β-decay と Parity の破れ

Fermi はまず β-decay ($n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$) を記述する Lagrangian を1点において4つのフェルミオン ($n, p, e^-, \bar{\nu}_e$) が直接相互作用するモデルを提唱した。

これは $J_\mu^{(lepton)} = \bar{\Psi}_{e^-} \gamma_\mu \psi_{\bar{\nu}_e}$, $J_\mu^{(hadron)} = \bar{\Psi}_n \gamma_\mu \psi_p$ として、$J_\mu = J_\mu^{(lepton)} + J_\mu^{(hadron)}$ を作り、

$$\mathcal{L}_{int} = -g J_\mu^\dagger J^\mu$$ としたものであった。

ここで ψ は4成分の Dirac spinor である。

すると β-decay の散乱振幅は $\mathcal{M} = g(\bar{u}_e \gamma^\mu u_{\nu_e})(\bar{u}_p \gamma_\mu u_n)$ となる。

ところでこれは Lorentz 不変という制限下において拡張することができる。

その拡張は、

$\bar{\Psi}\psi$ が scalar, $\bar{\Psi}\gamma^5\psi$ が pseudoscalar, ($\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$)
$\bar{\Psi}\gamma^\mu\psi$ が vector $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ が axial vector, $\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ が反対称 tensor
($\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$) であることを用いて、

$$J = \bar{\Psi}_e (g_s + g_p\gamma^5)\psi_{\bar{\nu}_e} + \bar{\Psi}_n (g_s' + g_p'\gamma^5)\psi_p$$
$$J_\mu = \bar{\Psi}_e \gamma_\mu (g_V + g_A\gamma^5)\psi_{\bar{\nu}_e} + \bar{\Psi}_n \gamma_\mu (g_V' + g_A'\gamma^5)\psi_p$$
$$J_{\mu\nu} = g_T \bar{\Psi}_e \sigma_{\mu\nu}\psi_{\bar{\nu}_e} + g_T' \bar{\Psi}_n \sigma_{\mu\nu}\psi_p$$ というカレントを作って、

$$\mathcal{L}_{int} = -J^\dagger J - J_\mu^\dagger J^\mu - J_{\mu\nu}^\dagger J^{\mu\nu} - g\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} J^{\mu\nu\dagger} J^{\rho\lambda}$$

という Lorentz 不変な理論が作れる。
各々のパラメータ g_S, g_P …… g_T' は実験によって求める。
β-decay の際の e^- と $\bar{\nu}_e$ の角相関等の測定から、$g_S = g_S' = g_P = g_P' = g_T = g_T' = 0$ であることがわかっている。従って $J, J_\mu, J_{\mu\nu}$ の内生き残るのは J_μ のみであり、$\mathcal{L}_{int} = -J_\mu^\dagger J^\mu$ となる。
g_V, g_A, g_V', g_A' を見やすい別の形にかき直せば、

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}}\{\bar{u}_p \gamma^\mu (1 + \alpha'\gamma^5) u_n\}\{\bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \alpha\gamma^5) u_{\bar{\nu}_e}\} \quad \text{—①}$$

となり、$\alpha, \alpha' \neq 0$ のときは $\bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 u$ が axial であることから、parity 変換に対して、不変ではないことになる。

さて、前頁の相互作用から崩壊確率が電子のヘリシティによって違うことを示す。①より、

$$\text{崩壊確率} \propto |\mathcal{M}|^2 \propto T_{\mu\nu}{}^{(\mathrm{hadron})} T^{\mu\nu\,(\mathrm{lepton})}$$

$$\left(\begin{array}{l} T_{\mu\nu}{}^{(\mathrm{hadron})} = \mathrm{Tr}\left[u_n \bar{u}_n \gamma_\mu (1+\alpha^{*\prime}\gamma^5) u_p \bar{u}_p \gamma_\nu (1+\alpha'\gamma^5)\right] \\ T^{\mu\nu(\mathrm{lepton})} = \mathrm{Tr}\left[u_{\bar{\nu}_e} \bar{u}_{\bar{\nu}_e} \gamma^\mu (1+\alpha^*\gamma^5) u_e \bar{u}_e \gamma^\nu (1+\alpha\gamma^5)\right] \end{array} \right)$$

まず $T_{\mu\nu}{}^{(\mathrm{hadron})}$ を考える。neutron の静止系で考える。すると、proton も静止していると近似して良い。これは β-decay のエネルギーオーダーは $m_n - m_p \simeq 1\ \mathrm{MeV}$ で、m_p に比べれば無視できるからである。
更に、neutron、proton の spin も測定しないので、次のようにできる。

$$u_n \bar{u}_n \xrightarrow[\text{spin 平均}]{} \frac{1}{2}(\not{p}_n + m_n) \xrightarrow[\text{静止系}]{} \frac{1}{2} m_n (\gamma^0 + 1)$$

$$u_p \bar{u}_p \xrightarrow[\text{spin 和}]{} (\not{p}_p + m_p) \xrightarrow[\text{静止系}]{} m_p (\gamma^0 + 1)$$

従って

$$T_{\mu\nu}{}^{(\mathrm{hadron})} \propto \mathrm{Tr}\left[(\gamma^0+1)\gamma_\mu(1+\alpha^{*\prime}\gamma^5)(\gamma^0+1)\gamma_\nu(1+\alpha'\gamma^5)\right]$$

$$\propto (1+|\alpha'|^2) g_{0\mu} g_{0\nu} - |\alpha'|^2 g_{\mu\nu} \quad \text{——②}$$

