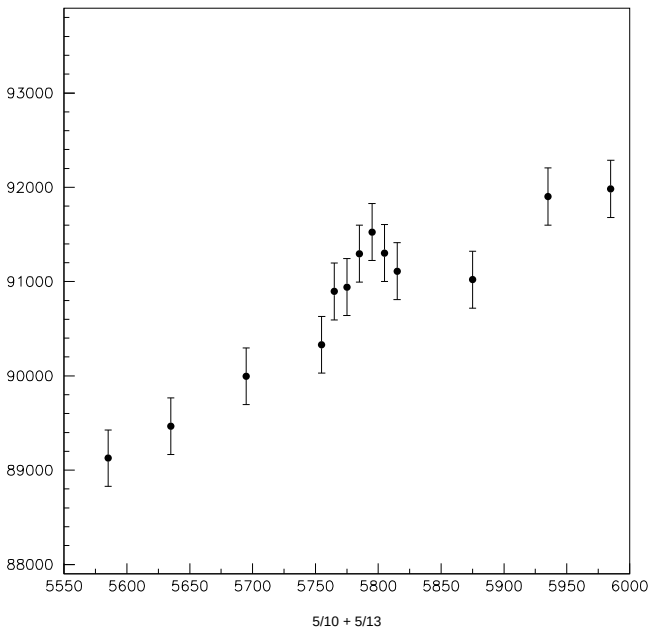


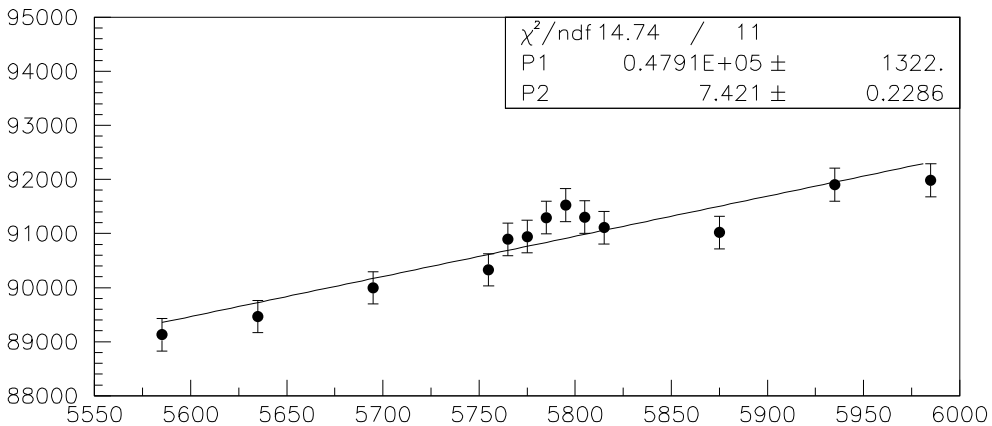

Fig. 3.9: Sum of Latest Data

# Chapter 4

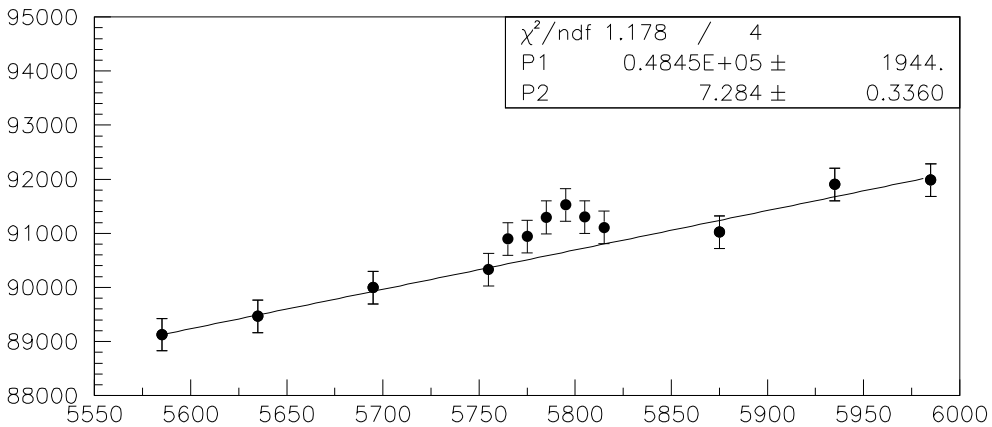
# ANALYSIS

## 4.1 Linear Fit

前章の data を見ると、絵としては共鳴の peak があるように見えるが、統計的にこれは signal である、と言える必要がある。全体が直線にのっているという仮定も誤差の範囲で有りうる、ということになっては何




linear fit to all poits




linear fit to off resonance points

Fig. 4.1: Linear Fit

もならない。そこでまず、data point 全体に対して linear fit を行った。その結果が、図 (4.1) の上側である。パラメータは、P1 が offset で、P2 が直線の傾きである。[1]グラフの右上の最上部が、$\chi^2$ 検定の結果である。reduced $\chi^2 = \chi^2/(\text{degree of freedom})$ を見ると、全体が直線に乗っている、という可能性は 80 % でしか排除できない。これでは決定的なことは言えないので、他の方法を考えることにする。ちなみに、非共鳴領域に対して linear fit を行った結果は、非常に良い (統計的にはやや良すぎる)fit になった。

## 4.2 Signal Confidence

全体が直線であるという可能性は排除できなかったので、逆に、共鳴領域の data point が、非共鳴領域の

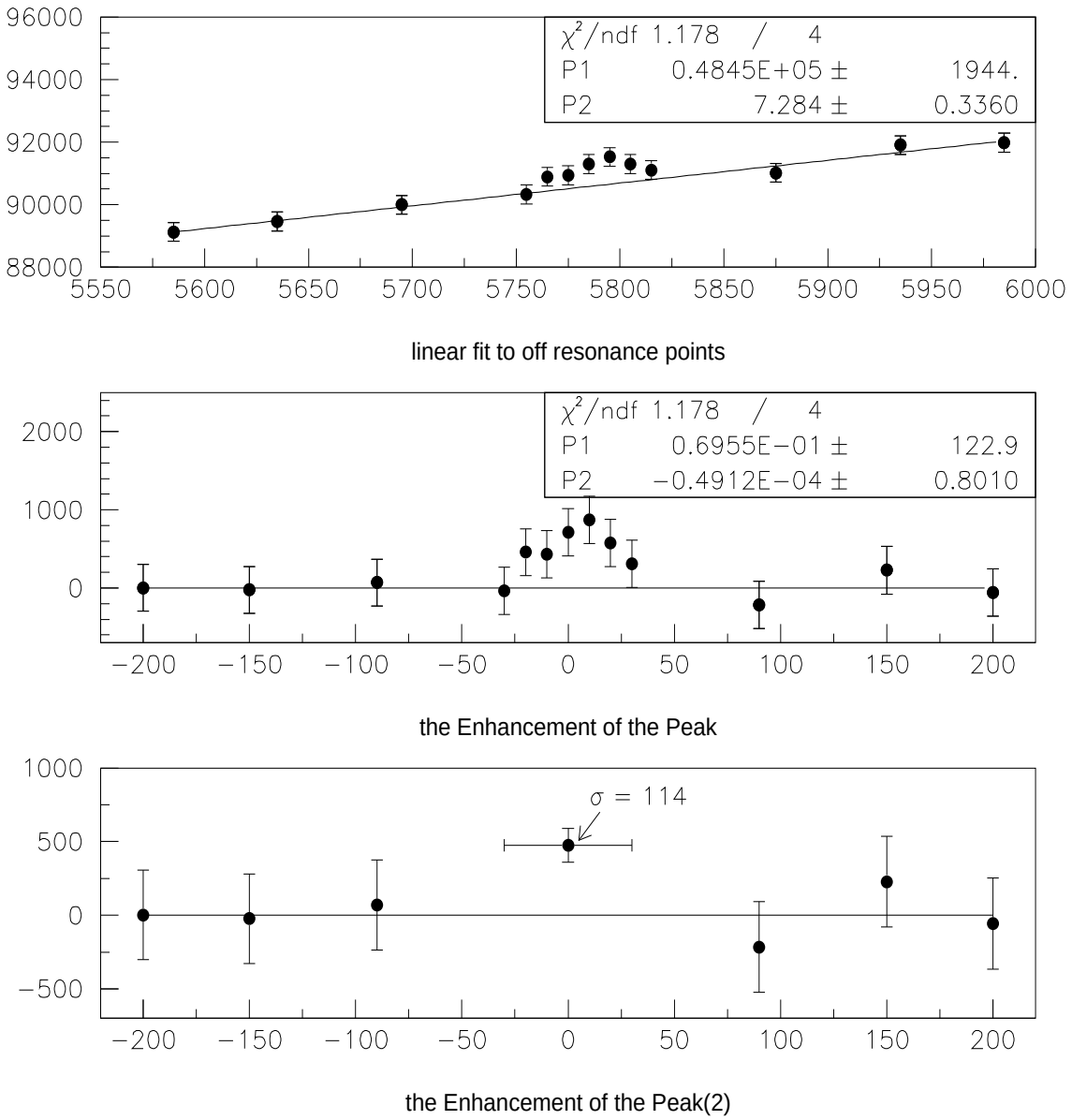



Fig. 4.2: Signal Confidence

直線 $P^1$ から統計的に有意に浮いているかどうか、ということを調べた。図 (4.2) の一番上のグラフは、図 (4.1)

[1]式(3.1) の $P^0, P^1, P^2$ と混同しない様に注意。

の下と同じものであるが、このグラフの P1 の誤差を見ると、$\pm 1944$ となっている。共鳴の enhancement が $10^6$ count 中の 2 % で 2000 程度であることを考えると、これでは enhance が誤差に埋もれてしまう。しかし、実はこれは磁場の絶対値が大きいために、直線の傾き P2 の誤差が効いてしまっているだけである。そこで、data から $P^1$ を差し引いて、さらに共鳴の中心を原点に持ってきてみた。これが図 (4.2) の真ん中のグラフである。共鳴領域の count を足し合わせて統計誤差を減らした結果、この $\sigma$ は 114 になった。共鳴領域の平均では 500 程度の enhance があるので、P1 の誤差 $\pm 123$ を入れても、約 $3\sigma$ 離れており、signal の確認はなされたとして良い。

# Chapter 5

# RESULTS

## 5.1 Fitting Resonance Curve

前章までの議論で共鳴の peak が見えたと確認し、この章では、理論から導いた共鳴曲線を data に fit して HFS を求める。(3.2) より、逆に、実際の測定で得られる count である $P^2$ は

