

# $\beta$ 崩壊における Parity の破れ

白井 健雄      竹澤 香織      広橋 拓也      野間 唯

平成 15 年 10 月 31 日

# 第I部 理論

## 1 $\beta$ 崩壊における Parity の破れと V-A 理論の予想

ここでは  $\beta$  崩壊において Parity が破れていること、及びその理論から予想されることをみていく。

1934年 Fermi によって提案された  $\beta$  崩壊を記述する理論は、 $p, n, e^-, \bar{\nu}_e$  をそれぞれ spin 1/2 のフェルミオンとして一点で相互作用する理論である。

その相互作用 Lagrangian 密度は

$$L_{int} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j^{\mu\dagger} j_\mu \quad (1)$$

但し

$$j^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n + \bar{\psi}_e^- \gamma^\mu \psi_\nu$$

$G_F$  : Fermi constant

という (current)×(current) という形をしている。その後この current を拡張する様々な試みがなされた。それは current の中に

scalar :  $\bar{\psi}\psi$

pseudoscalar :  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$

vector :  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

axial vector :  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$

tensor :  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$

という項を付け加えることである。このうち実験でよく表すのは (vector)-(axial vector) である。vector 項は Parity 変換の下で符号を変えるが、axial vector 項は名前の通り符号を変えない。つまりこの Lagrangian は Parity 変換に対し不変でない。

次に我々は (vector)-(axial vector) の形の V-A 理論と呼ばれる理論を少し一般化して使い、その予想を調べる。

相互作用 Lagrangian 密度として

$$L_{int} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j^{\mu\dagger} j_\mu \quad (2)$$

但し

$$j^\mu = l^\mu + h^\mu$$

$$l^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 + \alpha \gamma^5) \psi_\nu$$

$$h^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 + \alpha' \gamma^5) \psi_n$$

$\beta$  崩壊を

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

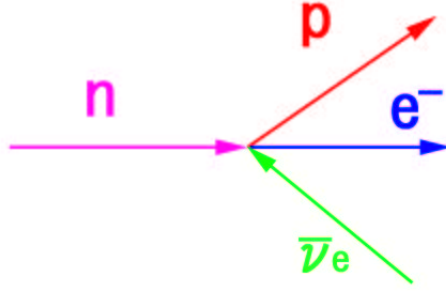


図 1:  $\beta$  崩壊

と考えると、この過程の S matrix element は

$$\langle p, e^-, \bar{\nu}_e | S | n \rangle = \langle 0 | A_p A_e B_\nu i \int d^4 x L_{int} A_n^\dagger | 0 \rangle \quad (3)$$

但し

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\phi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_s (a_{\vec{p},s} u_{\vec{p},s} e^{-ipx} + b_{\vec{p},s}^\dagger v_{\vec{p},s} e^{ipx})$$

また、

$$A_n^\dagger | 0 \rangle = \sqrt{2E_n} a_n^\dagger | 0 \rangle = | n \rangle \quad etc.$$

$$\{a_{\vec{p},s}, a_{\vec{p}',s'}^\dagger\} = \{b_{\vec{p},s}, b_{\vec{p}',s'}^\dagger\} = (2\phi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'}$$

これを計算すると不変散乱振幅として

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{u}_e \gamma^\mu (1 + \alpha \gamma^5) v_\nu \bar{u}_n \gamma_\mu (1 + \alpha' \gamma^5) u_p) \quad (4)$$

が得られる。

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \hbar (u_e \bar{u}_e \gamma^\mu (1 + \alpha \gamma^5) v_\nu \bar{v}_\nu \gamma^\nu (1 + \alpha^* \gamma^5)) \\ &\times \hbar (u_n \bar{u}_n \gamma^\mu (1 + \alpha'^* \gamma^5) u_p \bar{u}_p \gamma_\nu (1 + \alpha' \gamma^5)) \end{aligned}$$

ここで実験は n を偏極させず p との helicity も測らないので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s_n, s_p, s_{\bar{\nu}}} |M|^2 &= \frac{G_F^2}{4} \hbar (u_e \bar{u}_e \gamma^\mu (1 + \alpha \gamma^5) (\not{p}_\nu + m_\nu) \gamma^\nu (1 + \alpha^* \gamma^5)) \\ &\times \hbar ((\not{p}_n + m_n) \gamma_\mu (1 + \alpha'^* \gamma^5) (\not{p}_p + m_p) \gamma_\nu (1 + \alpha' \gamma^5)) \\ &\equiv \frac{G_F^2}{4} (T_{lepton})^{\mu\nu} (T_{hadron})_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5)$$

いま始状態の n が静止していたとすると、

$$\not{p}_n + m_n \simeq m_n (\gamma^0 + 1) \quad (6)$$

$^{90}\text{Sr}$  の崩壊の際の電子の最大運動エネルギーは  $2.2[\text{MeV}]$  と  $p$  の質量に比べ小さいので proton も静止しているとしてよい。

$$\not{p}_p + m_n \simeq m_p(\gamma^0 + 1) \quad (7)$$

よって hadron の項は

$$\begin{aligned} (T_{hadron})_{\mu\nu} &\simeq m_n m_p \hbar ((\gamma^0 + 1)\gamma_\mu(1 + \alpha'^* \gamma^5)(\gamma^0 + 1)\gamma_\nu(1 + \alpha' \gamma^5)) \\ &= 8m_n m_p (g_{\mu 0} g_{\nu 0} + |\alpha'|^2 (-g_{\mu\nu} + g_{\mu 0} g_{\nu 0})) \end{aligned} \quad (8)$$

$\bar{\nu}$  の質量は十分小さいので  $m_{\bar{\nu}} = 0$  とする。偏極した電子を表すのに projection operator

$$\left(\frac{1 + \gamma^5 s \not{e}}{2}\right)$$

但し

$e^\mu$  : 単位 4 元ベクトル

$s = \pm 1$  を使うと

$$\left(\frac{1 + \gamma^5 s \not{e}}{2}\right) \sum_{s'} u_{es'} u_{\bar{e}s'} = \left(\frac{1 + \gamma^5 s \not{e}}{2}\right) (\not{p} + m_e) \quad (9)$$

と書ける。これを用いて  $T_{lepton}$  を計算すると

$$\begin{aligned} (T_{lepton})^{\mu\nu} &= \hbar \left(\frac{1 + \gamma^5 s \not{e}}{2}\right) (\not{p} + m_e) \gamma^\mu (1 + \alpha \gamma^5) \not{p}_\nu \gamma^\nu (1 + \alpha^* \gamma^5) \\ &= 4(1 + |\alpha|^2) (p_e^\mu p_\nu^\nu - (p_e p_\nu) g^{\mu\nu} + p_e^\nu p_\nu^\mu) \\ &\quad - 4i(\alpha + \alpha^*) (p_e)_\alpha (p_\nu)_\beta \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \\ &\quad - 4im_e (1 + |\alpha|^2) s (e)_\alpha (p_\nu)_\beta \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \\ &\quad + 4m_e (\alpha + \alpha^*) (s e^\mu p_\nu^\nu - s (e p_\nu) g^{\mu\nu} + s e^\nu p_\nu^\mu) \end{aligned} \quad (10)$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s_n, s_p, s_{\bar{\nu}}} |M|^2 &= 8m_n m_p G_F \left( (1 + |\alpha|^2) (p_e^0 p_\nu^0 - \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu) \right) \\ &\quad + m(\alpha + \alpha^*) (s e^0 p_\nu^0 - s \vec{e} \cdot \vec{p}_\nu) \\ &\quad + |\alpha'|^2 \left( (1 + |\alpha|^2) (3p_e^0 p_\nu^0 - \vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu) \right) \\ &\quad + m_e (\alpha + \alpha^*) (3s e^0 p_\nu - \vec{e} \cdot \vec{p}_\nu) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

$\beta$  崩壊の確率を  $\wp(s)$  とすると

$$\wp(s) \propto \int d^3 x p_\nu \sum_{s_n, s_p, s_{\bar{\nu}}} |M|^2 \quad (12)$$

なので  $|M|^2$  の中の  $\vec{p}_\nu$  に比例する項は落ちる。

又、 $p_\nu^0$  に比例する項は有限値をとるので

$$\wp(s) \propto (1 + |\alpha|^2)p_e^0 + m_e(\alpha + \alpha^*)s \cdot e^0 \quad (13)$$

となる。  $e^\mu$  として

$$e^\mu = \left( \frac{|\vec{p}| \cdot \vec{a}}{m}, \vec{a} + \frac{\vec{p} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{p})}{m(p_0 + m)} \right)$$

$\vec{a} \parallel \vec{p}$  ととれば

$$e^\mu = \left( \frac{|\vec{p}_e|}{m_e}, \frac{p_e^0}{m_e} \frac{\vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} \right)$$

となる

$$\wp(s) \propto (1 + |\alpha|^2) + s(\alpha + \alpha^*)\beta \quad (14)$$

但し

$$\beta = \frac{|\vec{p}_e|}{p_e^0}$$

である。電子の縦偏極度は

$$P_i = \frac{\wp(+)-\wp(-)}{\wp(+)+\wp(-)} \quad (15)$$

$$= \frac{\alpha + \alpha^*}{1 + |\alpha|^2} \beta \quad (16)$$

となり、  $\alpha + \alpha^* \neq 0$  のとき電子は偏極している。

V-A 理論ではつまり

$$P_i = -\beta \quad (17)$$

となる。

- helicity の偏りが Parity violation になる直観的理由：  
崩壊が等方的に起きても helicity に偏りがあれば Parity を破っている。
- 参考：

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}$$

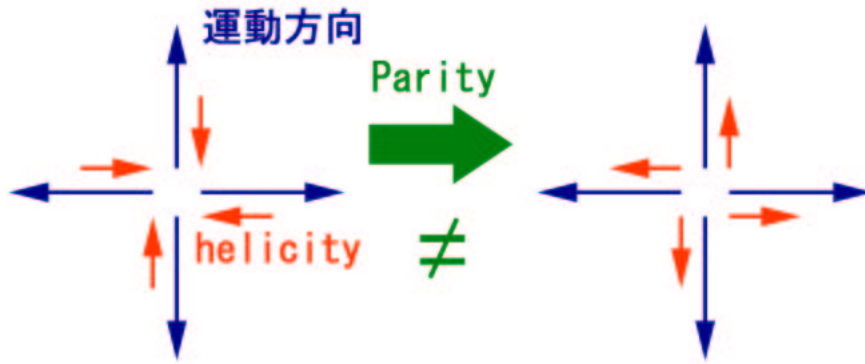


図 2: helicity と Parity の破れの直観的模式図

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 本当の  $\beta$  崩壊

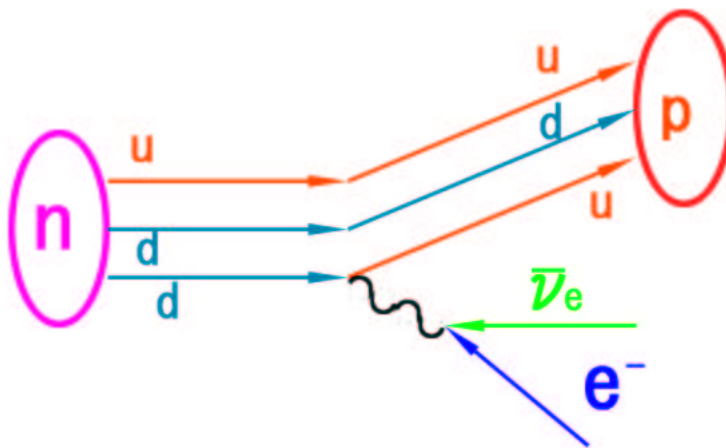


図 3:  $\beta$  崩壊模式図

## 2 Møller scattering

### 2.1 introduction

$\beta$ 崩壊で放出される電子の縦偏極度を測定するのが、我々の実験の目的である。それには Møller 散乱を利用するのが良い。Møller 散乱では、incident 電子と target 電子の spin が parallel な時と、antiparallel な時では散乱断面積が違う。target の鉄 foil を磁化させ、一定時間毎にその向きを反転させ（できる限り parallel と antiparallel の条件を一定にするため）、count 数の違いを見れば incident 電子の縦偏極度が分かるのだ。

そこで Møller 散乱の、重心系で、初期状態については spin 平均せず、終状態については spin 和をとった場合の  $\frac{\sigma_p}{\sigma_a}$  を計算する。非常に大変だった。

### 2.2 散乱断面積

次のような Lagrangian で考える。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})(F^{\mu\nu}) + e(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu \\ \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})(F^{\mu\nu}) \\ \mathcal{L}_{int} &= e(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu\end{aligned}$$

この時摂動の1次は消えるので2次を評価する。Feynman diagram は図4の2つである。



図 4: Feynman diagram

不変散乱振幅を書き下すと

$$\mathcal{M} = e^2 \left( \frac{1}{(p_3 - p_1)^2} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) - \frac{1}{(p_4 - p_1)^2} (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma_\mu u_2) \right)$$

ただし  $u_i = u(p_i, s_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

$$|\mathcal{M}|^2 = e^4 \left( \frac{1}{(p_3 - p_1)^2} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) - \frac{1}{(p_4 - p_1)^2} (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma_\mu u_2) \right) \\ \left( \frac{1}{(p_3 - p_1)^2} (\bar{u}_1 \gamma^\nu u_3) (\bar{u}_2 \gamma_\nu u_4) - \frac{1}{(p_4 - p_1)^2} (\bar{u}_1 \gamma^\nu u_4) (\bar{u}_2 \gamma_\nu u_3) \right) \\ = e^4 \left( \frac{1}{(p_3 - p_1)^4} \text{tr}(u_4 \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\nu) \text{tr}(u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu u_3 \bar{u}_3 \gamma^\mu) \right. \quad (19)$$

$$+ \frac{1}{(p_4 - p_1)^4} \text{tr}(u_3 \bar{u}_3 \gamma_\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\nu) \text{tr}(u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu u_4 \bar{u}_4 \gamma^\mu) \quad (20)$$

$$- \frac{1}{(p_3 - p_1)^2 (p_4 - p_1)^2} \text{tr}(u_4 \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_3 \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu) \quad (21)$$

$$\left. - \frac{1}{(p_3 - p_1)^2 (p_4 - p_1)^2} \text{tr}(u_3 \bar{u}_3 \gamma_\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\nu u_4 \bar{u}_4 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu) \right) \quad (22)$$

散乱粒子の spin 和をとる。

$$u_3 \bar{u}_3 \rightarrow \sum_{spin} u_3 \bar{u}_3 = \not{p}_3 + m$$

$$u_4 \bar{u}_4 \rightarrow \sum_{spin} u_4 \bar{u}_4 = \not{p}_4 + m$$

もちろん入射粒子については spin 和をとらないから

$$u_1 \bar{u}_1 = \frac{1}{2} (\not{p}_1 + m) (1 - s_1 \gamma^5 \not{e}_1)$$

$$u_2 \bar{u}_2 = \frac{1}{2} (\not{p}_2 + m) (1 - s_2 \gamma^5 \not{e}_2)$$

ただし  $a_i$  は粒子  $i$  の静止系で  $a_i^\mu = (0, \vec{e}_i)$  となる 4-vector で、具体的には

$$a_i^\mu = \left( \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{e}_i}{m}, \vec{e}_i + \frac{(\vec{p}_i \cdot \vec{e}_i)}{m(E + m)} \vec{p}_i \right)$$

という形をしている。 $\vec{e}_i$  は spin の量子化軸の向きであり、ここでは  $\vec{e}_i = \frac{\vec{p}_i}{|\vec{p}_i|}$  ととるわけだが、上の式に代入すると 4-vector である事が見えなくなるので注意が必要である。(Appendix 参照)