次に $T^{\mu\nu\,(\mathrm{lepton})}$ を考える。neutrino の spin も測定しないので、spin について和をとり、質量も無視する。すると、

$$u_{\bar{\nu}_e} \bar{u}_{\bar{\nu}_e} \xrightarrow[\text{spin 和}]{} \not{k} + m_{\bar{\nu}_e} \xrightarrow[m_{\bar{\nu}_e}=0]{} \not{k} \qquad (p_{\nu_e} = k)$$

電子の spin のみ測定するので、電子の方は、

$$u_e \bar{u}_e = (\not{p} + m)(1 + s\gamma^5 \not{e})/2$$

ここで e^μ は電子の静止系において $(0, \hat{e})$ ($\hat{e}$ は単位 vector) となるような 4-vector で、$s = \pm 1$ はこの系における $\hat{e}$ 方向の spin 固有値である。詳しくは Appendix を参照されたい。

すると

$$T^{\mu\nu\,(\mathrm{lepton})} \propto \mathrm{Tr}\left[\not{k}\gamma^\mu(1+\alpha^*\gamma^5)(\not{p}+m)(1+s\gamma^5\not{e})\gamma^\nu(1+\alpha\gamma^5)\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\not{k}\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu(1+|\alpha|^2+(\alpha+\alpha^*)\gamma^5)\right] + sm\,\mathrm{Tr}\left[\not{k}\gamma^\mu\gamma^5\not{e}\gamma^\nu(1+|\alpha|^2+(\alpha+\alpha^*)\gamma^5)\right]$$

$T_{\mu\nu}{}^{(\mathrm{hadron})}$ は μ、ν に対して対称なので $T^{\mu\nu\,(\mathrm{lepton})}$ の反対称部は効かないので、結局

$$T^{\mu\nu\,(\mathrm{lepton})} \propto \mathrm{Tr}\left[\gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \not{D}\right] = 4\left[k^\nu D^\mu + D^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k\cdot D\right] \text{——③}$$

ここで $\not{D} \equiv (1+|\alpha|^2)\not{p} + (\alpha+\alpha^*) s m \not{e}$ である。

よって②、③より

$$|\mathcal{M}|^2 \propto T_{\mu\nu}^{(\mathrm{hadron})} T^{\mu\nu\,(\mathrm{lepton})}$$
$$\propto (1+|\alpha'|^2)(2k^0 D^0 - k\cdot D) - |\alpha'|^2(-2k\cdot D)$$
$$\propto (1+3|\alpha'|^2)k^0 D^0 + (1-|\alpha'|^2)\mathbb{k}\cdot\mathbb{D}$$

今我々はneutrinoは測定しないので、$\mathbb{k}$について積分して、第二項＝0 となるので、結局

$$|\mathcal{M}|^2 \propto D^0$$

となる。今は電子の縦偏極をみたいので、

$$e^\mu = \left(\frac{|\mathbb{P}|}{m}, \frac{P^0}{m}\frac{\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|}\right)$$

とすれば、

$$|\mathcal{M}|^2 \propto D^0 = P^0\left((1+|\alpha|^2) + (\alpha+\alpha^*)S\beta\right) \qquad \beta = \frac{|\mathbb{P}|}{P^0}$$

ここで電子のヘリシティの偏極度を P_i とおくと、

$$P_i = \frac{(S=+1\text{の崩壊確率}) - (S=-1\text{の崩壊確率})}{(S=+1\text{の崩壊確率}) + (S=-1\text{の崩壊確率})}$$

に上式を代入して、

$$\boxed{P_i = \frac{\alpha+\alpha^*}{1+|\alpha|^2}\beta}$$

$\alpha+\alpha^* \neq 0$ ならば、電子のヘリシティに偏りがあり、これは電子の速さに比例することがここからわかる。

※ 多くの実験では $P_i = -\beta$ つまり $\alpha = -1$ という結果となっており、従って

$$J_\mu^{(\mathrm{lepton})} \propto \bar{\Psi}_e \gamma_\mu (1-\gamma^5)\psi_{\bar{\nu}_e} = \bar{\Psi}_e\gamma_\mu\psi_{\bar{\nu}_e} - \bar{\Psi}_e\gamma_\mu\gamma^5\psi_{\bar{\nu}_e}$$

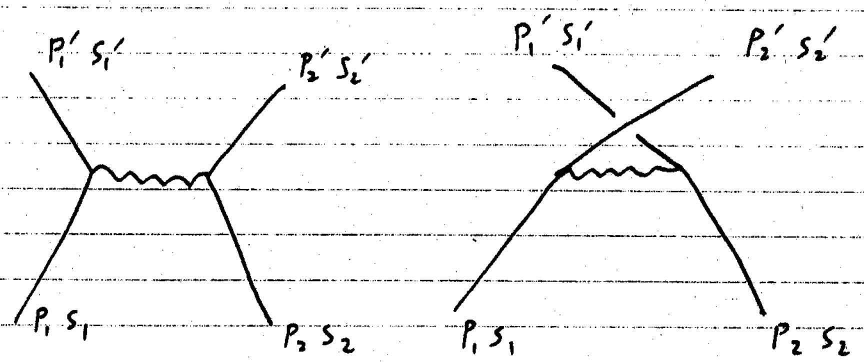
となり、これはV−A理論を支持している。

Møller 散乱

次に Møller 散乱の振幅を求める。Møller 散乱とは $e^-e^- \to e^-e^-$ 散乱の事である。

始状態 ($t=-\infty$) において (momentum, spin) が (P_1, S_1), (P_2, S_2) であった 2 つの電子が 終状態 ($t=+\infty$) において (P_1', S_1'), (P_2', S_2') になる散乱振巾を摂動の最低次で求める。但し S_1', S_2' については測定しないので和をとる。