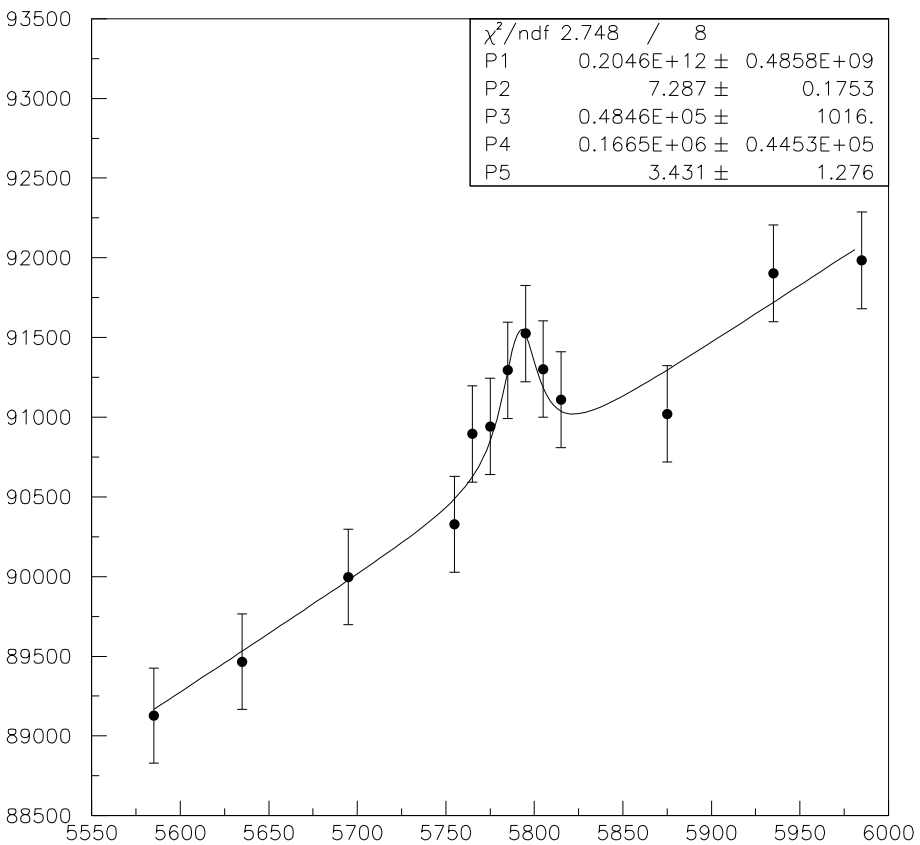



Fig. 5.1: Fitting $P^2$ to Data Points

$$P^2 = P_T\,(P^0 - P^1) + P^1 \tag{5.1}$$

と書ける。この $P^2$ を data に fit するのであるが、この際のパラメータとしては、

- P1: HFS の値
- P2: 直線 $P^1$ の傾き
- P3: 直線 $P^1$ の offset
- P4: $P^0$ の値
- P5: 振動磁場の大きさ $B_1$

の 5 つを取り、この 5 次元空間で $\chi^2$ が最小となる best fit を探す。data point の数は 13 であるので、d.o.f. は 8 となる。[1]

図 (5.1) は、error として統計から来るもののみを入れた data に $P^2$ を fit したものである。この結果は、

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{\rm exp} &= (2.0456 \pm 0.0049(stat.)) \quad \times 10^2[\rm GHz] \\ (\Delta\nu_{\rm theor} &= \quad 2.03427 \qquad\qquad\quad \times 10^2[\rm GHz]) \end{aligned} \tag{5.2}$$

となった (グラフの値は桁が落ちている)。これは reasonable な値であるが、error が小さいので理論値からは $2.3\sigma$ 離れている。[2]実際には systematic な error が入るので、理論からのずれはもう少し小さくなる。それについては後述する。

## 5.2 Pressure Dependence of Ps HFS

今回我々は、Ar 1 気圧 における HFS のみを測定したが、過去の実験 [1] において、様々な気圧で HFS を

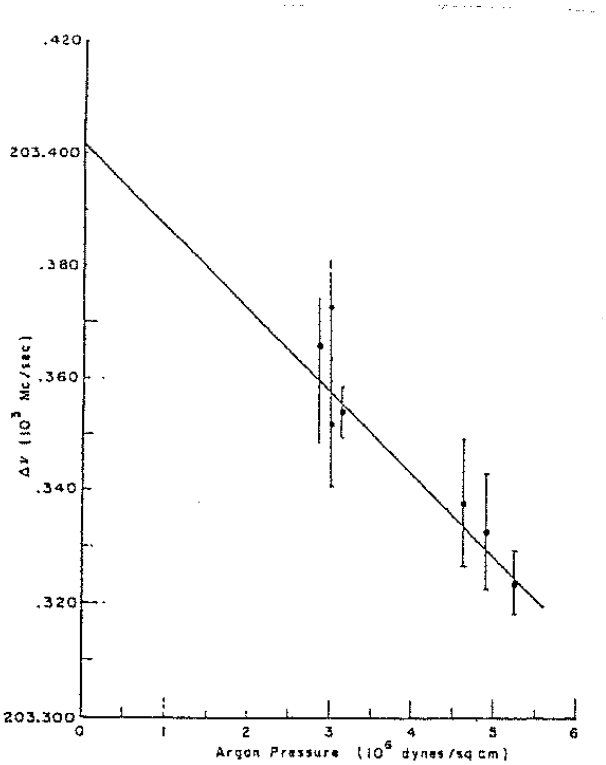



Fig. 5.2: Pressure Dependence of HFS on the earlier paper

[1]fit は PAW を用いて行ったが、初期値依存性がかなりあり、様々な初期値で fit を行って、各パラメータの結果が妥当なものを取った。

[2]確か、$\mu$ g-2 について、これよりも小さい理論からのずれで、大々的に発表されたものがこの時期にあったような気がするが。。。ちなみに S 教授は「物理学教室の 3 階では QED は破れているんだよ」と喜んでいた。

測定したときの気圧による HFS の依存性が報告されている。図 (5.2) はその結果であり、具体的には

$$\frac{1}{\Delta\nu}\frac{\partial\Delta\nu}{\partial P}\Big|_{300K} = (-0.93 \pm 0.18) \times 10^{-7}/(\text{Torr of Ar}) \tag{5.3}$$

となる。$1\,\text{atm} = 760\,\text{Torr}$ からの補正は $0.0002 \times 10^2[\text{GHz}]$ と僅かであるが、真空での HFS を求める際にこの補正を行う。

## 5.3 The Final Value

systematic error については、詰めた study ができなかったが、前述の通り、Microwave の power の誤差はあまり効かないので、dominant な error は磁場からのものとなる。最終的に我々は磁場の誤差を大きめに見積もって、$\pm 10$ Gauss とし、これに $P^1$ の傾きをかけたものを、data point の error bar に加えている。この

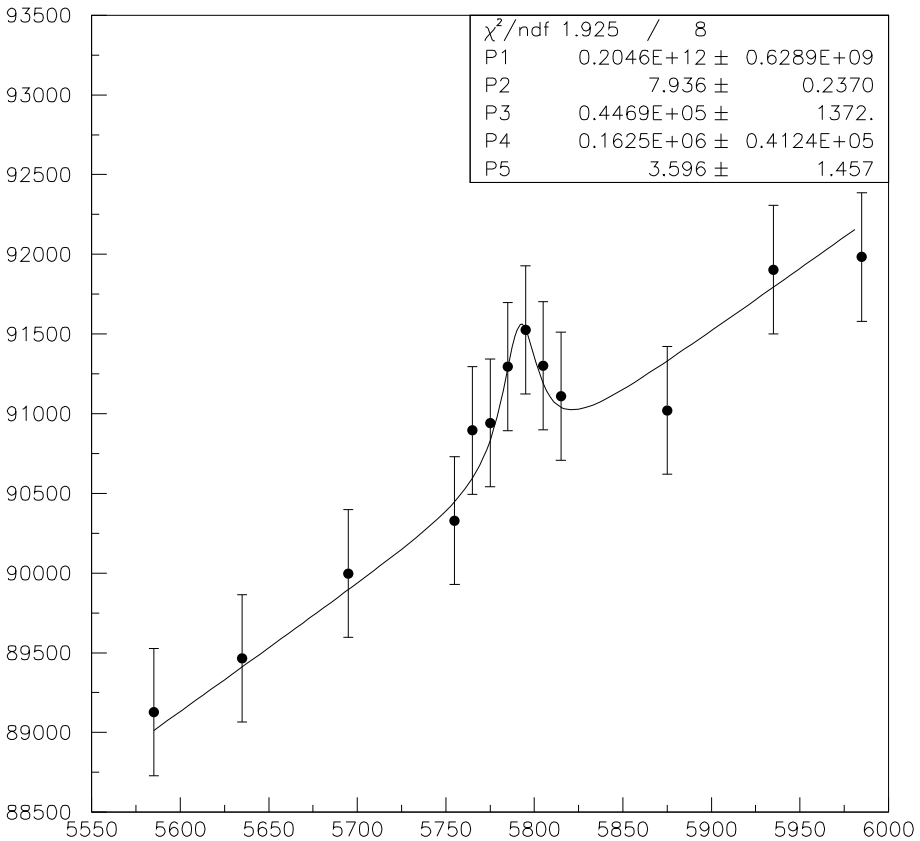



Fig. 5.3: Fitting $P^2$ to Data with Systematic Error

data に対して $P^2$ を fit した結果が図 (5.3) である。HFS の値としては、図 (5.1) のものとほとんど等しくなり、誤差は大きくなっている。最終的な結果は

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{\text{exp}} &= (2.0454 \pm 0.0063) \times 10^2[\text{GHz}] \\ (\Delta\nu_{\text{theor}} &= 2.03427 \times 10^2[\text{GHz}]) \\ &(1.8\ \sigma) \end{aligned} \tag{5.4}$$

である。理論値とのずれは $1.8\sigma$ となっており、理論と consistent な値が得られたと言える。

# Chapter 6

# DISCUSSION

## 6.1 Causes of Difference

HFS の値として、理論にほぼ等しいものが得られたとはいえ、$1.8\sigma$ というのは小さなずれではないので、この原因ついて議論をしておく。

我々は Cavity のない状態で静磁場の測定を行い、Cavity の中心から離れた Tesla Meter の probe で得られる磁場の値との calibration で、Cavity の中心磁場を知る。Cavity の材質は Al でメッキは Cu であり、これらの透磁率は真空とほとんど変わらないが、Cavity 事態の蓋と底をとめるネジや、Source の蓋のネジは Fe であり、これらによって磁束がどう集められるかはわからない。これらが原因で、磁場が実は見ているものよりも小さかった、ということは十分考えられる。

また、統計が少ないため、Microwave の power が一定でなく、磁場が小さいときの count がたまたま少なかった、ということも考えられるが、グラフを見る限り、この寄与によっては、 peak の位置はそれほど左に寄るとは思えない。

## 6.2 Improvement in the Future

peak が見えてから最終結果を出すまでの実験手法を改善する時間が短かったので、前節にあるような疑問が残ってしまった。この節では、今後この実験を行う場合に、改善可能な点を挙げておく。

- Source

  まず、統計精度を上げるために、より多くの count を短い時間で稼ぐ必要がある。長時間の測定では、どうしてもシステム全体の安定性が問題になってくるためである。そのための手段として、Source の強度を上げる、というのは最も簡単なものである。今回と同じ Set up であっても、count rate にはまだ余裕があり、$10\mu$Ci くらいまでは全く問題ない。

