

偏極 線を用いた  
Mott 散乱による Parity 対称性の破れの検証

2005 年度 課題研究 P2 Mott グループ

五味 慎一

中野 晋太郎

藤田 充俊

2006 年 7 月 7 日

## 概要

Parity 変換対称性の破れは、1950 年代後半にリーとヤンとが弱い相互作用において提唱し、ウーによって実験的に確認された事実である。

我々は Mott 散乱を通して、Parity 変換対称性の破れが本当に実験的に確認できるかどうか調べることにした。

測定結果を解析した結果、ほぼ理論による予測と同程度の値、0.74% の Asymmetry の観測に成功した。



図 1: 実験装置

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>Theory</b>	<b>3</b>
1.1	崩壊 . . . . .	3
1.1.1	S-行列 . . . . .	3
1.1.2	崩壊率 . . . . .	5
1.2	モット散乱 . . . . .	7
1.2.1	ディラック方程式 . . . . .	7
1.2.2	ディラックカレント, 磁気モーメント . . . . .	8
1.2.3	散乱理論 . . . . .	12
1.2.4	数値計算のために . . . . .	19
<b>第 2 章</b>	<b>Experimental Apparatus</b>	<b>21</b>
2.1	諸設定 . . . . .	21
2.1.1	真空 . . . . .	21
2.1.2	高電圧 . . . . .	22
2.1.3	noise . . . . .	23
2.2	実験装置 . . . . .	25
2.2.1	電極槽 . . . . .	25
2.2.2	Target 槽 . . . . .	25
2.2.3	Photomultiplier Tube . . . . .	26
2.2.4	Scintillator . . . . .	28
2.2.5	Target 及び Target Holder . . . . .	33
2.2.6	Source 及び Source Holder . . . . .	34
2.2.7	マグネット . . . . .	35
2.2.8	金、アルミニウムの薄膜 . . . . .	38
2.2.9	回転フランジ . . . . .	40
2.2.10	回路図 . . . . .	40
<b>第 3 章</b>	<b>Experimental Method</b>	<b>44</b>
<b>第 4 章</b>	<b>Preliminary Experiment</b>	<b>45</b>
4.1	PMT の負荷電圧 (HV) 決定 . . . . .	45
4.2	Threshold . . . . .	46
4.3	エネルギー較正 . . . . .	47
4.4	Mott-Scattering の確認 . . . . .	47
<b>第 5 章</b>	<b>Results of Experiments</b>	<b>50</b>

<b>第 6 章</b>	<b>Analysis</b>	<b>51</b>
6.1	測定結果 . . . . .	51
6.2	Scatter Plot . . . . .	54
6.3	誤差の評価 . . . . .	55
6.4	フォトマルアシンメトリー . . . . .	56
6.4.1	様々な装置のアシンメトリー . . . . .	56
6.5	データ評価 . . . . .	58
6.6	評価 . . . . .	61
<b>第 7 章</b>	<b>Disccation and Results</b>	<b>63</b>
<b>第 8 章</b>	<b>Acknowledgments</b>	<b>64</b>
<b>第 9 章</b>	<b>Apendix</b>	<b>65</b>
9.1	合流型超幾何関数の漸近形 . . . . .	65
9.2	波動関数の漸近形 . . . . .	66
9.3	非相対論的振幅の計算 . . . . .	73
9.4	電磁場中での相対論的粒子の取り扱い . . . . .	74
9.5	プログラム . . . . .	75
9.5.1	モット散乱断面積用プログラム . . . . .	75
9.5.2	電極による電子軌道計算プログラム . . . . .	80

# 第1章 Theory

## 1.1 崩壊

### 1.1.1 S-行列

パリティ対称性を破る相互作用として弱い相互作用がある。崩壊は弱い相互作用によって引き起こされる。中性子の崩壊は

$$n(p_1) \rightarrow p(p_2) + e^-(p_3) + \bar{\nu}_e(p_4) \quad (1-1)$$

である。崩壊により空間対称な中性子から空間非対称な偏極電子が現れる事を示そう。(スピンは空間反転に対し保存するが、運動量は反転する。)これは次のようなダイアグラムで記述される。

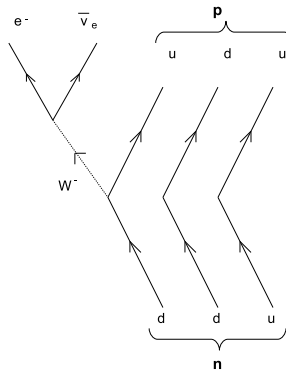


図 1.1: 中性子 崩壊のダイアグラム

この相互作用は有効ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{4G}{\sqrt{2}} V_{11} \bar{u}_L \gamma^\lambda \mathbf{d}_L \bar{e}_L \gamma_\lambda \nu_{eL} \quad (1-2)$$

を用いるとき、S-作用素

$$\mathbf{S} = 1 + i \int dx \mathcal{L}_{eff}(x) \quad (1-3)$$

により記述される。(1-3) は標準模型の相互作用ラグランジアン密度から摂動で時間\*順序積を計算してえられるものである。ここで  $\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi$  ( $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ) であり  $dx$  は 4次元測度を表す。後述べるように中性子崩壊の運動量移行は W ボソンの質量に比べて十分小さいので無視できラグランジアン密度は 4つの fermion の点的なカップリングになる。この近似は場の理論のローレンツ不変性を保つ。

(1-3) を用いると S-行列要素  $S_{fi}$  は

$$-i \frac{G}{\sqrt{2}} V_{11} \langle p(p_2) | \mathbf{a}_e(p_3) \mathbf{b}_{\nu_e}(p_4) \bar{\mathbf{u}} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \mathbf{d} \bar{e} \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \nu_e | n(p_1) \rangle \quad (1-4)$$

となる。ここで  $\gamma^\lambda, \gamma_5$  の交換関係を用いた。次に各々の場をフーリエ積分

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \{ e^{ipx} v_s(p) \mathbf{b}_s^\dagger(p) + e^{-ipx} u_s(p) \mathbf{a}_s(p) \} \quad (1-5)$$

で表し、生成消滅演算子の定義及び反交換関係を用いると、

$$S_{fi} = -i \frac{G}{\sqrt{2}} V_{11} \int dx e^{i(p_3+p_4)x} \langle p(p_2) | \bar{\mathbf{u}} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \mathbf{d} | n(p_1) \rangle \bar{u}_e(p_3) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(p_4). \quad (1-6)$$

ここで  $px = p_\lambda x^\lambda$ 。さらに全運動量演算子との交換関係

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_\mu, \mathbf{a}_s^\dagger(p)] &= p_\mu \mathbf{a}_s^\dagger(p) \\ [\mathbf{P}_\mu, \mathbf{a}_s(p)] &= -p_\mu \mathbf{a}_s(p) \end{aligned} \quad (1-7)$$

およびこれにより、

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{a}_s(p) e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} &= \mathbf{a}_s(p) e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \\ e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{a}_s^\dagger(p) e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} &= \mathbf{a}_s^\dagger(p) e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (1-8)$$

( $\mathbf{b}_s^\dagger(p), \mathbf{b}_s(p)$  についても同じ。) これををノルム内の陽子、中性子の状態に作用させ (1-7) を用いると、

$$S_{fi} = -i \frac{G}{\sqrt{2}} V_{11} (2\pi)^4 \delta(p_2 + p_3 + p_4 - p_1) \langle p(p_2) | \bar{\mathbf{u}}(0) \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \mathbf{d}(0) | n(p_1) \rangle \bar{u}_e(p_3) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(p_4) \quad (1-9)$$

を得る。指数部分の 4 次元積分は  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}$  関数になる。核子の状態の間に現れるクォークカレントの行列要素は対称性の議論により得られることができる。まず

$$m_n - m_p = 1.29 \text{MeV} \quad (1-10)$$

であるから行列要素の計算のために核子の質量に比べて核子の運動量を無視する事ができ、

$$p_1 \cong p_2 \cong p \quad (1-11)$$

とすることができる。ハドロンの行列要素は QCD を考慮すると  $u_p(p)$  と  $u_n(p)$  のある bilinear 表現

$$\bar{u}_p(p) \mathbf{M}(p) u_n(p) \quad (1-12)$$

として表される。M の基底は  $1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, i\gamma_5$  の 16 個あるが、S-行列の (場の理論の) ローレンツ不変性から M は  $\gamma^\mu$  と  $\gamma_5 \gamma^\mu$  のいずれかに限られることをみる。ディラック方程式のローレンツ不変性はローレンツ変換  $\Lambda^\mu{}_\sigma = (e^\omega)^\mu{}_\sigma$  (有限ローレンツ変換は無限小変換の積で記述できる。) に対し

$$\mathbf{S}^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \mathbf{S}(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\sigma \gamma^\sigma \quad (1-13)$$

$$\mathbf{S} = \exp\left(-\frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}\right) \quad (1-14)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

から

$$\psi(x) \rightarrow S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \quad (1-15)$$

であるが、(1-14) より、 $\bar{\psi}\gamma^\lambda\psi \rightarrow \Lambda^\lambda_\sigma \bar{\psi}\gamma^\sigma\psi$ 、 $\bar{\psi}\gamma^\lambda\gamma_5\psi \rightarrow \Lambda^\lambda_\sigma \bar{\psi}\gamma^\sigma\gamma_5\psi$  であることが行列の反交換関係から見出せる。よってこれらのカレントはカップリングのレプトン部分とキャンセル( $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho = g_{\sigma\rho}$ )してラグランジアン密度及び S-行列は不変に保たれる。他の基底ではそれらは一般にローレンツ不変にならない。次に場のパリティ変換を考えよう。 $\tilde{p}, \tilde{x}$  をそれぞれ P 変換した 4 元運動量、4 元座標、P をパリティ変換演算子とすると、

$$\psi(x) \rightarrow \mathbf{P}\psi(x)\mathbf{P}^{-1} = \gamma^0\psi(\tilde{x}) \quad (1-16)$$

が成り立つ。すると P 変換した S-行列のハドロン部分は

$$\langle p(p_2)|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\bar{u}(0)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\mathbf{d}(0)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}|n(p_1)\rangle \quad (1-17)$$

$$= \langle p(\tilde{p}_2)|\bar{u}(0)\gamma^0\gamma^\lambda\gamma^0\mathbf{d}(0)|n(\tilde{p}_1)\rangle + \langle p(\tilde{p}_2)|\bar{u}(0)\gamma^0\gamma^\lambda\gamma^0\gamma_5\mathbf{d}(0)|n(\tilde{p}_1)\rangle \quad (1-18)$$

ここで強い相互作用の P 不変性を用いた。(1-18) の第一項は極性ベクトル (パリティ変換に対しベクトルの符号は (1,-1,-1,-1) に変化する) のように変化する第二項は軸性ベクトル (同変換に対し (-1,1,1,1) に変化する) となるように変化する事からこのハドロン部分は可能性としてそれぞれ

$$g_V\bar{u}_p(p)\gamma^\lambda u_n(p) \quad (1-19)$$

$$g_A\bar{u}_p(p)\gamma^\lambda\gamma_5 u_n(p)$$

と書けるだろう。また、これが全てのパターンであることがディラック方程式から明らかになる。(例えば  $p^\lambda$  はまた極性ベクトルであるが、これは  $\gamma^\lambda$  であらわせる。) これらから S-行列要素を

$$S_{fi} = -i\frac{G}{\sqrt{2}}V_{11}(2\pi)^4\delta(p_2+p_3+p_4-p_1)\bar{u}_p(p_2)(\gamma^\lambda + \alpha\gamma^\lambda\gamma_5)u_n(p_1)\bar{u}_e(p_3)\gamma_\lambda(1-\gamma_5)v_{\nu_e}(p_4) \quad (1-20)$$

と表しこれを用いて崩壊率を計算する。(崩壊率の比をとるので  $g_v$  は 1 にとってよくアイソスピン対称性から実際そうであることがわかる。)

### 1.1.2 崩壊率

まず自由空間の dirac 方程式の平面波解 (フーリエ積分 (1-5)) について

$$u_\pm(p) = \sqrt{p^0+m} \begin{pmatrix} \xi_\pm \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{p^0+m}\xi_\pm \end{pmatrix} \quad (1-21)$$

$$v_\pm(p) = -\sqrt{p^0+m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{p^0+m}\eta_\pm \\ \eta_\pm \end{pmatrix} \quad (1-22)$$

であり、 $\eta, \xi$  は ±同士は直交するべきだが選択の任意性から今  $u, v$  をヘリシティ演算子  $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$  の固有ベクトルに選ぶことができる。すなわち

$$\tilde{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_s = (-1)^s\chi_s \quad (1-23)$$

$$s = \pm$$

なるベクトルを用いて

$$u_{\pm}(p) = \sqrt{p^0 + m} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p^0 + m} \chi_{\pm} \end{pmatrix} \quad (1-24)$$

$$v_{\pm}(p) = -\sqrt{p^0 + m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p^0 + m} \epsilon \chi_{\mp}^* \\ \epsilon \chi_{\mp}^* \end{pmatrix} \quad (1-25)$$

ここで  $\epsilon = i\sigma_2$ 。

エネルギーが  $E_e$  と  $E_e + \Delta E_e$  の間であり、立体角  $\hat{\Omega}_e$  方向に崩壊して飛んでいく単位時間あたりの電子の個数は

$$\frac{|\mathbf{p}_e| \Delta E \Delta \Omega_e}{2(2\pi)^3} \iint \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2p_p^0} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k} \delta(m_n - p^0 - E_e - k) \delta(\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_e + \mathbf{k}) \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2 = \pm} |T_{fi}|^2 \quad (1-26)$$

に比例する。 $k$  は反電子ニュートリノの運動量である。特定の電子について考えるので電子については積分をとらない。またニュートリノには左巻き、右巻きのいずれかしか存在しないのでスピン和はとらない。 $T_{fi}$  は T-行列要素である (S-行列要素の  $i(2\pi)^4$  関数を除いた部分)。中性子の静止系で考えている。

そこで被積分関数を計算する。最後に比をとるので定数項は落とす。

$$\begin{aligned} |T_{fi}|^2 &\propto \bar{u}_p(p_2) (\gamma^\mu + \alpha \gamma^\mu \gamma_5) u_n(p_1) \bar{u}_n(p_1) (\gamma^\nu + \alpha^* \gamma^\nu \gamma_5) u_p(p_2) \\ &\quad \cdot \bar{u}_e(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(p_4) \bar{v}_{\nu_e}(p_4) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_e(p_3) \\ &= \text{Tr}(u_n \bar{u}_n \gamma^\nu (1 + \alpha^* \gamma_5) u_p \bar{u}_p \gamma^\mu (1 + \alpha \gamma_5)) \text{Tr}(v_{\nu_e} \bar{v}_{\nu_e} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_e \bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5)) \end{aligned} \quad (1-27)$$

運動量、スピンの添え字を省略した。ここでスピン和をとるが陽子、中性子の質量は放出された運動エネルギーに比べ十分大きいのでプロトンはレプトンに比べると静止していると考えてよい。したがって

$$\sum_{s_2 = \pm} u_{ns_2} \bar{u}_{ns_2} = p_n^\lambda \gamma_\lambda + m_n \cong m_n (\gamma^0 + 1) \quad (1-28)$$

$$\sum_{s_1 = \pm} u_{ps_1} \bar{u}_{ps_1} = p_p^\lambda \gamma_\lambda + m_p = m_p (\gamma^0 + 1) \quad (1-29)$$

これを用いると (1-27) の一つ目のトレースは

$$\propto (1 + |\alpha|^2) g^{0\mu} g^{0\nu} - |\alpha|^2 g^{\mu\nu} \quad (1-30)$$

となる。

2つ目のトレースにおいてニュートリノはスピン和はとらないがスピン和をとっても定数を除いてかわらないことを示そう。今

$$\frac{(1 - \gamma_5)}{2} v_s = \begin{cases} 0 & s = + \\ v_- & s = - \end{cases} \quad (1-31)$$

から

$$\frac{(1 - \gamma_5)}{2} \sum_{s = \pm} v_s \bar{v}_s = v_- \bar{v}_- \quad (1-32)$$



電子については次のように偏極が計算される。まず

$$\text{helicity} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_5 e^\lambda \gamma_\lambda p_e^\mu \gamma_\mu}{m_e} \quad (1-33)$$

$$e^\lambda = \left( \frac{|\mathbf{p}_e|}{m_e}, \frac{p_e^0 \mathbf{p}_e}{m_e |\mathbf{p}_e|} \right)$$

に注意すると

$$\frac{1 + s \cdot \text{helicity}}{2} \sum_{s_3=\pm} u_{s_3} \bar{u}_{s_3} = u_s \bar{u}_s \quad (1-34)$$