Feynman diagram は下図の 2 つになる



すると散乱振幅は

$$\mathcal{M} = e^2\left\{\frac{1}{(P_1-P_1')^2}\left(\bar{u}_2'\gamma^\mu u_2\right)\left(\bar{u}_1\gamma_\mu u_1\right) - \frac{1}{(P_1-P_2')^2}\left(\bar{u}_2'\gamma^\nu u_1\right)\left(\bar{u}_1'\gamma_\nu u_2\right)\right\}$$

ここで $u_i = u(P_i, S_i)$, $u_i' = u(P_i', S_i')$ $i=1,2$ と略している。

$\rho = u\bar{u}$ とすれば、S_1', S_2' は測定しないので、スピン和をとって

$$\rho_1 = (\not{P}_1 + m)(1 - S_1\gamma^5\not{e}_1)/2$$
$$\rho_2 = (\not{P}_2 + m)(1 - S_2\gamma^5\not{e}_2)/2$$
$$\rho_1' = \not{P}_1' + m$$
$$\rho_2' = \not{P}_2' + m$$

として、

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 = e^4\Big\{ & \frac{1}{(P_1-P_1')^4}\mathrm{Tr}(\rho_2'\gamma^\mu\rho_2\gamma^\nu)\,\mathrm{Tr}(\rho_1'\gamma_\mu\rho_1\gamma_\nu) \\ & + \frac{1}{(P_1-P_2')^4}\mathrm{Tr}(\rho_1'\gamma^\mu\rho_2\gamma^\nu)\,\mathrm{Tr}(\rho_2'\gamma_\mu\rho_1\gamma_\nu) \\ & - \frac{1}{(P_1-P_1')^2(P_1-P_2')^2}\mathrm{Tr}(\rho_1'\gamma^\mu\rho_1\gamma^\nu\rho_2'\gamma_\mu\rho_2\gamma_\nu) \\ & - \frac{1}{(P_1-P_2')^2(P_1-P_1')^2}\mathrm{Tr}(\rho_2'\gamma^\mu\rho_1\gamma^\nu\rho_1'\gamma_\mu\rho_2\gamma_\nu)\Big\}\end{aligned}$$

$$= e^4\left\{ \frac{1}{(P_1-P_1')^4}\,\mathrm{Tr}(\rho_2'\gamma^\mu \rho_2\gamma^\nu)\,\mathrm{Tr}(\rho_1'\gamma_\mu\rho_1\gamma_\nu) - \frac{1}{(P_1-P_1')^2(P_1-P_2')^2}\,\mathrm{Tr}(\rho_1'\gamma^\mu\rho_1\gamma^\nu\rho_2'\gamma_\mu\rho_2\gamma_\nu)\right\} + \quad (P_1' \longleftrightarrow P_2')$$

Sは必ず S$\not{e}$ の形で出てくるので以降 S$\not{e}$ を $\not{e}$ と略記する.

第一項目の計算

$$\mathrm{Tr}(\rho'\gamma_\mu\rho\gamma_\nu) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[(\not{p}'+m)\gamma_\mu(\not{p}+m)(1-\gamma^5\not{e})\gamma_\nu\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu] + m^2\,\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu]\right] - \frac{m}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^5(\not{p}'-\not{p})\not{e}\gamma_\nu\gamma_\mu\right]$$

$$= 2\left\{P'_\mu P_\nu + P'_\nu P_\mu - g_{\mu\nu}(P'\cdot P - m^2) - im\,\varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu}(P'^\alpha - P^\alpha)e^\beta\right\}$$

これを代入すれば、

$$\mathrm{Tr}(\rho_1'\gamma_\mu\rho_1\gamma_\nu)\,\mathrm{Tr}(\rho_2'\gamma^\mu\rho_2\gamma^\nu)$$

$$= 4\Big\{\left[P'_{1\mu}P_{1\nu} + P'_{1\nu}P_{1\mu} - g_{\mu\nu}(P_1'\cdot P_1 - m^2)\right]\left[P_2'^\mu P_2^\nu + P_2'^\nu P_2^\mu - g^{\mu\nu}(P_2'\cdot P_2 - m^2)\right]$$

$$- m^2\varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu}\,\varepsilon^{\gamma\delta\nu\mu}(P_1'^\alpha - P_1^\alpha)e_1^\beta(P'_{2\gamma} - P_{2\delta})e_{2\delta}\Big\} \quad \text{— Ⓐ}$$

ここで $P_1 + P_2 = P_1' + P_2'$, $P_1\cdot P_2 = P_1'\cdot P_2'$ $P_1\cdot P_1' = P_2\cdot P_2'$ $P_1\cdot P_2' = P_2\cdot P_1'$

$e_1\cdot P_1 = e_2\cdot P_2 = 0$ $\varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu}\cdot\varepsilon^{\gamma\delta\nu\mu} = -2(\delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta - \delta^\delta_\alpha\delta^\gamma_\beta)$