(20) は (19) の、(22) は (21) の電子 3 と電子 4 を入れ換えたものなので、(19) と (21) の計算をする。

- (19) の計算

$$\text{tr}(u_4 \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\nu) \xrightarrow{spin \text{ 和}} \text{tr} \left( (\not{p}_4 + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) (1 - s_2 \gamma^5 \not{e}_2) \frac{1}{2} \gamma_\nu \right) \\ = \text{tr} \left( (\not{p}_4 + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \frac{1}{2} \gamma_\nu \right) - \text{tr} \left( (\not{p}_4 + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) s_2 \gamma^5 \not{e}_2 \frac{1}{2} \gamma_\nu \right) \\ = 2 \left( p_{4\mu} p_{2\nu} - (p_4 \cdot p_2) g_{\mu\nu} + p_{4\nu} p_{2\mu} + m^2 g_{\mu\nu} \right) - 2 s_2 m i \varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu} (p_4^\alpha - p_2^\alpha) a_2^\beta$$



同様にして

$$tr(u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu u_3 \bar{u}_3 \gamma^\mu) \xrightarrow{spin \text{ 和}} 2 \left( p_3^\mu p_1^\nu - (p_3 \cdot p_1) g^{\mu\nu} + p_3^\nu p_1^\mu + m^2 g^{\mu\nu} \right) - 2s_1 m i \varepsilon^{\rho\lambda\nu\mu} (p_{3\rho} - p_{1\rho}) a_{1\lambda}$$

上の2式を掛け合わせ、

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 \\ p_1 \cdot p_2 &= p_3 \cdot p_4 & p_1 \cdot p_3 &= p_2 \cdot p_4 & p_1 \cdot p_4 &= p_2 \cdot p_3 \\ a_1 \cdot p_1 &= 0 & a_2 \cdot p_2 &= 0 \\ \varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu} \varepsilon^{\rho\lambda\nu\mu} &= -2(\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\lambda - \lambda_\alpha^\lambda \lambda_\beta^\rho) \end{aligned}$$

などを使って整理すると最終的に

$$(19) = \frac{8}{(p_3 - p_1)^4} \left( 2m^2(1 - s_1 s_2)(m^2 - p_1 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p_4)^2 - s_1 s_2 m^2 (p_3 \cdot a_1)(p_4 \cdot a_2) \right)$$

- (21) の計算

$$\begin{aligned} &tr(u_3 \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu u_4 \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\nu) \\ &\xrightarrow{spin \text{ 和}} tr \left( (\not{p}_3 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) (1 - s_1 \gamma^5 \not{p}_1) \frac{1}{2} \gamma^\nu (\not{p}_4 + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) (1 - s_2 \gamma^5 \not{p}_2) \frac{1}{2} \gamma_\nu \right) \\ &\xrightarrow{\text{対称性}} \frac{1}{4} tr \left( (\not{p}_3 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_4 + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$+ \frac{1}{4} s_1 s_2 tr \left( (\not{p}_3 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^5 \not{p}_1 \gamma^\nu (\not{p}_4 + m) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^5 \not{p}_2 \gamma_\nu \right) \quad (24)$$

ここで最後の式では、対称性より、 $s_1, s_2$  に関して1次の項は落とした。理由を説明するのに、図5のような散乱を考える。

この散乱に空間反転、さらに紙面に垂直な軸に関して180°回転すると、

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &\rightarrow \vec{p}_1 & \vec{p}_2 &\rightarrow \vec{p}_2 & \vec{p}_3 &\rightarrow \vec{p}_3 & \vec{p}_4 &\rightarrow \vec{p}_4 \\ \text{helicity} & & s_1 &\rightarrow -s_1 & s_2 &\rightarrow -s_2 \end{aligned}$$

QEDは空間反転、空間回転のもとで不変なので、散乱断面積に比例する $|M|^2$ は上の操作の下で不変であるから、 $s_1, s_2$ の1次の項を含まない。つまり、最終的にcancelする。この議論では $\vec{e}_i = \frac{\vec{p}_i}{|\vec{p}_i|}$ である事が前提である。

$\gamma^\mu \not{p} \not{p} \not{p} \gamma_\mu = -2\not{p} \not{p} \not{p}$ などを使うと、

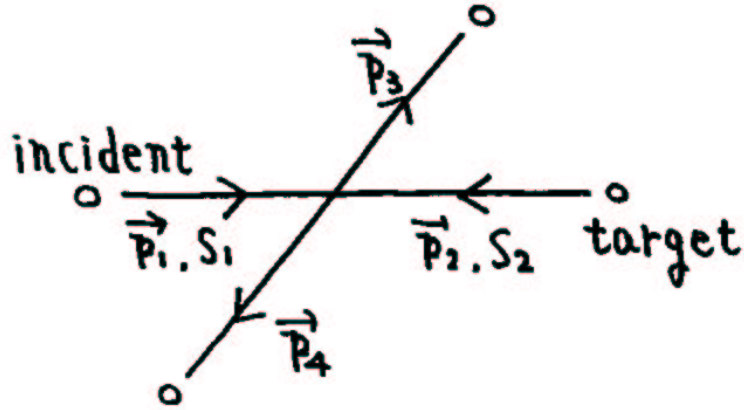


図 5: 散乱

$$(23) = 8(p_1 \cdot p_2) \left( 2m^2 - (p_1 \cdot p_2) \right)$$

また

$$tr(\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_{2n}) = 4 \sum_{\sigma} (sgn \sigma) (a_{\sigma(1)} \cdot a_{\sigma(2)}) \cdots (a_{\sigma(2n-1)} \cdot a_{\sigma(2n)})$$

但し和は  $\sigma(1) < \sigma(2), \sigma(3) < \sigma(4), \dots, \sigma(2n-1) < \sigma(2n)$  で同一項を与えない  $\sigma$  に関して

などを使うと

$$(24) = 4s_1 s_2 \left[ \begin{aligned} & (a_1 \cdot a_2) \left\{ m^4 - 2m^2(p_1 \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_4)^2 - (p_1 \cdot p_3)^2 + (p_1 \cdot p_2)^2 \right\} \\ & + (p_1 \cdot p_4) \left\{ (p_4 \cdot a_1)(p_1 \cdot a_2) + (p_2 \cdot a_1)(p_3 \cdot a_2) \right\} \\ & + (p_1 \cdot p_3) \left\{ (p_2 \cdot a_1)(p_4 \cdot a_2) + (p_3 \cdot a_1)(p_1 \cdot a_2) \right\} \\ & - (p_1 \cdot p_2) \left\{ (p_2 \cdot a_1)(p_1 \cdot a_2) + (p_3 \cdot a_1)(p_4 \cdot a_2) + (p_4 \cdot a_1)(p_3 \cdot a_2) \right\} \end{aligned} \right]$$

よって

$$\begin{aligned}
(21) = & \frac{4}{(p_3 - p_1)^2(p_4 - p_1)^2} \left[ 2(p_1 \cdot p_2) \left\{ 2m^2 - (p_1 \cdot p_2) \right\} \right. \\
& + s_1 s_2 \left\{ (a_1 \cdot a_2) \left( m^4 - 2m^2(p_1 \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_4)^2 - (p_1 \cdot p_3)^2 + (p_1 \cdot p_2)^2 \right) \right. \\
& \quad + (p_1 \cdot p_4) \left( (p_4 \cdot a_1)(p_1 \cdot a_2) + (p_2 \cdot a_1)(p_3 \cdot a_2) \right) \\
& \quad + (p_1 \cdot p_3) \left( (p_2 \cdot a_1)(p_4 \cdot a_2) + (p_3 \cdot a_1)(p_1 \cdot a_2) \right) \\
& \quad \left. \left. - (p_1 \cdot p_2) \left( (p_2 \cdot a_1)(p_1 \cdot a_2) + (p_3 \cdot a_1)(p_4 \cdot a_2) + (p_4 \cdot a_1)(p_3 \cdot a_2) \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

最終的に

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = & e^4 \left[ \frac{8}{(p_3 - p_1)^4} \left\{ 2m^2 \left( m^2 - (p_1 \cdot p_3) \right) (1 - s_1 s_2) + (p_1 \cdot p_2)^2 + (p_1 \cdot p_4)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - s_1 s_2 m^2 (p_3 \cdot a_1)(p_4 \cdot a_2) \right\} \right. \\
& - \frac{4}{(p_3 - p_1)^2(p_4 - p_1)^2} \left\{ 2(p_1 \cdot p_2) \left( 2m^2 - (p_1 \cdot p_2) \right) \right. \\
& \quad + s_1 s_2 \left( (a_1 \cdot a_2) (m^4 - 2m^2(p_1 \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_4)^2 - (p_1 \cdot p_3)^2 + (p_1 \cdot p_2)^2) \right. \\
& \quad + (p_1 \cdot p_4) ((p_4 \cdot a_1)(p_1 \cdot a_2) + (p_2 \cdot a_1)(p_3 \cdot a_2)) \\
& \quad + (p_1 \cdot p_3) ((p_2 \cdot a_1)(p_4 \cdot a_2) + (p_3 \cdot a_1)(p_1 \cdot a_2)) \\
& \quad \left. \left. - (p_1 \cdot p_2) ((p_2 \cdot a_1)(p_1 \cdot a_2) + (p_3 \cdot a_1)(p_4 \cdot a_2) + (p_4 \cdot a_1)(p_3 \cdot a_2)) \right) \right\} \\
& + (p_3 \leftrightarrow p_4)
\end{aligned}$$

CM系で散乱が図6のように起こったとする。

この時

$$\begin{aligned}
p_1 &= (E, \vec{p}) & p_2 &= (E, -\vec{p}) \\
p_3 &= (E, \vec{p}') & p_4 &= (E, -\vec{p}') \\
a_1 &= \left( \frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right) & a_2 &= \left( \frac{|\vec{p}'|}{m}, -\frac{E}{m} \frac{\vec{p}'}{|\vec{p}'|} \right) \\
v &= \frac{|\vec{p}| E}{E} & x &= \cos\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}'}{|\vec{p}|^2}
\end{aligned}$$

$$p_1 \cdot p_2 = m^2 \frac{1+v^2}{1-v^2}$$

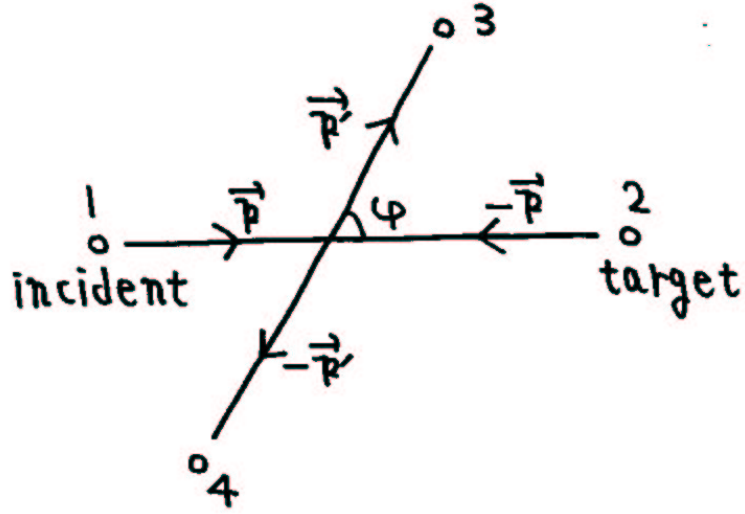


図 6: 重心系での散乱

$$p_1 \cdot p_3 = m^2 \frac{1 - v^2 x}{1 - v^2}$$

$$p_1 \cdot p_4 = m^2 \frac{1 + v^2 x}{1 - v^2}$$

$$p_2 \cdot a_1 = p_1 \cdot a_2 = \frac{2mv}{1 - v^2}$$

$$p_3 \cdot a_1 = p_4 \cdot a_2 = \frac{mv(1 - x)}{1 - v^2}$$

$$p_4 \cdot a_1 = p_3 \cdot a_2 = \frac{mv(1 + x)}{1 - v^2}$$

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{1 + v^2}{1 - v^2}$$

$$(p_3 - p_1)^2 = -\frac{2m^2 v^2}{1 - v^2} (1 - x)$$

$$(p_4 - p_1)^2 = -\frac{2m^2 v^2}{1 - v^2} (1 + x)$$

これらを代入して整理すると、

$$|\mathcal{M}|^2 = 4e^4 \frac{1}{v^4(1-x^2)^2} \left[ (1 + 3v^2) + 2v^2(3x^2 + 1) + v^4(x^4 - 3x^2 + 6) \right. \\ \left. + s_1 s_2 \left\{ (1 - x^2) + 2v^2(1 - x^4) + v^4(-x^2 + x^4) \right\} \right]$$

微分断面積  $\sigma$  は  $|\mathcal{M}|^2$  に比例するので、

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \sigma = \sigma_0 + s_1 s_2 \sigma_1$$

という形をしている。

$\vec{e}_i = \frac{\vec{p}_i}{|\vec{p}_i|}$  ( $i = 1, 2$ ) と取った事を考え合わせると、

$$\sigma_p = \sigma_0 - \sigma_1 \quad \sigma_a = \sigma_0 + \sigma_1$$

とできる。ここで  $\sigma_p$  は spin が parallel のときの微分断面積、 $\sigma_a$  は spin が anti-parallel のときの微分断面積である。上の式から

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_a} = \frac{2x^2 + v^2(x^4 + 3x^2) + v^4(-x^2 + 3)}{1 + x^2 + v^2(-x^4 + 3x^2 + 2) + v^4(x^4 - 2x^2 + 3)}$$

$\cos\varphi = 0$  では

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_a} = \frac{3v^4}{1 + 2v^2 + 3v^4}$$

### 2.3 偏極度と Asymmetry

$\beta$  崩壊で放出される電子と鉄の中の電子のそれぞれの偏極度と、Asymmetry の関係式を導く。上の断面積の計算結果をもう一度書くと

$$\sigma = \sigma_0 + s_1 s_2 \sigma_1$$

$s_1, s_2$  はそれぞれ入射粒子、target 粒子の helicity である。anti-parallel の時の方が当然 count 数が大きい。そこで Asymmetry  $A$  を次のように定義する。

$$A = \frac{C_a - C_p}{C_a + C_p}$$

$C_p$  は parallel の時の count 数、 $C_a$  は anti-parallel の時の count 数である。入射粒子の偏極度を  $P_i (> 0)$ 、target 粒子の偏極度を  $P_t (> 0)$  とすると

$$C_p \propto \sigma_0 + P_i P_t \sigma_1 \quad C_a \propto \sigma_0 - P_i P_t \sigma_1$$

$A$  の定義式に代入すると

$$A = \frac{P_i P_t \sigma_1}{\sigma_0} = P_i P_t \frac{1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_a}}{1 + \frac{\sigma_p}{\sigma_a}}$$

我々は  $A$  と  $P_t$  を測定して  $P_i$  を求めたのである。

実験では target の鉄 foil を入射粒子に対して  $30^\circ$  傾けたので

$$A = P_i P_t \frac{1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_p}}{1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_p}} \cos 30^\circ$$

## 第II部 実験

### 3 Spectrometer Magnet for Møller scattering

本実験の最大の特徴といってよいのが、incident electron beam をエネルギー選択し、target に収束させるための Spectrometer Magnet の設計と開発を行ったことである。

これより、作成した Magnet の原理とその性能を見ていく。

#### 3.1 Spectrometer Magnet の要請

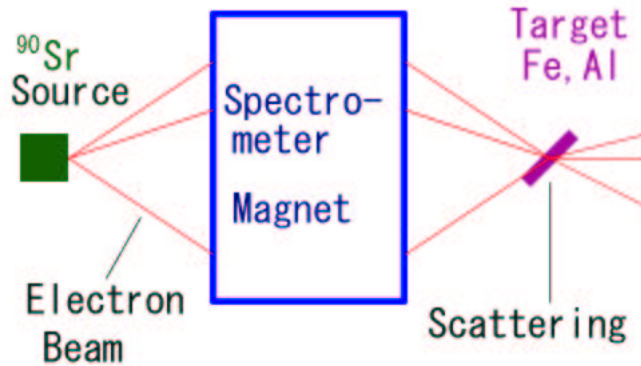


図 7: Spectrometer Magnet の概念図

目標は、Source-Target 間に磁界レンズ（ソレノイド磁場）を挿入、発生する磁場  $B$  によって electron の軌道を曲げ、更に途中に slit を挟むことによりエネルギー選択と beam 収束を可能にすることであった。