いま helicity 演算子と  $p_e^\mu \gamma_\mu$  は可換で  $\{e^\lambda \gamma_\lambda, p_e^\mu \gamma_\mu\} = 0$ ,  $p^\lambda \gamma_\lambda p^\mu \gamma_\mu = m_e^2$  であるから (1-34) は

$$= (p_e^\lambda \gamma_\lambda + m_e) \frac{1 + s \gamma_5 e^\rho \gamma_\rho}{2} \quad (1-35)$$

これらを用いるとレプトン部のトレース (スピン和含む) は

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(k^\sigma \gamma_\sigma \gamma_\nu (1 - \gamma_5) (p_e^\alpha \gamma_\alpha + m_e) (1 + s \gamma_5 e^\beta \gamma_\beta) \gamma_\mu (1 - \gamma_5)) \\ & \propto \text{Tr}((k, ) \gamma_\nu (p, ) \gamma_\mu (1 - \gamma_5)) - m_e s \text{Tr}((k, ) \gamma_\nu \gamma_5 (e, ) \gamma_\mu (1 - \gamma_5)) \end{aligned} \quad (1-36)$$

ただし  $(k, ) = k^\lambda \gamma_\lambda$ .  $\gamma_5$  を含む積はハドロン部分とキャンセルして消えるから

$$\begin{aligned} & \propto \text{Tr}(\gamma_\mu (k, ) \gamma_\nu (p, ) - m s (e, )) \\ & \propto k_\mu D_\nu + k_\nu D_\mu - g_{\mu\nu} k_\lambda D^\lambda \end{aligned} \quad (1-37)$$

ただし  $D = p - m s e$ . よって  $\sum |T_{fi}|^2$  は

$$\propto (1 + 3|\alpha|^2) k(p^0 - m s e^0) + (1 - |\alpha|^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}) \quad (1-38)$$

(1-26) に戻ると、容易に  $d^3 \mathbf{p}_p$  積分は実行できて、電子と反電子ニュートリノの運動量のなす角を  $\theta$  とし、 $\mathbf{k}$  の角度を電子から測ると (すなわち  $\theta$ )、 $\mathbf{k}$  の立体角積分から (1-38) の第 2 項は消える。最後に  $s$  として  $\pm$  を選んだときに変化するのは (1-38) の  $p^0 - m s e^0 \propto 1 - s\beta$  だけであるから (1-26) を  $w(E_e, s)$  と表すと (この場合等方であることがわかる。) 偏極を崩壊率を用いて定義できる。

$$P_i = \frac{w(E_e, +) - w(E_e, -)}{w(E_e, +) + w(E_e, -)} = -\beta. \quad (1-39)$$

## 1.2 モット散乱

### 1.2.1 ディラック方程式

原子核による相対論的電子の散乱を、ディラック方程式を用いて静止した原子核のつくるクーロン場による厳密な散乱解としてえる。それによれば偏極電子の散乱は方位方向におけるわずかな非対称性として現れる。(摂動の低次だけ考えるとき、素粒子相互作用だと摂動次数  $\alpha = 1/137$  によって展開されるが原子核による散乱だと  $Z\alpha$  によって展開されるため高次の寄与が無視できない。) いま電子の自由場のディラック方程式は相対論的ハミルトニアン

$$(-p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 c^2) \psi = 0 \quad (2-1)$$

からエネルギーについて一次でありかつ (2-1) 式と巨視的には等しい (例えば L-S 力は微視的) 方程式として得られる。今古典力学と量子力学の対応は  $p^0 = i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}$ ,  $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$  とする。(注: この章では添え字の上下は特にこだわらない。 $p^\mu$  はここでは反変ベクトルとする。適宜補足する。) (2-1) 式を  $p^\mu$  について一次のハミルトニアン積

$$(-p^0 + \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta)(p^0 + \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta)\psi = 0 \quad (2-2)$$

で記述する。これより (場の理論の教科書参) えられた方程式

$$(p^0 + \gamma^0 \gamma \cdot \mathbf{p} + \gamma^0 mc)\psi = 0 \quad (2-3)$$

を自由場の電子を記述する方程式に選ぶ。ベクトルポテンシャルの存在のもとで正準運動量とハミルトニアンは  $p^0 \rightarrow p^0 + \frac{e}{c}A^0$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$  の変換をうけるから ( $A^\mu$  は反変。cf. 特殊相対論では Jackson 電磁気学下にある) 電磁場のもとで方程式は

$$(p^0 + \frac{e}{c}V + \gamma^0 \gamma \cdot (\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}) + \gamma^0 mc)\psi = 0 \quad (2-4)$$

となる。

(2-3), (2-4) は (2-2) の互いに可換なハミルトニアンの一方が用いられているが一方の方程式の解はもう一方の解を用いて表す事もできる。(CPT 変換) 特に 1 章で使ったタイプのラグランジアン密度に帰着する事ができる。

$$\psi^\dagger (p^0 + \gamma^0 \gamma \cdot \mathbf{p} + \gamma^0 mc)\psi \quad (2-5)$$

$$= \psi^\dagger (i\hbar \gamma^\lambda \partial_\lambda + mc)\gamma^0 \psi$$

$$= \psi^\dagger \gamma_5 (-i\hbar \gamma^\lambda \partial_\lambda + mc)\gamma_5 \gamma^0 \psi$$

$$= \bar{\psi}' (i\hbar \gamma^\lambda \partial_\lambda - mc)\psi' \quad (2-6)$$

ここで  $\psi' = \gamma_5 \gamma^0 \psi$  である。これは変換  $t \rightarrow -t$  のもとでラグランジアンを保つ。さらにこの変換に対しベクトルポテンシャルは  $(V, \mathbf{A}) \rightarrow (-V, \mathbf{A})$  と変換されるべきでありこのときこれらの変換は電磁場のラグランジアン密度 (2-8) を不変に保つ。(cf. 時間反転は  $(V, \mathbf{A}) \rightarrow (V, -\mathbf{A})$  である。) よってこれらは電磁相互作用のもとで等価であることがわかったので論文にしたがって (2-3) を基礎方程式として進める事にする。しかしここでは量子化されていない場において対称性が議論されたが厳密には場が演算子である量子化された場の理論で対称性が議論されなければならない。そして対応するユニタリー演算子または反ユニタリー演算子が存在するべきである。

## 1.2.2 ディラックカレント, 磁気モーメント

まず (2-3) の負の角振動数の平面波解は ( $\hbar = 1$  の単位系に戻る。)

$$\psi_\lambda = u_\lambda e^{-ipx} \quad (2-7)$$

$$u_1 = \frac{-Ap^3 + B(p^1 - ip^2)}{mc + W}$$

$$u_2 = -\frac{A(p^1 + ip^2) - Bp^3}{mc + W}$$

$$u_3 = A$$

$$u_4 = B$$

であるが A,B は電子の磁気モーメント  $\mu$  の方向を表すパラメーターであることを示そう。

電磁相互作用のラグランジアン密度 (ガウス単位系) は

$$\psi^\dagger \left( p^0 + \frac{e}{c} V + \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \gamma^0 m c \right) \psi - \frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2-8)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

与えられるから (2-8) 式の電磁気ポテンシャル  $A^\mu = (V, \mathbf{A})$  についての Euler-Langrange 方程式  $\partial^\lambda \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\lambda A^\rho)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\rho}$  を解くと、波動方程式

$$-\frac{1}{4\pi} \partial^\lambda \partial_\lambda A_\rho = \begin{cases} e\psi^\dagger \psi & \rho = 0 \\ e\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^a \psi & \rho = a (a = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (2-9)$$

を得る。(  $\frac{\partial (\partial^\alpha A^\beta)}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu$  を用いる。  $\delta^\beta_\nu$  はクロネッカーのデルタである。) ただしローレンツゲージを用いた。左辺の共変ベクトルを反変ベクトルであらわすとこれより電子のカレントは

$$j^\rho = \begin{cases} -e\psi^\dagger \psi & \rho = 0 \\ ce\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^a \psi & \rho = a (a = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (2-10)$$

与えられることがわかる。

いま Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho & (2-11) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &+ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

であるが、磁化  $\mu$  を用いて巨視的な場  $\mathbf{H}$  を微視的な場  $\mathbf{B}$  で表し、低速度の電子について  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  を用い、電気双極場を無視すると

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mu \quad (2-12)$$

より (2-11) 式の3つめは微視的方程式

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \left( \rho \frac{\mathbf{v}}{c} + \text{rot} \mu \right) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2-13)$$

となる。右辺第一項  $c()$  を低速度電子のカレントと考える事ができる。つまりカレント (2-10) は磁気モーメントの情報を含む。

次に平面波解 (2-7) を用いて波束 (フーリエ積分) をつくろう。(単一な平面波解からは磁気モーメントがあらわれないだろう。) 低速度電子の場合に量子力学のときのように積分を実行する事ができる。運動量が  $p, q, r \ll mc$  に限りなく近い値をもつ解をつくる。このように選ばれることは低速度による近似を保つために必要である。つまり

$$\psi = \int d^3 p u_\lambda e^{-ipx} a(p) \quad (2-14)$$

$$a(p) = C \exp\left(-\frac{(p_1 - p)^2 + (p_2 - q)^2 + (p_3 - r)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

ここで  $\sigma_0$  は十分に小さいとする。  $C$  は規格化定数である。低速度では  $W = mc$  と考える事ができる。例えば

$$\begin{aligned} & \int d^3p e^{-ip_1x - \frac{(p_1-p)^2}{2\sigma_0^2}} \\ & \propto \exp - \frac{x^2}{2\sigma^2} + ipx \\ & \sigma = \frac{1}{\sigma_0} \end{aligned} \quad (2-15)$$

であるからこのようにして  $\sigma$  が十分大きい事も用いると

$$\begin{aligned} \psi_3 &= AP \\ \psi_4 &= BP \\ \psi_1 &= -\frac{1}{2mc} \left( A \left( r + \frac{i}{\sigma^2} z \right) + B \left( (p - iq) + \frac{i}{\sigma^2} (x - iy) \right) \right) P \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2mc} \left( -B \left( r + \frac{i}{\sigma^2} z \right) + A \left( (p + iq) + \frac{i}{\sigma^2} (x + iy) \right) \right) P \\ P &= \exp - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{2\sigma^2} + i(px + qy + rz) \end{aligned} \quad (2-16)$$

をえる。(2-16) はディラック方程式を用いてもえられる。そこでこれらの状態量を用いてカレント (2-10) は再び  $\sigma$  が十分大きい近似のもとで

$$\begin{aligned} \rho &= -e(AA^* + BB^*) \exp -(x^2 + y^2 + z^2)/\sigma^2 \\ j^1 &= e \left( -AA^* \left( u - \frac{1}{\sigma^2 m} y \right) - BB^* \left( u + \frac{1}{\sigma^2 m} y \right) - AB^* \frac{i}{\sigma^2 m} z + A^* B \frac{i}{\sigma^2 m} z \right) \exp -(x^2 + y^2 + z^2)/\sigma^2 \\ &= \rho u + \frac{e}{2m} \left( (BB^* - AA^*) \frac{\partial}{\partial y} - (iA^*B - iAB^*) \frac{\partial}{\partial z} \right) \exp -(x^2 + y^2 + z^2)/\sigma^2 \end{aligned} \quad (2-17)$$

となる。  $p, q, r = mu, mv, mw$  を用いた。同様にして

$$\begin{aligned} j^2 &= \rho v + \frac{e}{2m} \left( (-A^*B - AB^*) \frac{\partial}{\partial z} - (BB^* - AA^*) \frac{\partial}{\partial x} \right) \exp -(x^2 + y^2 + z^2)/\sigma^2 \\ j^3 &= \rho w + \frac{e}{2m} \left( (iA^*B - iAB^*) \frac{\partial}{\partial x} - (-A^*B - AB^*) \frac{\partial}{\partial y} \right) \exp -(x^2 + y^2 + z^2)/\sigma^2 \end{aligned} \quad (2-18)$$

これを (2-13) 式と比較することによって電子の磁化をえる。つまり、

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{e}{2mc} (-A^*B - AB^*) \exp -(x^2 + y^2 + z^2)/\sigma^2 \\ \mu_2 &= \frac{e}{2mc} (iA^*B - iAB^*) \exp -(x^2 + y^2 + z^2)/\sigma^2 \\ \mu_3 &= \frac{e}{2mc} (BB^* - AA^*) \exp -(x^2 + y^2 + z^2)/\sigma^2 \end{aligned} \quad (2-19)$$

磁気モーメントは磁化 (2-19) の空間積分だから定数を除くと磁気モーメントは (2-19) において  $A, B$  で表される括弧内の物理量

$$\begin{aligned} & -A^*B - AB^* \\ & iA^*B - iAB^* \\ & BB^* - AA^* \end{aligned} \quad (2-20)$$

で定義される。電子の  $g$  因子は負であるから、スピンは磁気モーメントと逆方向である。

相対論的電子の場合静止系からのローレンツ変換によって表す事ができる。まずディラック方程式はローレンツ変換に有利な形

$$\gamma^0(i\gamma^\lambda\partial_\lambda + mc)\gamma^0\psi = 0 \quad (2-21)$$

と表す事ができるから、 $z$  方向に速度  $v$  で運動する系へのローレンツ変換

$$\begin{pmatrix} \cosh \zeta & 0 & 0 & -\sinh \zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \zeta & 0 & 0 & \cosh \zeta \end{pmatrix} \quad (2-22)$$

ここで  $\gamma = \cosh \zeta, \gamma\beta = \sinh \zeta$ 。に対して 1 章で定義した  $(e^\omega)^\mu{}_\nu$  を割り当てたとき

$$(e^\omega)^\mu{}_\nu = (e^{-\zeta A})^\mu{}_\nu \quad (2-23)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であることが見出される。(指数関数を展開すればわかる。) これを用いると

$$\begin{aligned} S &= \exp -\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} \quad (2-24) \\ &= \exp \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \omega_{03} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \frac{1}{2}\zeta & 0 & -\sinh \frac{1}{2}\zeta & 0 \\ 0 & \cosh \frac{1}{2}\zeta & 0 & \sinh \frac{1}{2}\zeta \\ -\sinh \frac{1}{2}\zeta & 0 & \cosh \frac{1}{2}\zeta & 0 \\ 0 & \sinh \frac{1}{2}\zeta & 0 & \cosh \frac{1}{2}\zeta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従ってディラック方程式はローレンツ変換に対し

$$\begin{aligned} &\rightarrow \gamma^0 S^{-1}(i\gamma^\lambda\partial'_\lambda + mc)S\gamma^0\psi = 0 \quad (2-25) \\ &= \gamma^0 S^{-1}\gamma^0(p^0 + \gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma^0 mc)\gamma^0 S\gamma^0\psi \end{aligned}$$

より  $\psi$  は  $\gamma^0 S\gamma^0\psi$  に変換される。そこで静止系から速度  $v$  で運動する系への変換を考えれば、上で  $\zeta \rightarrow -\zeta$  とすることにより、

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 0, \psi_2 = 0, \psi_3 = AS_0, \psi_4 = BS_0 \quad (2-26) \\ S_0 &= \exp -imc^2t \end{aligned}$$

は

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -A \sinh \frac{1}{2}\zeta \cdot S, \psi_2 = B \sinh \frac{1}{2}\zeta \cdot S \\ \psi_3 &= A \cosh \frac{1}{2}\zeta \cdot S, \psi_4 = B \cosh \frac{1}{2}\zeta \cdot S \quad (2-27) \\ S &= \exp imc(z \sinh \zeta - ct \cosh \zeta) \end{aligned}$$

へと変換される。ここで  $\tanh \frac{1}{2}\zeta = \frac{P_3}{p^0 + mc}$  である。従って  $z$  方向に任意の速度で運動する系においてその静止系における磁気モーメントは  $A, B$  (特にその比) で与えられることがわかった。特に  $\mu$  を極座標で表示すると

$$-\frac{B}{A} = \cot \frac{\chi}{2} \cdot e^{i\omega} \quad (2-28)$$

である。

### 1.2.3 散乱理論

ディラック方程式の解は4成分だが確率密度が  $\psi^\dagger \psi$  であらわせることに注目して散乱を量子力学的に解く。すなわちディラック方程式の束縛解の中で

$$\psi_\lambda = a_\lambda I + u_\lambda S \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2-29)$$

$I$  は平面波解,  $S$  は outgoing 波解となるものを求める。そのために束縛解を求めよう。ここからは  $\hbar = c = 1$  である単位系で進める。まずディラック方程式は

$$\begin{aligned} i(W + eV + m)\psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_3 &= 0 \\ i(W + eV + m)\psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_4 &= 0 \\ i(W + eV - m)\psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_1 &= 0 \\ i(W + eV - m)\psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2-30)$$