- PMT, CAMAC, Computer

  例えば、実際に Source の強度を上げて、93 年度に購入した $30\mu$ Ci の Source と同じもので実験した場合、今回の electronics では dead time が問題となってくるが、その際でも、回路の logic を工夫することでかなり解決することができる。また、今回 data taking に使用した computer はクロックが 33 MHz の MS-DOS machine で、もう少し速い CPU を使えば、ADC 信号の処理時間も減らすことができる。count を増やす方法として、PMT の本数を増やしてさらに pair を作る、ということも考えられるが、computer の処理時間が増えるので、問題は同じである。さらに言えば、VME 等の速い規格を用いれば、これはほとんど解決する問題である。

- data point

  短い時間で十分な count が得られた場合は、もっと多くの data point で測定を行うべきである。今回の結果のグラフを見ると、どうしても非共鳴領域の point が少ないように見える。この side band は、この

ような signal を見る実験では非常に重要であり、もう少し data があれば、より多くのことが言えるはずである。さらに、複数回の data で HFS の値が出せれば、システムのふらつきの傾向も分かる。

- Magnetic Field

  静磁場の強度に関しては今回のもので問題ないが、磁場の系統誤差が dominant である事を考えると、Shim の形状をもう一度検討し直して、一様性を向上させる必要がある。さらに Ps の崩壊領域を正確に見積もり、Shim の表面として球以外の曲面についても調べてみれば、崩壊領域中での磁場の誤差を $\pm 1$ Gauss くらいにするのは難しくないはずである。

  また、問題点としても述べたが、測定中の中心磁場をなんとかして測定できれば、さらに精度の良い実験ができる。

- Microwave

  今回は Microwave の power をモニタするだけで、電子的な記録は行っていない。power 安定性についても、正確には分かっていないので、power の data を取って、遷移率の補正に用いれば、より正確な値が得られる。

- Cavity

  まず、Cavity 内部の気圧設定が手動、というのはお粗末なので、pressure gauge を用いて、気圧を正確に測定することが必要である。また、今の Cavity は gas のための口が 1 つしかなく、長時間にわたって内部の気圧を保つシステムを作るのは難しい。$Q$ 値も Cavity 作ってから時間が経ったことによって落ちているので、Cavity の再制作を考えるべきであろう。もし、内部の気圧を正確に測定でき、それを一定に保つようなシステムができれば、2 通り以上の気圧で HFS を測定し、気圧による依存性を求めたい。

- $P^0$

  上の機能を満たす Cavity を作るとなると、gas inlet はやはり 2 つ以上必要になるが、この際、今回測定できなかった $P^0$ の事を考慮して gas system を作りたい。Ar 中に 5 % の NO を混合した気体、というのは実現が難しいであろうが、最終的な fit の自由度を減らすことには大きな意味がある。

これら全てを改善するのは難しいが、今後この実験を行おうとする (P2 の) 人は、こういった問題点を認識してやって欲しい。[1]

[1] SSG の精度が 7 桁、Tesla Meter が 6 桁あるので、上手くやれば world record も夢ではない?

# Chapter 7

# ACKNOWLEDGMENTS

## 7.1 Acknowledgments

今年も、京都大学化学研究所の岩下芳久さんには大変お世話になりました。Microwave 関連機器をお借りした上、四月になってからにも関わらず DBM 等の Feedback system 用のコンポーネントを貸して頂くなど、ご迷惑をお掛けしました。深く御礼申し上げます。

ちょっと何かあると、すぐ一々聞きに行く我々に辛抱強く付き合って頂いた、P2 実験担当教官の笹尾登さん、野村正さんに謝意を表します。本当にお世話になりました。

また、昨年度 P2 の溝内健太郎さん、内田桐日さんにも、実験の基本的なことからいろいろと教えて頂きました。一昨年度 P2 の加藤一成さんには、解析に際して多大な助言を頂きました。3 年越しのこの実験に一応の結果が出たのは、皆さんのおかげです。

実験背景の難しい理論については、P2 理論ゼミ担当教官の畑浩之さんに御指導頂きました。ありがとうございました。

## 7.2 Special Thanks

いつもいつも、「レポートが。。。」と言って書こうとしない筆者を励まし、応援してくれた、2001 年度高エネルギー研究室 M1 の K2K 2 人組、長谷川君と山本君に、この場を借りてお礼を言っておきます。ちなみに、このレポートには山本君の描いたイメージが 1 枚入っていることを告白します。本当にありがとう。

それから、このレポートを気長に待ってくれた 2000 年度 P2 PsHFS のメンバーにもお礼を言います。これを見て、あの苦労が報われた気がしてくれたら嬉しいです。お疲れ様でした。

## 7.3 Lastly

終わった。。。今が何時かなんて、知ってる人は皆知ってるけど、知らない人は知らないから書かないでおこう。表紙の 6 月 2 日というのがとてもうすら寒く見えるが、気にしない。とにかく、ここに辿り着くには、とてもとても長い道程があったことだけは記しておく。表記の convention も、最初と最後で違っている部分がかなりあった。できるだけ統一したつもりだが、もし残ってたら笑って許してやってほしい。

願わくば、この実験はもう一年やってもらって、いろいろと詰められなかった部分に決着をつけてほしい。その時にこのレポートが参考になれば幸いである。

# Bibliography

[1] E.D.Theriot, Jr., R.H.Beers, V.W.Hughes, K.O.Zieck: Phys.Rev. **A2**, *707*(1970)

[2] M.Deutsch: Progr.Nucl.Phys. **3**, *131*(1953)

[3] W.Greiner, J.Reinhardt: *Quantum Electrodynamics*, Theoretical physics: text and exercise books; v.4(Springer-Verlag, 1992)

[4] T.D.Lee: *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Contemporary Concepts in Physics Vol.1 (Harwood Academic Publishers, 1981)

[5] J.D.Jackson, 西田稔訳:「電磁気学」(吉岡書店, 1994)

[6] 阿部英太郎:「マイクロ波技術」, 物理工学実験 11 東京大学出版会 (1979)

[7] 98 年度 P2:「Hyperfine Structure of Positronium in Its Ground State」

[8] 99 年度 P2:「Hyperfine Structure of Positronium in Its Ground State」

# Appendix A

# The Positronium Hyperfine Structure

Positronium は電子と陽電子の束縛状態であり、そのふるまいは QED で記述される。この章では QED を使って Positronium の hyperfine structure を計算する。一般に、束縛状態は 2 粒子が無限に長い時間相互作用しているので摂動論では記述できない。そこで、まず相互作用をしている 2 粒子系が満たす正確な (摂動ではない) 方程式、Bethe Salpeter Equation を導出し、その方程式を Positronium に適用して微細構造定数 $\alpha$ の最低次のオーダーで hyperfine structure を求めよう。

## A.1 The Bethe Salpeter Equation

1 粒子系の波動関数は 4 成分 spinor $\psi(x)$ で表される。$\psi(x)$ は Feynman propagator $S_F(x_2, x_1)$ を使って次のように書ける。

$$\psi(x_2) = -i \int d\sigma(x_1) S_F(x_2, x_1) \gamma^\mu n_\mu(x_1) \psi(x_1) \tag{A.1}$$

ここで

$$S_F(x_2, x_1) = i \int \frac{d_4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ip(x_2 - x_1)} \tag{A.2}$$

$d\sigma$ は 4 次元の閉領域の 3 次元超表面であり、 $n_\mu$ は超表面に垂直なベクトルである。

この式を示すには Gauss の定理

$$\int_v d^4x \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu(x)} = \int_s d\sigma(x) F_\mu(x) n^\mu(x) \tag{A.3}$$

に

$$F_\mu(x') = i S_F(x - x') \gamma_\mu \psi(x') \tag{A.4}$$

を代入すればよい。

$$(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m_0)\psi(x) = 0 \tag{A.5}$$

$$(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m_0) S_F(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \tag{A.6}$$

の 2 式を使うと

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}F_\mu(x') &= iS_F(x-x')\gamma_\mu\psi(x') + S_F(x-x')\underbrace{\gamma_\mu(i\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\psi(x'))}_{m_0\psi(x')} \\ &= [(-i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m_0)S_F(x-x')]\psi(x') \\ &= -\delta^{(4)}(x-x')\psi(x') \end{aligned} \tag{A.7}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_S d\sigma(x')iS_F(x-x')\gamma_\mu\psi(x')n_\mu(x') &= -\int_v d^4x'\delta^{(4)}(x-x')\psi(x') \\ &= -\psi(x)\end{aligned}$$

$$\psi(x) = -i\int_S d\sigma(x')S_F(x-x')\not{n}(x')\psi(x')$$

以上により (A.1) 式が示された。

次に粒子 $a$ と粒子 $b$ の 2 粒子系の波動関数 $\psi_{ab}(x_1,x_2)$ を考える。spinor 添字をつけてかくと $\psi_{(ab)\mu\sigma}(x_1,x_2)\quad(\mu,\sigma=1\cdots4)$ であり、$\psi_{ab}$ は 8 個の座標を持つ 16 成分 spinor である。(A.1) との類推により、

$$\psi_{ab}(x_3,x_4) = \int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2)S^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2)\not{n}(x_1)\not{n}(x_2)\psi_{ab}(x_1,x_2) \tag{A.8}$$

と 2 粒子波動関数の propagator $S^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2)$ を定義する。$S^{ab}$ は $16\times16$ 行列と同じ数の成分を持っていて、成分をあらわに書くと

$$\psi_{(ab)\mu\sigma}(x_3,x_4) = \int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2)S^{(ab)}_{\mu\sigma\nu\tau}(x_3,x_4;x_1,x_2)\not{n}_{\nu\nu'}(x_1)\not{n}_{\tau\tau'}(x_2)\psi_{(ab)\nu'\tau'}(x_1,x_2)$$

である。2 粒子が相互作用をしていないとき、

$$\psi^0_{ab}(x_1,x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \tag{A.9}$$

$$S^0_{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2) = iS^a_F(x_3,x_1)iS^b_F(x_4,x_2) \tag{A.10}$$