必要とした Spectrometer Magnet は以下の要請を満たすものである。

1. 運動エネルギー 500[keV]-2[MeV] の electron beam を収束可能
2. 10% 程度の Energy resolution をもつ
3. 1% 以上の Acceptance が見込まれる

これらの要請はそれぞれ、以下の理由によるものである。

1. の理由は Analysing Power より偏極度  $P_i$  を求めるには incident electron の  $\beta$  が必要であることだ。本実験で使用した  $\beta$  線源  $^{90}\text{Sr}$  の end point は 2.2[MeV]。V-A 理論の検証のために比較的小さな  $\beta$  の electron、つまり低エネルギーの electron での測定が特に重要となってくる。

2. は最終的に必要な精度から誤差の伝搬を計算していった結果である。

3. は Counting rate を Source からの線量  $\simeq 4[\text{MBq}]$  としたときに概算した結果より、実際に必要な Count 数を一週間程度で得るための条件である。

### 3.2 磁界レンズの設計

設計は以下の手順で行った。

1. z 軸対称磁場作成 simulation soft (Poisson superfish) による電磁石の設計
2. 得られた磁場における電子の軌道を相対論的ローレンツ力運動方程式を解いて得る (4 次の Runge-Kutta 法による Program)

$$m_e \gamma \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \quad (25)$$

この Program は Poisson superfish より得られた座標ごとの磁場 B の数値 Data を読みこんで、時刻 t ごとの electron の座標を吐き出すものである。(:[4])

ここで軌道計算に使用した Program の妥当性は、以下の検証によって確かめられている。

- 近軸近似で得られる磁界レンズ焦点距離の理論値とシミュレーションでの焦点距離の比較  
近軸近似を利用した場合、ソレノイド磁場による磁界レンズの焦点距離は以下のように求められる。

ソレノイドの回りを高い透磁率材料で覆った大強度の磁界レンズにおいて、その軸方向の磁場分布は次式のような釣り鐘型であると仮定する。

$$B(z, r = 0) = \frac{B_0}{1 + (z/W)^2} \quad (26)$$

但しここで  $B_0$  はそのソレノイド磁場の最大磁束密度、また  $W$  は  $\frac{B_0}{2}$  となる  $z$  軸上の半減値幅である。このとき、この磁界レンズの焦点距離  $f$  は次式で与えられる。

$$f = \frac{W}{\sin(\pi/(1+K)^{1/2})} \quad (27)$$

ここで

$$K = \frac{e(WB_0)^2}{8m_e V} \quad (28)$$

$e$  は電子の電荷、 $m_e$  は電子質量、 $V$  は加速電圧でこれは electron のもつ Energy から求められる。この結果は  $z$  軸に近い電子の運動のみを考えた場合に導かれる電子の運動方程式 (近軸方程式) から導き出されるものである。(:[5])

この近似計算から得られた値と実際のシミュレーションでの焦点距離を比較した結果、そのずれは 10 %程度であった。この結果は近軸近似という近似法自体成り立つ範囲がかなり限られたものであるために、妥当であると判断した。

- 電子の角運動量保存の検証

軌道計算 Program から得られた Data より各時刻  $t$  における電子の磁場中での角運動量を、やはり Program を利用して計算していった。結果、電子の角運動量は一定であり、Program 中での 電子の振舞は妥当であると判断できる。

- 理論的ソレノイド磁場と Poisson superfish より得られたソレノイド磁場の比較

半径  $a$  の線状電流  $I$  がつくるソレノイド磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  は理論上では以下の式で表される。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{i}_e(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d^3r' \quad (29)$$

ここで、

$$\mathbf{i}_e(\mathbf{r}') = I\delta(r' - a)\delta(z')\mathbf{e}_\theta$$

$\mathbf{e}_\theta$  は方位角方向の単位ベクトル

この  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  から得られたシミュレーション軌道と、Poisson superfish で全く同じデザインで作成した磁場によるシュミレーション軌道はピッタリ一致した。

### 3.3 完成した Spectrometer Magnet

図 8、図 9 は完成した Spectrometer Magnet の写真である。中心に真空管を通し、その中を electron が走る。

図 8 は真空管を通したところ。図 9 は真空管に真空槽をつなげて、本実験の Set up に近い状態にしてある。

この Spectrometer Magnet は計算では最大で 300 [W] 弱の熱量を放出する。図 9 の右に見える扇風機は空冷のためである。

図 10 にこの Spectrometer Magnet の設計図を示した。この形のソレノイド磁場を二つ重ねて使用する。また図 11 は 電流  $I - B_z(r=0, z=0)$  の特性曲線である。美しい比例関係にあることがわかる。その他性能は Spectrometer Magnet の仕様書による。(:[6])

### 3.4 Spectrometer Magnet の発想概念

ここで、なぜこのような同一のソレノイド磁場二つを使った Spectrometer Magnet を考案したか、その発想の元となった概念を説明する。

図 12 を見て欲しい。

図 12 の上側の軌道は同一の Magnet を二つ使うときの一般的な軌道、下側の軌道は Magnet 一つだけのときの一般的な軌道である。Magnet 一つだけのときは Magnet に近づく軌道のほうが大きく磁場で曲げられて収束できないことがわかるだろう。

なぜこのような軌道を描くかと言えば、一般的にソレノイド磁場のつくる磁場  $B(\vec{r})$  は、半径方向にその  $z$  成分 (Source-Target の方向を  $z$  軸とする)  $B_z$  が大きくなる。しかもその  $B_z$  は Magnet に近づくとき急激に大きくなる。([6]) electron も同じエネルギーで比較すると出射角度が大きい、つまりより Magnet に近づく軌道の electron のほうが  $z$  方向の運動量が小さくなる。

この二つの理由によって electron は fig. の下側のような軌道を描いてしまうのである。





図 8: Spectrometer Magnet

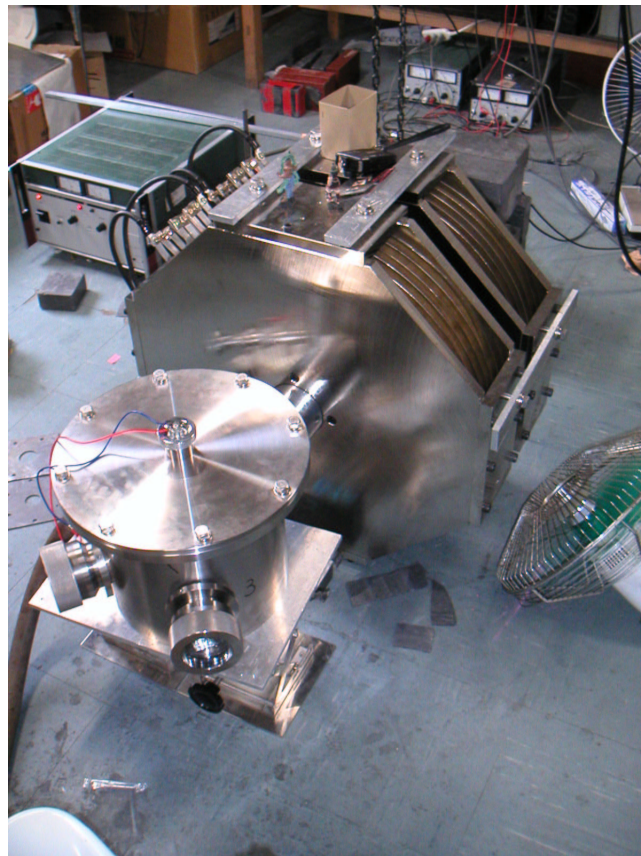


図 9: 真空槽をつけた Spectrometer Magnet

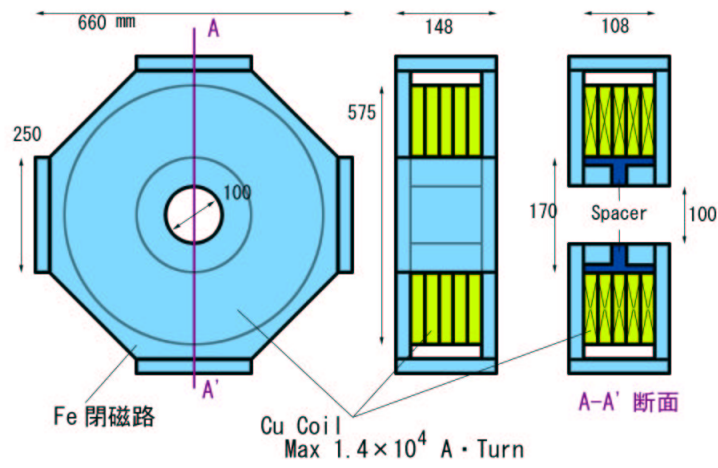


図 10: Spectrometer Magnet の設計図

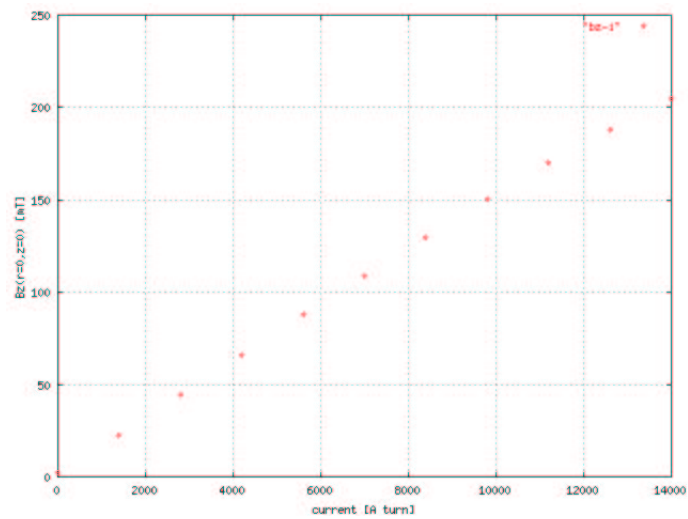


図 11:  $B_z - I$  特性グラフ

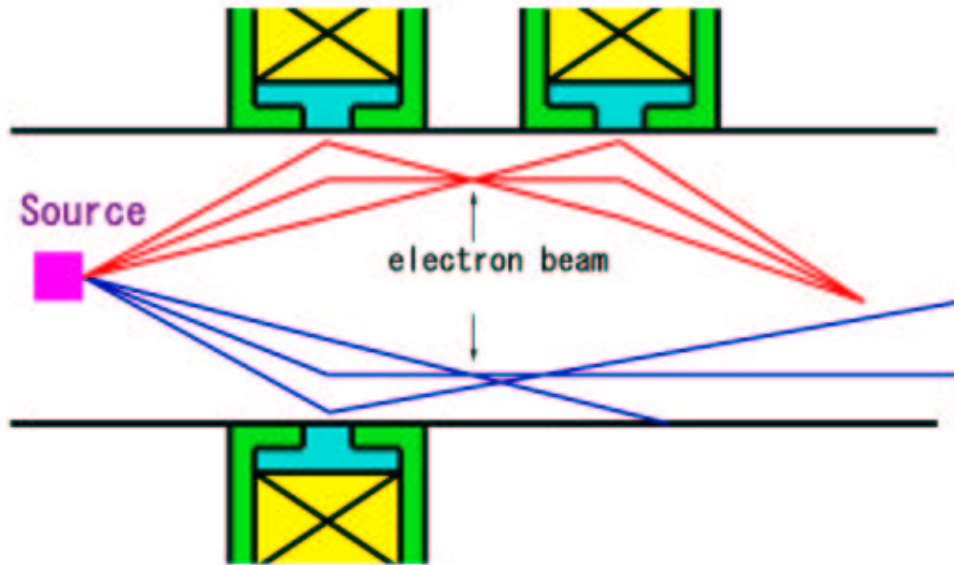


図 12: Spectrometer Magnet によって電子の描く軌道

そこでソレノイド磁場のそのような性質を逆にとり、二つの磁場を  $z = 0$  に対称に置けば electron の描く軌道も  $z = 0$  に対称になり fig. の上側の軌道のように収束するのでは、という予測からソレノイド磁場を二つ使用する、という結論に至った。

補足しておく、実際の本実験では  $z > 0$  側 (Target 側) の Magnet の磁場をもう一方の Magnet の磁場よりも小さくして、electron の収束点をより遠くに調整している。

これは electron の target 入射角を小さくするためである。

### 3.5 Spectrometer Magnet の性能の確認

#### 3.5.1 Set up

図 13 のような Set up でまず Cs の 630[keV] のコンバージョンラインを用いて PMT のキャリブレーションを行い、その後 Magnet に流す電流値を変化させながら収束する  $^{90}\text{Sr}$  の Energy と resolution を測定していった。

ここで、図 13. の示す通り Magnet1,2 (電流比 20:7) によって electron を二段階に曲げ、更に Stopper 1,2 を配置することによって細かい Energy 選択を行っている。

Source、Target、Stopper1,2、Magnet1,2 の配置とその電流比は全て先述の electron の軌道計算 Program をもとに決定した。

図 14 にその決定に用いた実際の Program による simulation 結果を示す。

これは Magnet1 : 14000[A·turn] Magnet2 : 5600[A·turn] のときの 1490[keV] の electron の描く軌道である。

Stopper1,2 を図のように挿入することで Acceptance は多少落ちるが resolution を大きく向上させることができると予想できる。

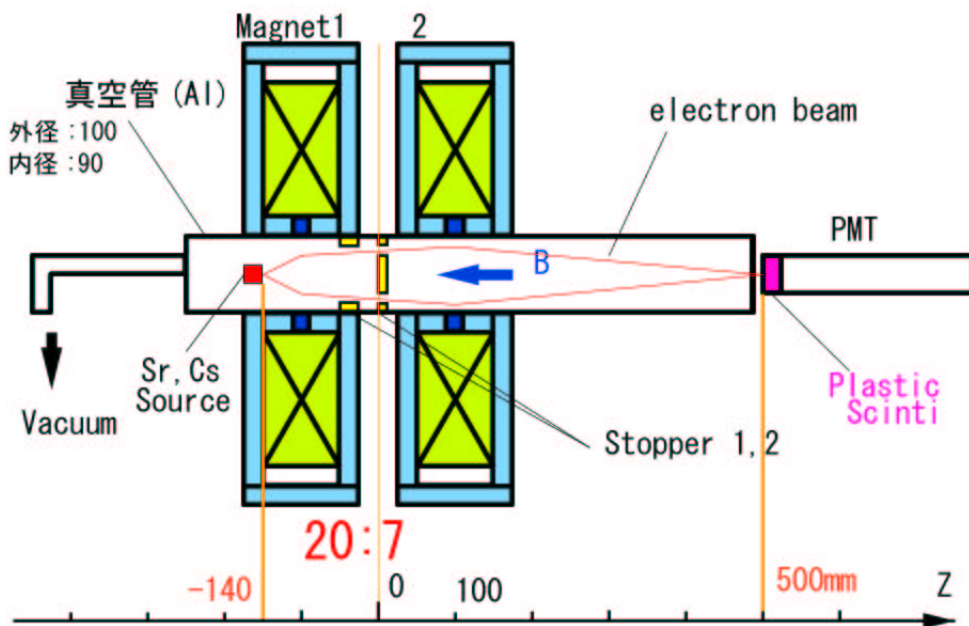


図 13: Spectrometer Magnet 性能確認 Setup

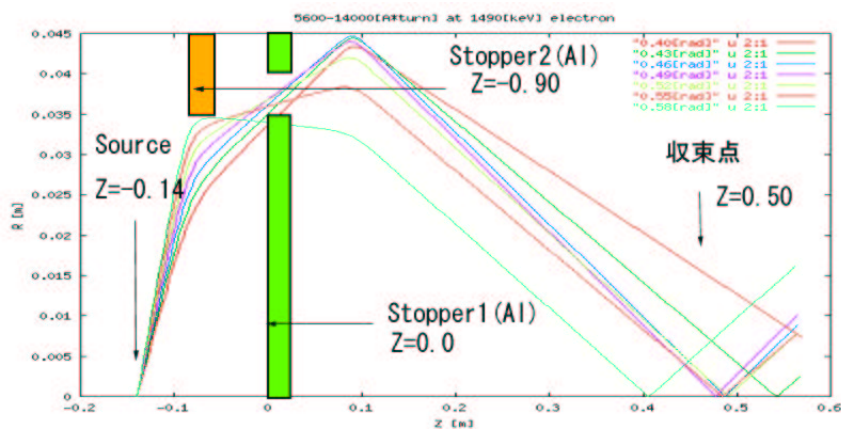


図 14: 14000[A·turn]-5600[A·turn] Spectrometer Magnet で 1490[keV] の electron が示す軌道