とあらわせる。また一方で偏微分を極座標であらわしたとき次の関係がなりたつ。つまり  $f$  を任意の動径関数、 $Q_k^u = (k-u)! \sin^u \theta \left(\frac{d}{d \cos \theta}\right)^{k+u} \frac{(\cos^2 \theta - 1)^k}{2^k k!} e^{iu\phi} = (k-u)! P_k^u e^{iu\phi}$  としたとき

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)fQ_k^u &= \frac{1}{2k+1} \left(\left(\frac{df}{dr} - \frac{k}{r}f\right)Q_{k+1}^{u+1} - (k-u)(k-u-1)\left(\frac{df}{dr} + \frac{k+1}{r}f\right)Q_{k-1}^{u+1}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)fQ_k^u &= \frac{1}{2k+1} \left(-\left(\frac{df}{dr} - \frac{k}{r}f\right)Q_{k+1}^{u-1} + (k+u)(k+u-1)\left(\frac{df}{dr} + \frac{k+1}{r}f\right)Q_{k-1}^{u-1}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)fQ_k^u &= \frac{1}{2k+1} \left(\left(\frac{df}{dr} - \frac{k}{r}f\right)Q_{k+1}^u + (k+u)(k-u)\left(\frac{df}{dr} + \frac{k+1}{r}f\right)Q_{k-1}^u\right) \end{aligned} \quad (2-31)$$

これらはルジャンドル倍多項式の直交定理及び漸化式により証明される。やや面倒だった2つ目の式を証明しよう。 $x = \cos \theta$  とおく。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)fQ_k^u = \sin \theta e^{-i\phi} \frac{df}{dr} Q_k^u + \cos \theta e^{-i\phi} \frac{f}{r} \frac{\partial Q_k^u}{\partial \theta} - i \frac{e^{-i\phi}}{\sin \theta} \frac{f}{r} \frac{\partial Q_k^u}{\partial \phi} \quad (2-32)$$

これらを直交定理を用いて展開するが、 $e^{-i\phi}$  が全体にかかっているから  $P_g^{u-1}$  によって展開されなければならない。まず右辺第一項の係数を考えよう。積分

$$\frac{\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_k^u P_g^{u-1} dx}{\int_{-1}^1 (P_g^{u-1})^2 dx} \quad (2-33)$$

に対し  $g + a \equiv 0 \pmod{k}$   $a = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$  となる  $g$  はおちる。(積分は 0 になる。) なぜなら  $P_k^u$  は  $x \rightarrow -x$  に対し  $(-1)^{u+k}$  でふるまうのでいまのような  $g$  に対して分子の被積分関数は奇関数になるからである。あとは部分積分の手法で解かれる。(2-33) の分子は

$$\begin{aligned} & \int (1-x^2)^u \partial^u P_k \partial^{u-1} P_g dx \\ &= \frac{(-1)^{g+u-1}}{2^g g!} \int (x^2-1)^g \partial^{u+g-1} ((1-x^2)^u \partial^u P_k) dx \end{aligned} \quad (2-34)$$

となり、これは  $g = k+1$  で値をもち、それより大きいときは微分によっておちる。このとき積分  $\int (x^2-1)^g dx$  が計算されて積分値が得られる。(具体的方法は朝永さんの量子力学 2 にある。) このよ  
うにして計算された結果 (同様の手法で逆方向に部分積分して得られる。)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} P_k^u \begin{pmatrix} P_{k+1}^{u-1} \\ P_{k-1}^{u-1} \end{pmatrix} dx &= \frac{-2}{(2k+1)(2k+3)} \frac{(k+u)!}{(k-u)!} \\ & \quad \frac{(k+u)!}{(2k-1)(2k+1)(k-u)!} \\ I_{k+1}^{u-1} &= \frac{2}{2k+3} \frac{(k+u)!}{(k-u+2)!} \\ I_{k-1}^{u-1} &= \frac{2}{2k-1} \frac{(k+u-2)!}{(k-u)!} \end{aligned} \quad (2-35)$$

ただし  $I_g^{u-1} = \int_{-1}^1 (P_g^{u-1})^2 dx$ 。これらを用いると結局

$$\sqrt{1-x^2} e^{-i\phi} Q_k^u = \frac{1}{2k+1} (-Q_{k+1}^{u-1} + (k+u)(k+u-1)Q_{k-1}^{u-1}) \quad (2-36)$$

を得る。(2-32) の後の 2 項はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} &= (k-u)! \frac{f}{r} e^{-i\phi} (-x\sqrt{1-x^2} \partial((1-x^2)^{\frac{u}{2}} \partial^u P_k) + u(1-x^2)^{\frac{u-1}{2}} \partial^u P_k) \\ e^{-i\phi} \text{以下の括弧} &= u(1-x^2)^{\frac{u+1}{2}} \partial^u P_k + 2ux^2(1-x^2)^{\frac{u-1}{2}} \partial^u P_k - x(1-x^2)^{\frac{u+1}{2}} \partial^{u+1} P_k \end{aligned} \quad (2-37)$$

これを  $P_g^{u-1}$  について積分すると

$$\begin{aligned} & \int u(1-x^2)^u \partial^u P_k \partial^{u-1} P_g + \partial^u P_k ((1-x^2)^u \partial^{u-1} P_g + x(1-x^2)^u \partial^u P_g) dx \\ &= \int (u+1) \sqrt{1-x^2} P_k^u P_g^{u-1} + x P_k^u P_g^u dx \end{aligned} \quad (2-38)$$

ここで部分積分を 1 回用いたが、このような形にもっていったのは部分積分をしたときに必ずしも全微分の項が消えるとは限らないからである。一般に  $(1-x^2)^n$  の  $n$  が  $\partial^m$  の  $m$  以上であれば全微分は消える。そしてそうなるように変形した。再び朝永さんの量子力学 2 をみながら積分を実行すると、そして  $I_g^{u-1}$  でわると係数は

$$\begin{aligned} & \frac{(k-u+2)(k-u+1)k}{2k+1} \quad (g = k+1) \\ & \frac{(k+u)(k+u-1)(1+k)}{2k+1} \quad (g = k-1) \end{aligned} \quad (2-39)$$

を得る。これを (2-37) に代入し他の項と整理すると

$$= \frac{1}{2k+1} \left( \frac{k}{r} f Q_{k+1}^{u-1} + (k+u)(k+u-1) \frac{k+1}{r} f Q_{k-1}^{u-1} \right) \quad (2-40)$$

よって (2-31) の二番目を得る。

これらが (2-30) においてどのように作用するかをみる。 $\psi$  の少なくともひとつが一つの調和関数をもつ解をみいだす。 $\psi_3$  が  $Q_k^u$  に比例するとしよう。すると (2-30) の三つめの方程式は  $\psi_1, \psi_2$  のタームがこれと打ち消しあい、他の項はそれらで互いに打ち消しあう。ゆえに  $\psi_1, \psi_2$  は同じ動径関数をふくまなければならない、その形は  $Q_{k+1}^u, Q_{k+1}^{u+1}$  かまたは  $Q_{k-1}^u, Q_{k-1}^{u+1}$  のいずれかである。同様な議論で  $\psi_4$  は  $\psi_3$  と同じ動径関数を含まなければならない、球面関数  $Q_k^{u+1}$  を持たなければならない。ゆえに試しの解として、

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -ia_1 F(r) Q_{k+1}^u & \psi_2 &= -ia_2 F(r) Q_{k+1}^{u+1} \\ \psi_3 &= a_3 G(r) Q_k^u & \psi_4 &= a_4 G(r) Q_k^{u+1}\end{aligned}\quad (2-41)$$

いま (2-30) の最初の方程式は

$$\begin{aligned}(W + eV + m)a_1 F Q_{k+1}^u + \frac{a_4}{2k+1} \left( -\left( \frac{dG}{dr} - \frac{k}{r} G \right) Q_{k+1}^u + (k+u+1)(k+u) \left( \frac{dG}{dr} + \frac{k+1}{r} G \right) Q_{k-1}^u \right) \\ + \frac{a_3}{2k+1} \left( \left( \frac{dG}{dr} - \frac{k}{r} G \right) Q_{k+1}^u + (k+u)(k-u) \left( \frac{dG}{dr} + \frac{k+1}{r} G \right) Q_{k-1}^u \right) = 0\end{aligned}\quad (2-42)$$

もし  $a_4(k+u+1) + a_3(k-u) = 0$  とすると  $Q_{k-1}^u$  の項は消える。2番目の方程式においては  $Q_{k-1}^{u+1}$  の係数が消える。他の2つの方程式から  $a_1 = a_2$  がわかる。ゆえに完成した解として、

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -iF_k Q_{k+1}^u & \psi_2 &= -iF_k Q_{k+1}^{u+1} \\ \psi_3 &= (k+u+1)G_k Q_k^u & \psi_4 &= (-k+u)G_k Q_k^{u+1}\end{aligned}\quad (2-43)$$

このとき  $F_k, G_k$  は次の関係式を満たす。

$$\begin{aligned}(W + eV + m)F + \frac{dG}{dr} - \frac{k}{r}G = 0 \\ -(W + eV - m)G + \frac{dF}{dr} + \frac{k+2}{r}F = 0\end{aligned}\quad (2-44)$$

さらに (2-42) において第2項のかわりに第1項を消したとき、異なる解が得られる。そのとき  $\psi_1$  は  $Q_{k+1}^u$  のかわりに  $Q_{k-1}^u$  を含む。 $F, G$  はそのとき

$$\begin{aligned}(W + eV + m)F + \frac{dG}{dr} + \frac{k+1}{r}G = 0 \\ -(W + eV - m)G + \frac{dF}{dr} - \frac{k-1}{r}F = 0\end{aligned}\quad (2-45)$$

を満たす。これらは (2-44) において  $k \rightarrow -k-1$  としたものと同一だから解を  $F_{-k-1}, G_{-k-1}$  とかく。このとき

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -i(k+u)F_{-k-1} Q_{k-1}^u & \psi_2 &= -i(-k+u+1)F_{-k-1} Q_{k-1}^{u+1} \\ \psi_3 &= G_{-k-1} Q_k^u & \psi_4 &= G_{-k-1} Q_k^{u+1}\end{aligned}\quad (2-46)$$

である。

つぎに動径方程式 (2-45) から  $m - W < 0$  である解をもとめる。これより  $\frac{\lambda}{2\pi} = 1$  である単位系で進める。解の漸近形および原点でのふるまいを予想して、

$$\begin{aligned}F &= \frac{e^{-\lambda r}}{r} r^l f & (f &= \sum_{s=0}^{\infty} a_s r^s) \\ G &= \frac{e^{-\lambda r}}{r} r^l g & (g &= \sum_{s=0}^{\infty} b_s r^s)\end{aligned}\quad (2-47)$$



とおき、(2-45) に代入すると

$$\begin{aligned} A^2 r f + \alpha f - \lambda r g + l g + r \frac{d}{dr} g + k g &= 0 \\ B^2 r g - \alpha g - \lambda r f + l f + r \frac{d}{dr} f - k f &= 0 \end{aligned} \quad (2-48)$$

ここで  $A = W + m, B = m - W, \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = e^2$  である。  $r^s$  について同次の係数を比較すると、

$$\begin{aligned} A^2 a_s + \alpha a_{s+1} - \lambda b_s + (l + s + 1 + k) b_{s+1} &= 0 \\ B^2 b_s - \alpha b_{s+1} - \lambda a_s + (l + s + 1 - k) a_{s+1} &= 0 \end{aligned} \quad (2-49)$$

$a_{-1} = b_{-1} = 0$  であり漸化式を  $s=-1$  について解くと  $l = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$  をえる。  $a_s$  を両式から消去すると、  $b_s$  も消え  $a_{s+1}, b_{s+1}$  からなる式になる。

$$B((l + s + 1 + k) - \frac{A}{B}\alpha) b_{s+1} + A(\frac{B}{A}\alpha + l + s + 1 - k) a_{s+1} = 0 \quad (2-50)$$

漸化式を満たす  $a_s, b_s$  として

$$\begin{aligned} b_s &= (l + s - k + \frac{B}{A}\alpha) c_s \\ a_s &= \frac{B}{A}(\frac{A}{B}\alpha - l - s - k) c_s \end{aligned} \quad (2-51)$$

$s = 1, 2, 3, \dots$  であるがこれは  $s = 0$  にも拡張できる。これを方程式 (2-49) に代入して整理すると  $c_s$  についての漸化式

$$c_{s+1} = \frac{2AB(l + s - \frac{1}{2}(\frac{A}{B} - \frac{B}{A})\alpha)}{(s+1)(2l + s + 1)} c_s \quad (2-51)$$

をえる。今、超幾何関数  $F(\alpha, \beta, x) = 1 + \frac{\alpha}{1!\beta} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\beta(\beta+1)} x^2 \dots$  を定義すると、

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s r^s = F(\rho + iq, 2\rho + 1, 2ir) \quad (2-52)$$

である事がわかる。 ( $c_0 = 1$ ) いま

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{k^2 - \alpha^2} \\ q &= \frac{\alpha W}{p} = \frac{\alpha}{2i}(\frac{B}{A} - \frac{A}{B}) \\ q &= q' \gamma \end{aligned} \quad (2-53)$$

である。これと  $k^2 + (q')^2 = \rho^2 + q^2$  をもちいると、

$$G_{-k-1} = N(\frac{e^{-\frac{\pi i \rho}{2}} c_k \zeta_k}{\Gamma(\rho + 1 + iq)} + \frac{e^{\frac{\pi i \rho}{2}} c'_k \zeta'_k}{\Gamma(\rho + 1 - iq)}) \quad (2-54)$$

であることがわかる。ここで

$$\begin{aligned} \zeta_k &= \frac{\Gamma(\rho + 1 + iq)}{\Gamma(2\rho + 1)} \frac{1}{2} (2r)^\rho \frac{e^{-ir}}{r} \exp(\frac{1}{2}\pi q + \frac{1}{2}\pi i \rho) F(\rho + 1 + iq; 2\rho + 1; 2ir) \\ \zeta'_k &= \frac{\Gamma(\rho + 1 - iq)}{\Gamma(2\rho + 1)} \frac{1}{2} (2r)^\rho \frac{e^{-ir}}{r} \exp(\frac{1}{2}\pi q - \frac{1}{2}\pi i \rho) F(\rho + iq; 2\rho + 1; 2ir) \\ c_k / c'_k &= -(k - iq') / (\rho - iq) \end{aligned} \quad (2-55)$$

であり、 $N$  は規格化定数である。いまこれらの関数の  $r \rightarrow \infty$  での漸近形は (appendix 参照)

$$\begin{aligned}\zeta_k &\sim \frac{1}{2}(2r)^{iq}e^{ir}/r \\ \zeta'_k &\sim \frac{1}{2}(2r)^{-iq}e^{-ir}/r \\ G_{-k-1} &\sim r^{-1}\cos(r+q\log 2r+\eta_{-k-1})\end{aligned}\quad (2-56)$$

ここで

$$\begin{aligned}\exp(2i\eta_{-k-1}) &= -\frac{k-iq'\Gamma(\rho_k+1-iq)}{\rho_k-iq\Gamma(\rho_k+1+iq)} \\ &= B_k\end{aligned}\quad (2-57)$$

またこの表現を用いると、

$$\begin{aligned}F_{-k-1} &= -i\frac{p}{W+m}(\zeta_k e^{i\eta_{-k-1}} - \zeta'_k e^{-i\eta_{-k-1}}) \\ &\sim \frac{p}{W+m}r^{-1}\sin(r+q\log 2r+\eta_{-k-1})\end{aligned}\quad (2-58)$$

これで動径方程式の解の性質がわかったので目標である (2-29) の形の解を求める。

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m \quad (2-59)$$

を用いれば、(2-43),(2-46) において  $u=0, u=-1$  としたものの解が 4 通り得られる。これらを書き表すと、

	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	
$\alpha$	$-i(k+1)F_k P_{k+1}$	$-iF_k P_{k+1}^1$	$(k+1)G_k P_k$	$-G_k P_k^1$	
$\beta$	$-ikF_{-k-1} P_{k-1}$	$iF_{-k-1} P_{k-1}^1$	$kG_{-k-1} P_k$	$G_{-k-1} P_k^1$	(2-60)
$\gamma$	$-iF_k P_{k+1}^1$	$i(k+1)F_k P_{k+1}$	$G_k P_k^1$	$(k+1)G_k P_k$	
$\delta$	$iF_{-k-1} P_{k-1}^1$	$ikF_{-k-1} P_{k-1}$	$-G_{-k-1} P_k^1$	$kG_{-k-1} P_k$	

この  $\alpha$  と  $\beta$  から、あるいは  $\gamma$  と  $\delta$  から目標の解を構成できる。すなわち  $e^{\pm i\phi}$  を補うことを暗黙に了解したうえで

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = i \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\eta_k} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + e^{i\eta_{-k-1}} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \quad (2-61)$$