を用いてやると、

$$Ⓐ = 8\left\{2m^2(1-(e_1e_2))(m^2-(P_1\cdot P_1')) + (P_1\cdot P_2)^2 + (P_1\cdot P_2')^2 - m^2(e_1\cdot P_1')(e_2\cdot P_2')\right\}$$

となる。

次に第二項目の計算 $\mathrm{Tr}(\rho_1'\gamma^\mu\rho_1\gamma^\nu\rho_2'\gamma_\mu\rho_2\gamma_\nu)$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1'+m)\gamma^\mu(\not{p}_1+m)(1-\gamma^5\not{e}_1)\gamma^\nu(\not{p}_2'+m)\gamma_\mu(\not{p}_2+m)(1-\gamma^5\not{e}_2)\gamma_\nu\right]$$

$$= \frac{1}{4}\Big\{\underbrace{\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1'+m)\gamma^\mu(\not{p}_1+m)\gamma^\nu(\not{p}_2'+m)\gamma_\mu(\not{p}_2+m)\gamma_\nu\right]}_{①}$$

$$+ \underbrace{\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1'+m)\gamma^\mu(\not{p}_1+m)\gamma^5\not{e}_1\gamma^\nu(\not{p}_2'+m)\gamma_\mu(\not{p}_2+m)\gamma^5\not{e}_2\gamma_\nu\right]}_{②}\Big\}$$

$$= \frac{1}{4}(① + ②)$$ とおく。

ここで $\mathrm{Tr}[\gamma^5\cdot(\gamma^{0123}$の積$)]$ は純虚数なので、いずれ消えるので予め落としておく。①はランダウの「相対論的量子力学」§82 参照

$$① = 32(P_1\cdot P_2)(2m^2 - (P_1\cdot P_2))$$

②の計算は

$$② = \mathrm{Tr}\left[(-\not{p}_1' + m)(-\gamma^\mu)(-\not{p}_1 + m)\not{e}_1\gamma^\nu(\not{p}_2' + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\underbrace{\not{e}_2\gamma_\nu}_{2e_{2\nu} - \gamma_\nu\not{e}_2}\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[(-\not{p}_1' + m)(-\gamma^\mu)(-\not{p}_1 + m)\not{e}_1\gamma^\nu(\not{p}_2' + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)(-\gamma_\nu\not{e}_2)\right]$$
$$+ 2\,\mathrm{Tr}\left[(-\not{p}_1' + m)(-\gamma^\mu)(-\not{p}_1 + m)\not{e}_1\not{e}_2(\not{p}_2' + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1' - m)\gamma^\mu(\not{p}_1 - m)\not{e}_1\gamma^\nu(\not{p}_2' + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu\not{e}_2\right.$$
$$\left. - 2\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)(\not{p}_1' - m)\gamma^\mu(\not{p}_1 - m)\not{e}_1\not{e}_2(\not{p}_2' + m)\right]\right.$$

ここで $\cdot\ \gamma^\nu(\not{p}_2' + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu = -2\not{p}_2\gamma_\mu\not{p}_2' + 4m(P_{2\mu} + P_{2\mu}') - 2m^2\gamma_\mu$

$\cdot\ \gamma_\mu(\not{p}_2 + m)(\not{p}_1' - m)\gamma^\mu = 4(P_2\cdot P_1' - m^2) - 2m(\not{p}_1' - \not{p}_2)$

の2式を代入すると、

$$② = -2\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1' - m)\gamma^\mu(\not{p}_1 - m)\not{e}_1\not{p}_2\gamma_\mu\not{p}_2'\not{e}_2\right] \cdots ⓐ$$
$$+ 4m\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1' - m)(\not{p}_2 + \not{p}_2')(\not{p}_1 - m)\not{e}_1\not{e}_2\right] \cdots ⓑ$$
$$- 2m^2\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1' - m)\gamma^\mu(\not{p}_1 - m)\not{e}_1\gamma_\mu\not{e}_2\right] \cdots ⓒ$$
$$- 8(P_2\cdot P_1' - m^2)\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1 - m)\not{e}_1\not{e}_2(\not{p}_2' + m)\right] \cdots ⓓ$$
$$+ 4m\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1' - \not{p}_2)(\not{p}_1 - m)\not{e}_1\not{e}_2(\not{p}_2' + m)\right] \cdots ⓔ$$

$$ⓐ = -2\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_1' - m)(-2\not{p}_2\not{e}_1\not{p}_1 - 4m\,e_1\cdot P_2)\not{p}_2'\not{e}_2\right]$$
$$= \underbrace{4\,\mathrm{Tr}\left[\not{p}_1'\not{p}_2\not{e}_1\not{p}_1\not{p}_2'\not{e}_2\right]}_{ⓕ} - 32m^2(e_1\cdot P_2)(e_2\cdot P_2')$$

$$ⓕ = 4(e_1\cdot e_2)\left[(P_1\cdot P_2')^2 - (P_1\cdot P_1')^2 + (P_1\cdot P_2)^2\right]$$
$$+ 4(P_1\cdot P_2')\left[(e_2\cdot P_1')(P_2\cdot e_1) - (P_1\cdot e_2)(P_2'\cdot e_1)\right]$$
$$+ 4(P_1\cdot P_1')\left[(P_1\cdot e_2)(P_1'\cdot e_1) + (P_2'\cdot e_2)(P_2\cdot e_1)\right]$$
$$+ 4(P_1\cdot P_2)\left[-(P_1\cdot e_2)(P_2\cdot e_1) - (P_2'\cdot e_2)(P_1'\cdot e_1) - (P_2'\cdot e_1)(e_2\cdot P_1')\right]$$