である。これを Feynman Diagram で表すと図 (A.1) である。2 粒子が電磁相互作用をしているときの propagator

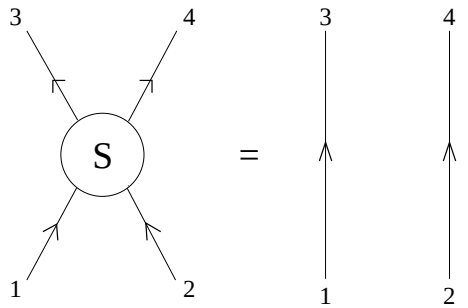



Fig. A.1: free

$S^{ab}$ は相互作用を摂動として扱うと図 (A.2) のような Feynman Diagram で書ける。
式で書くと

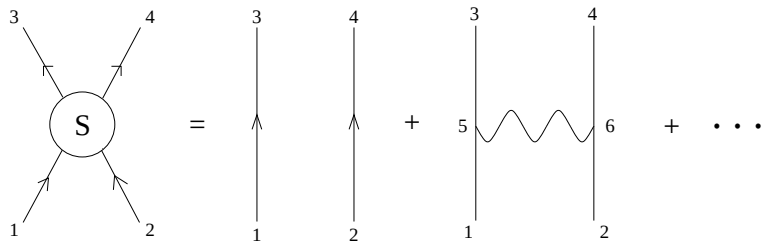



Fig. A.2: Propagator with interactions

$$
\begin{aligned}
S^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2) &= iS_F^a(x_3,x_1)iS_F^b(x_4,x_2) \\
&\quad + \int d^4x_5 \int d^4x_6 iS_F^a(x_3,x_5)iS_F^b(x_4,x_6) \\
&\qquad \times [(-ie_a)\gamma_\mu^a iD_F^{\mu\nu}(x_5,x_6)(-ie_a)\gamma_\nu^b] iS_F^a(x_5,x_1)iS_F^b(x_6,x_2) \\
&\quad + \dots
\end{aligned} \tag{A.11}
$$

ここでは $D_F^{\mu\nu}(x_5,x_6)$ は photon の propagator であり、$\gamma_\mu^a, \gamma_\nu^b$ はそれぞれ $S_F^a, S_F^b$ にかかる行列である。

Interaction Kernel $K^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2)$ という関数を次のように定義し相互作用の無限個の項をまとめて表す。

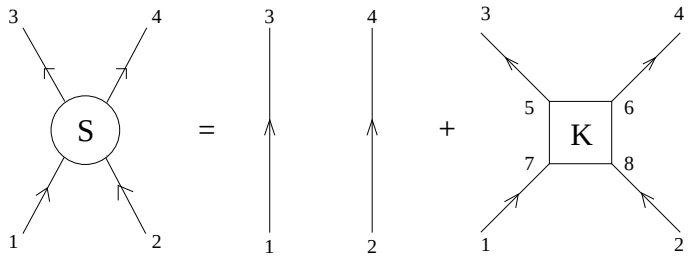



Fig. A.3: Kernel

$$
\begin{aligned}
S^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2) &= iS_F^a(x_5,x_1)iS_F^b(x_4,x_2) \\
&\quad + \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 iS_F^a(x_3,x_5)iS_F^b(x_4,x_6) \\
&\qquad \times K^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8) iS_F^a(x_7,x_1)iS_F^b(x_8,x_2)
\end{aligned} \tag{A.12}
$$

$K^{ab}$ は大変複雑な関数であるが、摂動の一次までとると(A.11) より

$$
K_0^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8) = (-ie_a)\gamma_\mu^a iD_F^{\mu\nu}(x_5,x_6)(-ie_b)\gamma_\nu^b \delta^{(4)}(x_5-x_7)\delta^{(4)}(x_6-x_8) \tag{A.13}
$$

である。

ここで可約な interaction kernel を定義する。2 本の fermion lines のみを横切る点線で kernel が 2 つの parts に分けられるとき、$K$ は可約であるといい、2 つに分けられないとき既約であるという。

以下、既約な kernel の和を $\bar{K}$ と表す。

一般の kernel は既約な kernel の積で表せるので、図 (A.3) 式 (A.12) は次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
S^{ab}(x_3,x_4;x_1,x_2) &= iS_F^a(x_3,x_1)iS_F^b(x_4,x_2) \\
&\quad + \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 iS_F^a(x_3,x_5)iS_F^b(x_4,x_6) \\
&\qquad \times \bar{K}^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8) S^{ab}(x_7,x_8;x_1,x_2)
\end{aligned} \tag{A.14}
$$

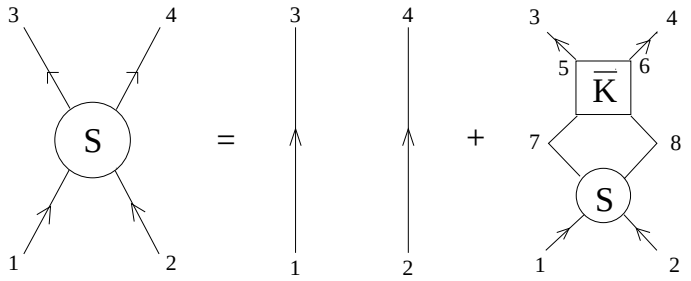



Fig. A.4: Irreducible Kernel

(A.14) を (A.1) に代入すると 2 粒子波動関数の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\psi_{ab}(x_3,x_4) = &\int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2)iS_F^a(x_3,x_1)iS_F^b(x_4,x_2)\not{n}(x_1)\not{n}(x_2)\psi_{ab}(x_1,x_2)\\ &+\int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2)\int d^4x_5d^4x_6d^4x_7d^4x_8iS_F^a(x_3,x_5)iS_F^b(x_4,x_6)\\ &\times\bar{K}^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8)S^{ab}(x_7,x_8;x_1,x_2)\not{n}(x_1)\not{n}(x_2)\psi_{ab}(x_1,x_2) \qquad \text{(A.15)}\end{aligned}$$

自由粒子の波導関数である第一項を $\phi_{ab}(x_3,x_4)$ と書き、第二項で (A.1) を使って $\sigma$ 積分を実行し添字を書き換えると

$$\begin{aligned}\psi_{ab}(x_1,x_2) = \phi_{ab}(x_1,x_2) &+ \int d^4x_3d^4x_4d^4x_5d^4x_6iS_F^a(x_1,x_5)iS_F^b(x_4,x_6)\\ &+\bar{K}^{ab}(x_5,x_6;x_3,x_4)\psi_{ab}(x_3,x_4) \qquad \text{(A.16)}\end{aligned}$$

これが Bethe-Salpeter 方程式である。
$\phi_{ab}$ は自由粒子の波動関数なので束縛状態の波動関数は(A.16) の第一項を除いた形である。

Bethe-Salpeter 方程式は様々な形で書くことができる。

$$(i\not{\partial}_1 - m_a)S_F^a(x_1,x_5) = \delta^{(4)}(x_1-x_5) \qquad \text{(A.17)}$$
$$(i\not{\partial}_2 - m_b)S_F^b(x_2,x_6) = \delta^{(4)}(x_2-x_6) \qquad \text{(A.18)}$$

より A.16 に左から $(i\not{\partial}_1 - m_a)(i\not{\partial}_2 - m_b)$ をかけると

$$(i\not{\partial}_1 - m_a)(i\not{\partial}_2 - m_b)\psi_{ab}(x_1,x_2) = i\int d^4x_3d^4x_4\bar{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)\psi_{ab}(x_3,x_4) \qquad \text{(A.19)}$$

これが微分-積分方程式の形で書いた Bethe-Salpeter 方程式である。
次に運動量空間での Bethe-Salpeter 方程式を書く。$\psi_{ab}(x_1,x_2), \bar{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)$ の Fourier 変換をそれぞれ

$$\chi_{ab}(p_1,p_2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2e^{i(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2)}\psi_{ab}(x_1,x_2) \qquad \text{(A.20)}$$
$$\bar{K}^{ab}(p_1,p_2;p_3,p_4) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4e^{i(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2-p_3\cdot x_3-p_4\cdot x_4)}\bar{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4) \qquad \text{(A.21)}$$

と定義する。(A.19) を Fourier 変換し、右辺に $\int d^4x_3'd^4x_4'\delta^{(4)}(x_3'-x_3)\delta^{(4)}(x_4'-x_4)$ を入れると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}(i\not{\partial}_1 - m_a)(i\not{\partial}_2 - m_b)\psi_{ab}(x_1,x_2)\\ &\quad= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4d^4x_3'd^4x_4'\delta^{(4)}(x_3'-x_3)\delta^{(4)}(x_4'-x_4)\\ &\qquad\times e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\bar{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)\psi_{ab}(x_3,x_4) \qquad \text{(A.22)}\end{aligned}$$

左辺を部分積分し、右辺の $\delta$ 関数を $p_1', p_2'$ 積分の形にすると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1 d^4x_2[(-i\not{\partial}_1 - m_a)(-i\not{\partial} - m_b)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}]\psi_{ab}(x_1,x_2)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1 d^4x_2(\not{p}_1 - m_a)(\not{p}_2 - m_b)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\psi_{ab}(x_1,x_2)\\ &= (\not{p}_1 - m_a)(\not{p}_2 - m_b)\chi_{ab}(p_1,p_2) \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= -\underline{\frac{1}{(2\pi)^4}}\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \underline{d^4x_3' d^4x_4'}\int d^4p_1' d^4p_2'\\ &\qquad \underline{e^{ip_1'(x_3'-x_3)}e^{ip_2'(x_4'-x_4)}}e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\bar{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)\underline{\psi_{ab}(x_3',x_4')}\\ &= -\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4\int d_4p_1' d^4p_2'\\ &\qquad e^{i(p_1x_1+p_2x_2-\underline{p_1'x_3-p_2'x_4})}\bar{K}^{ab}(x_1,x_2;x_3,x_4)\underline{\chi_{ab}(p_1',p_2')}\\ &= -\int d^4p_1' d^4p_2' \bar{K}^{ab}(p_1,p_2;p_1',p_2')\chi_{ab}(p_1',p_2') \end{aligned} \tag{A.24}$$

よって

$$(\not{p}_1 - m_a)(\not{p}_2 - m_b)\chi_{ab}(p_1,p_2) = -\int d^4p_1' d^4p_2' \bar{K}^{ab}(p_1,p_2;p_1',p_2')\chi_{ab}(p_1',p_2') \tag{A.25}$$

これが運動量空間での Bethe-Salpeter 方程式である。

positronium の場合は $m_a = m_b$ であるので 2 粒子の質量が等しいときの方程式を導いておこう。

$$P = p_1 + p_2 \qquad , \qquad p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \tag{A.26}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 = \frac{1}{2}P + p \qquad , \qquad p_2 = \frac{1}{2}P - p \tag{A.27}$$

と全運動量 $P$ と相対運動量 $p$ を定義し、方程式を書き換える。運動量保存により

$$\bar{K}^{ab}(p_1,p_2;p_1',p_2') = \delta^{(4)}(P - P')\bar{K}^{ab}(p,p';P) \tag{A.28}$$

(A.27) , (A.28) を (A.25) に代入すると

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}\not{P}^a + \not{p}^a - m\right)\left(\frac{1}{2}\not{P}^b - \not{p}^b - m\right)\chi_{ab}(p,P)\\ &\quad = -\int d^4p' d^4P' \left|\frac{\partial(p_1',p_2')}{\partial(p',P)}\right| \bar{K}^{ab}(p,p';P')\delta^{(4)}(P - P')\chi_{ab}(p',P')\\ &\quad = -\int d^4p' \bar{K}^{ab}(p,p';P)\chi_{ab}(p',P) \end{aligned} \tag{A.29}$$