であり  $\psi_a$  をあらわに書き表すと、

$$\psi_1 = \frac{p}{W+m}(-i \sum (k\zeta'_k + (k+1)\zeta'_{k+1})(-1)^k P_k + i \sum (k\zeta_k B_{-k} + (k+1)\zeta_{k+1} B_{k+1})(-1)^k P_k) \quad (2-62)$$

$$\psi_2 = \frac{p}{W+m}(i \sum (-\zeta'_k + \zeta'_{k+1})(-1)^k P_k^1 + i \sum (\zeta_k B_{-k} - \zeta_{k+1} B_{k+1})(-1)^k P_k^1) e^{i\phi}$$

$$\psi_3 = (i \sum (k\zeta'_k + (k+1)\zeta'_{k+1})(-1)^k P_k + i \sum (k\zeta_k B_k + (k+1)\zeta_{k+1} B_{-k-1})(-1)^k P_k)$$

$$\psi_4 = (i \sum (\zeta'_k - \zeta'_{k+1})(-1)^k P_k + i \sum (\zeta_k B_k - \zeta_{k+1} B_{-k-1})(-1)^k P_k^1) e^{i\phi}$$

ここで  $\psi_3$  の第一項を  $\Psi_a$ , 第二項を  $\Psi_b$ ,  $\psi_4$  の第一項を  $\Psi_c e^{i\phi}$  第二項を  $\Psi_d e^{i\phi}$  とあらわすと、各々の漸近形を得ることができる。(appendix 参照) すなわち、

$$\begin{aligned}\Psi_a &\sim \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)IG_a \\ \Psi_b &\sim \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)IG_b + Sf(\theta) \\ \Psi_c &\sim -\frac{1}{2}\sin \theta IG_c \\ \Psi_d &\sim \frac{1}{2}\sin \theta IG_d + Sg(\theta)\end{aligned}\tag{2-63}$$

ここで

$$\begin{aligned}I &= \exp i(r \cos \theta - q \log 2r \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ S &= r^{-1} \exp i(r + q \log 2r) \\ G_i &= (1 + \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \dots)\end{aligned}\tag{2-64}$$

であり、これらにより  $\psi_3, \psi_4$  は

$$\begin{aligned}\psi_3 &\sim IG + Sf(\theta) \\ \psi_4 &\sim Sg(\theta)e^{i\phi}\end{aligned}\tag{2-65}$$

であることがわかる。  $f, g$  は

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \frac{i}{2} \sum (kB_k + (k+1)B_{-k-1})(-1)^k P_k \\ g(\theta) &= \frac{i}{2} \sum (B_k - B_{-k-1})(-1)^k P_k^1\end{aligned}\tag{2-66}$$

で与えられる。これは (2-62) における outgoing 波  $\zeta_k$  を漸近展開したときの係数部分に等しい。しかしながらそうしたときに (2-66) は必ずしも収束しない。(2-66) の和はその収束半径の中でとられなければならない。また、  $f, g$  は  $q'$  を含まない関数で展開できる。

$$\begin{aligned}C_k &= -e^{-i\pi\rho} \Gamma(\rho - iq) / \Gamma(1 + \rho + iq) \\ F(\theta) &= \frac{i}{2} \sum_0^\infty (-1)^k (kC_k + (k+1)C_{k+1})P_k \\ G(\theta) &= \frac{i}{2} \sum_0^\infty (-1)^k (k^2 C_k - (k+1)^2 C_{k+1})P_k\end{aligned}\tag{2-67}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}f &= -iq'F + G \\ g &= (iq'(1 + \cos \theta)F + (1 - \cos \theta)G) / \sin \theta\end{aligned}\tag{2-68}$$

である。  $f$  のほうは比較的容易に証明できるから、  $g$  について証明しよう。

$$\begin{aligned}g &= \frac{i}{2} \sum ((k - iq')C_k + (k+1 + iq')C_{k+1})(-1)^k P_k^1 \\ &= \frac{i}{2} \sum (k+1 - iq')C_{k+1}(-1)^{k+1} P_{k+1}^1 + (k+1 + iq')C_{k+1}(-1)^k P_k^1 \\ &= \frac{i}{2} \sum (-1)^k C_{k+1}((k+1)(P_k^1 - P_{k+1}^1) + iq'(P_k^1 + P_{k+1}^1))\end{aligned}\tag{2-69}$$

ここで、

$$\begin{aligned} P_k^1 + P_{k+1}^1 &= (k+1)(P_k - P_{k+1})(1 + \cos \theta) / \sin \theta \\ P_k^1 - P_{k+1}^1 &= -(k+1)(P_k + P_{k+1})(1 - \cos \theta) / \sin \theta \end{aligned} \quad (2-70)$$

を用い、さらに途中で

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} C_{k+1}(k+1)(-k-1-ig')P_{k+1}(-1)^k &= \sum_0^{\infty} C_k k(k+ig')P_k(-1)^k \\ \sum_0^{\infty} C_{k+1}(k+1)(k+1-ig')P_{k+1}(-1)^k &= \sum_0^{\infty} -C_k k(k-ig')P_k(-1)^k \end{aligned} \quad (2-71)$$

を用いると題意をえる。(2-68)を用いると確率密度をあらわに計算することができるようになる。

$$\begin{aligned} \psi_a &= \begin{pmatrix} \frac{p}{W+m}(-I + Sf') \\ \frac{p}{W+m}Sg'e^{i\phi} \\ I + Sf \\ Sge^{i\phi} \end{pmatrix} \\ \psi_b &= \begin{pmatrix} \frac{p}{W+m}(Sg'e^{-i\phi}) \\ \frac{p}{W+m}(I - Sf') \\ -Sge^{-i\phi} \\ I + Sf \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-72)$$

$f', g'$  は

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{i}{2} \sum_0^{\infty} (kB_{-k} + (k+1)B_{k+1})(-1)^k P_k(\cos \theta) \\ g'(\theta) &= \frac{i}{2} \sum_0^{\infty} (B_{-k} - B_{k+1})(-1)^k P_k^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (2-73)$$

であるが、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f' \\ g'e^{i\phi} \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} f \\ ge^{i\phi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g'e^{-i\phi} \\ -f' \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} -ge^{-i\phi} \\ f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-74)$$

であるユニタリー演算子が存在する。

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (2-75)$$

(2-73) の証明は  $f, g$  に (2-68) を用いて計算すればわかる。手法は (2-68) を導出した方法と同じである。これらを用いて目標の形の解をつくることができる。

$$A\psi_a + B\psi_b = \begin{pmatrix} -A\frac{p}{W+m} \\ B\frac{p}{W+m} \\ A \\ B \end{pmatrix} I + \begin{pmatrix} \frac{p}{W+m}U \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \\ Af - Bge^{-i\phi} \\ Age^{i\phi} + Bf \end{pmatrix} S \quad (2-76)$$

この右辺第一項は  $z$  方向の平面波解と係数が同じであることに注意しよう。いま、

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^4 |u_{\lambda}|^2}{\sum_{\lambda=3}^4 |u_{\lambda}|^2} = \frac{\sum_{\lambda=1}^4 |a_{\lambda}|^2}{\sum_{\lambda=3}^4 |a_{\lambda}|^2} \quad (2-77)$$

であるから  $\lambda = 3, 4$  についての確率密度を考えれば十分である。微分断面積は入射平面波の密度分の散乱された outgoing 波の密度だから両者に共通の定数部分は落ちるからである。すると  $|A|^2 + |B|^2 = 1$  のもとで微分断面積は

$$\begin{aligned} P &= |u_3|^2 + |u_4|^2 = |f|^2 + |g|^2 + (fg^* - f^*g)(-AB^*e^{i\phi} + A^*Be^{-i\phi}) \\ &= |f|^2 + |g|^2 + i(fg^* - f^*g) \sin \chi \sin(\phi - \omega) \end{aligned} \quad (2-78)$$

となる。ここで ( ) 式が用いられた。 $\chi, \omega$  は磁気モーメントの極角、方位角であり電子の場合スピンの方向とは逆向きであるためスピンを基準とすれば  $\chi \rightarrow -\chi$  と選ばれる。また我々の実験ではいろいろな方向のスピンの平均がとられることになるが、それは微分断面積 ( ) をあらゆる初期条件のスピンの方向で平均すればよい。

#### 1.2.4 数値計算のために

$f, g$  を  $F, G$  であらわしておく。 $\frac{\lambda}{2\pi} = 1$  の単位系から戻って、

$$\begin{aligned} |f|^2 + |g|^2 &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 (q^2(1 - \beta^2)|F|^2 \csc^2 \frac{\theta}{2} + |G|^2 \sec^2 \frac{\theta}{2}) \\ i(fg^* - f^*g) &= \frac{2q'}{\sin \theta} (F^*G + FG^*) \end{aligned} \quad (2-79)$$

また  $q = q', \alpha = 0$  の場合に問題は非相対論の場合になる。

$$\begin{aligned} f &= -\frac{i}{2} \sum (2k+1) \frac{\Gamma(k+1-iq)}{\Gamma(k+1+iq)} P_k \\ g &= 0 \end{aligned} \quad (2-80)$$

このとき和がとられて (appendix 参)

$$\begin{aligned} f &= R \csc^2 \frac{\theta}{2} \\ R &= \frac{1}{2} q \frac{\Gamma(1-iq)}{\Gamma(1+iq)} \exp(2iq \log \sin \frac{\theta}{2}) \end{aligned} \quad (2-81)$$

となる。だから (2-68) において  $\alpha = 0, q = q'$  とおくと、

$$\begin{aligned} -iqF_0 + G_0 &= R \csc^2 \frac{\theta}{2} \\ 0 &= (iqF_0(1 + \cos \theta) + G_0(1 - \cos \theta)) \end{aligned} \quad (2-82)$$

これを  $F_0, G_0$  について解くと、

$$\begin{aligned} iqF_0 &= -R \\ G_0 &= R \cot^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2-83)$$

をえる。

$$\begin{aligned}F_1 &= F - F_0 \\G_1 &= G - G_0\end{aligned}\tag{2-84}$$

を定義し、これらを数値計算することで微分断面積の値を導出した。ここまでの変形は和がより早く収束するように計算された。数値計算の結果は論文と有効数字 3 桁の精度で一致した。

## 第2章 Experimental Apparatus

### 2.1 諸設定

ここでは諸装置の説明とともに、今回の実験でのセットアップについて述べる。

#### 2.1.1 真空

今回の実験で使用する装置の内部は基本的に真空になっている。その真空槽は大きく分けて、electrodeの納められている『電極槽』と、target が設置され Mott-Scattering を観るための『Target 槽』との二つに区分される。

真空値の到達度の目安として、electrode である電極間での放電を防ぐためには、内部気圧は最低でも  $5.0 \times 10^{-1}$  [Pa] 以下にしなければならない (図 (2.1) 参照)。今回我々が使用した真空ポンプは、型式名 GVD-050A という直結型油回転真空ポンプで、取扱説明書による到達圧力は  $6.7 \times 10^{-2}$  [Pa] である (ガスバラストバルブ閉時)。我々はこのロータリーポンプを用いてほぼ理想的な真空値 (=  $1.0 \sim 4.0 \times 10^{-1}$  [Pa]) で実験することができた。

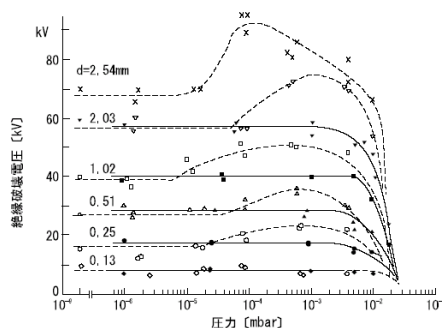


図 2.1: 耐電圧と理想到達真空度

また、以下に今回の実験で使用した真空ポンプ、及び真空計等について、その配置の模式図を載せる。2つのバルブはそれぞれ、真空ポンプ側のもはポンプの電源を切る際にオイルが槽へ逆流する事を防ぐために、真空計側のもは、当初真空計を放電から保護する目的から槽から取り外すために用いたものである。真空計側のものに関しては、後に絶縁体を挿むことによって計測時 (高電圧付加時) に関しても、その真空度をチェックすることが可能になり用いることはなくなったが、万が一真空計に異常を感じた時のために残した。

また今回使用した真空度の計測装置は、クリスタルゲージ M-320XG というものである。これは、水晶振動子の共振インピーダンスが気体との摩擦により変化することを利用した計測器で、大気圧が

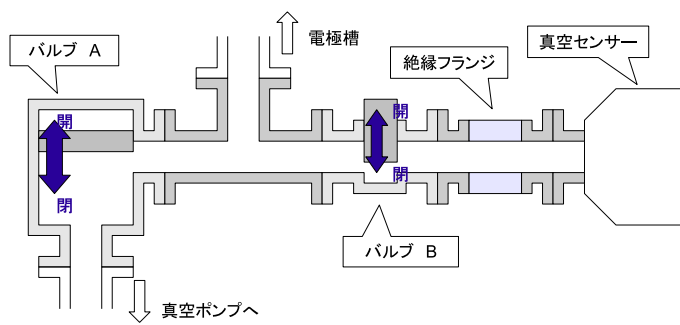


図 2.2: 真空経路 模式図

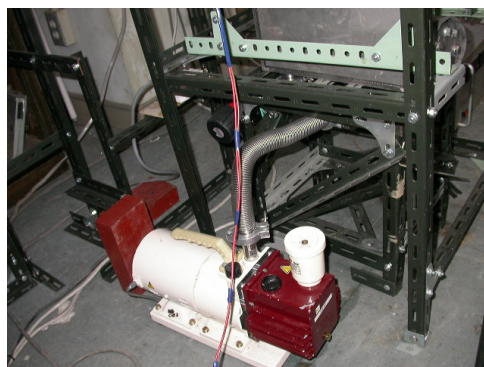


図 2.3: 真空ポンプ 型式名 GVD-050A

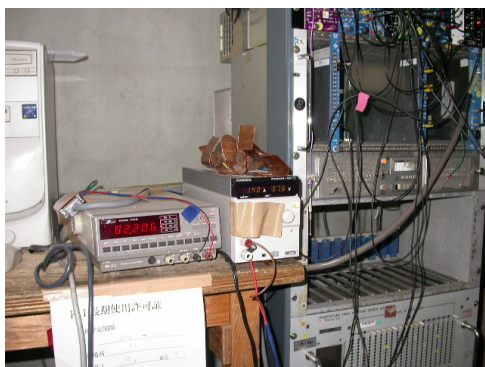


図 2.4: 真空計 (左) 電源 (右)

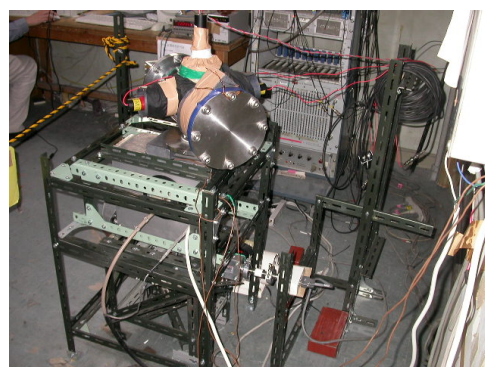


図 2.5: 真空センサー

ら、 $1.0 \times 10^{-1}$  [Pa] までの範囲で気圧を測定することができるものである。

### 2.1.2 高電圧

我々の実験では electrode に高電圧をかけることによって、電場を発生させ、electron の spin を変化させること無く、その運動量の方向だけを 90 度変化させることを考えている。電子の運動方向を変



化させるのに磁場を用いるのではなく、発生が困難であるにもかかわらず高電圧を用いるのは、磁場を用いた場合、運動量を曲げるのと共に spin も同じ方向へ変化してしまうためである。電場を用いれば、非相対論的な範囲内では、spin を変化させること無く運動量だけを 90 度だけ変化させることができる。もっとも、今回用いる電子のエネルギー領域では相対論的な影響が現れてきてしまい、完全に spin が電場と独立であるとは言い難い。理論計算によると、今回の setting では spin も運動量の変化方向と同じ方向へ、約  $21.8 \pm 1.4$  度だけ変化しているだろうということがわかる。

今回、実験に使用させてもらった高圧電源はタンデム実験棟から借り受けてきたものである。これは、直流電圧で約 80kV までかけることができ、また電流遮断器が付属していて、過度の電流が、例えば放電の際などに流れた時に緊急的に電圧を落とすような仕組みになっている。

以下に今回使用させてもらった高圧電源の写真を載せる。



図 2.6: 高圧電源

今回我々は、electrode へかける電圧の値を 25kV に設定した。これは、

- かける電圧が高ければ高いほど、選択される電子のエネルギーがより大きいものになり、より電子が大きければ大きいエネルギーを持つほど、観測されるであろう Asymmetry の値が大きくなるだろうということ。
- 実験の count rate を考えた際に、電子のエネルギーが小さい時の方が count rate が高いこと。
- 今回の実験では、前年度以前の実験と比べて実験時間が飛躍的に増大するため、高い電圧での長時間実験は、放電の面から見て危険であるということ。
- 25kV の電圧によって選択される電子によるモット散乱のピークは、バックグラウンドと明確に区別しうるために十分高いということ