$$ⓑ = 32m^2\left[(e_1\cdot P_2)(e_2\cdot P_2') - (e_1\cdot e_2)(P_1\cdot P_2' + P_1\cdot P_2)\right)$$
$$ⓒ = 16m^4 e_1\cdot e_2$$
$$ⓓ = 32((P_1'\cdot P_2) - m^2)\left[(e_2\cdot\ \ )(P_2'\cdot e_1) - (e_1\cdot e_2)\{(P_1\cdot P_2') - m^2\}\right]$$
$$ⓔ = 32m^2\left[\qquad\qquad -\text{〃}\qquad\qquad\right]$$

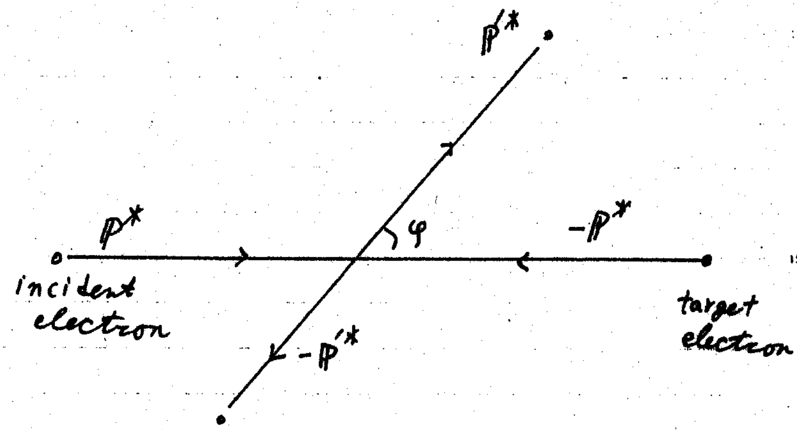
以上の ⓐⓑⓒⓓⓔ を ② に代入して ① と合わせれば、結局

$$
|\mathcal{M}|^2 = e^4 \left[\frac{8}{(P_1-P_1')^4} \left\{ 2m^2(1-e_1\cdot e_2)(m^2-P_1\cdot P_1') + (P_1\cdot P_2)^2 + (P_1\cdot P_2')^2 - m^2(e_1\cdot P_1')(e_2\cdot P_2') \right\} \right.
$$

$$
- \frac{4}{(P_1-P_1')^2(P_1-P_2')^2} \left[\begin{aligned} & 2(P_1\cdot P_2)(2m^2-P_1\cdot P_2) \\ & + (e_1\cdot e_2)\left\{ m^4 - 2m^2(P_1\cdot P_2) - (P_1\cdot P_2')^2 - (P_1\cdot P_1')^2 + (P_1\cdot P_2)^2 \right\} \\ & + (P_1\cdot P_2')\left\{ (e_1\cdot P_2')(e_2\cdot P_1) + (e_1\cdot P_2)(e_2\cdot P_1') \right\} \\ & + (P_1\cdot P_1')\left\{ (e_1\cdot P_1')(e_2\cdot P_1) + (e_1\cdot P_2)(e_2\cdot P_2') \right\} \\ & - (P_1\cdot P_2)\left\{ (e_1\cdot P_1')(e_2\cdot P_2') + (e_1\cdot P_2')(e_2\cdot P_1') + (e_1\cdot P_2)(e_2\cdot P_1) \right\} \end{aligned} \right] \left. \vphantom{\frac{8}{(P_1)^4}} \right]
$$

$$
+ \left(P_1' \longleftrightarrow P_2' \right)
$$

* CM 系において



$$
P_1 = (E^*, \mathbb{P}^*) \quad P_2 = (E^*, -\mathbb{P}^*)
$$

$$
P_1' = (E^*, \mathbb{P}'^*) \quad P_2' = (E^*, -\mathbb{P}'^*)
$$

$$
e_1 = s_1\left(\frac{|\mathbb{P}^*|}{m}, \ \frac{E^*}{m}\frac{\mathbb{P}^*}{|\mathbb{P}^*|} \right)
$$

$$
e_2 = s_2\left(\frac{|\mathbb{P}^*|}{m}, \ -\frac{E^*}{m}\frac{\mathbb{P}^*}{|\mathbb{P}^*|} \right) \qquad v = v^* = \frac{|\mathbb{P}^*|}{E^*} \qquad x = \cos\varphi = \frac{\mathbb{P}^*\cdot\mathbb{P}^{*\prime}}{|\mathbb{P}^*|\cdot|\mathbb{P}'^*|}
$$

とすれば、 $P_1\cdot P_2 = m^2\dfrac{1+v^2}{1-v^2}$ $\qquad (P_1\cdot P_1') = (P_2\cdot P_2') = m^2\dfrac{1-xv^2}{1-v^2}$

$$
(P_1\cdot P_2') = (P_1'\cdot P_2) = m^2\frac{1+xv^2}{1-v^2}
$$

$$
(e_1\cdot P_2)/s_1 = (e_2\cdot P_1)/s_2 = m\frac{2v}{1-v^2}
$$

$$
(e_1\cdot P_1')/s_1 = (e_2\cdot P_2')/s_2 = m\frac{v}{1-v^2}(1-x)
$$

$$
(e_1\cdot P_2')/s_1 = (e_2\cdot P_1')/s_2 = m\frac{v}{1-v^2}(1+x)
$$

$$
e_1\cdot e_2 = s_1 s_2\frac{1+v^2}{1-v^2}
$$

$$
(P_1-P_1')^2 = m^2\frac{2v^2}{1-v^2}(x-1) \qquad (P_1-P_2')^2 = m^2\frac{2v^2}{1-v^2}(x+1)
$$