重心の運動量が $K$ であるとき

$$\chi_{ab}(p,P) = \delta^{(4)}(P - K)$$

$$p' = p + k$$

を代入して

$$\left(\frac{1}{2}\not{K}^a + \not{p}^a - m\right)\left(\frac{1}{2}\not{K}^b - \not{p}^b - m\right)\chi_{ab}(p) = -\int d^4k \bar{K}^{ab}(p,p+k;K)\chi_{ab}(p+k) \tag{A.30}$$

この積分方程式は $K$ の不連続な固有値を持ち、原理的には方程式を解くことによって 2 つの fermion の束縛状態の energy spectrum が求められる。(実際には $\bar{K}^{ab}$ は複雑なので厳密に解くことはできない。)

## A.2 The Bethe-Salpeter Equation for Positronium

前節では一般の 2 粒子の束縛状態を扱っていたが、ここで粒子 $a$ を electron、粒子 $b$ を positron として、粒子と反粒子の束縛状態である positronium についての Bethe-Salpeter 方程式 (A.30) を導出する。

electron 1 粒子を表す波動関数は (A.1) であり、同様に positron 1 粒子を表す波動関数は

$$\bar{\psi}_b(x) = i \int d\sigma(x') \bar{\psi}_b(x') \not{n}(x') S_F^b(x, x') \tag{A.31}$$

である。前節と全く同様に、2 粒子が相互作用をしていないとき、2 粒子系の波動関数は

$$\psi^0_{\mu\sigma}(x_1, x_2) = \psi_\mu(x_1) \bar{\psi}_\sigma(x_2) \tag{A.32}$$

であり、ここで $\mu$ は electron の波動関数のスピノール添字であり、$\sigma$ は positron の添字である。(A.31) より相互作用をしている 2 粒子系の波動関数は

$$\psi_{\mu\sigma}(x_3, x_4) = \int d\sigma(x_1) d\sigma(x_2) S_{\mu\sigma\mu\tau}(x_3, x_4; x_1, x_2) \not{n}_{\nu\nu'}(x_1) \not{n}_{\tau\tau'}(x_2) \psi_{\nu'\tau'}(x_1, x_2) \tag{A.33}$$

である。既約な kernel $\bar{K}$ を用いて $S_{\mu\sigma\nu\tau}$ を(A.14) のように書き表し、(第一項の符号が負であること以外は全く同じ表式になる。) (A.33) に代入すると positronium における Bethe-Salpeter 方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \psi_{\mu\sigma}(x_1, x_2) =& \phi_{\mu\sigma}(x_1, x_2) + \int d^4x_3 d^4x_4 d^4x_5 d^4x_6 \\ & \times i S_{F\mu\mu'}(x_1, x_5) i S_{F\sigma\sigma'}(x_6, x_2) \bar{K}_{\mu'\sigma'\nu'\tau'}(x_5, x_6; x_3, x_4) \psi_{\nu'\tau'}(x_3, x_4) \end{aligned} \tag{A.34}$$

この方程式を運動量空間における式に書き換え、重心座標と相対座標を使うと ((A.18) は符号が逆になることに注意)、最終的な式が得られる。

$$\left(\frac{1}{2}\not{P} + \not{p} - m\right)_{\mu\mu'} \left(\frac{1}{2}\not{P} - \not{p} + m\right)_{\sigma\sigma'} \chi_{\mu'\sigma'}(p, P) = \int d^4p' \bar{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(p, p'; P) \chi_{\nu\tau}(p', P) \tag{A.35}$$

## A.3 The Bethe-Salpeter Equation In Lowest Order

Kernel $\bar{K}$ は無限個の Feynman diagrams の和であるため、式 (A.35) は厳密に解くことはできない。そこで $\bar{K}$ の摂動の最低次の項まで考えて方程式を解く。

$\bar{K}$ の最低次の項は次の 2 つである。

Feynman rule より、

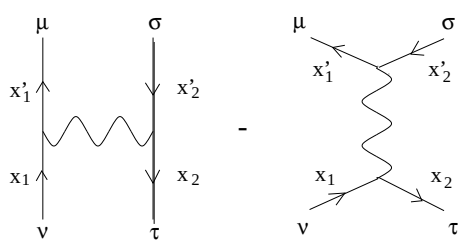



Fig. A.5: Interaction in the lowest order

$$\begin{aligned}\bar{K}^0_{\mu\sigma\nu\tau}(p_1,p_2;p_1',p_2') =&\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_1'd^4x_2'e^{i(p_1x_1+p_2x_2+p_1'x_1'+p_2'x_2')}(-ie)^2\\ &\times(\gamma^\alpha_{\mu\nu}iD_{F\alpha\beta}(x_1,x_2)\gamma^\beta_{\tau\sigma}\delta^{(4)}(x_1-x_1')\delta^{(4)}(x_2-x_2')\\ &\quad-\gamma^\alpha_{\mu\sigma}iD_{F\alpha\beta}(x_1,x_1')\gamma^\beta_{\tau\nu}\delta^{(4)}(x_1-x_2)\delta^{(4)}(x_1'-x_2'))\\ =&\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1d^4x_2e^{i[(p_1-p_1')x_1+(p_2-p_2')x_2]}(-ie)^2\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}iD_{F\alpha\beta}(x_1,x_2)\\ &-\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1d^4x_1'e^{i[(p_1+p_2)x_1-(p_1'+p_2')x_1']}(-ie)^2\gamma^\alpha_{\mu\sigma}\gamma^\beta_{\tau\nu}iD_{F\alpha\beta}(x_1,x_1')\\ =&\delta^{(4)}(P-P')\frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4}\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}iD_{F\alpha\beta}(p-p')\\ &-\delta^{(4)}(P-P')\frac{(-ie)^2}{(2\pi)^4}\gamma^\alpha_{\mu\sigma}\gamma^\beta_{\tau\nu}iD_{F\alpha\beta}(P)\end{aligned}\tag{A.36}$$

ここで前節同様 $P,p$ は重心座標、相対座標である。

$$\begin{aligned}P=p_1+p_2\quad&,\quad P'=p_1'+p_2'\\ p=\frac{1}{2}(p_1-p_2)\quad&,\quad p'=\frac{1}{2}(p_1'-p_2')\end{aligned}\tag{A.37}$$

運動量保存を考慮して (A.36) を書き換えると

$$\bar{K}^0_{\mu\sigma\nu\tau}(p,p';P)=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}D_{F\alpha\beta}(p-p')+\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\gamma^\alpha_{\mu\sigma}\gamma^\beta_{\tau\nu}D_{F\alpha\beta}(P)\tag{A.38}$$

式(A.38) を式(A.35) に代入し、$p'=p+k$、重心の運動量を $K$ とすると摂動の最低次までの positronium の Bethe-Salpeter 方程式が得られる。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}\not{K}+\not{p}-m\right)_{\mu\mu'}\left(\frac{1}{2}\not{K}-\not{p}+m\right)_{\sigma\sigma'}\chi_{\mu'\sigma'}(p)\\ &\quad=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}\int d^4k(D_{F\alpha\beta}(k)-D_{F\alpha\beta}(K))\chi_{\nu\tau}(p+k)\end{aligned}\tag{A.39}$$

## A.4 The Nonretarded Limit

式 (A.39) の kernel はまだ実際に積分計算するには複雑である。そこで propagator $D_F^{\mu\nu}(k)$ の振動数依存性を無視する、すなわち

$$D_F^{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k})\quad\rightarrow\quad D_F^{\mu\nu}(0,\boldsymbol{k})\tag{A.40}$$

とする。これは相互作用の retardation を無視することにあたる。

この nonretarded limit で式(A.39) を解く。両辺に $\gamma_0^a\gamma_0^b$ をかけると (前節でも言ったように $\gamma^a,\gamma^b$ はそれぞれ electron の波動関数 $\psi_a$、positron の波動関数 $\bar{\psi}_b$ にかかる行列である。)

$$\begin{aligned}(\text{左辺})\quad&=\quad\gamma_0^a\left(\frac{1}{2}\gamma_\mu^aK^\mu+\gamma_\mu^ap^\mu-m\right)\gamma_0^b\left(\frac{1}{2}\gamma_\nu^bK^\nu-\gamma_\nu^bp^\nu-m\right)\chi_{ab}(p)\\ &\equiv\quad\hat{F}\chi_{ab}(p)\end{aligned}\tag{A.41}$$

重心系で考えると

$$K=(2m-E_B,\mathbf{0})=(E,\mathbf{0})$$

であるので、$\boldsymbol{\alpha}=\gamma_0\boldsymbol{\gamma}$ 、$\beta=\gamma_0$ を使って上式を書き直すと、

$$\begin{aligned}\hat{F}(p)\quad&=\quad\left(\frac{1}{2}E-\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{p}-\beta_am+p_0\right)\left(\frac{1}{2}E+\boldsymbol{\alpha}_b\cdot\boldsymbol{p}-\beta_bm-p_0\right)\\ &=\quad\left(\frac{1}{2}E-\hat{H}_a(\boldsymbol{p})+p_0\right)\left(\frac{1}{2}E-\hat{H}_b(\boldsymbol{p})-p_0\right)\end{aligned}\tag{A.42}$$

ここで $\hat{H}_a(\boldsymbol{p}), \hat{H}_b(\boldsymbol{p})$ はそれぞれ electron と positron の free の Dirac Hamiltonian である。

$$\begin{aligned}\hat{H}_a(\boldsymbol{p}) &= \boldsymbol{\alpha}_a \cdot \boldsymbol{p} + \beta_a m \\ \hat{H}_b(\boldsymbol{p}) &= -\boldsymbol{\alpha}_b \cdot \boldsymbol{p} + \beta_b m\end{aligned}$$

次に (A.39) の右辺を考える。(A.40) の近似を使うと $\int d^4k D_F^{\mu\nu}(0,\boldsymbol{k})\chi_{ab}(p+k)$ の振動数の積分を先に実行することができる。右辺の振動数積分を実行し

$$\phi_{ab}(\boldsymbol{p}) = \int dp_0 \chi_{ab}(p_0, \boldsymbol{p}) \tag{A.43}$$

と、運動量 $p$ の空間成分のみに依る波動関数を $\phi(\boldsymbol{p})$ と定義すると、(A.39) は近似の式として次のように書ける。

$$\begin{aligned}\hat{F}(p)\chi_{ab}(p) &= \frac{-ie^2}{2\pi}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\gamma_0^a\gamma_\mu^a\gamma_0^b\gamma_\nu^b(D_F^{\mu\nu}(0,\boldsymbol{k}) - D_F^{\mu\nu}(K,\boldsymbol{0}))\phi_{ab}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) \\ &\equiv \Gamma(\boldsymbol{p})\end{aligned} \tag{A.44}$$

左辺も $p_0$ 積分を実行し、空間成分 $\boldsymbol{p}$ のみによる量にしよう。そのために、正振動数、負振動数の波動関数への projection operator を以下のように導入する。

$$\hat{\Lambda}_\pm^n(\boldsymbol{p}) = \frac{\omega(\boldsymbol{p}) \pm \hat{H}_n(\boldsymbol{p})}{2\omega(\boldsymbol{p})} \qquad n = a, b \tag{A.45}$$