などが理由として挙げられる。

### 2.1.3 noise

本実験では noise の存在が大きな問題として生じてくる。今回のプランとしては、測定時間が合計で 100 時間強と非常に長い時間を費やすことになる。これはもちろんモット散乱される electron の単位時間当たりの粒子数が非常に少ないことに起因しているのだが、この count rate を増加させることは一概に容易とは言えない。count rate を増やす現実的な手段としては、より強度の高い source を用

いることや、Target の厚みを増やすこと、electrode にかける高電圧を落として粒子数を稼ぐこと（一般にエネルギーが小さいときのほうが粒子数が多いことがシミュレーションによって確認されている）などがあげられる。しかし、source については法律上での規準が変わり、たとえ今求めることのできる最高強度のものと交換してみても単純に性能が向上するとはいえない可能性があり、また、Target を厚くすると多重散乱の可能性が増え、Asymmetry が見えなくなる恐れがある。electrode に関しては前述したとおり、これも Asymmetry に関係してくる。つまり、今回の実験では、現在ある source、 $^{137}\text{Cs}$  でデータを取っていく方法が一番現実的であるといえる。

count rate を増やすことは困難なので、純粋なデータを取り出すことを、すなわち noise を減らすことを考えなければならない。noise の原因としては、多重散乱、ホルダーからの散乱、外部からの環境放射線などが考えられるが、ここでは、source 起源のものは置いておき、まず外部起源の noise について減らすことを考える。今回の実験では、図 (2.7)、(2.8) のように鉛の薄板を装置のまわりに巻くことで外部からの  $\gamma$  線に由来すると思われる noise を落とすことを考えた。

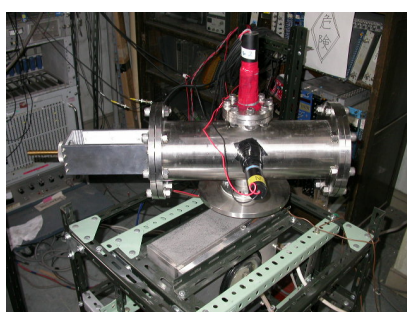


図 2.7: 鉛を貼り付ける前

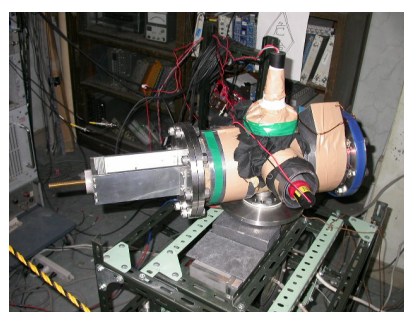


図 2.8: 鉛を貼り付けた後

図 (2.9) より、物質中でのフォトンの散乱断面積  $\sigma$  を用いて、線の初期エネルギーを  $E_0$  とし  $t$  cm 進んだ後のエネルギーを  $E(t)$  とすると

$$E(t) = E_0 e^{-N\sigma t} \quad (2.1)$$

となる。ここで、 $N$  はフォトンの入射する物質の数密度である。そこで、この式を用いると 1MeV のエネルギーの線でも、鉛の厚みが 1.76cm あればエネルギーが  $1/e$  になることがわかる。このことを用いると鉛をまくことで外部からの線はある程度遮蔽できる。

ここで、実際に用意した鉛の薄板は厚さが 2mm で、装置の周りに図 (2.8) のように平均して約五巻きしたので約 1cm の厚さがあると考えられることができる。これに加えて、Target 槽はステンレスで出来ていて、その厚みは約 1cm である。鉄の場合 1MeV の線のエネルギーを  $1/e$  にするには 2.54cm の厚さが必要であることが、先の表からわかる。そこで、今回の実験のセットアップでは 1MeV 程度の  $\gamma$  線であれば落とせることがわかる。

実際に測定した結果、noise の量は鉛を巻く前はモット散乱による電子のシグナルに比して約 1 対 1 の割合であったが、鉛を巻くことでその比を約 4 対 1 ほどに改善することが出来た。

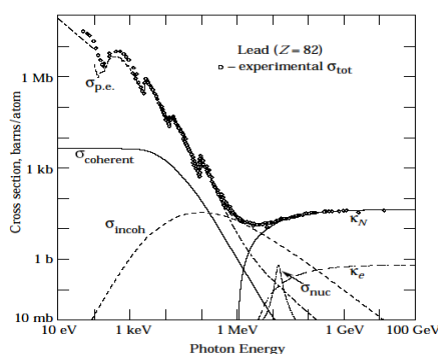


図 2.9: 鉛について、その厚みと止め得る粒子のエネルギーとの関係

## 2.2 実験装置

### 2.2.1 電極槽

電極槽の諸設定について記述する。

槽そのものと electrode、及びアクリルガイドとについては昨年のを流用することにした。しかし、electrode の配置が、電極槽の開け閉めを行うその都度ごとに変化してしまっは再現性の観点でよくないこと、また実験中にもわずかな振動などで electrode が電極槽内で動き、ビーム軸やエネルギーの選択性が崩れてしまっはならないことを考慮し、図 (2.10) に示すようなアクリル製の固定用のガイドを製作し、electrode (及びアクリル製ガイド) を槽そのものにネジで固定することにした。この際、金属の凹凸部があると避雷針のように放電を誘起してしまうので、ネジ、及びワッシャー等もプラスチック製のものを選んだ。

また左右方向のずれ・上下方向のずれを極力少なくするように、薄いアクリル板を蓋及び底面との間に挟むことを考えた。

はじめは前年度のセッティングをそのままに測定を行いデータを解析してみたところ、Target をアルミにした時の装置自身の Asymmetry のデータからビーム軸が 0 度方向にわずかにずれてしまっていることがわかった。そのため一度 electrode のアクリルガイドを削り、simulation に即するように底面との間のアクリル板の厚さを再調整し、補正して固定しなおしてから再度本実験に臨んだ。

以下に今回の実験で用いた電極槽の写真を載せる。

### 2.2.2 Target 槽

Target 槽についても昨年のを流用することにした。

イメージとしては下記の図 (2.14) で示すものである。この Target 槽についての特徴を以下にあげる。

- Target 槽と電極槽とをつなぐフランジ (内径 30mm) の結合部を回転させることができ、これによってビーム軸から方向に任意角度で回転することができる。ただし、両者をネジで完全に固定することを考えると任意ではなく 22.5 度ずつということになる。
- PMT No.3 のフランジ部と電極槽との結合部とを入れ替えることによって後方散乱についても実験することができる。

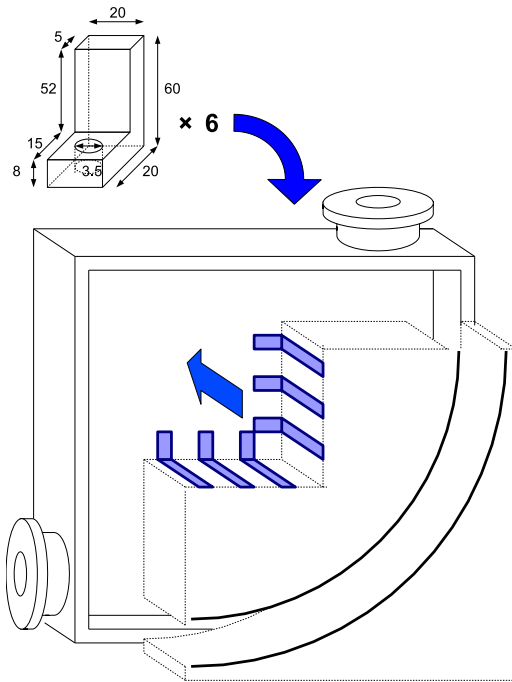


図 2.10: 電極槽、及びアクリルガイドについての模式図

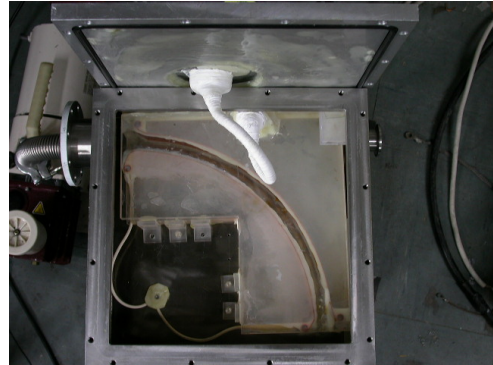


図 2.11: 電極槽 内部

- Target 槽の大きさは、 $z = 350\text{mm}$ ,  $r = 300\text{mm}$  の円筒である。
- PMT No,1・No,2 は水平方向から見た角度を 25 度に設置する。また、PMT No,3 はビーム方向に設置する。この 25 度という値は後述の図 (2.12) によるものである。また後方散乱としてはこれにより、115 度について観ることになる。

今回の実験では散乱角  $\theta$  を、約  $65^\circ$  に設定して実験を行った。散乱微分断面積  $\frac{d\sigma_0}{d\Omega}$  は散乱角が小さいときのほうが大きく、また一方で Asymmetry は散乱角が大きいときのほうが見えやすい。このふたつの要因を考えると、以下の図 (2.12) で示すように、 $\theta = 65^\circ$  付近が最適であると思われることになっている。

また、本年度は noise を減らす目的で PMT No,1 及び No,2 の Scintillator の前方に銅製のガイドを設置することにした。(下図 (2.13) 参照)

また、以下に Target 槽の外観を捉えた写真を載せる。

### 2.2.3 Photomultiplier Tube

ここでは今回の実験で粒子検出器として使用した PMT と scintillator について述べよう。この項で PMT について、次の項で Scintillator について、各々詳しく述べることにする。

PMT は、Photomultiplier Tube の略で、和名では光電子増倍管として知られているものである。PMT(光電子増倍管) は図 (2.16) で示されるような構造を持ち、光電面、集束電極、電子増倍部、陽極(電子を集める電極)を真空管の中に収めた高感度の光センサーである。光電面に光が当たると、光電

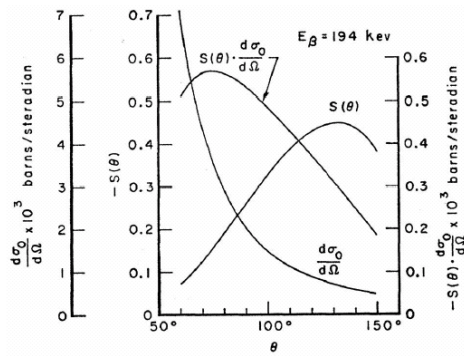


図 2.12: 散乱微分断面積  $\frac{d\sigma_0}{d\Omega}$ 、及び Asymmetry 成分  $S(\theta)$  の散乱角  $\theta$  依存

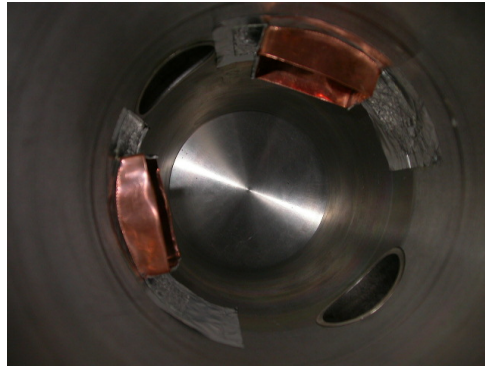


図 2.13: Target 槽内部 図左右に銅製のガイドが見える。

面から真空中に光電子が放出され、その光電子は集束電極によって電子増倍部に導かれて、2次電子放出効果によって増倍（増加）される。この2次電子放出効果を利用して光電子を増倍（100万倍～1000万倍）することにより、PMTは光センサーの中でも特に際立った高感度を有し、さらに高速時間応答特性など数々の優れた特性を備えている。また、光電子増倍管は、光電管と信号増幅器を用いたものと比較して、真空管内で増幅するためノイズが少ないという特徴を持ちあわせており、こうしたことから微弱光の測定に最適な光センサーであるといえる。

今回の実験では、PMTとScintillatorとを組み合わせる、いわゆるシンチレーションカウンティング (Scintillation Counting) という方法を用いる。これは、放射線の入射によって発光するScintillatorと光電子増倍管とを用いて放射線計測を行う方法を指していて、特に放射線計測の中では検出効率、感度の面で最も優れた方法として知られているものである。

一般に『ビームの強さ』というと、二つの意味を有している。一つは、一個一個の粒子の持つエネルギーの高さという意味、もう一つは粒子数の多さという意味である。したがって測定に際して、粒子のエネルギーと個数という二つの情報を同時に得なければならない、ということが分かる。粒子がScintillatorに入射すると、Scintillatorはそれに応じて光を放つ。この発光量は入射した粒子のエネルギーに比例してはいるが、非常に微弱なものである。PMTはこの微弱な光量を増倍し、光量に比例した大きさのパルスを出力することができるので、パルスシグナルとエネルギーとを適切に較正することができれば、入射粒子のエネルギーを測定することができる。入射粒子の個数に関して、PMT

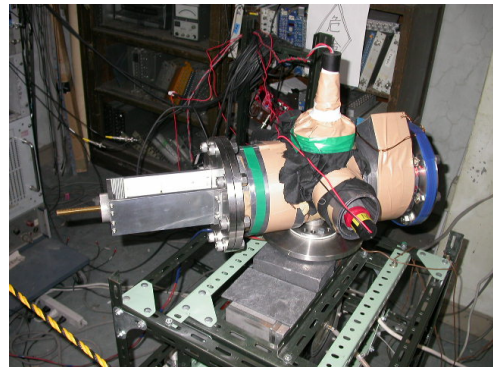
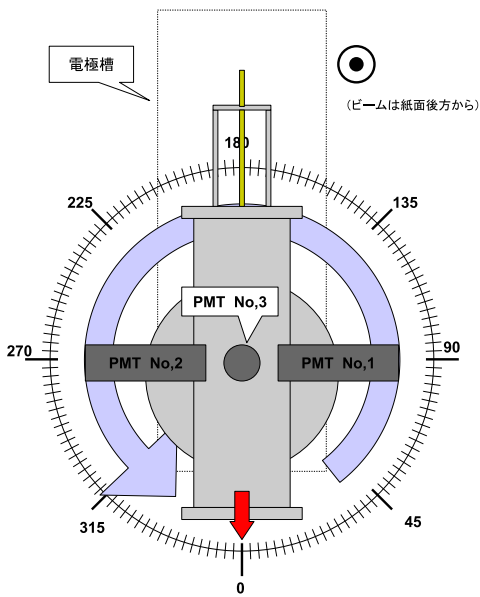


図 2.15: Target 槽 向かって右の鉛の塊は、左右の重さを合わせる為に付随している。

図 2.14: Target 槽

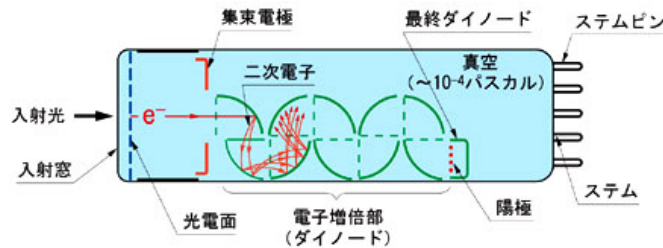


図 2.16: Photomultiplier

からシグナルの数という形でそれを測定することができる。

今回はこの PMT を 3 本使用して実験を行った。3 本の PMT はそれぞれ、1 本はビームの下流側にビームフラックスを見るために設置し、残りの 2 本は Target によって Mott 散乱した粒子を観測するために設置した。

## 2.2.4 Scintillator

今回の実験では、時定数の異なる二つの有機 (プラスチック) Scintillator を用意し、それを図 (2.17) の様に重ねて用いることを考えた。このことによって、本当にモット散乱されてきたシグナルであるのか、それとも noise であるのかを容易に判定できるようになった。また、得られたシグナルが本当にモット散乱された電子であるかどうか、エネルギーを較正することによりかなり詳しくわかるようになった。

我々は、本実験を 20 ~ 30kV の electrode 極板間電圧で行おうと計画しており、そのセッティングだと極板間を通過してくる電子の運動エネルギーは図 (2.19) より、およそ 200keV となる。この電子が、