この図では Source からの出射角  $0.46\text{--}0.55[\text{rad}]$  の electron が収束している。なぜわざわざ高い出射角の electron を収束させているかと言えば、その方が Acceptance が稼げるからだ。

計算ではこれでも十分 1% の Acceptance は得られる見積もりである。

参考のために、図 15 に simulation の失敗例も示しておく。

これは先程と同じ電流値の Magnet 条件下で、今度は  $1400[\text{keV}]$  の electron の描く軌道である。electron のエネルギー差は  $100[\text{keV}]$  程度であるにも関わらず、収束している様子はない。先ほどのように Stopper 1,2 を入れることでこの Energy での electron は止めることができる。

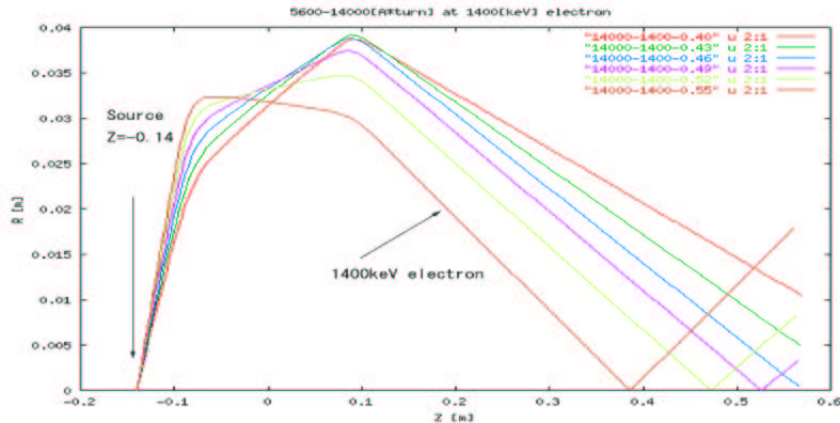


図 15:  $14000[\text{A}\cdot\text{turn}]\text{--}5600[\text{A}\cdot\text{turn}]$  Spectrometer Magnet で  $1400[\text{keV}]$  の electron が示す軌道

### 3.5.2 測定結果と解析

図 16、図 17 に、実際に測定して得られた  $^{90}\text{Sr}\beta$  線の channel ごとの count 数を示す。

図 16 は  $^{90}\text{Sr}\beta$  崩壊を磁場をかけず、Stopper もいれずに生で 3 分とったもので、x 軸は channel 数、y 軸は Count 数を表している。また図 17 は磁場をかけ、Stopper1,2 を挿入して  $^{90}\text{Sr}\beta$  崩壊を先ほどと同様に 3 分間とったものである。

一番左から Magnet1 に流した電流値が  $7000[\text{A}\cdot\text{turn}]$ 、 $8400[\text{A}\cdot\text{turn}]$ 、 $9800[\text{A}\cdot\text{turn}]$ 、 $11200[\text{A}\cdot\text{turn}]$ 、 $12600[\text{A}\cdot\text{turn}]$ 、 $14000[\text{A}\cdot\text{turn}]$  での Data である。それぞれの Data ごとに上部に記載してある数値は Cs によるキャリブレーションから求めた収束している electron の Energy 値  $[\text{keV}]$  である。

それぞれの電流値ごとの Energy resolution は表 3.5.2 に載せておいた。総じて 10% 以下の resolution を誇る。

更に、simulation から予想されていた収束 Energy と、実際に収束した electron の Energy の値の比較をしよう。

図 18 がその比較結果である。

ここで、simulation では Magnet 1,2 の電流比を 20:8 としているが実際の測定では 20:7 としている。その他 Stopper の位置など、微調整は施している。

これまでみてきた結果をまとめると、この磁界レンズを設計するために行った simulation はかなり精度よいものであったといえる。

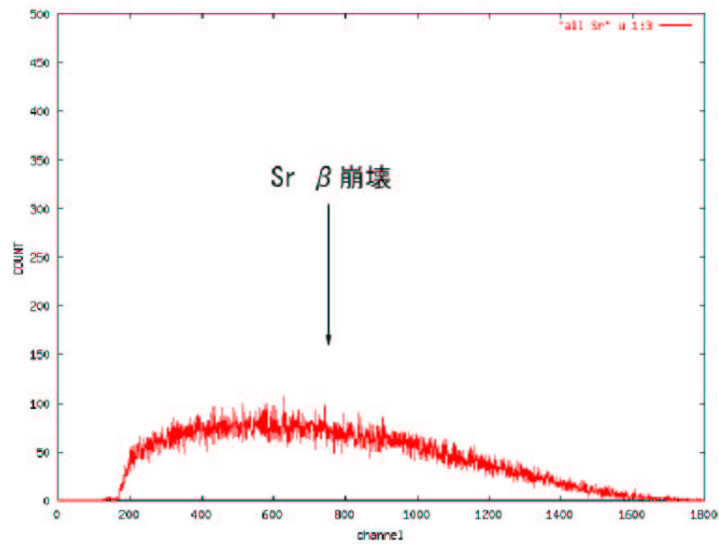


図 16: magnet 無しでの  $^{90}\text{Sr}$   $\beta$ 崩壊 (3分)

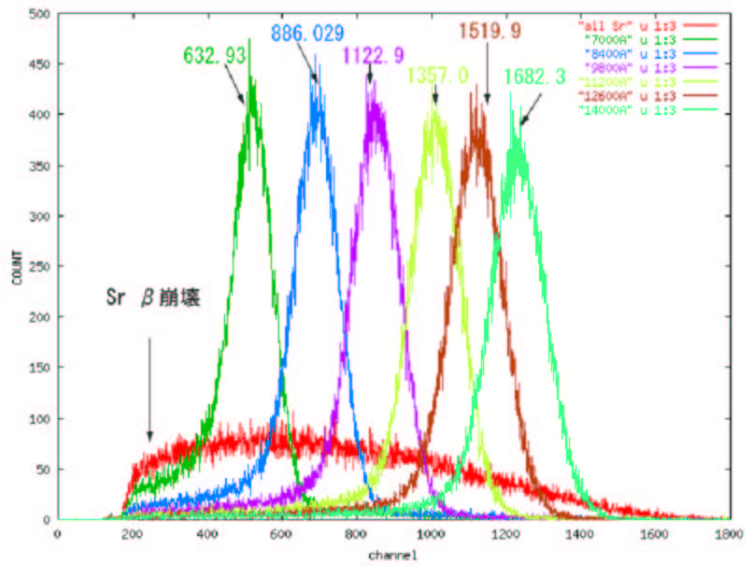


図 17: spectrometer magnet 使用中の  $^{90}\text{Sr}$   $\beta$ 崩壊 (3分)

Magnet1 current[A · turn]	Energy [keV]	resolution [%]
7000	633	13.8
8400	886	10.7
9800	1123	8.8
11200	1357	7.6
12600	1520	7.1
14000	1682	6.7

表 1: 電流値ごとの収束 electron energy とその resolution

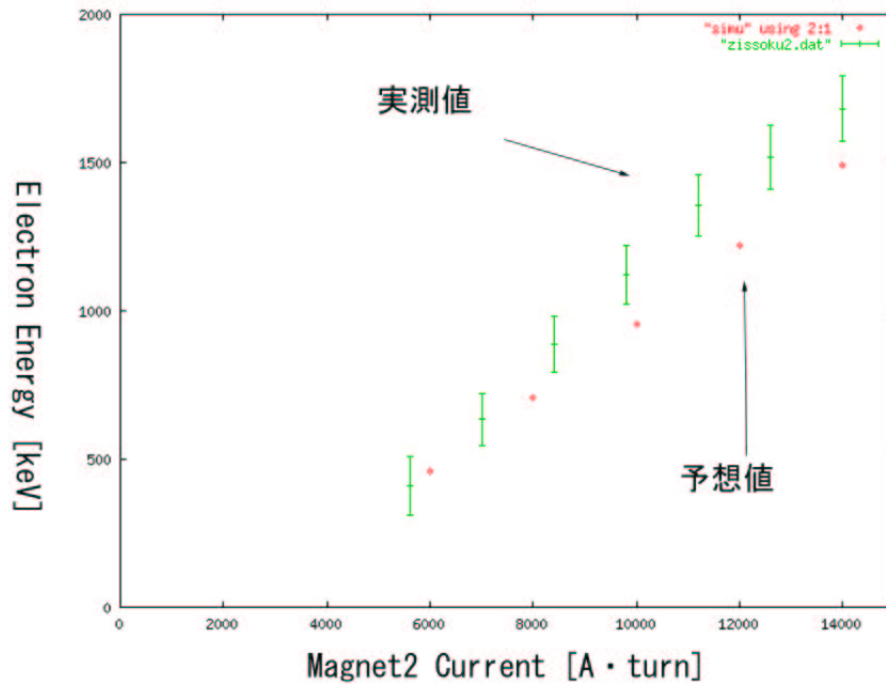


図 18: simulation より予測されていた収束 Energy と実際に収束した electron の Energy の比較

この Spectrometer の性能測定結果としての resolution は 10 %以下と出たが、Plastic Scinti のもつ resolution の限界もきいているので他の Detector で計測してみるのもよいだろう。

唯一問題点を挙げるとするならば、収束するビームの直径が 30-40[mm] 程度で予想よりも大きくなってしまった点である。

この点においては詳しい測定を行っていないために収束ビーム直径の精密な情報はわからないが、多少の改良の余地がある。

しかし、多少残った問題点を考慮しても、収束能力としては私たちの作成した磁界レンズはこの実験に必要な能力を十分にもったものであった。Spectrometer Magnet の作成は大成功といえるのではないだろうか。



## 4 実験概要

### 4.1 Set up

図のような set up で møller 散乱の実験を行った。

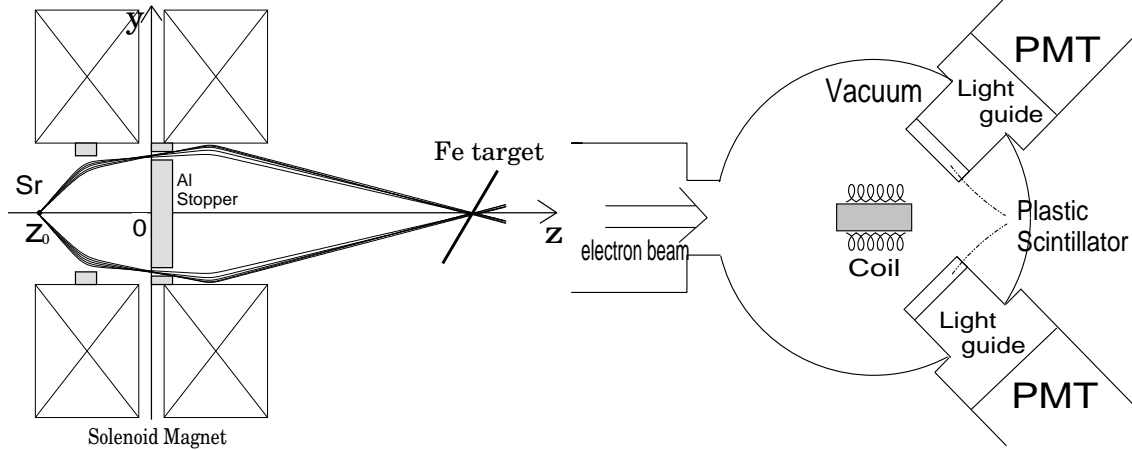


図 19: 本実験イメージ

図 20: 真空槽内部

### 4.2 実験のながれ

放射線源  $^{90}\text{Sr}$  から出る  $\beta$  線を作成した 2 つの solenoid magnet でエネルギー選択をして target (Fe [ $2 \times 10^{-2}$  mm 厚], Al [ $3 \times 10^{-2}$  mm 厚]) (系に systematic な偏りがある Asymmetry がでてしまったのかどうかを検証するために磁化しない Al を target とした実験もおこなった。このとき Asymmetry は 0 になるはずである。) にあてる。target には両脇にあるコイルに電流を流すことによって磁場をかけ relay multi プレクサーを使って 10 秒おきに電流の向きを反転させる、そこで møller 散乱した電子を二つの Detector (Plastic Scintillator + Photo Multi Plier) を使って検出し、target の電子の spin が parallel の時と anti parallel の時の散乱数の差で Asymmetry を出す。

$^{90}\text{Sr}$  からの  $\beta$  線の Spectrometer として利用する solenoid に流す電流の組合せは 4 パターンで、ストッパーの位置とともに以下に示す

$I_A$ [A]	$I_B$ [A]	$z_0$ [mm]	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$E$ [keV]
45	15.8	-170	0	-90	1520
35	12.3	-170	0	-90	1123
30	10.5	-170	0	-100	886
25	8.8	-170	0	-110	632

$z_0$ : ソース位置,  $l_1$ : ストッパー 1 の位置,  $l_2$ : ストッパー 2 の位置

$E$ : 収束される電子のエネルギー

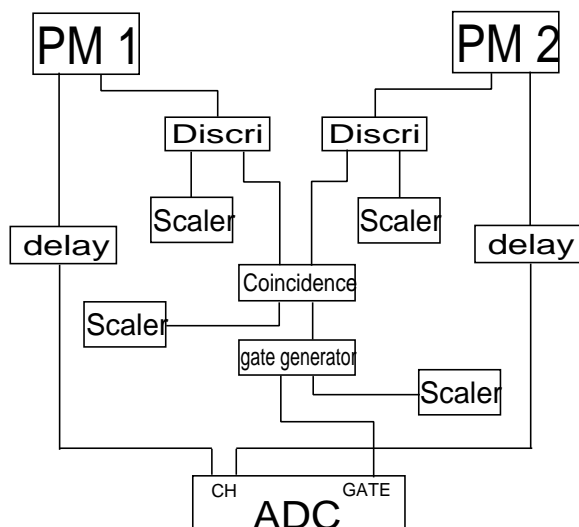
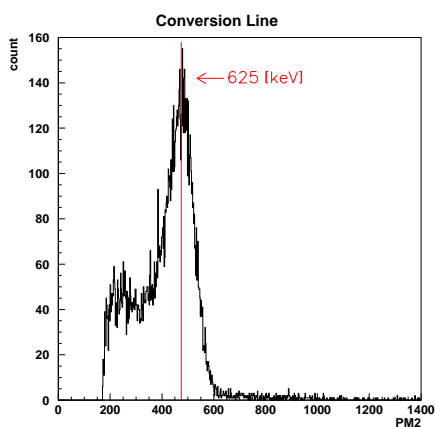


図 21: 回路図

本来は  $I_A=25[A]$  以下の電流の組み合わせで、より低エネルギーの入射電子による möller 散乱も見たかったのであるが今回用いた detector ではその散乱後の電子を検出することができなかった。