ここで $\omega(\boldsymbol{p}) = +\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}$ である。$\hat{H}_n^2(\boldsymbol{p}) = \omega^2(\boldsymbol{p})$ より $\hat{\Lambda}_\pm^n$ は以下の性質を満たす。

$$(\hat{\Lambda}_\pm^n)^2 = \hat{\Lambda}_\pm^n \quad , \quad \hat{\Lambda}_+^n\hat{\Lambda}_-^n = 0 \quad , \quad \hat{\Lambda}_+^n + \hat{\Lambda}_-^n = \mathbf{1}^n \tag{A.46}$$

$$\hat{H}_n(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}_\pm^n(\boldsymbol{p}) = \hat{\Lambda}_\pm^n(\boldsymbol{p})\hat{H}_(^n\boldsymbol{p}) = \pm\omega(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}_\pm^n(\boldsymbol{p}) \tag{A.47}$$

この 2 式より、式(A.44) の両辺に $\hat{\Lambda}_\pm^a(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}_\pm^b(\pm$ の組合わせは 4 通りのどれでもよい。$)$ を作用させると

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_\pm^a(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}_\pm^b\hat{F}(p)\chi_{ab}(p) &= \hat{\Lambda}_\pm^a(\boldsymbol{p})\left(\frac{1}{2}E - \hat{H}_a(\boldsymbol{p}) + p_0\right)\hat{\Lambda}_\pm^b\left(\frac{1}{2}E - \hat{H}_b(\boldsymbol{p}) - p_0\right)\chi_{ab}(p) \\ &= \left(\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) + p_0\right)\left(\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) - p_0\right)\hat{\Lambda}_\pm^a(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}_\pm^b(\boldsymbol{p})\chi_{ab}(p) \\ &\equiv \left(\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) + p_0\right)\left(\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) - p_0\right)\chi_{\pm\pm}(p)\end{aligned} \tag{A.48}$$

よって(A.44) は

$$\left(\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) + p_0\right)\left(\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) - p_0\right)\chi_{\pm\pm}(p) = \hat{\Lambda}_\pm^a(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}_\pm^b(\boldsymbol{p})\Gamma(\boldsymbol{p}) \tag{A.49}$$

となる。$\phi_{ab}(\boldsymbol{p})$ と全く同様に、$\chi_{\pm\pm}(p)$ を $p_0$ 積分した関数を $\phi_{\pm\pm}(\boldsymbol{p})$ と定義する。(A.49) より

$$\begin{aligned}\phi_{\pm\pm}(\boldsymbol{p}) &= \int dp_0 \chi_{\pm\pm}(p) \\ &= \int dp_0 \frac{1}{\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) + p_0} \times \frac{1}{\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) - p_0}\hat{\Lambda}_\pm^a(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}_\pm^b(\boldsymbol{p})\Gamma(\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

ここでどのように pole をよける積分経路を取るかが問題であるが、因果律を保つために Feynman propagator の積分や S 行列の計算で $t$ を $t + i\epsilon$、$p$ を $p - i\epsilon$ とずらして pole をよけるという境界条件を課していたのと同様に、$\omega(\boldsymbol{p}) \to \omega(\boldsymbol{p}) - i\epsilon$ と振動数を負の虚数方向にずらして積分するという境界条件を課す。

$$\phi_{\pm\pm}(\boldsymbol{p}) = \left(\int dp_0 \frac{1}{\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) + p_0 \pm i\epsilon} \times \frac{1}{\frac{1}{2}E \mp \omega(\boldsymbol{p}) - p_0 \pm i\epsilon}\right)\Gamma_{\pm\pm}(\boldsymbol{p})$$

ここで

$$\Gamma_{\pm\pm}(\boldsymbol{p}) \equiv \hat{\Lambda}^a_{\pm}(\boldsymbol{p})\hat{\Lambda}^b_{\pm}(\boldsymbol{p})\Gamma(\boldsymbol{p})$$

である。留数定理を使って積分を実行すると

$$\begin{aligned}
\phi_{++}(\boldsymbol{p}) &= -\frac{2\pi i}{E-2\omega(\boldsymbol{p})}\Gamma_{++}(\boldsymbol{p}) && \text{(A.50a)}\\
\phi_{--}(\boldsymbol{p}) &= \frac{2\pi i}{E+2\omega(\boldsymbol{p})}\Gamma_{--}(\boldsymbol{p}) && \text{(A.50b)}\\
\phi_{+-}(\boldsymbol{p}) &= \phi_{-+}(\boldsymbol{p}) = 0 && \text{(A.50c)}
\end{aligned}$$

方程式は

$$(E-2\omega(\boldsymbol{p}))\phi_{++}(\boldsymbol{p}) + (E+2\omega(\boldsymbol{p}))\phi_{--}(\boldsymbol{p}) = -2\pi i(\Gamma_{++}(\boldsymbol{p}) - \Gamma_{--}(\boldsymbol{p})) \qquad \text{(A.51)}$$

となる。(A.46)、(A.47) を使うと

$$\begin{aligned}
-2\omega\phi_{++} + 2\omega\phi_{--} &= (-\omega\hat{\Lambda}^a_+\hat{\Lambda}^b_+ - \hat{\Lambda}^a_+\omega\hat{\Lambda}^b_+ + \omega\hat{\Lambda}^a_-\hat{\Lambda}^b_- + \hat{\Lambda}^a_-\omega\hat{\Lambda}^b_-)\phi\\
&= (\hat{\Lambda}^a_+\hat{\Lambda}^b_+ + \hat{\Lambda}^a_-\hat{\Lambda}^b_-)(-\hat{H}_a - \hat{H}_b)\phi\\
&= (1 - \hat{\Lambda}^a_+\hat{\Lambda}^b_- - \hat{\Lambda}^a_-\hat{\Lambda}^b_+)(-\hat{H}_a - \hat{H}_b)\phi\\
&= (-\hat{H}_a - \hat{H}_b)\phi
\end{aligned}$$

よって $\hat{\Lambda}(\boldsymbol{p}) \equiv \hat{\Lambda}_{++}(\boldsymbol{p}) - \hat{\Lambda}_{--}(\boldsymbol{p})$ と書くと、(A.51) の右辺は $-2\pi i\hat{\Lambda}(\boldsymbol{p})\Gamma(\boldsymbol{p})$ になり、nonretarded limit での Bethe-Salpeter 方程式が得られる。

$$(E - \hat{H}_a(\boldsymbol{p}) - \hat{H}_b(\boldsymbol{p}))\phi(\boldsymbol{p}) = -2\pi i\hat{\Lambda}(\boldsymbol{p})\Gamma(\boldsymbol{p}) \qquad \text{(A.52)}$$

1 摂動の最低次の項までの近似では $\Gamma(\boldsymbol{p})$ は(A.44) で定義されたものを使う。

ここで $\hat{\Lambda}(\boldsymbol{p}) \to \mathbf{1}$ として負エネルギー解を無視できると仮定する。すると(A.52) に(A.44) を代入し、また $\phi(\boldsymbol{p})$ を Fourier 変換して座標空間の波動関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ に書き換えると

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}(E - \hat{H}_a(\boldsymbol{p}) - \hat{H}_b(\boldsymbol{p}))\phi(\boldsymbol{p})\\
&\qquad = -e^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\gamma^a_0\gamma^a_\mu\gamma^b_0\gamma^b_\nu(D_F^{\mu\nu}(0,\boldsymbol{k}) - D_F^{\mu\nu}(K,\mathbf{0}))\phi(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E - \hat{H}_a(i\nabla) - \hat{H}_b(i\nabla))\phi(\boldsymbol{r}) &= \left(-e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\gamma^a_0\gamma^a_\mu\gamma^b_0\gamma^b_\nu(D_F^{\mu\nu}(0,\boldsymbol{k}) - D_F^{\mu\nu}(K,\mathbf{0}))\right)\phi(\boldsymbol{r})\\
&\equiv (U_1(\boldsymbol{r}) + U_2(\boldsymbol{r}))\phi(\boldsymbol{r}) && \text{(A.53)}
\end{aligned}$$

となる。この式は相互作用の有効ポテンシャルが $U_1(\boldsymbol{r}) + U_2(\boldsymbol{r})$ である Dirac 方程式と同じ形である。$U_1(\boldsymbol{r})$ は Coulomb 相互作用、$U_2(\boldsymbol{r})$ は Virtual annihilation によるポテンシャルである。

以下では Feynman gauge で $U_1(\boldsymbol{r})$ を計算する。$U_2(\boldsymbol{r})$ は複雑なので最後に結果のみを書く。Feynman gauge では

$$\begin{aligned}
D_F^{ij}(\boldsymbol{k}) &= -\frac{1}{k^2}\left(\frac{k^ik^j}{|\boldsymbol{k}|^2} - \delta_{ij}\right)\\
&\to \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\left(\frac{k^ik^j}{|\boldsymbol{k}|^2} - \delta_{ij}\right) && \text{(A.54a)}\\
D_F^{00}(\boldsymbol{k}) &= +\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2} && \text{(A.54b)}\\
D_F^{0i}(\boldsymbol{k}) &= D_F^{i0}(\boldsymbol{k}) = 0 && \text{(A.54c)}
\end{aligned}$$

なので(A.53) に代入すると

$$U_1(\boldsymbol{r}) = -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \left[\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{\alpha}_b\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|^2} - \boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_b\right) + \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\right]$$

積分を実行すると、$\displaystyle\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{k}|^2} = \frac{1}{4\pi r}$ より $U_1(\boldsymbol{r})$ の第二項と第三項はよく知られた Coulomb ポテンシャルを与える。第一項の積分は $\nabla_{\boldsymbol{k}}\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\right) = -\dfrac{2\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|^4}$ と部分積分を使うと

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,\frac{\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{\alpha}_b\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|^4} &= -i\,(\boldsymbol{a}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}})\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|^4}\right)\\
&= -\frac{i}{2}\,(\boldsymbol{a}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}})\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,(\boldsymbol{b}\cdot\nabla_{\boldsymbol{k}}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\\
&= \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{a}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})\frac{1}{4\pi r}\\
&= \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{2r}\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}^2}\right) \qquad \text{(A.55)}
\end{aligned}$$

よって有効ポテンシャル $U_1(\boldsymbol{r})$ は

$$\begin{aligned}
U_1(\boldsymbol{r}) &= -\frac{e^2}{4\pi}\left[\frac{1}{2r}\left(\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_b - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\alpha}_b\cdot\boldsymbol{r})}{r^2}\right) - \frac{\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_b}{r} + \frac{1}{r}\right]\\
&= -\frac{e^2}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2r}\left(\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_b + \frac{(\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\alpha}_b\cdot\boldsymbol{r})}{r^2}\right)\right] \qquad \text{(A.56)}
\end{aligned}$$