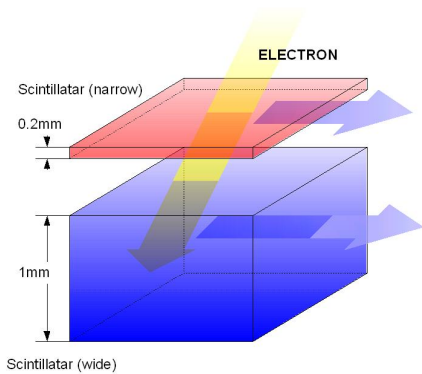


図 2.17: シンチレーターモード

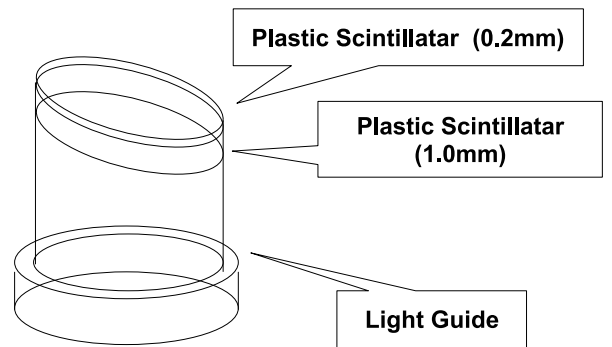


図 2.18: シンチレーター

Target 槽で散乱されてくると、数 keV のエネルギーを失ってシンチレーターに入ってくる。去年のシンチレーターの厚さは、 $0.2\text{mm}$  であった。この場合に、電子はほとんど速度を落とさずに<sup>1</sup> シンチレーターを通過すると仮定した場合、失うエネルギーは  $100\text{keV}$  程度となる。

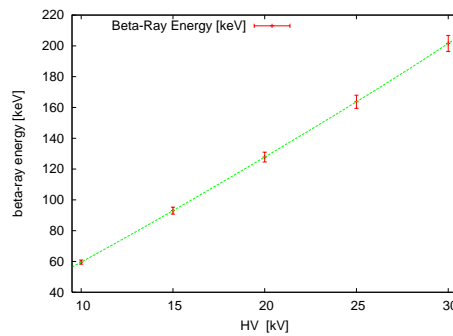


図 2.19: 極板間電圧と電子エネルギー

外部からの noise は、実験室内の壁や床を構成しているコンクリートに含まれる  $\text{K}a^{40}$  などからによる自然放射線の 線であると考えられる。実際、 $5\text{mm}$  シンチレーターを PMT につけて 10 分間放置すると、それだけで 150 個ほどのイベントが観測された。(この点は noise のところで詳しく述べる) この自然放射線の 線の到来方向は、円柱型のシンチレーターに対してどの方向についても均一であるということが仮定できる。また、図 (2.18) のようにシンチレーターは円柱型をしているために到来方向によって実効的な長さが変化するということがわかる。このことと、自然放射線は低エネルギーのものほど粒子数が多いということから、エネルギースペクトルは、低エネルギー側から高エネルギー側にかけて、単調に減少するような分布が得られることが予想される。

ここで、去年のセッティングを振り返ってみると、シンチレーターの厚さは  $0.2\text{mm}$  であった。 線がシンチレーターで反応する過程は、重い原子核を動かすほどのエネルギーは入射 線には無いと考えられることから、主にコンプトン散乱によるものであると考えられる。

シンチレーター内部でのコンプトン散乱はフォトンである 線と電子の散乱断面積とシンチレーター

<sup>1</sup>ここでいうほとんどというのは、電子の持つ運動エネルギーに対してのシンチレーターを通過するために失ったエネルギーの比が小さいということ

の内部の電子密度とから容易に導くことができる。

今、自然放射線のフォトンエネルギーは低いと仮定して、非相対論的に扱える場合を考える。そうすると、図 (2.26) のように散乱角をとった場合、入射光子の散乱断面積は、量子論の結果を用いることができ、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \quad (2.2)$$

ここで、 $r_0$  は  $\frac{e^2}{m_e}$  で古典電子半径と呼ばれる量である ( $m_e$ : 電子質量)。これを全立体角に対して積分すると

$$\sigma_{Thomson} = \int d\sigma = r_0^2 \int \frac{1 + \cos^2\theta}{2} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (2.3)$$

実際の数値を代入すると、 $\sigma_{Thomson} = 6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$  となる。ここで、我々の用いたプラスチック有機シンチレーターは、 $\text{C}_{10}\text{H}_8$ 、 $\text{C}_{14}\text{H}_{10}$ 、 $\text{C}_{14}\text{H}_{12}$ 、で出来ていて、密度は、 $1.0 \text{g/cm}^3$  程度である。そこで、炭素の 1 に対して、水素 1 の割合では出来ていると仮定すると、炭素の原子量は、12.01、水素の原子量は、1.008 だから、簡単な割り算から、 $1 \text{cm}^3$  中には、炭素と水素の原子がそれぞれ、 $4.6 \times 10^{22}$  個程度あると考えられる。この炭素と水素に含まれる電子それぞれが先ほどの散乱の全断面積を有していると考えられることができる。そこで、これらの関係式から、フォトンが  $1 \text{cm}$  進む間に電子とコンプトン散乱する確率を求めることができ、計算すると 40% 程度となる。

そこで、線のシンチレーター内部における平均自由行程は  $1 \text{cm}$  程度ということになる。このことから、線はシンチレーター内部では、離散的にしか反応しないということがわかる。

一方、電子の場合は、後に述べるが、シンチレーターの厚さが  $1 \text{mm}$  程度もあれば  $200 \text{keV}$  のエネルギーの電子は十分にシンチレーター内部でとめることが可能である。このことは電子がシンチレーター内で多数回散乱するというを表しており、電子は  $1 \text{mm}$  あたり、線に比べて、はるかに多くの散乱を引き起こしているということがわかる。このことから、電子と線では、シンチレーター内部での相互作用の回数が違っていることがわかる。

散乱過程の考察から、線の反応はシンチレーターの厚さに比例して増加すると考えてよさそうである。去年の実験では、 $0.2 \text{mm}$  ということは今年の noise 測定の結果から 10 分間で 6 個、つまり、1 時間で 36 個程度の noise が入っていたと考えられる。しかし、実際には極板間を通過してきた、source 起源のエネルギーの低い電子、ダブルスキヤタリングして散乱されてきた電子なども noise として存在してる。今年の実験で、その分量は 1 時間に約 600 個程度あることがわかった。このことから、実際は noise の量としては、昨年は一時間に 600 ~ 700 個程度であったろうと考えられる。1 時間では去年のデータを参照すると、4000 個ほどのカウントを得ることができていたので、15% 程度の noise であったろうと思われる。去年はデータ全部をモット散乱されてきた電子だとしていたため、そうしたノイズの除去がほぼ出来ていなかったのではないかと考えられ、その点を今年の実験では改良することを考えた。

まず、電子やフォトンの違いはあるが、シンチレータを通過するときほとんど速度を落とさずに通過すると仮定すると、大体どの粒子も  $1 \text{cm}$  で  $2 \text{MeV}$  のエネルギーを落とすことが知られている。我々の実験では、散乱されてきた電子は、およそ数パーセントのエネルギーの幅はあるが、ほぼエネルギーをそろえた状態でシンチレーターに対して垂直に入射してくるであろうと考えられる。入射エネルギーは、図 (??) より、約  $200 \text{keV}$  となっている。

ここで、電子の場合には、物質内部を通過する場合、エネルギーと通過距離との間には以下の関係が成り立つことが知られており、この式は Bethe-Bloch の公式という

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \left[ \ln \left( \frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right] \quad (2.4)$$



しかし、実際には修正項が加わって次のようになる。

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \left[ \ln \left( \frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right] \quad (2.5)$$

- e: classical electron radius =  $2.817 \times 10^{-13} cm$   
 $m_e$ : electron mass  
 $N_a$ : AVOGADORO's number =  $6.022 \times 10^{23} mol^{-1}$   
I: mean excitation potential  
Z: atomic number of absorbing material  
A: atomic weight of absorbing material  
 $\rho$ : density of absorbing material  
z: charge of incident particle in units of e  
 $\beta$ = v/c of the incident particle  
 $\gamma$ =  $1/\sqrt{1-\beta^2}$   
 $\delta$ : density correction  
C: shell correction  
 $W_{max}$ : maximum energy transfer in a single collision

上のデータから

$$2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 = 0.1535 MeV cm^2 / g$$

また、簡単な計算により

$$W_{max} = \frac{2m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1 + \eta^2 + s^2}} \quad (2.6)$$

$$s = m_e / M$$

$$\eta = \beta \gamma$$

となり、とくに  $M \gg m_e$  の時は

$$W_{max} \cong 2m_e c^2 \eta^2 \quad (2.7)$$

となる。

Bethe-Bloch の公式を、エネルギーと  $\frac{dE}{dx}$  のグラフにしたのが図 (2.20) である。この図から、エネルギーが 1000MeV より低い領域では、 $\frac{dE}{dx}$  はエネルギーが増加すると、減少することがわかる。このことは、エネルギーが低いほど単位長さを走った場合に落とすエネルギーが大きいということをいっており、そうすると、先ほどの考察から、速度を落とさずに通過すると仮定した場合 1cm で 200keV のエネルギーを落とすということであったが、速度を落としながら通過した場合は 1cm で 200keV より大きいエネルギーを落とすことがわかる。そこで、本実験では入射する電子のエネルギーが 200keV であったのだから、シンチレータの厚さを 1mm 以上にとれば、入射電子はシンチレーターの中で止まるということがわかる。

そこで、Bethe-Bloch の公式を使って、減速しながらシンチレーターの中を通過すると 200keV では、どのくらいの距離を走って止まるかというのを、数値シミュレーションで計算することにした。その結果を、図 (2.21) に載せる。これより、200keV では 0.5mm あれば十分に電子をとめることが可能であることがわかる。しかし、ここではひとつ注意しておかなければならないが、Bethe-Bloch の式は図 (2.20) より、低エネルギーの現象については正確にフォローすることができない。しかし、図 (2.20) より正確に Bethe-Bloch の式が成り立たないのは、数 keV のエネルギーの領域であることがわ

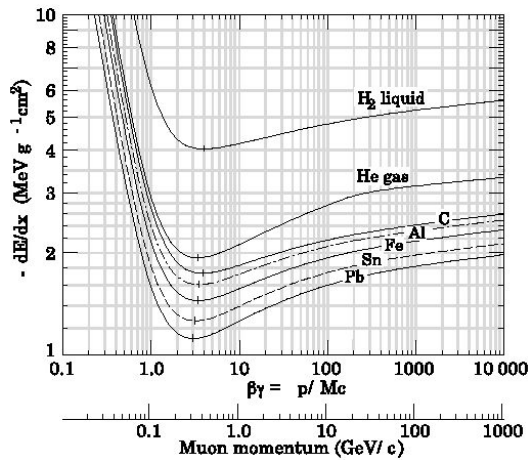


図 2.20: Bethe-Bloch

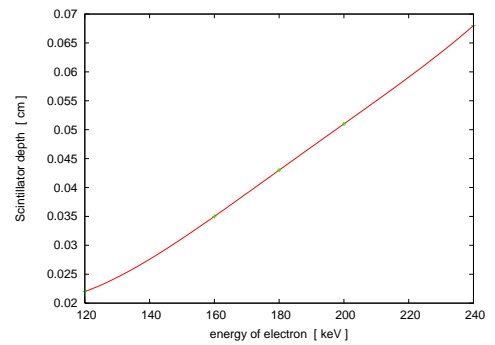


図 2.21: 入射電子のエネルギーと到達深度

かる。そこで、この部分は最初問題となっていたモット電子のエネルギー 200keV にたいして、数パーセントしかない、相対的に低エネルギーの領域なので、この部分で電子が移動する距離は小さいと考えられるから、無視するか、もしくは、Bethe-Bloch の式をこの領域でも成り立つと仮定して、数値計算をしてもいいであろうと考えた。

そこで、シミュレーションした結果から、シンチレーターは 1mm 程度の厚さがあれば、十分電子が内部で止まることがわかった。電子を内部で止めることができれば、PMT でその信号を読み込み、ADC をもちいて積分するという操作で、エネルギースペクトルを作ることができる。ここで、入射電子のエネルギーはよくそろっていることが予想できる。今年度の実験では、電子はそのエネルギーを『完全に Scintillator 内で落としきる』ので、昨年度での『ある一定値だけを Scintillator 内で落とす』場合とは異なり、エネルギースペクトルは、GAUSSIAN 型のピークを有したスペクトルが取れるであろうことが予想される。

先ほど述べたとおり、実験室内で 5mm のシンチレーターを PMT に取り付け、約十分間放置することで、noise の量を測ってみると、十分間で約 150 個ほどのイベントが観測された。10 分で、150 個ということは一時間では約 900 個である。去年のデータから一時間では、およそ 4000 個ほどのモット散乱されてきた電子が確保されるであろうことがわかる。これは、シンチレーターの厚さを 5mm と仮定した場合の数値である。先に説明したとおり、シンチレーターの厚さを減らすことで、線形に線起源の noise を除去できることがわかったから、この noise を除去するためにシンチレーターの厚さを出来るだけ薄くしたい。そして、先ほど説明したとおり、200keV の電子を内部で止めるため、シンチレーターの厚さは 0.5mm 以上にしたい。それと業者の加工の関係から、シンチレーターの厚さは 1mm 程度とすることにした。

noise を減らす目的と、データを多面的に解析できるようにするためにシンチレーターを二重にした。

図 (2.17) のように時定数の早い薄いシンチレーターと、時定数の遅いシンチレーターを組み合わせることで、noise を減らすことが可能である。この原理はいたって簡単なもので、時定数の早いシンチレーターで Threshold を決定してやってから、その閾値を超えたものだけゲートを開くというような操作をしてやる。すると、線のような平均自由行程の長い粒子の反応をカウントする確率が減ると

ということが考えられる。ここで実際に用いたシンチレーターの厚さは、時定数の早い方のシンチレーターは  $0.2\text{mm}$ 、時定数の遅いほうのシンチレーターの厚さは  $1.0\text{mm}$  とした。それぞれのシンチレーターの性能は表のようになっている。

EJ-212 plastic scintillator	BC-444 plastic scintillator
Rise time:0.9ns	Rise time:19.5ns
Decay time:2.4ns	Decay time:179.7ns
Pulth width:2.7ns	Pulth width:171.9ns

表 2.1: scintillator

この方法で、noise はある程度除去できる。また、シンチレーターを二枚にすることで、ScatterPlot が出来るようになった。この図の描くことで、線 like か電子 like かということが判断でき、捉えているのが線か、もしくは電子であるか、電子であれば無事に電極間を通過してモット散乱された電子であるかがわかるようになった。

この図の意味と実験のデータに対する評価については ScatterPlot のところで詳しく述べる。

以上のようにシンチレーターを改良したことによって、さまざまな改善がなされた。

今回の実験では散乱された電子のエネルギーを測定することを考えている。昨年度の実験では、ごく薄い Scintillator を用いることで、散乱された電子は Scintillator 内で一様にエネルギーを落とし、Landau 分布型のエネルギースペクトルを観測していた。エネルギーを測定することの利点としては、エネルギースペクトルが GAUSSIAN 型になることで、FIT が容易くなり、Back Ground の除去を容易にすること、またそれに付随してシグナル数の決定がより確実に行えることなどが挙げられる。しかし、その反面、エネルギーを測定するためにはシンチレーター内で電子が完全にエネルギーを落としきらないといけなないので、より厚い Scintillator が必要になってくる。厚いシンチレーターを用いると、その厚さに比例してノイズが観測される確率が増加する。ノイズをカットするのが目的ではあるが、そのためにノイズが増えてしまったのでは意味を成さない。このため、今回の実験では二枚のシンチレーターを重ねて用いることを考えた。Gate を開く動作をごく薄い時定数の短いシンチレーターが行うことで、実質上、ノイズはその薄い部分だけからの寄与だけを考えればよいことになる。そして、エネルギーの測定は時定数の長い厚めのシンチレーターで行うことで、その困難を解消した。

## 2.2.5 Target 及び Target Holder

今回の実験では理想的な真空値の達成までに非常に長い時間 (約 12 時間) がかかる。そのため、Target を真空を保ったまま変化させるような工夫が実験時間の短縮のためには必要になる。この実現のために、Target Holder に図で示すように可動部が設けられている。

ハンドルと Target Holder とはタップの構造になっており、ハンドルの回す力を利用して前後に Target Holder が移動するようになっている。またその際に Holder が左右方向へずれないように支え棒がついており、その棒を最外まで動かした時、Target の表裏を変えることができるようになっている。真空を保つための装置としては gage port を利用している。

Target Holder の材質はアルミを選んでいる。これは、Holder 散乱が生じた場合に Asymmetry が出ないようにするためである。Target の大きさは simulation の結果から決定した。