これらを代入すれば、

$$
|\mathcal{M}|^2 = 4e^4\frac{1}{v^4(1-x^2)^2}\left[(1+3x^2) + 2v^2(3x^2+1) + v^4(x^4-3x^2+6) \right.
$$

$$
\left. + s_1 s_2\left\{ (1-x^2) + 2v^2(1-x^4) + v^4(4-5x^2+x^4) \right\} \right]
$$

NO.

DATE

我々は $\varphi = 90^\circ$ つまり $x=0$ を使うので結局

$$\boxed{|\mathcal{M}|^2 = 4e^4 \frac{1}{v^4}\left\{(1+2v^2+6v^4)+s_1 s_2 (1+2v^2+4v^4)\right\}}$$

微分断面積 σ は $\sigma \propto |\mathcal{M}|^2$ なので上式より、
$\sigma = \sigma_0 + s_1 s_2 \sigma_1$ という形にかける。

今、入射電子とターゲット電子のスピンが
同じ方向を向いている時を Parallel
逆 〃 anti parallel と呼ぶことにすれば

	$s_1=1$ $s_2=-1$	$s_1=-1$ $s_2=1$		
parallel	⇨ ⇨	⇦ ⇦	∴	$s_1 s_2 = -1$
antiparallel	⇨ ⇦	⇦ ⇨	∴	$s_1 s_2 = 1$
	$s_1=1$ $s_2=1$	$s_1=-1$ $s_2=-1$		

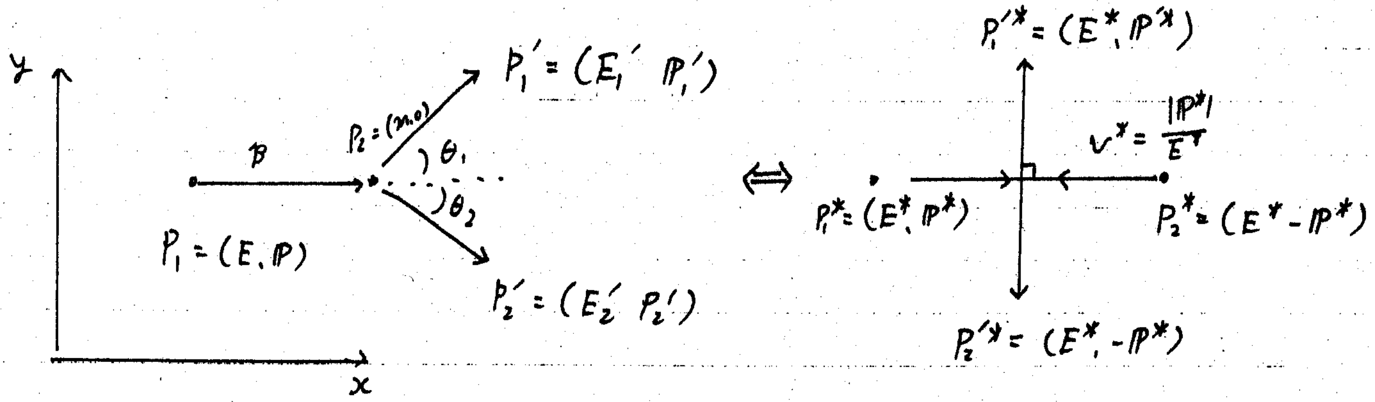
なので $\sigma_p = \sigma_0 - \sigma_1$, $\sigma_a = \sigma_0 + \sigma_1$

∴ 上の式より $\dfrac{\sigma_p}{\sigma_a} = \dfrac{v^4}{1+2v^2+5v^4}$

Lab系 $\longleftrightarrow$ CM系

さて、実際の実験で観測するのはlab系である。これまでは全てCM系で議論してきたので、これをLorentz変換しなければならない。

今　CM系がlab系に対して速度 a で走っているとする。



すると

$$\begin{matrix} t\\ x\\ y\end{matrix}\left(\mathrm{Lab}\right) = \begin{pmatrix}\gamma^* & a\gamma^* & \\ a\gamma^* & \gamma^* & \\ & & 1\end{pmatrix}\left(\mathrm{CM}\right) \qquad \gamma^*=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

Lab全体では $P=(E+m, \mathbb{P})$　、CM全体では $P^*=(2E^*, 0)$

なので、

$$a=\frac{\mathbb{P}}{p^0}=\frac{\mathbb{P}}{E+m}, \quad \gamma^*=\frac{P^0}{P^{*0}}=\frac{E+m}{2E^*}$$

又、$(P^*)^2=P^2$ より

$$4(E^*)^2=(E+m)^2-(E^2-m^2) \qquad \therefore\ E^*=\sqrt{\frac{1}{2}m(m+E)}$$

$$\therefore\ a=\sqrt{\frac{E-m}{E+m}} \qquad \gamma^*=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}$$