である。これは Breit interaction と呼ばれている。

## A.5 Nonrelativistic Reduction of the Two-Body Equation Applied to Positronium

前節で出したポテンシャル項を使って Dirac 方程式(A.53) を解いて hyperfine structure を計算しよう。

通常 1 粒子 4 成分 Dirac 方程式は非相対論的極限で 2 成分の Pauli 方程式になる。Pauli 方程式には Foldy Wouthuysen technique を使って帰着させることができる。この方法は Hamiltonian から odd operator $\mathcal{O}$ を除く unitary 変換 $\hat{U}_F$ を作用させる方法である。ここで odd operator $\mathcal{O}$ は Dirac spinor 中の 2 つの 2 成分 spinor の成分を結び付ける operator であり、$\alpha$ や $\gamma$ などである。それに対し even operator $\mathcal{E}$ は 2 成分 spinor に対して対角な operator であり、$\beta$ や $\mathbf{1}$ などである。Hamiltonian が even operator のみで書かれていると 2 つの 2 成分 spinor は Hamiltonian によってまざらないので Dirac 方程式はそれぞれ独立な 2 成分 Pauli 方程式になる。
もとの Hamiltonian が

$$H = \beta m + \mathcal{E} + \mathcal{O} \qquad \text{(A.57)}$$

の形で書かれているとき、Foldy と Wouthuysen によると unitary 変換すると

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= \hat{U}_F^{-1} H \hat{U}_F\\
&= \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}\mathcal{O}^2 + \frac{1}{8m^2}\,[[\mathcal{O},\mathcal{E}],\mathcal{O}] - \frac{\beta}{8m^3}\mathcal{O}^3 + \ldots \qquad \text{(A.58)}
\end{aligned}$$

となる。

これと同じ方法が 2 体問題にも使える。16 成分の波動関数の方程式(A.53) を非相対論的極限をとり、各粒子の 4 成分の方程式に帰着させる。前の議論と同様に波動関数の粒子の成分と 4 成分 spinor 中の成分を結び付

ける operator を odd operator と定義し、odd operator を除く unitary 変換 $\hat{U}_{12}$ を作用させる。
一般に 2 体問題の Hamiltonian は次式のように書ける。

$$H_{12} = \beta^{(1)} m_1 + \beta^{(2)} m_2 + (\mathcal{E}\mathcal{E}) + (\mathcal{E}\mathcal{O}) + (\mathcal{O}\mathcal{E}) + (\mathcal{O}\mathcal{O}) \tag{A.59}$$

ここで $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ は $16 \times 16$ 行列で、次のように定義される。

$$\beta^{(1)} \equiv \beta \otimes \mathbf{1} \tag{A.60}$$
$$\beta^{(2)} \equiv \mathbf{1} \otimes \beta \tag{A.61}$$

Chraplivy によると、unitary 変換によって Hamiltonian は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{12} &\equiv \hat{U}_{12}^{-1} H_{12} \hat{U}_{12} \\
&= \beta^{(1)} m_1 + \beta^{(2)} m_2 + (\mathcal{E}\mathcal{E}) + \frac{\beta^{(1)}}{2m_1}(\mathcal{O}\mathcal{E})^2 + \frac{\beta^{(2)}}{2m_2}(\mathcal{E}\mathcal{O})^2 - \frac{\beta^{(1)}}{8m_1^3}(\mathcal{O}\mathcal{E})^4 - \frac{\beta^{(2)}}{8m_2^3}(\mathcal{E}\mathcal{O})^4 \\
&\quad + \frac{1}{8m_1^2}\left[[(\mathcal{O}\mathcal{E}),(\mathcal{E}\mathcal{E})]_-,(\mathcal{O}\mathcal{E})\right]_- + \frac{1}{8m_2^2}\left[[(\mathcal{E}\mathcal{O}),(\mathcal{E}\mathcal{E})]_-,(\mathcal{E}\mathcal{O})\right]_- \\
&\quad + \frac{\beta^{(1)}\beta^{(2)}}{4m_1 m_2}\left[[(\mathcal{O}\mathcal{E}),(\mathcal{O}\mathcal{O})]_+,(\mathcal{E}\mathcal{O})\right]_+ + \frac{\beta^{(1)}+\beta^{(2)}}{4(m_1+m_2)}(\mathcal{O}\mathcal{O})^2 + \ldots
\end{aligned} \tag{A.62}$$

$\tilde{H}_{12}$ は 16 成分波動関数に作用するが、各粒子の成分のみの 4 つの 4 成分方程式に分解することができる。
以上の方法を Positronium に適用する。(A.53) において Breit interaction $U_1$ のみを考えると

$$\begin{aligned}
H^{(1)} &= \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{p} + \beta^{(1)} m_1 \\
H^{(2)} &= -\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \cdot \boldsymbol{p} + \beta^{(2)} m_2
\end{aligned}$$

より(A.53) を explicit に書くと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&H\Phi(\boldsymbol{r}) \\
&= \left\{ \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{p} - \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \cdot \boldsymbol{p} + \beta^{(1)} m_1 + \beta^{(2)} m_2 + \frac{e_1 e_2}{r}\left[ \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(2)}}{2} - \frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \cdot \boldsymbol{r})}{2r^2} \right] \right\} \Phi(r) \\
&= E\Phi(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{A.63}$$

Positronium の場合、$m_1 = m_2 = m, e_1 = -e_2 = e$ である。Hamiltonian 中の operator を even と odd に分けると、

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}\mathcal{E}) &= -\frac{e^2}{r}\mathbf{1} \\
(\mathcal{E}\mathcal{O}) &= -\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \cdot \boldsymbol{p} \\
(\mathcal{O}\mathcal{E}) &= +\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{p} \\
(\mathcal{O}\mathcal{O}) &= +\frac{e^2}{2r}\left[ \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(2)} - \frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} \right]
\end{aligned}$$

である。これより式(A.62) に出てくる項を計算すると

$$(\mathcal{O}\mathcal{E})^2 = (\mathcal{E}\mathcal{O})^2 = \boldsymbol{p}^2 \tag{A.64}$$
$$(\mathcal{O}\mathcal{E})^4 = (\mathcal{E}\mathcal{O})^4 = \boldsymbol{p}^4 \tag{A.65}$$
$$\left\{ [[(\mathcal{O}\mathcal{E}),(\mathcal{E}\mathcal{E})]_-,(\mathcal{O}\mathcal{E})]_- + [[(\mathcal{E}\mathcal{O}),(\mathcal{E}\mathcal{E})]_-,(\mathcal{E}\mathcal{O})]_- \right\} = e^2\left[ (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}) \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \times \boldsymbol{p}) + 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}) \right] \tag{A.66}$$
$$\begin{aligned}
[[(\mathcal{O}\mathcal{E}),(\mathcal{E}\mathcal{E})]_+,(\mathcal{O}\mathcal{E})]_+ &= -2e^2\left[ \frac{p^2}{r} + \boldsymbol{r}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \boldsymbol{p}\right)\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)})\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \times \boldsymbol{p}\right) \right] \\
&\quad - e^2\left[ \frac{\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(2)}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \cdot \boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\delta^3(\boldsymbol{r}) \right]
\end{aligned} \tag{A.67}$$
$$(\mathcal{O}\mathcal{O})^2 = \left[ \frac{3e^4}{2r^2} - 2\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(2)} + \frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} \right] \tag{A.68}$$

これらの値を(A.62) に代入し、$\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \to \mathbf{1}$ とすると 2 成分 Pauli spinor 方程式が得られる。

$$H_{12}^{\mathrm{P}auli}\psi_{12}(\boldsymbol{r}) = E\psi_{12}(\boldsymbol{r}) \tag{A.69}$$

ここで

$$H_{12}^{\mathrm{P}auli} \equiv H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 \tag{A.70}$$

であり、

$$\begin{aligned}
H_0 &= -\frac{e^2}{r} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} \\
H_1 &= -\frac{1}{4m^3}\boldsymbol{p}^4 \\
H_2 &= -\frac{e^2}{2m^3}\left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r} + \boldsymbol{r}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{p}\right)\boldsymbol{p}\right] + \frac{e^2}{m^2}\pi\delta^3(\boldsymbol{r}) \\
H_3 &= \frac{3e^2}{4m^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{p}\right)(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(2)}) \\
H_4 &= -\frac{e^2}{4m^2}\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma})\delta^3(\boldsymbol{r})\right]
\end{aligned}$$

電子、陽電子の Virtual Annihilation Term $U_2(\boldsymbol{r})$ を入れて計算すると Pauli 方程式の右辺に摂動項 $H_5$ が加わり、

$$H_5 = \frac{\pi\alpha}{2m^2}(3 + \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)})\delta^3(\boldsymbol{r})$$

である。

$H_i(i = 1\ldots5)$ は $H_0$ からのエネルギー固有値のずれ $\Delta E$ を表す摂動項であり、p-Ps におけるずれ $\Delta E_S$ は

$$\begin{aligned}
\Delta E_S &= \langle\, H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 \,\rangle_S \\
&= -\frac{1}{64}m\alpha^4 + 0 + 0 - \frac{1}{4}m\alpha^4 + 0
\end{aligned} \tag{A.71}$$

o-Ps におけるずれ $\Delta E_T$ は

$$\begin{aligned}
\Delta E_T &= \langle\, H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 \,\rangle_T \\
&= -\frac{1}{64}m\alpha^4 + 0 + 0 + \frac{1}{12}m\alpha^4 + \frac{1}{4}m\alpha^4
\end{aligned} \tag{A.72}$$

よってこれより p-Ps と o-Ps のエネルギー固有値の差、hyperfine structure $\Delta W$ が $\mathcal{O}(\alpha^4)$ で求められ、

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \Delta E_T - \Delta E_S \\
&= \frac{1}{4}m\alpha^4\left(\frac{7}{3}\right)
\end{aligned} \tag{A.73}$$

となる。

# Appendix B

# The Selection Rules for Positronium

spin $\frac{1}{2}$ の fermion の場 $\psi(x)$ や gauge 場 $A_\mu(x)$ は Lorentz 群の表現になっていると同時に、非連続な変換である Parity 変換 $P$、Charge conjugation $C$、Time reversal $T$ の表現でもある。そして QED の Lagrangian は $P$、$C$、$T$ それぞれの変換に対して不変である。すなわち $P$、$C$、$T$ の固有値は保存され、この保存則からさまざまな選択則が導かれる。この章では $C$ 保存から本実験の triplet-positronium が $3\gamma$ に崩壊し、singlet-positronium が $2\gamma$ に崩壊するという選択則を導こう。

## B.1 Charge Conjugation Operator : $C$

Charge conjugation $C$ は次のように定義される。[1]

$$\begin{aligned} C\vec{A}(x)C^\dagger &= -\vec{A}(x) \quad , \quad C\vec{\Pi}(x)C^\dagger = -\vec{\Pi}(x) && \text{(B.1)} \\ C\psi(x)C^\dagger &= \eta_c\psi^c(x) \\ &\equiv \eta_c\gamma_2\psi^\dagger(x) && \text{(B.2)} \end{aligned}$$