### 4.3 Energy calibration

Detector の energy calibration は  $^{137}\text{Cs}$  からのコンバージョンライン (単色  $625\text{keV}$  の  $\beta$  線) を用いた。シミュレーション結果から solenoid magnet で  $625\text{keV}$  の  $e^-$  が収束するような setting を調べ、測定した。



	0[keV]	625[keV]
PM1(channel)	$81.9 \pm 1$	$306.4 \pm 4$
PM2(channel)	$84.2 \pm 1$	$474.1 \pm 4$

図 22: Conversion Line の収束

## 5 DATA 解析と結果

この実験で得られた2つのPMTからのdataをEnergy Calibrationの結果から「channel」をenergyに変えて2次元plotすると図のようになる。

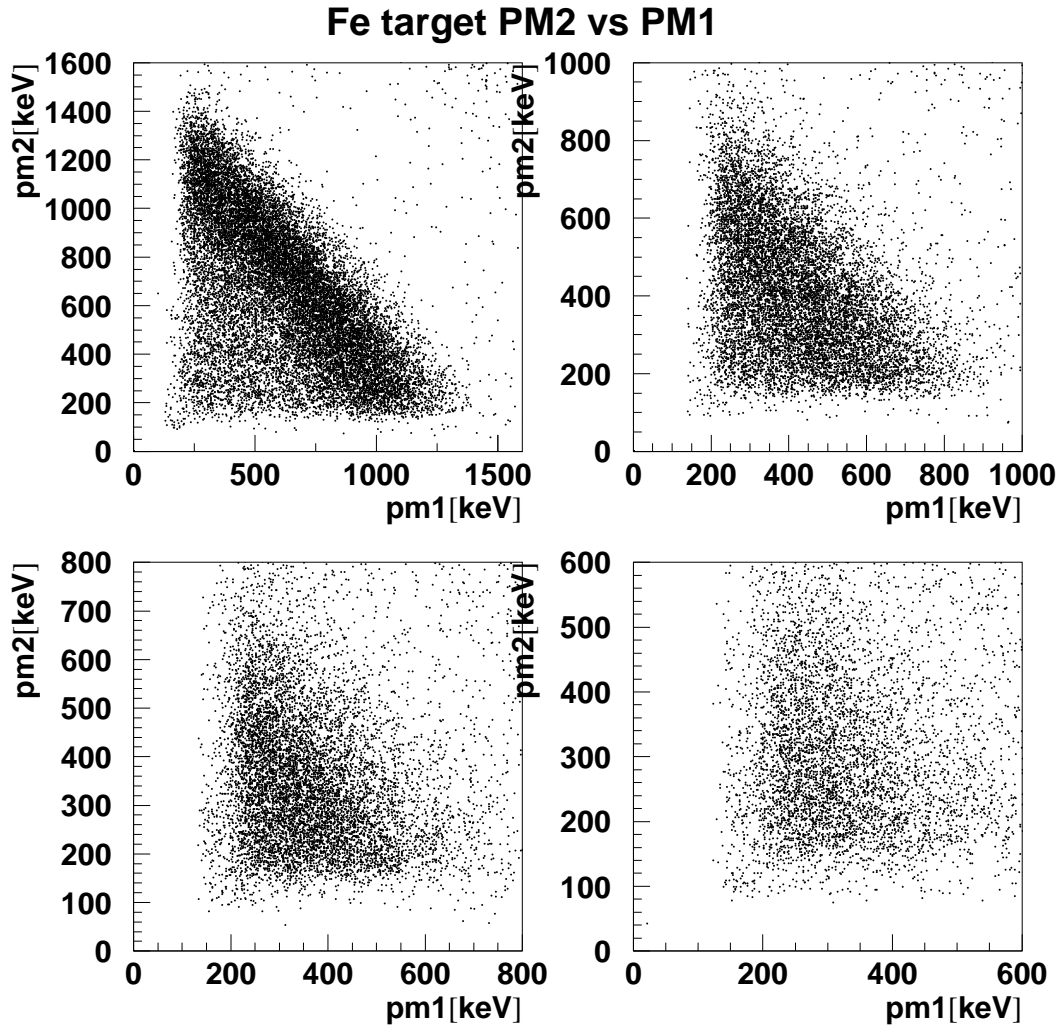


図 23: Fe target:左上から時計回りに入射  $e^-$  エネルギー 1520keV,1123keV,886keV,632keV

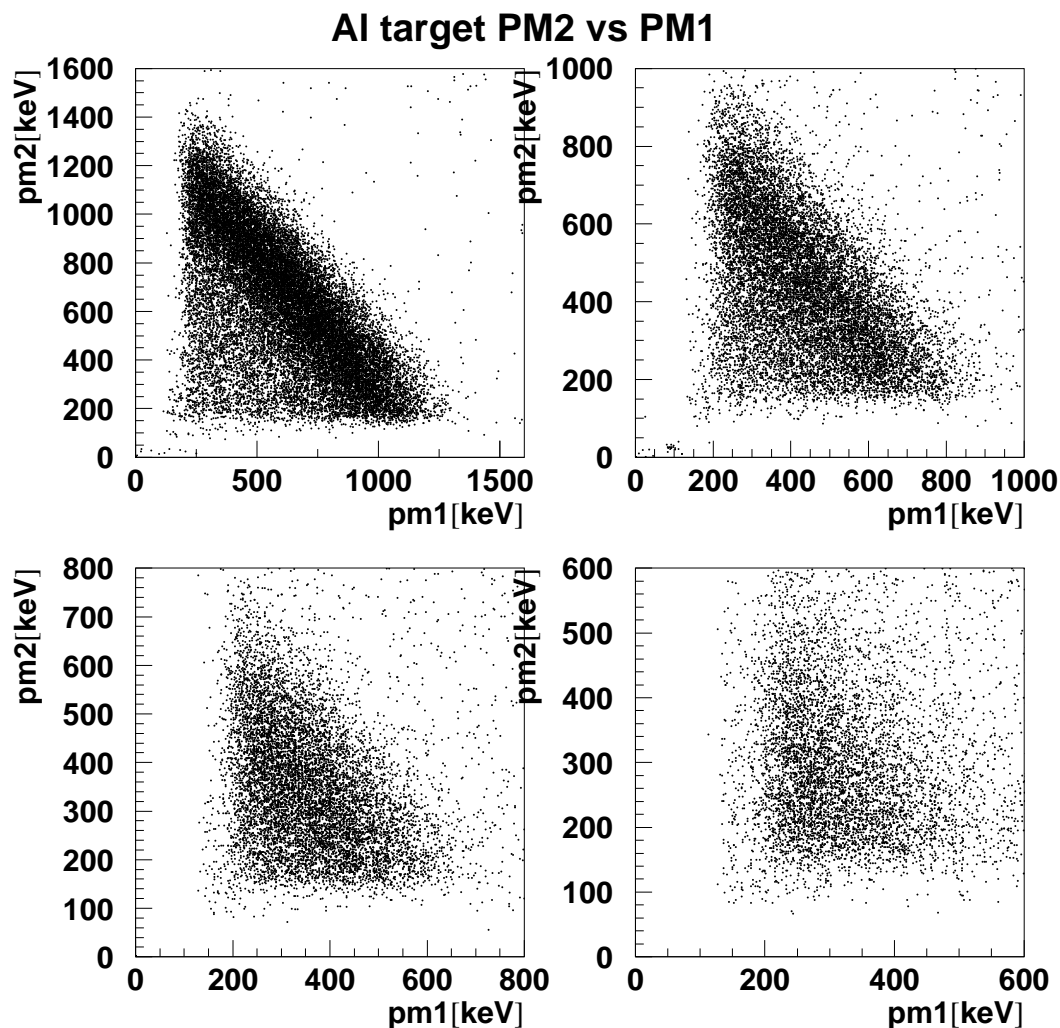


図 24: Al target:左上から時計回りに入射  $e^-$  エネルギー 1520keV,1123keV,886keV,632keV

これを見ると実際一定の energy の  $e^-$  beam による moller 散乱であることが「PM1+PM2=一定となるような色の濃い部分がある」ということでわかる。ここでこの data から Asymmetry を出すのだが理論で見たように data を適当な範囲で cut してやる必要がある。そこで  $\sigma_P/\sigma_A$  の最小値 ( $\theta_c=90^\circ$ ) からのズレが 10%,15%,20% のそれぞれで cut をほどこした。

これは  $T_1, T_2$  を moller 散乱後の 2つの電子の kinetic energy とすると

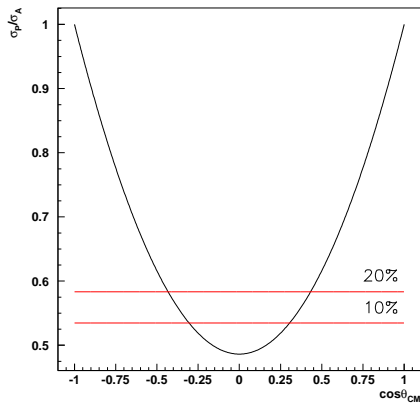


図 25:  $\frac{\sigma_P}{\sigma_A}$  からの cut

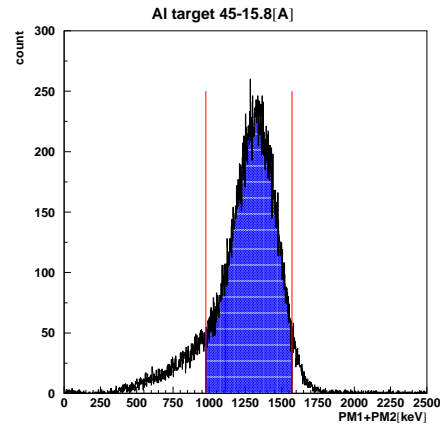


図 26: data から入射電子のエネルギーの逆算

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \cos \theta_c}{1 - \cos \theta_c}$$

という関係から data 上では図 6 のような cut に対応する。

さらに異なるもう 1 つの cut を考えた。と、いうのも  $e^-$  beam には収束されたエネルギー以外の  $e^-$  も多少ふくまれていて図 5、6 を見てもわかるがその  $e^-$  もまた møller 散乱を起こして検出してしまっている。よって、入射  $e^-$  のエネルギーによる cut をする必要がある。図 5、6 の x と y の値を足して histogram を作り incident electron の energy spectrum を逆算してやることによって図のようなグラフを得て、

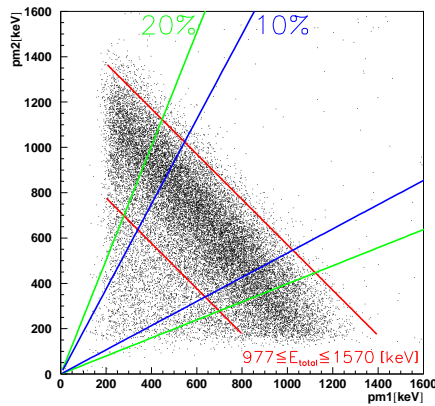


図 27: data 上での cut の様子

ここで見えている peak が全て beam の  $e^-$  による寄与であるとみなして peak 値の 1/5 となる全幅 (gaussian  $1.8\sigma$ ) の energy 範囲で cut をした。cut された範囲の data に accidental の見積もりを差し引いてやり

$$Asymmetry = \frac{C_A - C_P}{C_A + C_P}$$

によって Asymmetry を出した。error は統計によるもののみを考慮した。

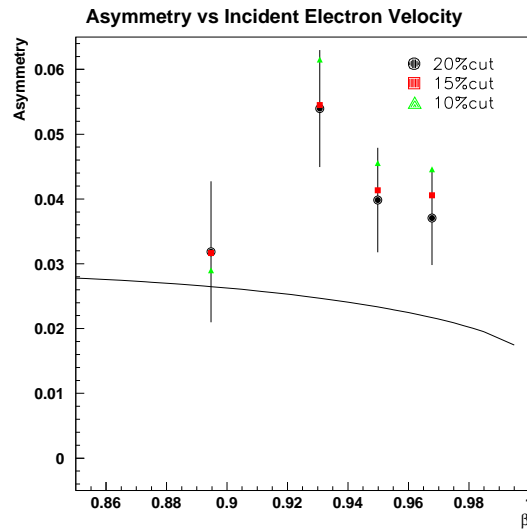


図 28: V-A 理論曲線と Fe target の Asymmetry

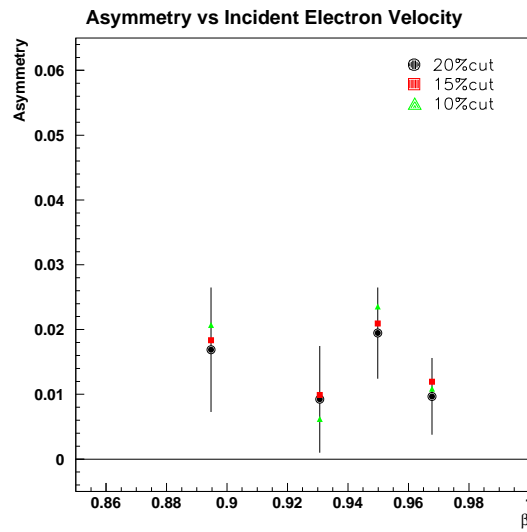


図 29: Al target の Asymmetry

# Incident Electron Polarization vs Incident Electron Velocity

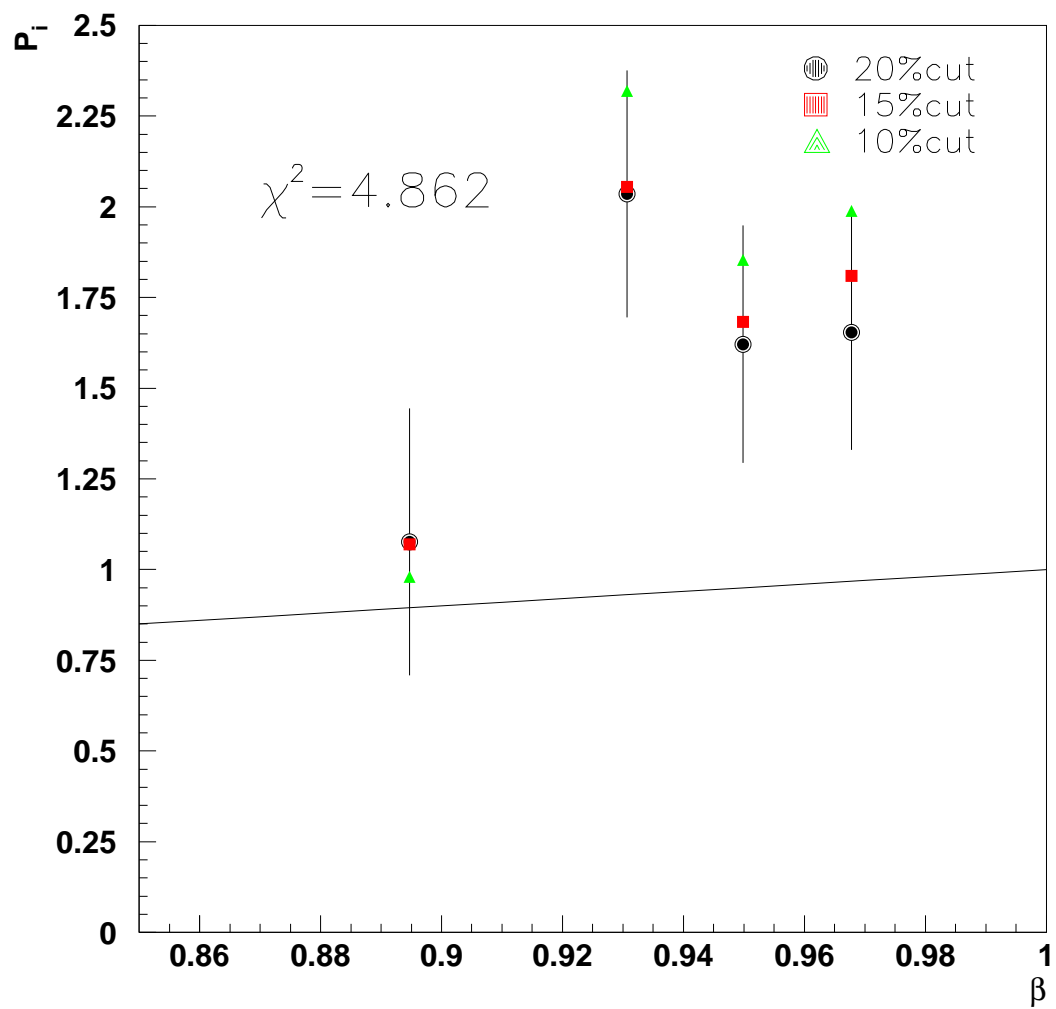


図 30: V-A 理論曲線と実験から得られた偏極率  $P_i$

## 6 結論と考察

今回の実験では Parity の破れはみえたが、V-A 理論に関しては残念ながら理論と consistent な結果が出るには到らなかったが data 数が圧倒的に足りないということもあり、もっと時間をかけて data をためればよい結果がでたのかもしれない。Null Asymmetry つまり Al target に関しても明らかに結果は Null(つまり 0)ではなく、そもそも Al を使って実験すること自体がよい方法なのかどうか疑われる。そこで偏極していない  $^{137}\text{Cs}$  からの  $\beta$  線 (Conversion Line) で実験することも考えたのだが、あまりに data taking に時間がかかるため今回は止むなく断念した、しかし是非やってみたい実験のひとつである。