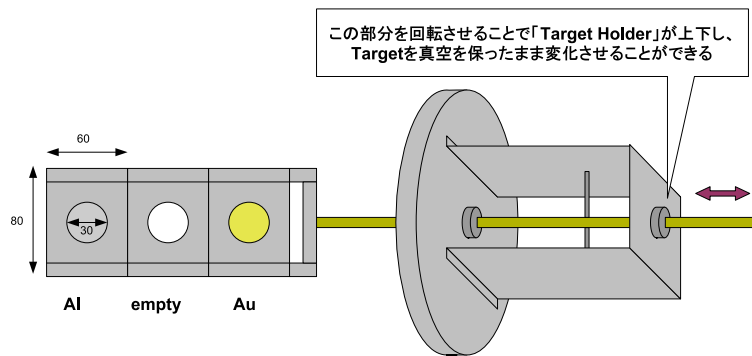


図 2.22: Target Holder

今回の実験で使用する Target の種類として、金・アルミ・空の 3 種を用意した。空はノイズ及びビームのエネルギーの測定に使うことを目的としている。アルミは装置の Asymmetry の測定を、金は実際に Parity 対称性の破れによる Asymmetry の測定を目的としている。また Target の厚さとして、金は  $2.5\mu\text{m}$ 、アルミは  $24\mu\text{m}$  にしている。

## 2.2.6 Source 及び Source Holder

線源として今回は  $^{137}\text{Cs}$  を使用した。 $^{137}\text{Cs}$  を使用した根拠として、手に入る放射線源の中では約 200keV 付近での線 Flux が強いこと、conversion line により、PMT の Energy 較正が容易なこと、などが挙げられる。

また、今回我々は以下の設計で Source Holder を製作した。

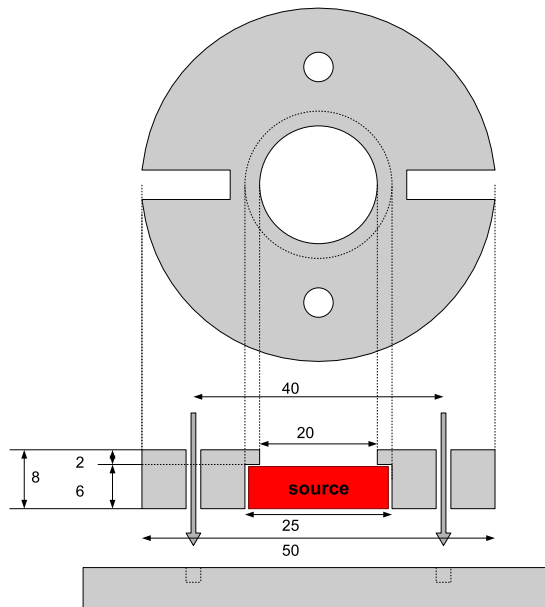


図 2.23: source 及び Source Holder

これは上下、もしくは左右方向に最大で約 2mm、Source 中心をずらすことができるようになって  
いる。我々はこれを電極槽内の electrode 中心のずれに合わせ、左右方向に 1mm ずらして使用した。

## 2.2.7 マグネット

本実験を行う前に、装置のアシンメトリーを見るために Target をアルミに設定し、各方位 3 時間ず  
つデータをはしらせた。この予備測定より、電極槽で電子は十分には曲げられていず、データから読  
み取られるのは、ビーム軸が、0 度 180 度方向に関して、180 度方向に  $x$  度傾いているということが  
分かった。(この点は後の予備実験のところで詳しく述べる)そこで、この傾きを解消するために、一  
様な磁場をかけて、ビーム軸を正しい方向に補正してやるということを行った。

180 度方向に対して傾いているビーム軸を、0 度方向に曲げてやるには、90 度方向から 270 度方向  
に向けて、一様に磁場をかけてやる必要がある。これは、ダイポールマグネットで可能である。

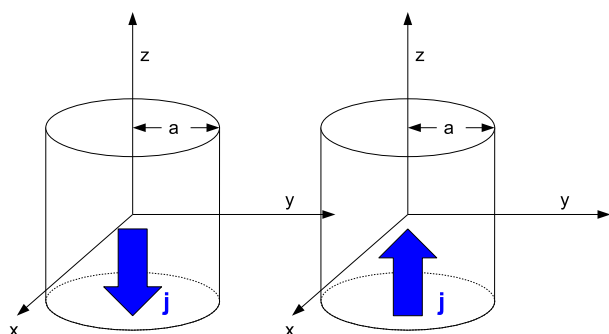


図 2.24: ダイポールマグネット

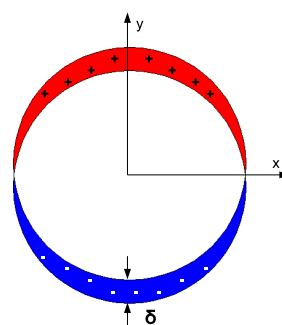


図 2.25: 電流の重ね合わせ

今、図 (2.24) のように半径  $a$  の無限に長い円内に、一様な電流が上向きに流れているものと下向  
きに流れているものを用意する。ただし電流の方向は軸方向で電流密度は  $j_0$  である。これら、二つ  
を図 (2.25) の様に重ね合わせる。重ね合わせる時は  $y$  軸方向に中心を  $\delta$  だけ違えて重ねる。ここで、  
 $\delta \times j_0 = I_0$  を一定に保ちながら、 $\delta \rightarrow 0$  の極限に持っていった時、考えられる円筒表面に流れる電流  
分布は極座標を用いて表すと、簡単な計算から

$$I(r, \theta) = I_0 \sin \phi \quad (2.8)$$

また、円筒内部の磁場は

$$\vec{B} = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2}, 0, 0 \right) \quad (2.9)$$

のようになる。

そこで、この磁場を用いて、電子の軌道を曲げてやることを考える。ここで、実際に使用するのは、  
有限の長さのものであるが、良い近似で電流の流れている範囲は磁場は一様になっていると仮定する。

今、図 (2.27) のように座標を取って、電子は、 $x$  軸の負の方向に図のように  $\theta$  傾いた状態で入射する  
ことを考える。そのときに、電子の速さを  $v$  とすると、速度  $\vec{v}$  は、 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (-v \sin \theta, 0, v \cos \theta)$   
となる。しかし、ここで  $\theta$  は、実際には 2 度と小さいことから、速度は  $\vec{v} = (0, 0, v)$  と考えていい。ダ

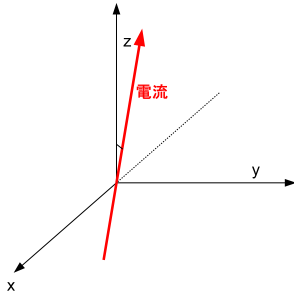


図 2.26: 入射電子

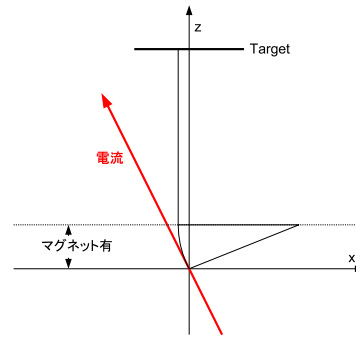


図 2.27: ローレンツ力で曲げられる電子

イポールマグネットで作った磁場を  $\vec{B}=(0,B,0)$  とすると、電子にかかる力はローレンツ力の式から

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.10)$$

となる。これから、力は、 $x$  軸方向にしか働かず

$$\vec{F} = (evB, 0, 0) \quad (2.11)$$

ここで、電極層の出口から、ターゲットまでは、 $20cm$  あって、その部分で軸が  $\theta$  傾いているのだから、図 (2.26) のようになっていると考えられる。磁場は電子の運動方向に対して、垂直に働くと考えられ、電子はそれによって円運動をする。電子の質量を  $m_e$  とすると、電子の曲率半径  $\rho$  は

$$\rho = \frac{m_e v}{F_x} = \frac{m_e v}{eB} \quad (2.12)$$

となる。ここで、マグネットを入れて、磁場を発生させている領域の長さを  $L$  とすると、図 (2.27) のようにその長さの間で、電子の速度の傾きを  $z$  軸に対して  $0$  にしなければならない。これは次の条件

$$\rho \cdot \tan\theta = L \quad (2.13)$$

が成り立つことであり、そこで、(2.12)、(2.13) を用いて

$$B = \frac{m_e v \cdot \tan\theta}{eL} \quad (2.14)$$

の強さの磁場が必要となる。この磁場を作るためには、(2.9) を用いて

$$I_0 = \frac{2m_e v \cdot \tan\theta}{\mu_0 eL} \quad (2.15)$$

の電流と巻き数があることがわかる。今ここで実際のデータとして、 $v = c \times 0.7$ 、 $\theta=2$  度 $=\pi/90$ rad、 $L=3cm$ 、 $m_e=0.511MeV$ 、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  という値を代入すると、

$$I_0 = 750 \quad (2.16)$$

となる。今、巻いている部分の厚さから、実効的な  $\delta$  の値は  $5mm$  程度であると考えられる。このことと、実際に用いた銅線の直径  $1mm$  と得られた  $I_0$  から、必要な電流としては

$$I = j_0 \times 0.5^2 \times 10^{-6} \pi = I_0 \times 0.5 \times 10^{-3} \pi = 1.17A \quad (2.17)$$

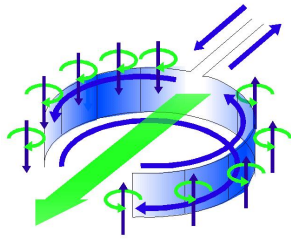


図 2.28: ダイポールマグネット模式図

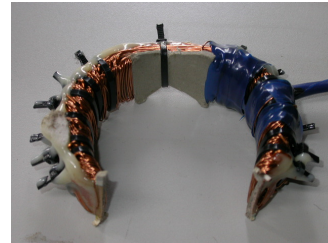


図 2.29: ダイポールマグネット

となる。この電流値は電源を用いてかける値として、妥当であろうと思われる。

実際の実験で用いたマグネットは、図 (2.28) のように各ブロックごとに回数を決めて銅線を巻いていったもので、大体一様に巻き数が 4 回になるように巻いていった。巻き終わったものは形状の変化を抑えるために上からアラルダイトを塗って処理した。完成したマグネットは、図 (2.29) のようなものである。

ここで、実際、銅線に 1A 流した時は、回路全体で 6V 程度の電圧値を示した。三十分ほど放置し熱平衡状態になったと思われる時に、人の手で触れるほどの温度であったことからファンなどの空冷がなくても大丈夫であることがわかり、回路が焼き切れる心配はないであろうと判断した。

磁場測定器で、銅線に流す電流を変えながら磁場最大値の変化を測った。その結果が表である。

回路の電流 (A)	回路の電圧値 (V)	最大磁場 (Gauss)
0.5	2.4	1.2
0.6	2.8	1.4
0.7	3.3	1.7
0.8	3.7	1.8
0.9	4.2	2.4
1.0	4.7	2.9
1.1	5.1	2.7
1.2	5.8	2.8
1.3	6.2	3.2

次に、1A での磁場分布を測ってみた。その結果が図 (2.30) である。

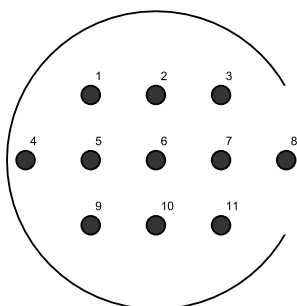


図 2.30: 測定された磁場

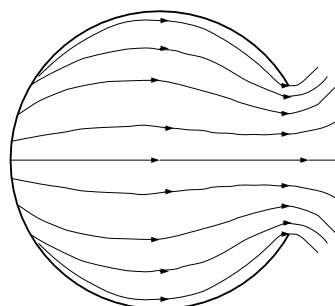


図 2.31: 磁力線

場所の番号	方向の磁場 (Gauss)	方向の磁場 (Gauss)
1	3.0	0.5
2	3.0	-0.8
3	4.0	-1.0
4	6.0	0.6
5	4.0	0.4
6	3.0	0.2
7	2.8	0.2
8	2.5	0.2
9	4.0	0.8
10	2.9	0.6
11	2.8	1.8

以上より望まれる磁場が得られていることがわかった。磁力線は図 (2.31) の様になると考えられる。そこで装置に実際のこのマグネットを組み込んでみた。その結果については、装置のヌルアシンメトリーの設定のところで詳しく述べる。

モット散乱のカウント数を増やすためにソースのそばに四重極マグネットをいれることも考えた。しかし、3D シミュレーションの困難さと 40 万かかることと固定する難しさのため断念した。理論上はカウントが 20 倍にもなることが期待された。

## 2.2.8 金、アルミニウムの薄膜

今年の実験では、去年製作された装置を用いることにしたので、ターゲットホルダーは三個用意し、去年と同じように、金とアルミニウムと空でデータを取った。空以外は金とアルミでなくてはならないわけではないが、原子番号  $Z$  の大きいものと、小さいものとして、入手のしやすさなどの理由によってその二つを選んだ。

去年はアルミの厚さが  $10\mu\text{m}$  で、金の厚さが  $2.5\mu\text{m}$  であった。今年、この部分をどういうふうに改善しようとしたかについて述べる。

去年のデータによれば、アルミでとられたカウント数が、金のデータに比べ単位時間当たり、 $2/3$  ほどで少なかった。去年の実験の反省に、アルミでのカウント数の少なさによって、正確に実験データの解析が進められなかったというようなことあった。今回の実験の場合  $\mu\text{m}$  程度の厚さのアルミを



電子が通過する。この程度のアルミを通過するとき電子は数 keV のエネルギーしか損失しない。そこで、通過前後において、電子の速度は一定と考えてよい。よって、この場合以前のシンチレーター内の通過のように電子は速度を変えないので、運動はアルミの場所に依存しない。言い換えると、電子の散乱などの現象は単純にアルミの厚さに比例すると考えられる。ここで、単純にアルミの厚さを厚くすれば、一回散乱される粒子も増える代わりにアルミの中で二回散乱されて出てくる、いわゆるダブルスキャタリングされる電子も増えてしまう。そこで、アルミ中での電子の平均自由行程を計算した。それによれば、アルミの厚さが  $70\mu\text{m}$  程度までであれば、電子はアルミの中で一回散乱されるだけであるということがわかった。今年実験で使用するアルミの薄膜は、一般的に家庭用に市販されているアルミ箔で、厚さは  $12\mu\text{m}$  である。カウント数が、厚さに単純に比例するとするならば、二枚重ねならば去年の 2.4 倍、三枚重ねならば去年の 3.6 倍のデータが取れると予想され、これだけあればカウント数としては充分であることが予想される。そこで、二枚重ねたものと、三枚重ねたものを用意し、二つの厚さの間での PMT のカウント数を比べてみた。すると、三枚にすることでは、二枚の時に比べて 5% 近くしかカウント数に増加が見られなかった。これは、我々の用いた単純な計算が成り立っておらず、三枚の時すでにダブルスキャタリングの効果が現れていたか、もしくは従来仮定されていないソース起源の低エネルギーの電子などの noise による影響だと考えられる。二枚と三枚で有意にカウント数が変わらないということ、そしてやはりダブルスキャタリングは確率の問題なので、厚くするとそれだけ多くなるということが心配されるから、なるべく薄いほうがいいということから、今回の測定では二枚分、厚さ  $24\mu\text{m}$  をアルミの厚さにすることにした。

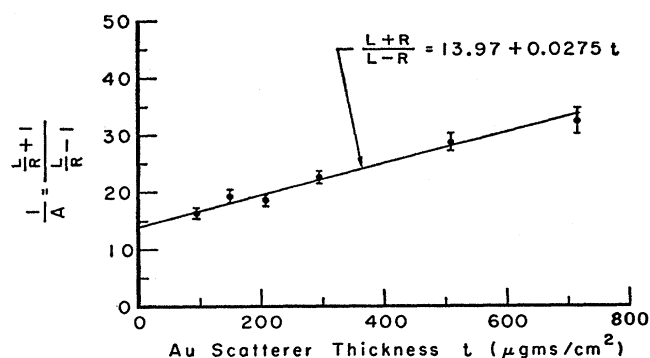


図 2.32: asymmetry and multiple scattering effect

金の厚さに対するアシンメトリーの効果について考えてみる。、図 (2.32) で示す範囲でしか実験的なデータを知ることが出来なかったのが、この範囲で示されている線形性が今回使用する金の薄膜の厚さ  $2.5\mu\text{m}$  まで続いていると仮定して、大まかなアシンメトリーの値を求めてみる。それによると、0.6% 程度ということがわかるが、実際はこの値よりも少ないことが予想される。図 (2.32) より、厚さを  $1/10$  の  $0.25\mu\text{m}$  にすると、アシンメトリーの値は約 4% という値が期待される。解析の中の誤差の評価のところ述べるが、noise がカウント数  $N$  の  $1/2$  程度であると仮定すると、相対誤差は  $1/\sqrt{N}$  程度である予想される。ここで、測定するアシンメトリーの値が非常に小さいことから、相対誤差の値はできるだけ少なくしなければならない。また、実際に得られるモット散乱された電子の数は厚さに比例して増える。一方で、単位時間当たりの noise の個数は厚さに関して変化しないと考えられる。先で述べたように、全カウント数の半分以上が noise であるのは好ましくない。以上のようなことを考え合わせると、金の厚さについて、去年と同じ  $2.5\mu\text{m}$  が最適であろうということになった。すなわ