ここで $\eta_c$ は constant phase factor で、$|\eta_c| = 1$ である。定義 (B.1)(B.2) を Fourier 展開すると、$\psi, \vec{A}$ の Fourier 成分である fermion、photon の creation,annihilation operator $a^\dagger_{\vec{p},s}, b^\dagger_{\vec{p},s}, \alpha^\dagger_{\vec{p},s}$ の $C$ の表現が求められる。

$$C\psi(x)C^\dagger = \sum_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(Ca_{\vec{p},s}C^\dagger u_{\vec{p},s}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} + Cb^\dagger_{\vec{p},s}C^\dagger v_{\vec{p},s}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}) \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned} \psi^c(x) &= \gamma_2\psi^\dagger(x) \\ &= \sum_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}[a^\dagger_{\vec{p},s}\gamma_2 u^*_{\vec{p},s}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} + b_{\vec{p},s}\gamma_2 v^*_{\vec{p},s}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}] \end{aligned}$$

ここで、今 $u, v$ を

$$v_{\vec{p},s} = \gamma_2 u^*_{\vec{p},s} \ , \ u_{\vec{p},s} = \gamma_2 v^*_{\vec{p},s}$$

と定義しているので

$$\psi^c(x) = \sum_{\vec{p},s}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(b_{\vec{p},s}u_{\vec{p},s}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} + a^\dagger_{\vec{p},s}v_{\vec{p},s}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}) \tag{B.4}$$

(B.3) と (B.4) を比べると

[1] convention は T.D.Lee "Particle Physics and Introduction to Field Theory" に従った。QED のゲージ場 $A_\mu(x)$ は Coulomb gauge をとり、$\vec{A}(x)$ としている。

$$Ca_{\vec{p},s}C^\dagger = \eta_c b_{\vec{p},s} \tag{B.5a}$$
$$Cb^\dagger_{\vec{p},s}C^\dagger = \eta_c a^\dagger_{\vec{p},s} \tag{B.5b}$$

(B.5b) の hermitian conjugate をとると

$$Ca^\dagger_{\vec{p},s}C^\dagger = \eta_c^* b^\dagger_{\vec{p},s} \tag{B.5c}$$

すなわち Charge conjugation operator $C$ は粒子を反粒子に変換する operator である。$\vec{A}$ も同様に Fourier 展開すると photon の creation operator $\alpha^\dagger_{\vec{p},s}$ の $C$ 変換が求められる。

$$C\alpha^\dagger_{\vec{p},s}C^\dagger = -\alpha^\dagger_{\vec{p},s} \tag{B.6}$$

## B.2 The Selection Rules

(B.6) より、

$$C\alpha^\dagger_1\alpha^\dagger_2\cdots\alpha^\dagger_n|\,0\,\rangle = (-1)^n\alpha^\dagger_1\alpha^\dagger_2\cdots\alpha^\dagger_n|\,0\,\rangle \tag{B.7}$$

よって $n$ 個の photon がある状態の $C$ 固有値は $(-1)^n$ である。

$^{2S+1}L_J$ 状態の positronium の $C$ 固有値は $(-1)^{L+S}$ であることを以下で示そう。$^{2S+1}L_J$ 状態の positronium は次のように書ける。

$$|\,^{2S+1}L_J\,\rangle = \sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z}\int d^3pY_{LM}(\hat{p})\chi_m(\sigma_z,\sigma'_z)C_{Mm}(p)a^\dagger_{\vec{p},\sigma_z}b^\dagger_{-\vec{p},\sigma'_z}|\,0\,\rangle \tag{B.8}$$

ここで $C_{Mm}(p)$ は Clebsch-Gordon 係数 $\langle\, L,M|m\,\rangle$ に運動量の動径部分に依存する関数をかけたものであり、$\chi_m(\sigma_z,\sigma'_z)$ はスピン関数で、$\sigma_z,\sigma'_z$ はそれぞれ electron,positron のスピンの $z$ 成分である。$\chi_m(\sigma_z,\sigma'_z)$ は $m=1$ (triplet) のとき 2 粒子について対称、$m=0$ (singlet) のとき 2 粒子について反対称なので

$$\chi_m(\sigma_z,\sigma'_z) = (-1)^{S+1}\chi_m(\sigma'_z,\sigma_z) \tag{B.9}$$

また

$$Y_{LM}(-\hat{p}) = (nn-1)^LY_{LM}(\hat{p}) \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned} Ca^\dagger_{\vec{p},\sigma_z}b^\dagger_{-\vec{p},\sigma'_z}|\,0\,\rangle &= Ca^\dagger_{\vec{p},\sigma_z}C^\dagger Cb^\dagger_{-\vec{p},\sigma'_z}C^\dagger|\,0\,\rangle \\ &= b^\dagger_{\vec{p},\sigma_z}a^\dagger_{-\vec{p},\sigma'_z}|\,0\,\rangle \\ &= -a^\dagger_{-\vec{p},\sigma'_z}b^\dagger_{\vec{p},\sigma_z}|\,0\,\rangle \end{aligned} \tag{B.11}$$

よって状態 $|\,^{2S+1}L_J\,\rangle$ に $C$ を作用させて(B.9)(B.10)(B.11) を使うと

$$\begin{aligned} C|\,^{2S+1}L_J\,\rangle &= \sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z}\int d^3pY_{LM}(\hat{p})\chi_m(\sigma_z,\sigma'_z)C_{Mm}(p)Ca^\dagger_{\vec{p},\sigma_z}b^\dagger_{-\vec{p},\sigma'_z}|\,0\,\rangle \\ &= -\sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z}\int d^3pY_{LM}(\hat{p})\chi_m(\sigma_z,\sigma'_z)C_{Mm}(p)a^\dagger_{-\vec{p},\sigma'_z}b^\dagger_{\vec{p},\sigma_z}|\,0\,\rangle \\ &= -\sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z}\int d^3pY_{LM}(-\hat{p})\chi_m(\sigma'_z,\sigma_z)C_{Mm}(p)a^\dagger_{\vec{p},\sigma_z}b^\dagger_{-\vec{p},\sigma'_z}|\,0\,\rangle \\ &= -\sum_{m,\sigma_z,\sigma'_z}\int d^3p(-1)^LY_{LM}(\hat{p})(-1)^{S+1}\chi_m(\sigma_z,\sigma'_z)C_{Mm}(p)a^\dagger_{\vec{p},\sigma_z}b^\dagger_{-\vec{p},\sigma'_z}|\,0\,\rangle \\ &= (-1)^{L+S}|\,^{2S+1}L_J\,\rangle \end{aligned} \tag{B.12}$$

以上により $^{2S+1}L_J$ 状態の positronium の $C$ 固有値は $(-1)^{L+S}$ である。
よって triplet $^3S_1$ 状態は $C=-1$、singlet $^1S_0$ 状態は $C=+1$ であるので、$C$ 保存からそれぞれ $3\gamma$、$2\gamma$ に崩壊するという選択則が得られる。

# Appendix C

# An Approximation

過去の論文 [1] では、(1.85) から、さらに $\varepsilon \sim \varepsilon_1 \sim \dfrac{x}{2}$ , $\varepsilon_2 \sim \dfrac{\kappa x}{2}$ と近似している。これより

$$\begin{aligned}
\gamma_+ &\sim \gamma_1 + \frac{\kappa x^2}{4}\omega_0 \\
\gamma &\sim 2\gamma_1 + \frac{\kappa x^2}{4}\omega_0 \\
v &\sim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}\frac{x\omega_0}{2}\frac{B_1}{B_0} \\
\omega' &\sim \omega - \frac{x^2}{4}\omega_0
\end{aligned} \tag{C.1}$$

となるので、$P_T$ は

$$\begin{aligned}
P_T &= \frac{\gamma_0(2\gamma_1 + \frac{\kappa x^2}{4}\omega_0)}{(\omega - \frac{x^2}{4}\omega_0)^2 + (2\gamma_1 + \frac{\kappa x^2}{4}\omega_0)^2(1+X)}XY \\
X &= \frac{|\varepsilon|^2 v^2}{4\gamma_+\gamma_1} \sim \frac{(\frac{x^2}{4})^2}{1+\frac{x^2}{4}}\frac{\omega_0^2}{4\gamma_1(\gamma_1 + \frac{\kappa x^2}{4}\omega_0)}\left(\frac{B_1}{B_0}\right) \\
Y &= \frac{|\varepsilon|^2}{1+|\varepsilon|^2}(p_{1\,1} + \frac{2\gamma_1}{\gamma_+}p_+) \sim \frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x^2}{4}}\left(p_{1\,1} + \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \frac{\kappa x^2}{4}\omega_0}p_+\right)
\end{aligned} \tag{C.2}$$

さらに、

$$\omega - \frac{x^2}{4}\omega_0 = \omega - \left(\frac{g'\mu_B}{\hbar}\right)^2\frac{B_0^2}{\omega_0} = \left(\frac{g'\mu_B}{\hbar}\right)^2\frac{1}{\omega_0}\left\{\left(\frac{\hbar}{g'\mu_B}\right)^2\omega_0\omega - B_0^2\right\} \tag{C.3}$$

であるから

$$P_T = \frac{\left(\frac{\hbar}{g'\mu_B}\right)^4\omega_0^2\gamma_0\left(2\gamma_1 + \frac{\kappa x^2}{4}\omega_0\right)}{\left\{\left(\frac{\hbar}{g'\mu_B}\right)^2\omega_0\omega - B_0^2\right\}^2 + \left(\frac{\hbar}{g'\mu_B}\right)^4\omega_0^2\left(2\gamma_1 + \frac{\kappa x^2}{4}\omega_0\right)^2(1+X)} \tag{C.4}$$

となる。

まとめると

$$P_T = \frac{B^4}{(B_0^2 - B_{0r}^2)^2 + \Gamma^4(1+X)}XY$$

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{(\frac{x^2}{4})^2}{1+\frac{x^2}{4}} \frac{\omega_0^2}{4\gamma_1(\gamma_1+\frac{\kappa x^2}{4}\omega_0)} \left(\frac{B_1}{B_0}\right) \\
Y &= \frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x^2}{4}} \left(p_{1\,1} + \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\frac{\kappa x^2}{4}\omega_0} p_+\right) \\
B &= \frac{\hbar}{g'\mu_B}\sqrt{\omega_0}\sqrt[4]{\gamma_0\left(2\gamma_1+\frac{\kappa x^2}{4}\omega_0\right)} \\
B_0 &= \frac{\hbar}{g'\mu_B}\sqrt{\omega_0\omega} \\
\Gamma &= \frac{\hbar}{g'\mu_B}\sqrt{\omega_0\left(2\gamma_1+\frac{\kappa x^2}{4}\omega_0\right)}
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

となり、この記述の方が、磁場を横軸に取った Lorentzian に見えやすいが、この時の共鳴磁場は、(C.5) より

$$
\begin{aligned}
B_{0r} &= \frac{\hbar}{g'\mu_B}\sqrt{\omega_0\omega} \\
&= 5757.9 \text{ [Gauss]}
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

であり、(1.87) とかなり違った値になってしまう。過去の実験が、この近似からどうやって Hyperfine Structure を求めたかは疑問である。