また target に当たる電子の数をほぼ等しくなるようにストッパー位置を調整したにもかかわらず低エネルギーでの acceptance が著しく悪かった。今回は solenoid 電磁石が届いてからの研究が十分にできなかったので Spectrometer としてのより細かな性能 (再現性、beam 径、FocusPoint 等) をみてやる必要がある。また全体のセットアップも、PMT の gain の変化 (長時間の測定がおこなわれるためその間に gain が変化している可能性がある) に対応できるように、もう 1 つ PMT を target 後方に置いて data を比較できるようにしたり、また PMT の calibration を簡単にできるように組めれば作業効率が格段によくなると思われる。



## 第III部

# 謝辞

- 理論では畑先生、実験では笹尾、野村両先生にたいへんお世話になりました。未熟な僕達に対して丁寧に指導していただき、実りある1(?)年間を過ごすことができました。P2メンバーへ…ありがとう、皆のおかげでほんとに楽しく実験をすすめることができました。これからP2魄を忘れず頑張ってください！  
白井
- お疲れ様でした。随分と周りの人たちに教えてもらうことの多い日々だったと本当に感謝しています。それにしてもP2だった皆は、今どこで何をしているんでしょうね。懐かしい……と言ったらこのレポートがあがった時期がばれてしまいますが。  
竹澤
- 1年間を通してとても貴重な体験をさせて頂きありがとうございました。特に実験装置に関しては、コイルは高エネ研でも必要だったという幸運もありましたが、莫大な費用にも関わらず、僕達の思ったように作らせて頂きました。笹尾さんには push-pull 回路も含めて、電気回路について多くの事を教えて頂き、本当に勉強になりました。野村さんはいつなんどき質問や実験の相談にいつでも快く応じてくださいました。畑さんには1年近く理論ゼミをみて頂きました。場の理論は難しく苦勞しましたが、散乱断面積が計算できるようになった時は本当にうれしかったです。教官の方々には数度にわたって飲み会も開いて頂きました。本当にありがとうございました。そして最後に卒業しばらばらになりましたが、P2のメンバー達、温かく思い出深い1年間をありがとう。

## 第IV部

# Appendix

## A 磁化率の測定

### A.1 前書き

Asymmetry は target 電子の偏極度  $P_t$  に比例する。Asymmetry から incident 電子の偏極度  $P_i$  を計算するには  $P_t$  の値が必要である。

$P_t$  は target 鉄の磁化  $M$  (ここではほぼ磁束密度  $B$  に等しい) から求まる。ここでは  $B$  を測定する。

### A.2 測定原理

ここで知りたいのは磁化コイルに流した電流  $I_{coil}$  [A] と target 中にできる磁束密度  $B_{target}$  [T] との特性曲線である。この測定において回路 1(後述) で磁化コイルに流れる電流  $I_{coil}$  [A] は、回路に直列接続した抵抗  $R_d$  ( $\cong 1$  [ $\Omega$ ]) 抵抗の両端電圧を見てやればよい。140Hz の sin 波を Function Generator から入射させているから

$$I_{coil}(t) = I_{coil0} \sin 2\pi ft = I_{coil0} \sin 280\pi t$$

と  $I_{coil}(t)$  は時間に依存する関数となる。

このとき、一本の磁化コイル内に発生する磁束密度  $B_{coil}$  [T] は

$$\begin{aligned} B_{coil}(t) &= \mu_0 \mu_r H_{coil}(t) \\ H_{coil}(t) &= \frac{n}{L} I_{coil}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4.0\pi \times 10^{-6} [H/m] && : \text{真空の透磁率} \\ \mu_r &= 10^3 && : \text{鉄の比透磁率} \\ n &= 140 && : \text{磁化コイル巻数} \\ L &= 8.0 \times 10^{-2} [m] && : \text{磁化コイル長さ} \end{aligned}$$

このようにして発生した磁束が target 鉄フォイルに入って target にまかれた導線コイルに電位差  $V_{target}$  [V] を生じさせる。

$$V_{target}(t) = -NS \frac{dB_{target}(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} S &= 4.5 \times 10^{-7} [m^2] && : \text{target の断面積} \\ N &= 240 && : \text{target のコイル巻数} \\ B_{target}(t) [T] &&& : \text{target 内磁束密度} \end{aligned}$$

この電位差は積分回路に入ると、その出力  $V_{out}(t)$  は後述の (式番号) より

$$\begin{aligned} V_{out}(t) &= -\frac{1}{CR} \int V_{target}(t) dt \\ &= \frac{NS}{CR} \int \frac{dB_{target}(t)}{dt} dt \\ &= \frac{NS}{CR} B_{target}(t) \quad (= y) \end{aligned} \tag{30}$$

よって

$$B_{target}(t) = \frac{CR}{NS}V_{out}(t) = 9.259 \times V_{out}(t) = 9.259 \times y \quad (31)$$

これより、 $x = R_d I_{coil}(t)$ 、 $y = \frac{1}{9.259} B_{target}(t)$

から  $x, y$  の測定で  $I_{coil}$  と  $B_{target}(t)$  の特性曲線が得られる。またこの測定では target フォイルを補強のためプラスチック板ではさんで測定を行っている。そのため target をプラ板にはさまずプラ板のみで同様の測定を行い、そのときの  $y$  を target ありの場合の  $y$  から差し引くことでプラ板の影響を除いている。

得られた  $B_{target}$  から  $P_t$  を求める。

まず一般に磁束密度  $B$  と磁化  $M$  について次式が成り立つ。

$$B = \mu_0 H + M \quad (32)$$

$\mu_0 H$  の大きさを見積もる。

$$\begin{aligned} \mu_0 H &\cong \mu_0 \frac{n}{L} I_{coil} \\ &= 1.26 \times 10^{-6} \times \frac{140}{8.0 \times 10^{-2}} \times 1 \\ &= 2.2 \times 10^{-3} [T] \end{aligned} \quad (33)$$

この測定においては  $B_{target} \cong 1 [T]$  であるから  $\mu_0 H$  は  $M$  に対して無視できる。

$$B_{target} \cong M$$

$M = \mu_0 \mu_B N_s P_t$  より、

$$P_t = \frac{B}{\mu_0 \mu_B N_s} \quad (34)$$

$\mu_B$  : 電子の magnetic moment

$N_s$  : 単位体積あたり電子数

実験に使用した foil 2605CO の原子数比は  $Fe_{67}Co_{18}B_{14}Si_1$  で、密度は  $7.56 [g/cm^3]$  である。

	Fe	Co	B	Si
原子番号	26	27	5	14
質量数	55.8	58.93	10.81	28.09

$$\frac{55.8 \times 67x + 58.93 \times 18x + 10.81 \times 14x + 28.09 \times x}{6.022 \times 10^{23}} = 7.56 \times 10^6$$

$$x = 9.144 \times 10^{26} [m^{-3}]$$

$$\begin{aligned} N_s &= (67 \times 26 + 18 \times 27 + 14 \times 5 + 1 \times 14) \times 9.144 \times 10^{20} \\ &= 2.114 \times 10^{30} [m^{-3}] \end{aligned} \quad (35)$$

ここで、 $\mu_B = 5.788 \times 10^{-11} [MeV/T] = 9.272 \times 10^{-24} [J/T]$  であるから

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{B_{target}}{1.257 \times 10^{-6} \times 9.272 \times 10^{-24} \times 2.114 \times 10^{30}} \\ &= 0.04059 B_{target} \end{aligned} \quad (36)$$

となる。

### A.3 結果と解析

本測定結果は以下の通りである。

Function Generator からの出力値と  $x, y$  の値

F.G 出力 = 3500 [mV]

$x$ [mV]	$I_{coil}$ [mA]	$y$ (Fe set) [mV]	$y'$ (Fe noset) [mV]	$y - y'$ [mV]
1400	1373.68	151.50	11.9	139.6
1350	1324.62	150.00	11.4	138.60
1300	1275.56	147.5	10.8	136.70
1250	1226.50	146.25	10.5	135.75
1200	1177.44	145.00	10.2	134.80
1150	1128.38	142.50	9.7	132.80
1100	1079.32	141.25	9.2	132.05
1050	1030.26	138.75	8.8	129.95
1000	981.20	137.00	7.7	129.30
950	932.14	135.00	7.3	127.70
900	883.08	133.75	6.7	127.05

F.G 出力 = 3000 [mV]

$x$ [mV]	$I_{coil}$ [mA]	$y$ (Fe set) [mV]	$y'$ (Fe noset) [mV]	$y - y'$ [mV]
1200	1177.44	148.25	9.9	138.35
1150	1128.38	146.50	9.5	137.00
1100	1079.32	144.50	9.1	135.40
1050	1030.26	142.50	9.2	133.30
1000	981.20	139.25	8.3	130.95
950	932.14	137.00	7.6	129.40
900	883.08	135.25	6.9	128.35
850	834.02	133.75	6.7	127.05
800	784.96	131.00	6.7	124.30
750	735.90	129.00	6.1	122.90

F.G 出力 = 2500 [mV]

$x$ [mV]	$I_{coil}$ [mA]	$y$ (Fe set) [mV]	$y'$ (Fe noset) [mV]	$y - y'$ [mV]
1000	981.20	141.00	6.8	134.20
950	932.14	137.00	6.5	130.50
900	883.08	134.00	6.6	127.40
850	834.02	132.00	5.8	126.20
800	784.96	130.00	5.5	124.50
750	735.90	127.50	5.0	122.50
700	686.84	125.25	5.0	120.25

F.G 出力 = 2000 [mV]

$x$ [mV]	$I_{coil}$ [mA]	$y$ (Fe set) [mV]	$y'$ (Fe noset) [mV]	$y - y'$ [mV]
800	784.96	131.50	5.8	125.70
750	735.90	128.50	5.1	123.40
700	686.84	126.00	4.7	121.30
650	637.78	123.75	4.5	119.25
600	588.72	121.00	3.6	117.40
550	539.66	117.50	3.4	114.10

F.G 出力 = 1500 [mV]

$x$ [mV]	$I_{coil}$ [mA]	$y$ (Fe set) [mV]	$y'$ (Fe noset) [mV]	$y - y'$ [mV]
600	588.72	122.00	3.5	118.50
550	539.66	116.25	3.4	112.85
500	490.60	115.00	3.1	111.90
450	441.54	112.00	2.3	109.70

$I_{coil}$ に対する磁束密度  $B_{target}$ 、偏極度  $P_t$ の計算値とその誤差

$I_{coil}$ [mA]	$B_{target}$ [T]	$\sigma_B$	$P_t$	$\sigma_{P_t}$
1373.68	1.293	0.04750	0.05247	0.001928
1324.62	1.283	0.08477	0.05209	0.003441
1275.56	1.266	0.09190	0.05138	0.003730
1226.50	1.257	0.07864	0.05102	0.003192
1177.44	1.248	0.07864	0.05066	0.003192
	1.281	0.06307	0.05200	0.002560
1128.38	1.230	0.08821	0.04991	0.003581
	1.269	0.08477	0.05149	0.003441
1079.32	1.223	0.08893	0.04963	0.003610
	1.254	0.08544	0.05089	0.003468
1030.26	1.203	0.08266	0.04884	0.003355
	1.234	0.08807	0.05010	0.003575
981.20	1.197	0.08603	0.04860	0.003492
	1.213	0.08054	0.04922	0.003269
	1.243	0.07269	0.05044	0.002950
932.14	1.182	0.08518	0.04799	0.003457
	1.198	0.07942	0.04863	0.003224
	1.208	0.07633	0.04905	0.003098
883.08	1.176	0.07965	0.04775	0.003233
	1.188	0.07895	0.04824	0.003205
	1.180	0.07786	0.04788	0.003160
834.02	1.176	0.08151	0.04775	0.003309
	1.169	0.08681	0.04743	0.003523
784.96	1.1509	0.07411	0.04672	0.003008

$I_{coil}$ [mA]	$B_{target}$ [T]	$\sigma_B$	$P_t$	$\sigma_{P_t}$
	1.153	0.07942	0.04679	0.003224
	1.164	0.07131	0.04724	0.002894
735.90	1.138	0.09040	0.04619	0.003669
	1.134	0.07055	0.04604	0.002864
	1.143	0.07558	0.04638	0.003068
686.84	1.113	0.07786	0.04519	0.003160
	1.123	0.07484	0.04559	0.003038
637.78	1.104	0.06713	0.04482	0.002725
588.72	1.087	0.08503	0.04412	0.003452
	1.097	0.07131	0.04454	0.002894
539.66	1.056	0.1055	0.04288	0.004280
	1.045	0.08028	0.04241	0.003259
490.60	1.036	0.08159	0.04206	0.003312
441.54	1.016	0.09110	0.04123	0.003698

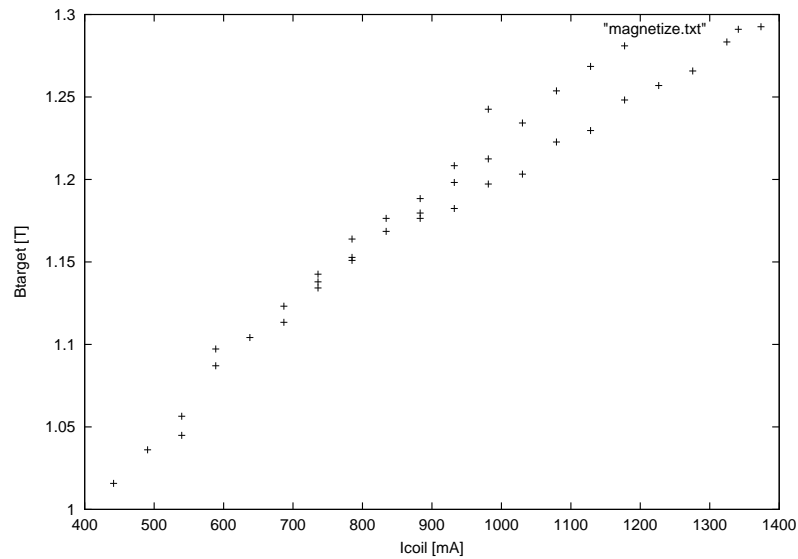


図 31:  $x$  軸 :  $I_{coil}$  [mA]  $y$  軸 :  $B_{target}$  [T] のグラフ

図 31 は磁化コイルに流れた電流  $I_{coil}$  [mA] と、計算から得られた target の磁束密度  $B_{target}$  [T] の関係を表したものであり、図 32 も同様に  $I_{coil}$  [mA] とそのときの target 偏極度  $P_t$  の計算値を表している。