ところで $v^*=a$ なので、

$$v^*=\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}=\frac{\beta^2}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{— Ⓑ}$$

$$\left(\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

NO.
DATE

散乱後のCM系での粒子1のEnergy Momentumは、
$(E^*, \mathbb{P}^*) = (m\gamma, 0, ma\gamma)$ なので、

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ P_{1x}' \\ P_{1y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & a\gamma & \\ a\gamma & \gamma & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m\gamma \\ 0 \\ ma\gamma \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan\theta_1 = \dfrac{P_{1y}'}{P_{1x}'} = \dfrac{1}{\gamma} \\ E_1' = m\gamma^2 \end{cases}$$

∴ 散乱粒子の運動エネルギーTは $T = E_1' - m = m(\gamma^2 - 1)$

粒子2についても同様にして、$\tan\theta_2 = -\dfrac{1}{\gamma}$ がわかる。

NO.

DATE

実際の観測、そして V-A 理論による予測。

さて、今、もう一度　$\sigma = \sigma_0 + S_1 S_2 \sigma_1$ という式を思い出してもらいたい。
実際の実験では S_2 は鉄を磁化させて変化させるので、
S_2 は全体として +1、-1 という風にはとれない。
従ってその実験値を P_t として、$S_2 = P_t$ とおく。
予測では $S_1 < 0$ なので　$S_2 = P_t > 0$ のときの
count rate を C_p 、$S_2 = -P_t < 0$ のときの count rate を C_a
とおけば

$$C_p \propto \sigma_0 + S_1 P_t \sigma_1 \qquad C_a \propto \sigma_0 - S_1 P_t \sigma_1$$

又、同様の理由から S_1 も既に出した P_i に変えれば

$$C_p \propto \sigma_0 + P_i P_t \sigma_1 \qquad C_a \propto \sigma_0 - P_i P_t \sigma_1$$

∴　その Asymmetry を A とすれば

$$A \equiv \frac{C_a - C_p}{C_a + C_p}$$

これに上式を代入して、

$$A = -P_i P_t \frac{1 - \sigma_p/\sigma_a}{1 + \sigma_p/\sigma_a}$$

ところで、実験では target の鉄 Foil を 30° 傾けるので、実際に効く
P_t は $P_t \cos 30°$ である。

∴ $A = -P_i P_t \dfrac{1 - \sigma_p/\sigma_a}{1 + \sigma_p/\sigma_a} \cos 30°$ これに既に求めた σ_p/σ_a を代入

すれば

$$A = -P_i P_t \frac{4v^4 + 2v^2 + 1}{6v^4 + 2v^2 + 1} \cos 30°$$

ところでこの v は CM 系の v なので、β に焼き直すと Ⓑより
$v = \dfrac{\beta}{1 + \sqrt{1-\beta^2}}$ なので、

NO.
DATE

$$A = -P_i \left\{ \frac{3\beta^2 + 4 + 4\beta^2\sqrt{1-\beta^2} - 4\sqrt{1-\beta^2}}{5\beta^4 + 4 + 4\beta^2\sqrt{1-\beta^2} - 4\sqrt{1-\beta^2}} \right\} \times P_t \cos 30^\circ$$

$$\therefore \quad P_i = \frac{-A}{P_t \cos 30^\circ} \times \left\{ \frac{5\beta^4 + 4 + 4\beta^2\sqrt{1-\beta^2} - 4\sqrt{1-\beta^2}}{3\beta^2 + 4 + 4\beta^2\sqrt{1-\beta^2} - 4\sqrt{1-\beta^2}} \right\}$$

この式からわかるように P_t はなるべく大きい方が観測しやすい。従って本実験では target を最大磁化させる。

今回は target の磁化を測定する時間が無かったので、前回の P2 のこの実験の target を使い、その時の値をそのまま使うことにした。それによると $P_t = 4.4 \times 10^{-2}$ である。

V-A 理論が正しければ $P_i = -\beta$ なので、

$$A = \beta \left\{ \frac{3\beta^2 + 4 + 4\beta^2\sqrt{1-\beta^2} - 4\sqrt{1-\beta^2}}{5\beta^4 + 4 + 4\beta^2\sqrt{1-\beta^2} - 4\sqrt{1-\beta^2}} \right\} \times P_t \cos 30^\circ$$

となる。

NO.

DATE

APPENDIX

γ- matrix について

- $\mathrm{Tr}\, 1 = 4$
- Tr {奇数個のγ} $= 0$
- $\mathrm{Tr}(\not a \not b) = 4 a\cdot b$
- $\mathrm{Tr}(\not a \not b \not c \not d) = 4\{(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)\}$
- $\mathrm{Tr}\,\gamma^5 = 0$
- $\mathrm{Tr}(\gamma^5 \not a \not b) = 0$
- $\mathrm{Tr}(\gamma^5 \not a \not b \not c \not d) = 4i\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$
- $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$
- $\gamma_\mu \not a \gamma^\mu = -2\not a$
- $\gamma_\mu \not a \not b \gamma^\mu = 4 a\cdot b$
- $\gamma_\mu \not a \not b \not c \gamma^\mu = -2 \not c \not b \not a$
- $\gamma_\mu \not a \not b \not c \not d \gamma^\mu = 2(\not d \not a \not b \not c + \not c \not b \not a \not d)$

標準表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\sigma^{0i} = i\begin{pmatrix} & \sigma^i \\ \sigma^i & \end{pmatrix}$$

NO.