ここで、 $I_{coil}$  と  $P_t$  はほぼ線形とみなして最小二乗法で近似してみる。その結果、

$$P_t = aI_{coil} + b \quad (37)$$

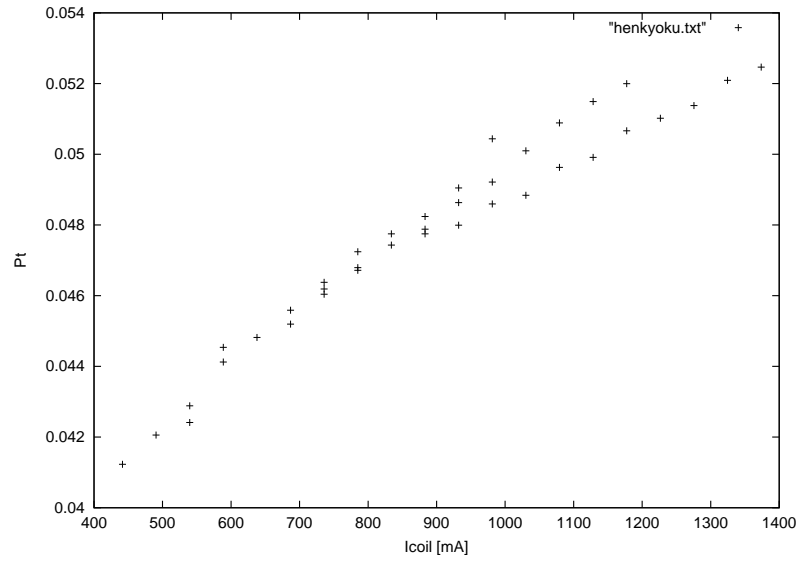


図 32:  $x$  軸 :  $I_{coil}$  [mA]  $y$  軸 :  $P_t$  のグラフ

$$a = 1.15351 \times 10^{-5} \pm 2.06104 \times 10^{-6}$$

$$b = 0.037516381 \pm 3.78819 \times 10^{-6}$$

これより  $I_{coil} = 1.20$  [A] のときにはほぼ target の偏極度は 0.05 程度になることがわかったので、実際の Møller 散乱における SetUp では 1.2 [A] を target holder の coil に流すことにした。

$I_{coil} = 1200$  [mA] のときの偏極度  $P_t(1200)$  の見積りは、

$$P_t(1200) = 0.0513585 \pm 0.0007867 \quad (38)$$

有効数字は二桁であり、Møller の解析の際にはそれを考慮する。

ここで  $x \neq I_{coil}$  [A] でないのは、抵抗  $R_d$  が厳密には 1 [Ω] ではなかったからである。

以下のような方法で  $x$  と  $I_{coil}$  [A] との関係を求めた。

この結果は以下の通り。

$x$  [V] と  $I_{coil}$  [A] との関係

$I_{coil}$ [A]	$x$ [V]
0.303	0.304
0.415	0.412
0.502	0.496
0.600	0.600
0.700	0.700
0.801	0.820
0.903	0.920
1.001	1.00
1.103	1.12
1.202	1.24
1.403	1.42
1.605	1.62
1.802	1.86
1.968	2.02

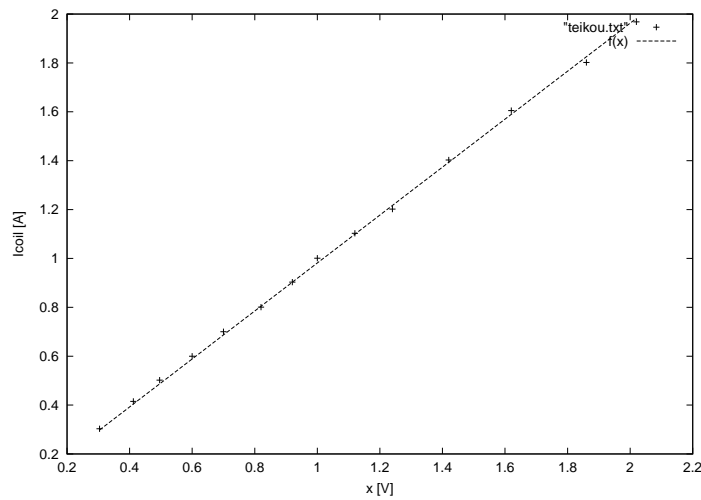


図 33:  $x$  軸 :  $x$  [V]  $y$  軸 :  $I_{coil}$  [A] のグラフ

最小二乗法による直線近似を用いれば

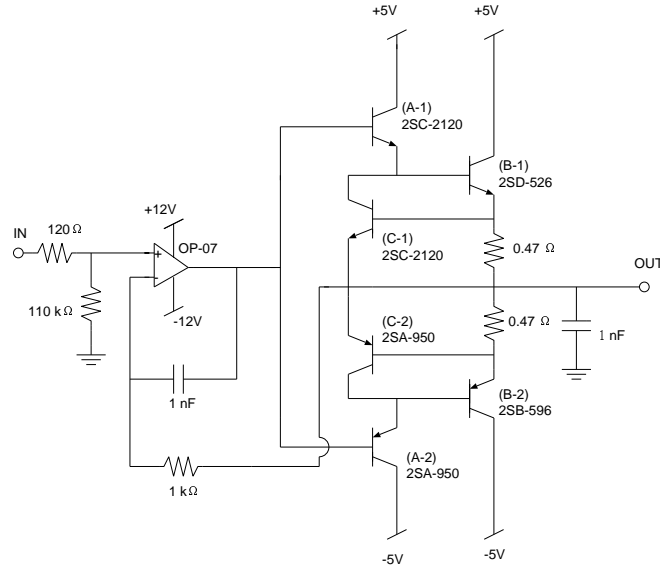
$$I_{coil} = 0.9812x \text{ [A]} \quad (39)$$

この値を解析には使用している。



## A.4 使用した装置

### a B 級プッシュプル回路



(A-1): +側一段目増幅装置 (A-2): -側一段目増幅装置  
 (B-1): +側二段目増幅装置 (B-2): -側二段目増幅装置  
 (C-1): +側安全装置 (C-2): -側安全装置

図 34: B 級プッシュプル回路

入力とほぼ同等の出力電圧が得られる。出力インピーダンス  $R_L$  を低くすれば大きな電流値を得られる電流増幅装置である。本測定で用いたプッシュプルは出力インピーダンスが  $R_L = 1\Omega$  の場合安全装置のために最大出力電流は  $3 \sim 4 [A]$  程度となるものを作成した。

### b 積分回路

入力、出力電圧をそれぞれ  $V_{in}, V_{out}$  とすれば、この二つのパラメーター間の関係は

$$V_{out}(t) = -\frac{1}{CR} \int V_{in}(t) dt \quad (40)$$

ここで積分回路の入力において積分可能周波数の上限値は

$$f_{min} = \frac{1}{2\pi CR} \quad (41)$$

下限値は

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi CR_f} \quad (42)$$

である。

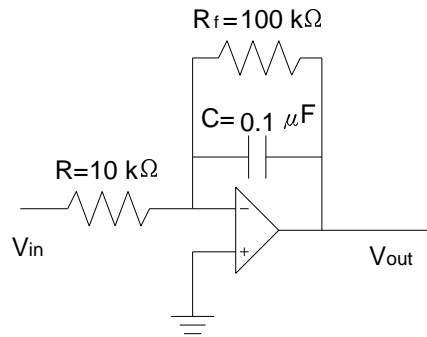


図 35: 作成した積分回路



図 36: 使用した target

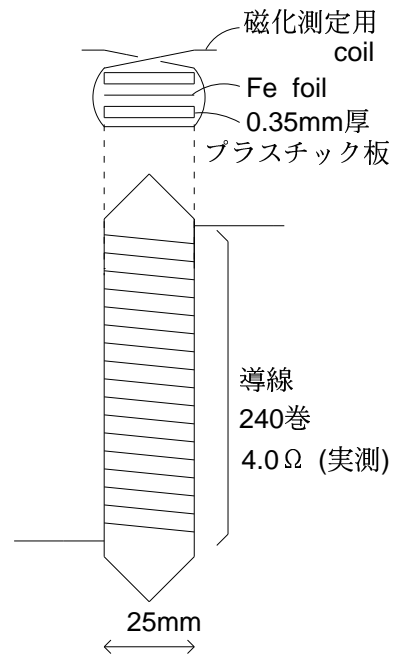


図 37: 磁化率測定用の target Setup

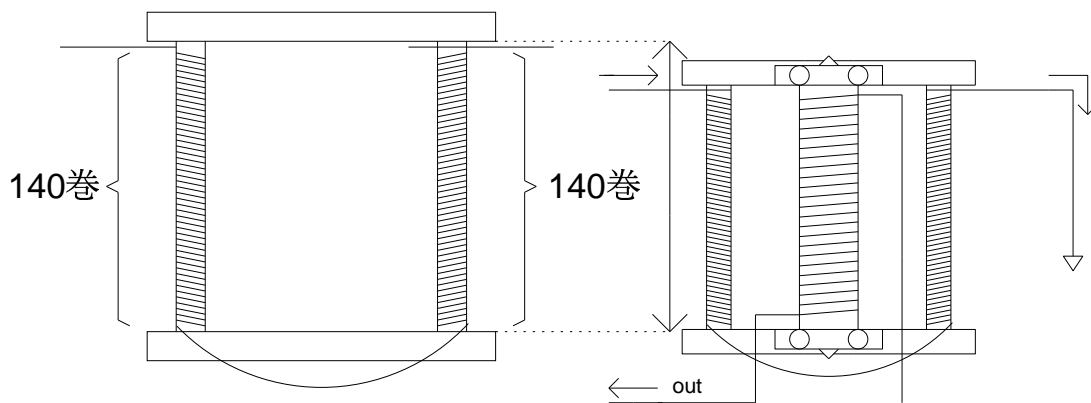


図 39: 実際のときの SetUp

図 38: 磁化用 target holder (材質: Fe)

本測定で用いたのは  $R = 10 [k\Omega]$ ,  $R_f = 100 [k\Omega]$ ,  $C = 0.1 [\mu F]$  によって  $f_{max} = 1.59 \times 10^2 [Hz]$ ,  $f_{min} = 1.59 \times 10 [Hz]$  実際の測定では 140[Hz] の sin 波を使用した。

### A.5 実際の測定での全体図

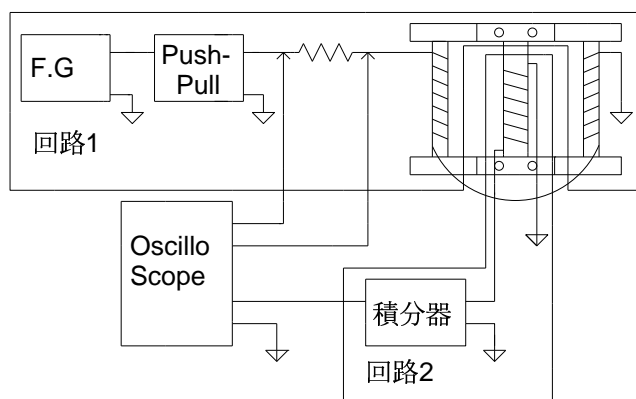


図 40: 測定全体図

## B Dirac 方程式と spin

以下の議論は 93 年度の P2 レポートを参照にした。  
電子は次の Dirac eq. に従うと考えられている。

$$(i\partial - m)\psi = 0$$

この方程式の平面波解には 2 つのタイプがある。

$$\begin{aligned} (i\partial - m)u(\vec{p}, s)e^{-ip \cdot x} &= (\not{p} - m)u(\vec{p}, s) = 0 & \left( s = \pm 1, p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \right) \\ (i\partial - m)v(\vec{p}, s)e^{ip \cdot x} &= (-\not{p} - m)v(\vec{p}, s) = 0 & \left( s = \pm 1, p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $s$  は演算子  $\hat{S}$  の固有値の 2 倍で  $u, v$  のそれぞれの 2 つの独立解を区別する。 $\hat{S}$  は  $[\not{p}, \hat{S}] = 0$  で  $\not{p}$  の定数倍でなければ何でも良いが、ここでは  $\hat{S}$  は *helicity* 演算子にしたい。そこで、*helicity* 演算子を具体的に書く。まず、粒子の静止系での  $\vec{e}$  方向 *spin* 演算子は以下のように書ける。

$$\hat{S} = \frac{1}{2m} \gamma^5 \not{p} \not{e}$$

$a^\mu$  は粒子の静止系で  $(0, \vec{e})$  ( $\vec{e}$  は単位ベクトル) となる 4-vector であり、具体的には

$$a^\mu = \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}}{m}, \vec{e} + \frac{(\vec{e} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{(E + m)m} \right)$$

静止系での値  $p^\mu = (m, \vec{0})$ ,  $a^\mu = (0, \vec{e})$  を代入すると

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \frac{1}{2m} \gamma^5 e_i \gamma^i m \gamma^0 \\ &= \frac{1}{2} e_i \gamma^5 \gamma^i \gamma^0 \\ &= \frac{1}{2} e_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} e_i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} e^i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり予想通りである。また

$$\begin{aligned} [\not{p}, \hat{S}] &= [\not{p}, \frac{1}{2m} \gamma^5 \not{p} \not{e}] \\ &= \frac{1}{2m} [\not{p}, \gamma^5 \not{p}] \not{e} \\ &= -\frac{1}{2m} \gamma^5 \{ \not{p}, \not{p} \} \not{e} \\ &= -\frac{1}{2m} (p \cdot p) \gamma^5 \not{e} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって同時固有状態が取れる訳である。

ここでは *helicity* 演算子を作りたいのだから、 $\vec{e} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$  とすればよい。

$$a^\mu = \left( \frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right)$$

(このように書くと  $a^\mu$  が 4-vector であることが見えなくなるので注意) 代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \frac{1}{2m} \gamma^5 \not{p} \not{e} \\ &= \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{m} & -\frac{E}{m} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \\ \frac{E}{m} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} & -\frac{|\vec{p}|}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

これも予想通りである。以上の議論から

$$\hat{S}u(\vec{p}, s) = \frac{s}{2}u(\vec{p}, s) \quad (43)$$

$$\hat{S}v(\vec{p}, s) = \frac{s}{2}v(\vec{p}, s) \quad (44)$$

とできる。解  $u(\vec{p}, s)$  や  $v(\vec{p}, s)$  に関する公式を書いておくと

$$\bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s) = 2m\delta_{ss'}$$

$$\bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s) = -2m\delta_{ss'}$$

$$\sum_{s=\pm 1} \bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s) = \not{p} + m \quad (45)$$

$$\sum_{s=\pm 1} \bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s) = \not{p} - m \quad (46)$$

(45), (46) の両辺に左から  $\frac{1}{2}(1 + 2s\hat{S})$  をかけると、(43), (44) より

$$u(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s) = \frac{1}{2}(\not{p} + m)(1 + s\gamma^5 \not{e})$$

$$v(\vec{p}, s)\bar{v}(\vec{p}, s) = \frac{1}{2}(\not{p} - m)(1 - s\gamma^5 \not{e})$$

ここで  $(\not{p} \pm m)2\hat{S} = \pm(\not{p} \pm m)\gamma^5 \not{e}$  を使った。

## C 軌道計算プログラム

コメントアウトがほとんどないためかなり読みにくいです、すみません。

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <string.h>

#define HMAX 10000
#define ME 510.998902 /* energy of electron [keV] */
#define C 2.99792458*pow(10,8) /* light velocity /10_8[m/s] */
#define r0 0
#define theta0 0
#define z0 -0.21 /* initial position of z [m] */
#define t0 0 /* initial time [s] */
#define MU (1.256637061*pow(10,-6))

double f1(double x1,double x2,double x3, double x4,double x5,double x6,double Bx,double By,double Bz)
return x4;
}

double f2(double x1,double x2,double x3, double x4,double x5, double x6,double Bx ,double By,double Bz)
return x5;
}

double f3(double x1,double x2,double x3, double x4,double x5, double x6,double Bx,double By,double Bz)
return x6;
}

double f4(double x1,double x2,double x3, double x4,double x5, double x6,double Bx,double By,double Bz)
return (-1.758819617 * pow(10,11) / gamma) * ( x5 * Bz - x6 * By);
}

double f5(double x1,double x2,double x3, double x4,double x5, double x6,double Bx,double By,double Bz)
return (-1.758819617 * pow(10,11) / gamma) * ( x6 * Bx - x4 * Bz);
}

double f6(double x1,double x2,double x3, double x4,double x5, double x6,double Bx,double By,double Bz)
return (-1.758819617 * pow(10,11) / gamma) * ( x4 * By - x5 * Bx);
}
```

```

double kutta(double y1,double y2,double y3,double y4){
    return (y1+2*y2+2*y3+y4)/6;
}

int jiba(double w1,double w2,double *w3,double *w4 ,char *readdata){

    double hr1[50000],hz1[50000],hBr1[50000],hBz1[50000];
    FILE *fpr1;
    int i1,i2,i3,i4;
    int status,flag,data_n,prpz_n,prmz_n,mrpz_n,mrmz_n,bound_n,nrpz_n,nrmz_n;
    double min_r;
    double phy_r,phy_z;

    double a1,a2,a3,a4,a5,a6;
    double b1,b2,b3,b4;
    double c1,c2;
    double d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8;
    double e1,e2,e3,e4;
    double f1,f2,f3,f4;

    phy_r=w1;
    phy_z=w2;

    flag=0;

    i1=0;

    if((fpr1=fopen(readdata,"r"))==NULL){
        printf("read file open error!\n");
        exit(1);
    }

    while(status!=EOF){
        status=fscanf(fpr1,"%lf%lf%lf%lf",&a1,&a2,&a3,&a4);
        if(phy_z<=a2+0.005 && phy_z>=a2-0.005){
            hr1[i1]=a1;
            hz1[i1]=a2;
            hBr1[i1]=a3;

```

```

        hBz1[i1]=a4;
        i1++;
    }
    else if(phy_z<a2-0.005)break;
}
fclose(fpr1);

data_n=i1;

for(i2=0;i2<data_n;i2++){
    if(phy_z<hz1[i2]){
        bound_n=i2;
        break;
    }
}

for(i3=bound_n;i3<data_n;i3++){
    if(phy_r<hr1[i3]){
        if(i3==bound_n){
nrpz_n=i3;
flag=4;
break;
        }
        else{
prpz_n=i3;
mrpz_n=i3-1;
if(phy_r-hr1[mrpz_n]<(hr1[prpz_n]-hr1[mrpz_n])/100){
    flag=2;
}
break;
        }
    }
}

for(i4=bound_n-1;i4>=0;i4--){
    if(phy_r>=hr1[i4]){
        if(flag==4){
nrmz_n=i4;
if(phy_z-hz1[nrmz_n]<(hz1[nrpz_n]-hz1[nrmz_n])/100){
    flag=flag+1;
}
break;
        }
        else{

```



```

mrmz_n=i4;
prmz_n=i4+1;
if (phy_z-hz1[mrmz_n]<(hz1[mrpz_n]-hz1[mrmz_n])/100){
    flag=flag+1;
}
break;
    }
    }
}
if(flag==0){
    *w3=(hBr1[prpz_n]*(phy_r-hr1[mrmz_n])*(phy_z-hz1[mrmz_n])
+hBr1[prmz_n]*(phy_r-hr1[mrpz_n])*(hz1[mrpz_n]-phy_z)
+hBr1[mrpz_n]*(hr1[prmz_n]-phy_r)*(phy_z-hz1[prmz_n])
+hBr1[mrmz_n]*(hr1[prpz_n]-phy_r)*(hz1[prpz_n]-phy_z))
    /((hr1[prmz_n]-hr1[mrmz_n])*(hz1[mrpz_n]-hz1[mrmz_n]))*pow(10,-4);

    *w4=(hBz1[prpz_n]*(phy_r-hr1[mrmz_n])*(phy_z-hz1[mrmz_n])
+hBz1[prmz_n]*(phy_r-hr1[mrpz_n])*(hz1[mrpz_n]-phy_z)
+hBz1[mrpz_n]*(hr1[prmz_n]-phy_r)*(phy_z-hz1[prmz_n])
+hBz1[mrmz_n]*(hr1[prpz_n]-phy_r)*(hz1[prpz_n]-phy_z))
    /((hr1[prmz_n]-hr1[mrmz_n])*(hz1[mrpz_n]-hz1[mrmz_n]))*pow(10,-4);

}
else if(flag==1){
    *w3=(hBr1[prmz_n]*(phy_r-hr1[mrmz_n])
+hBr1[mrmz_n]*(hr1[prmz_n]-phy_r))
    /((hr1[prmz_n]-hr1[mrmz_n])*pow(10,-4));

    *w4=(hBz1[prmz_n]*(phy_r-hr1[mrmz_n])
+hBz1[mrmz_n]*(hr1[prmz_n]-phy_r))
    /((hr1[prmz_n]-hr1[mrmz_n])*pow(10,-4));

}

else if(flag==2){
    *w3=(hBr1[mrpz_n]*(phy_z-hz1[mrmz_n])
+hBr1[mrmz_n]*(hz1[mrpz_n]-phy_z))
    /((hz1[mrpz_n]-hz1[mrmz_n])*pow(10,-4));

    *w4=(hBz1[mrpz_n]*(phy_z-hz1[mrmz_n])
+hBz1[mrmz_n]*(hz1[mrpz_n]-phy_z))

```

```

        /(hz1[mrpz_n]-hz1[mrmz_n])*pow(10,-4);

    }
    else if(flag==3){
        *w3=hBr1[mrmz_n]*pow(10,-4);
        *w4=hBz1[mrmz_n]*pow(10,-4);
    }
    else if(flag==4){
        *w3=(hBr1[nrpz_n]*(phy_z-hz1[nrmz_n])
+hBr1[nrmz_n]*(hz1[nrpz_n]-phy_z))
        /(hz1[nrpz_n]-hz1[nrmz_n])*pow(10,-4);

        *w4=(hBz1[nrpz_n]*(phy_z-hz1[nrmz_n])
+hBz1[nrmz_n]*(hz1[nrpz_n]-phy_z))
        /(hz1[nrpz_n]-hz1[nrmz_n])*pow(10,-4);

    }
    else if(flag==5){
        *w3=hBr1[nrmz_n]*pow(10,-4);
        *w4=hBz1[nrmz_n]*pow(10,-4);

    }

    return status;
}

int main(int argc, char *argv[]){

    FILE *fpw1,*fpw2,*fpw3;

    char readdata[50],out[50];

    int mag;

    double t,dt,max_t;/* time [s] */
    double vx0,vy0,vz0; /* initial velocity [m/s] */
    double v0,phi0,E0,T0,gamma; /* kinetic energy of electron[keV]*/
    double Bx,By,Bz,Br; /*[T]*/
    double a1,a2;
    double c1,c2,c3,c4,c5,c6;
    double d1,d2,d3,d4,d5,d6;
    double r,z,x,y,vz,vx,vy; /*[m/s]*/

```

```

double k[4][6];

if(argc != 4){
    printf("aho\n");
    exit(1);
}

a1 = atof(argv[1]);
a2 = atof(argv[2]);
strcpy(readdata, argv[3]);

sprintf(out, "%s-%04.0f-%3.2f", readdata, a1, a2);

T0=a1;phi0=a2;
dt=pow(10,-11);
max_t=4*pow(10,-9);

E0=T0+ME;
v0=C*sqrt(1-pow(ME,2)*pow(E0,-2));
gamma=E0/ME;

vx0=v0*sin(phi0)*cos(theta0);
vy0=v0*sin(phi0)*sin(theta0);
vz0=v0*cos(phi0);

z=z0;
vx=vx0;
vy=vy0;
vz=vz0;
x=r0*cos(theta0);
y=r0*sin(theta0);
r=r0;

if((fpw2=fopen(out,"w"))==NULL){
    printf("file open error!\n");
    exit(1);}

for(t=t0;t<max_t;t=t+dt){

```

```

if( sqrt(r*r)>1.0 || z>5.0 ){
    printf("the orbit is too large.\n");
    break;
}

else{

    //      fprintf(fpw1,"%16.14lf %16.14lf %16.14lf\n",x,y,z);
    fprintf(fpw2,"%16.14lf %16.14lf \n",r,z);
    //      fprintf(fpw3,"%16.14lf %16.14lf %16.14lf\n",vx,vy,vz);

    mag=jiba(r,z,&Br,&Bz,readdata);
    if(mag==EOF)break;

    if(r==0){
Bx=0;
By=0;
    }
    else{
Bx=Br*x/r;
By=Br*y/r;
    }
    k[0][0]=dt*f1(x,y,z,vx,vy,vz,Bx,By,Bz,gamma);
    k[0][1]=dt*f2(x,y,z,vx,vy,vz,Bx,By,Bz,gamma);
    k[0][2]=dt*f3(x,y,z,vx,vy,vz,Bx,By,Bz,gamma);
    k[0][3]=dt*f4(x,y,z,vx,vy,vz,Bx,By,Bz,gamma);
    k[0][4]=dt*f5(x,y,z,vx,vy,vz,Bx,By,Bz,gamma);
    k[0][5]=dt*f6(x,y,z,vx,vy,vz,Bx,By,Bz,gamma);

    d1=x+k[0][0]/2;
    d2=y+k[0][1]/2;

    c1=sqrt(d1*d1+d2*d2);
    c2=z+k[0][2]/2;

    mag=jiba(c1,c2,&Br,&Bz,readdata);
    if(mag==EOF)break;
    if(c1==0){
Bx=0;
By=0;
    }
    else{
Bx=Br*d1/c1;

```

```

By=Br*d2/c1;
}

k[1][0]=dt*f1(x+k[0][0]/2,y+k[0][1]/2,z+k[0][2]/2,vx+k[0][3]/2,vy+k[0][4]/2,vz+k[0][5]/2,Bx,By
k[1][1]=dt*f2(x+k[0][0]/2,y+k[0][1]/2,z+k[0][2]/2,vx+k[0][3]/2,vy+k[0][4]/2,vz+k[0][5]/2,Bx,By
k[1][2]=dt*f3(x+k[0][0]/2,y+k[0][1]/2,z+k[0][2]/2,vx+k[0][3]/2,vy+k[0][4]/2,vz+k[0][5]/2,Bx,By
k[1][3]=dt*f4(x+k[0][0]/2,y+k[0][1]/2,z+k[0][2]/2,vx+k[0][3]/2,vy+k[0][4]/2,vz+k[0][5]/2,Bx,By
k[1][4]=dt*f5(x+k[0][0]/2,y+k[0][1]/2,z+k[0][2]/2,vx+k[0][3]/2,vy+k[0][4]/2,vz+k[0][5]/2,Bx,By
k[1][5]=dt*f6(x+k[0][0]/2,y+k[0][1]/2,z+k[0][2]/2,vx+k[0][3]/2,vy+k[0][4]/2,vz+k[0][5]/2,Bx,By

d3=x+k[1][0]/2;
d4=y+k[1][1]/2;

c3=sqrt(d3*d3+d4*d4);
c4=z+k[1][2]/2;

mag=jiba(c3,c4,&Br,&Bz,readdata);
if(mag==EOF)break;
if(c3==0){
Bx=0;
By=0;
}
else{
Bx=Br*d3/c3;
By=Br*d4/c3;
}

k[2][0]=dt*f1(x+k[1][0]/2,y+k[1][1]/2,z+k[1][2]/2,vx+k[1][3]/2,vy+k[1][4]/2,vz+k[1][5]/2,Bx,By
k[2][1]=dt*f2(x+k[1][0]/2,y+k[1][1]/2,z+k[1][2]/2,vx+k[1][3]/2,vy+k[1][4]/2,vz+k[1][5]/2,Bx,By
k[2][2]=dt*f3(x+k[1][0]/2,y+k[1][1]/2,z+k[1][2]/2,vx+k[1][3]/2,vy+k[1][4]/2,vz+k[1][5]/2,Bx,By
k[2][3]=dt*f4(x+k[1][0]/2,y+k[1][1]/2,z+k[1][2]/2,vx+k[1][3]/2,vy+k[1][4]/2,vz+k[1][5]/2,Bx,By
k[2][4]=dt*f5(x+k[1][0]/2,y+k[1][1]/2,z+k[1][2]/2,vx+k[1][3]/2,vy+k[1][4]/2,vz+k[1][5]/2,Bx,By
k[2][5]=dt*f6(x+k[1][0]/2,y+k[1][1]/2,z+k[1][2]/2,vx+k[1][3]/2,vy+k[1][4]/2,vz+k[1][5]/2,Bx,By

d5=x+k[2][0];
d6=y+k[2][1];

c5=sqrt(d5*d5+d6*d6);
c6=z+k[2][2];

mag=jiba(c5,c6,&Br,&Bz,readdata);
if(mag==EOF)break;
if(c5==0){

```

```

Bx=0;
By=0;
    }
    else{
Bx=Br*d5/c5;
By=Br*d6/c5;
    }

k[3][0]=dt*f1(x+k[2][0],y+k[2][1],z+k[2][2],vx+k[2][3],vy+k[2][4],vz+k[2][5],Bx,By,Bz,gamma);
k[3][1]=dt*f2(x+k[2][0],y+k[2][1],z+k[2][2],vx+k[2][3],vy+k[2][4],vz+k[2][5],Bx,By,Bz,gamma);
k[3][2]=dt*f3(x+k[2][0],y+k[2][1],z+k[2][2],vx+k[2][3],vy+k[2][4],vz+k[2][5],Bx,By,Bz,gamma);
k[3][3]=dt*f4(x+k[2][0],y+k[2][1],z+k[2][2],vx+k[2][3],vy+k[2][4],vz+k[2][5],Bx,By,Bz,gamma);
k[3][4]=dt*f5(x+k[2][0],y+k[2][1],z+k[2][2],vx+k[2][3],vy+k[2][4],vz+k[2][5],Bx,By,Bz,gamma);
k[3][5]=dt*f6(x+k[2][0],y+k[2][1],z+k[2][2],vx+k[2][3],vy+k[2][4],vz+k[2][5],Bx,By,Bz,gamma);

x = x +kutta(k[0][0],k[1][0],k[2][0],k[3][0]);
y = y +kutta(k[0][1],k[1][1],k[2][1],k[3][1]);
z = z +kutta(k[0][2],k[1][2],k[2][2],k[3][2]);
vx = vx +kutta(k[0][3],k[1][3],k[2][3],k[3][3]);
vy = vy +kutta(k[0][4],k[1][4],k[2][4],k[3][4]);
vz = vz +kutta(k[0][5],k[1][5],k[2][5],k[3][5]);

r = sqrt(x*x+y*y);

    }
}

if(sqrt(r*r)<=1.0 && z<=5.0){
    fprintf(fpw2,"%16.14lf %16.14lf\n",r,z);
}

fclose(fpw2);
return 0;
}

```

## 参考文献

- [1] N.N.Bogoliubov , D.V.Shirkov “Quantum Fields”
- [2] Physical review, R.P.Feynman , M.Gell-Mann “Theory of the Fermi Interaction” vol 109,1958
- [3] M.E.Peskin , D.V.Schraeder “An Introduction to Quantum Field Theory”
- [4] electron の軌道計算 Program (Appendix C)
- [5] 近軸近似が載っていた教科書
- [6]  $\beta$  電磁石検査成績書