DATE

Dirac方程式について

電子に対して Dirac 方程式は

$$(i\not\partial - m)\psi = 0$$

この解の平面波解は2種類存在し、

・$\psi(x) = u(\mathbb{P}, s)e^{-ipx}$ $\quad (s = \pm 1 \quad p^0 = \sqrt{\mathbb{P}^2 + m^2})$

$$(\not p - m)u(\mathbb{P}, s) = 0$$

・$\psi(x) = v(\mathbb{P}, s)e^{ipx}$ $\quad (s = \pm 1 \quad p^0 = \sqrt{\mathbb{P}^2 + m^2})$

$$(\not p + m)v(\mathbb{P}, s) = 0$$

ここで s は2つの独立解を区別する数であるが、このsとして、次のオペレーター $\hat{s}$ の固有値をとると便利である。

$$\hat{s} = -e_\mu W^\mu$$

ここで $W^\mu \equiv -\frac{1}{4m}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\nu\rho}P_\sigma$

e^μ は粒子の静止系で $(0, \hat{e})$ となるような 4-vector である。($\hat{e}$ は単位ベクトル)

粒子の静止系では $e^\mu = (0, \hat{e})$ なので、

$\hat{s} = -e_\mu W^\mu = -\frac{1}{4}\epsilon^{ijk}\sigma_{jk}\hat{e}_i = \frac{1}{2}\hat{e}\cdot\sigma_4$ である。

ここで $\sigma_4 \equiv \begin{pmatrix} \sigma & \\ & \sigma \end{pmatrix}$ である。

∴ $\hat{s}$ は粒子の静止系における $\hat{e}$ 方向の spin operator であることがわかる。

KOKUYO

NO.
DATE

また、

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\hat{e}\cdot\Phi_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{e}\cdot\sigma & \\ & \hat{e}\cdot\sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{2m}\underbrace{\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}}_{\gamma^5}\underbrace{\begin{pmatrix} & -\hat{e}\cdot\sigma \\ \hat{e}\cdot\sigma & \end{pmatrix}}_{\not{e}}\underbrace{\begin{pmatrix} m & \\ & -m \end{pmatrix}}_{\not{p}}$$

$$\therefore\ \hat{S} = -e_\mu W^\mu = \frac{1}{2m}\gamma^5\not{e}\not{p} \quad \text{—} \quad (A.1)$$

これは Lorentz 不変である.

又, $p_\mu e^\mu = 0$, $e_\mu e^\mu = 1$ これも Lorentz 不変である.

上式により $\{\not{p}, \not{e}\} = 2p\cdot e = 0$ となり、(A.1) と合わせて $\hat{S}$ は $\not{p}$ と可換であることがわかる. u と v への解の分類をこわすことなく $\hat{S}$ の固有値を指定できるわけである.

特に、$e^\mu = \left(\frac{|\mathbb{P}|}{m}, \frac{p^0}{m}\frac{\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|}\right)$ のとき つまり $\hat{e}$ が boost の方向を向いているときには、

$$\hat{S} = \frac{1}{2m}\gamma^5\not{e}\not{p} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{|\mathbb{P}|}{m} & -\frac{p^0}{m}\frac{\mathbb{P}\cdot\sigma}{|\mathbb{P}|} \\ \frac{p^0}{m}\frac{\mathbb{P}\cdot\sigma}{|\mathbb{P}|} & -\frac{|\mathbb{P}|}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^0 & -\mathbb{P}\cdot\sigma \\ \mathbb{P}\cdot\sigma & -p^0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|}\Phi_4$$

となり、よりポピュラーなヘリシティ operator と一致することがわかる。

NO.

DATE

u、vの規格化を

$$\begin{cases} \bar{u}(\mathbb{P},s)\,u(\mathbb{P},s') = 2m\,\delta_{ss'} \\ \bar{v}(\mathbb{P},s)\,v(\mathbb{P},s') = -2m\,\delta_{ss'} \end{cases}$$

$(\bar{u} \equiv u^{\dagger}\gamma^{0})$ とれば

$$\begin{cases} \sum_{s=\pm} u(\mathbb{P},s)\,\bar{u}(\mathbb{P},s) = \not{p}+m \\ \sum_{s=\pm} v(\mathbb{P},s)\,\bar{v}(\mathbb{P},s) = \not{p}-m \end{cases} \qquad \text{—— (A.2)}$$

となる

また、$\hat{S}$の固有状態をとっているので

$$\begin{cases} \hat{S}\,u(\mathbb{P},s) = \frac{s}{2}\,u(\mathbb{P},s) \\ \hat{S}\ (\mathbb{P},s) = \frac{s}{2}\,v(\mathbb{P},s) \end{cases} \qquad \text{—— (A.3)}$$

$\frac{1}{2}(1+2s\hat{S})$ を (A-2) の両辺に左からかけると (A.3) より、

$$\begin{cases} u(\mathbb{P},s)\,\bar{u}(\mathbb{P},s) = (\not{p}+m)(1+s\gamma^5\not{s})/2 \\ v(\mathbb{P},s)\,\bar{v}(\mathbb{P},s) = (\not{p}-m)(1-s\gamma^5\not{s})/2 \end{cases}$$

となる。ここで $(\not{p}\pm m)2\hat{S} = \pm(\not{p}\pm m)\gamma^5\not{s}$ を用いている