ち今回の実験では、0.6% という標的を目指して測定を行っていくことになる。

### 2.2.9 回転フランジ

昨年度の実験において Target 槽と電極槽とのフランジの結合部について、不安点として以下の3つがあった。

- 両者のフランジの規格が同一ではなく不安定であった。
- 両方のフランジに O-ring のための溝がきつてあるという設計になっていて、真空値の保持という観点でやや不安。
- 規格の不一致を逆に利用し双方の O-ring の溝に O-ring をかませることで、中心軸を揃えようとしていたが、本来の用途ではないので中心軸の保持という観点で不安が残る。

今回はこの部分に一枚さらにフランジをかませることを考える。その目的は大きく分けて以下のとおりである。

- 今回の実験では求める Asymmetry が 1% 以下であると予想され、かなり高度な装置の制御が求められる。ビーム軸を制御・固定し、回転試行回数を増やすことで目算による Target 槽の角度設定による誤差を減らす。
- フランジ本来の設計を用い O-ring による真空値の保持を最大限に高める。特に回転試行回数が増えるならば、真空の保持はなおさら重要になる。
- 大きめのフランジをはさむことにより安定感を増やす。(Target 槽が接続部に対し大きいため)
- 設計上、回転フランジの穴は電極槽のフランジのそれよりも必然的に一回り小さくなり、それにより slit の役目も果たす。

以上の点を考慮し以下の図(2.33)のように回転フランジを設計した。

開けられた 8 個の穴のうち、4 個はネジ穴になっていて Target 槽と回転フランジとをまずこの 4 個の穴でネジを用いて固定する。回転フランジの電極槽側の凸部分を電極槽の結合部のフランジに嵌めることで、ビームの中心軸を固定する。残りの 4 個の穴を通して、Target 槽のフランジと電極槽のフランジとを寸切・ナットを用いて固定する。(ネジでは頭が槽に引っかかるため寸切を用いるほかない)

今回この回転フランジを用いて、Target 槽のフランジと電極槽のフランジとをナットと寸切とで固定しなくとも、長時間(約 15 時間、途中 10 数回の回転試行を含む)高い真空値を保つことに成功した。またこれは、測定し得る角度を 8 方位に限定することなく任意角度において測定でき得る事を意味している。

### 2.2.10 回路図

今回に実験で使用した回路について、データの流りに沿って説明する。回路図として、図 2.34 を参照してもらいたい。

まず、PMT No,1、及び 2 からのデータは Divider で 2 つに分けられる。その分けられたうちの一方を 1、2 各々の Discriminator に接続し threshold をかける。また、PMT No,3 からのデータは AMP を通し信号を増幅させると同時に、二つに分割する。やはり一方を Discriminator に接続し threshold

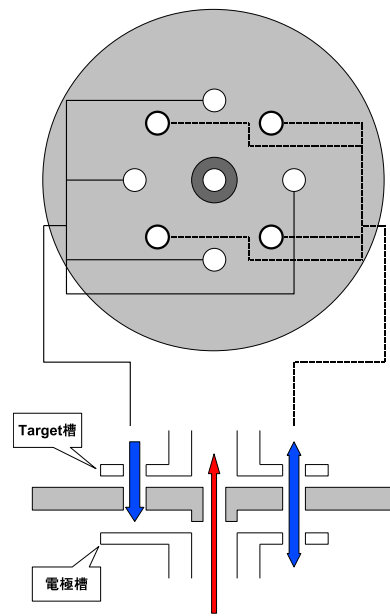


図 2.33: 回転フランジ

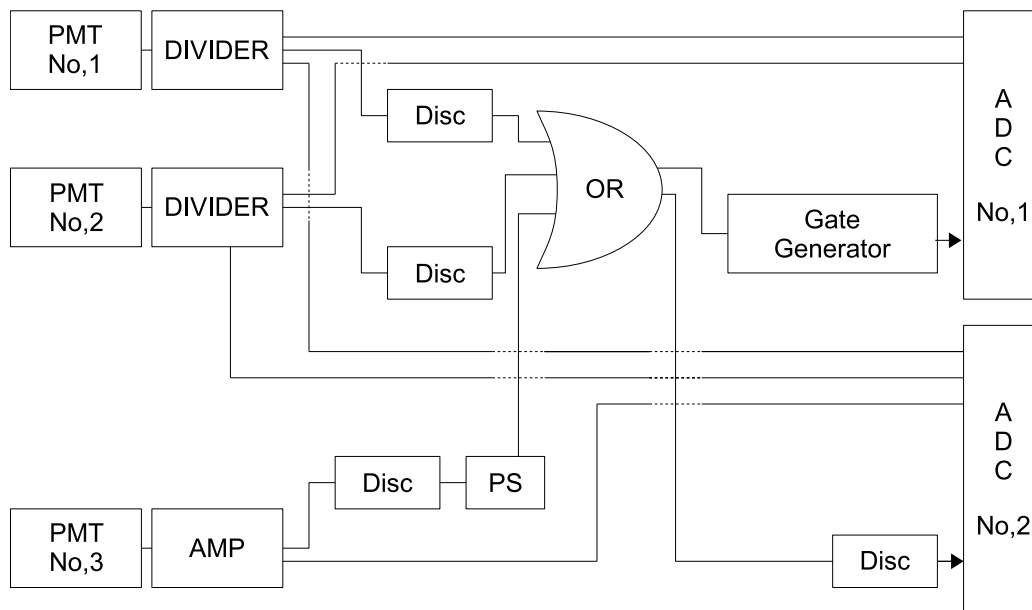


図 2.34: 回路の接続

をかける。ここで、3 からの信号のみ AMP を使用し、1,2 からの信号には Divider を使用したのは、1,2 で捉えられる信号、すなわち Mott 散乱の信号は数が少なく、AMP を用いてエネルギー域を拡大するとそのピークが見えにくくなってしまいうからである。

次に、Discriminator からの 3 つの信号を or 回路に通す。この際に PMT No,3 からの信号だけは他の二つに比べ格段にその数が増えてしまっているの、preset scalar を用いて、空の時は 1/50、金・

アルミの時は 1/5 に信号数を減らしておく。この or 回路からの信号をあらためて Discriminator へ接続し、ADC の Gate Signal として使用する (Narrow Gate)。一方、or 回路からの信号を Gate Generator へ接続し、数百 n 秒単位の長い論理信号を作成し、ADC の Gate Signal として使用する (Long Gate)。

また、Discriminator へ通さなかった方の信号は、それぞれ Gate Signal とタイミングを合わせるように Delay をかけて、各々の対応する ADC の各 channel へ接続して counts とエネルギーとを測定する。すなわち、今回の実験では上記の長短二つの Gate Signal を持つ、二つの ADC でのデータを観測することになる。またそれとは別個に、各々の Discriminator からの論理信号を 8channel Scalar でその counts を測定する。

以下に CAMAC 周辺を写した写真を載せる。一見して判り難いが、回路は上で述べたように諸器具をつないでいることが分かるだろう。

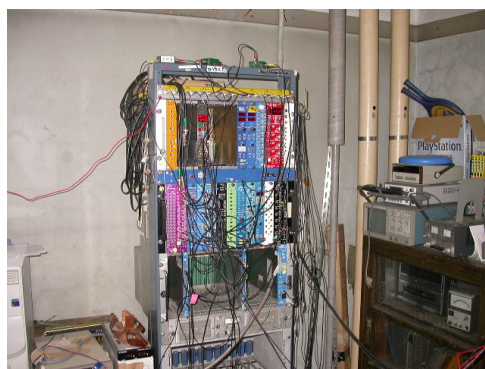


図 2.35: CAMAC 周辺

また、一番上に載っている 3 つの緑色の小箱は『High Pass Filter』である。これについて説明しよう。今回使用する長い Gate では、DIVIDER を通した時に発生してしまう周期の長い sin 関数型の Back Ground によって、sin 関数を射影したように、一つの PEAK が二つに分かれて観測されてしまう事態が実験の初期に生じた。短い Gate に関しては、Back Ground の周期が Gate の幅に比べて非常に大きいためこの寄与は観測されなかった。実験の精度などを考える際に、PEAK 位置の測定による Calibration や、GAUSSIAN FIT を行う面からも PEAK が二つに分かれて出てしまっは都合が悪い。これを回避するために、我々は High Pass Filter を以下の図 (2.36) に示すような設計で製作した。

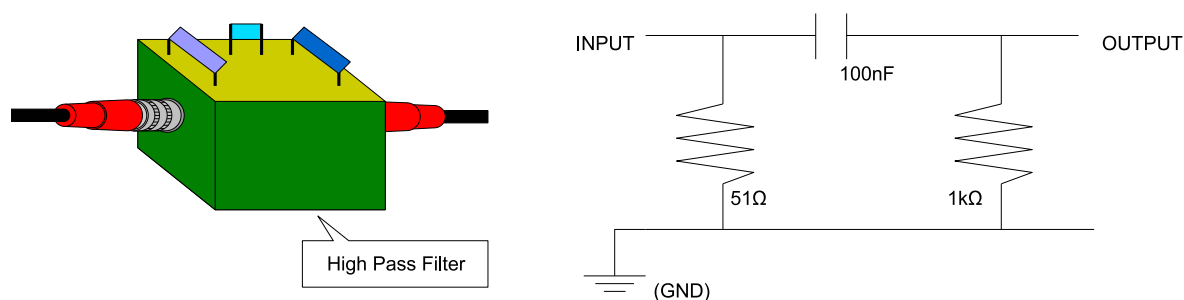


図 2.36: High Pass Filter 及び その回路図

High Pass Filter は周期の短いパルスのみを選択的に通す性質を持っているため、これを用いるこ

とで先に述べた周期の長い sin 関数的な Back Ground による寄与を消すことに成功した。以下で章で述べる実験結果からも、一つの PEAK のみが観測されていることがわかる。

## 第3章 Experimental Method

本実験について、その経緯を述べる。前述したが、本年度の実験の大きな利点として、電極槽と Target 槽 (が接続された回転フランジ) とを完全に固定しなくとも (回転フランジを寸切で固定することなく、という意味)、実験に求められている真空値を保つことができることがある。これによる恩恵としては、

- 回転試行の度に行うべき作業の大幅な短縮化
- 任意の角度についての実験の可能性

などが挙げられる。今回我々が行う実験では方位としては 8 方位について行うことを考えた。これは、まず最低でも Asymmetry を見るためには 4 方位が必要であること、そして理論から推し量るに、適切に sin カーブを見るためには 8 方位が必要であるという理由によっている。また、実際に実験結果を解析し、必要と判断されたらさらに実験を重ねることを視野に入れつつ本測定を行った。

我々が行った測定の手順について説明する。

1. 磁気レンズ・ADC 等の電源を入れる。
2. 測定する Target についてビーム中心を合わせ、Target 槽を適当な位置 (角度) に合わせる。
3. 高電圧 (25kV) をかける。
4. ADC プログラムを走らせ、データを採取する。
5. 停止後、高電圧を切る。
6. 再び 2. へ戻り、次の角度・Target について実験を行う。

注意しなければならない点として、以下の点が挙げられる。

- 高電圧 (25kV) の取り扱い
- 角度設定時の目算による正確とされる位置からのずれ
- 放電

高電圧の取り扱いについては、周りに虎口で囲いをつけることによってある程度の危険を回避することにした。真空槽からは GROUND へ電線を直結し電位を落とし、また、GROUND に直結した  $1M\Omega$  の抵抗を用意し、手で諸器具に触れる前に必ずこれで一旦器具から (在る、無しに関わらず) 電荷を取り除くことで安全性を高めた。

角度設定時の目算によるずれに関しては、回転試行回数を増やすことによってずれによる影響を小さくすることを考えた。

放電が今回の実験で一番の難点である。装置の設定がその都度変化してしまう恐れがあるので、本実験が始まってから終了するまで、一度も起きて欲しくはないところではある。今回の実験では幸運にも (幾度かごく瞬間的な放電は観測されたが、それでも)、大きな放電が生じることもなく最後まで測定を行うことができた。

## 第4章 Preliminary Experiment

### 4.1 PMT の負荷電圧 (HV) 決定

今回使用する PMT について、各々にかかる電圧値を決定する。そのために以下に述べるような実験を行った。

今回の実験では 3 本の PMT を用いる。用意した PMT 各々を今仮に A、B、C と呼ぶことにしよう。それぞれに対し、できるだけ薄いシンチレーターを接続し、アルミでラッピングして光漏れ検査を行い、シンチレーションカウンティングに用いられる形にする。用意した 3 組の PMT と Scintillator とのセットを、図 (4.1) で示されたようにセッティングし、PMT-B の HV を変えて ABC/AC の値を調べる。ここで、ABC とは 3 組のコインシデンスの数であり、AC は A と C、2 組のコインシデンスの数である。ELECTRON 源 (source) としては、 $^{137}\text{Cs}$  を使用した。ちなみに、このセッティングで測定されるのは、PMT B にかかる電圧である。PMT A 及び B の電圧は随時測定されたものに関してはその値を用い、そうでないものに関しては、先に使用した PMT でのデータから類察して 1500V に設定して実験を行った。1500V とやや高めに設定したのは、PMT A、及び C の検出能はより高いほうがコインシデンスをとる際に数が大きくなり、データがとりやすくなるためである。結果は、以下の図 (4.2) のような形になることが予想され、これから PMT にかかる理想的な電圧値を求めることができる。このようにして得られた曲線は HV 曲線と呼ばれている。最終的に HV は図で得られた値  $V_0$  から 100V 足した値、 $V_0 + 100[\text{V}]$  を目安に考える。

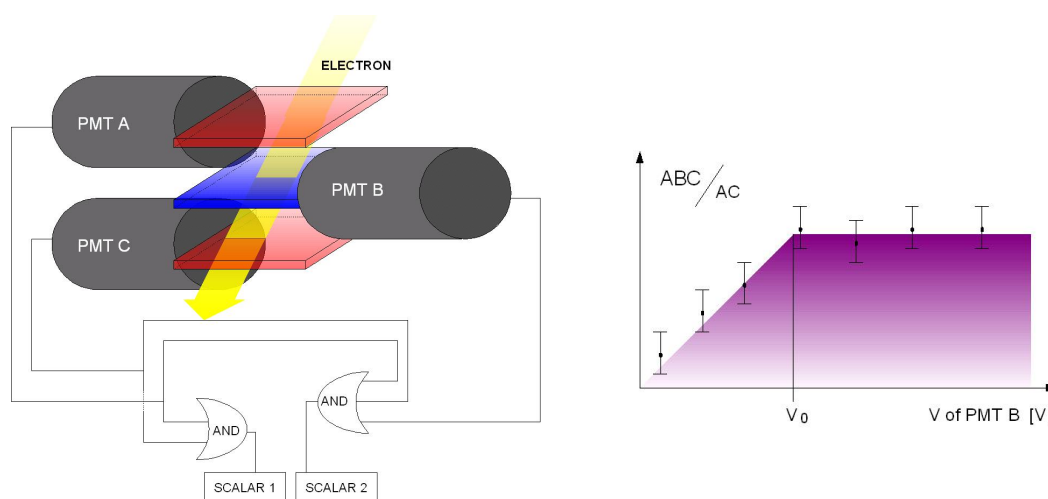


図 4.1: 実験概略図

図 4.2: HV 曲線

本実験に使用する 3 本の PMT についてそれぞれ先に述べた実験を行い、かけるべき電圧のおおよ

その値を得ることができた。しかし、今回の実験ではまだこの段階では実際に本実験で使用する際の真に適切といえる HV を決めることはできない。我々のセットアップでは、装置自体の非対称性を消すという確固たる目的がある一方で、またカウントを稼ぐために 2 つの PMT からのデータを足し合わせることを考えている。これは、実験時間が各方位に関して 6 時間という長時間の設定にあっても、課せられる error bar が非常に大きくなってしまっていることからカウントを稼ぐことは妥当であるといえる (後述:結論の章参照)。そのため、モット散乱を測定するための 2 つの PMT からのシグナルの単位時間あたりの個数をできるだけ同じにしたい。このことを考慮に入れると、HV の最終的な決定には、各々の PMT に対してその Threshold を決めることが必要になってくることがわかる。

Threshold の決定については、次の章で詳しく述べよう。

## 4.2 Threshold

各々の PMT にかける Thershold について考える。

今回の実験では、薄いシンチレーター (=0.2mm) と、厚いシンチレーター (=1.0mm) とを貼り合わせて用いる。前述したとおり、Threshold に関しては薄いシンチレーターからの信号に対してのみ考慮すればよい。

Threshold をかける目的は、低エネルギー領域で見られるノイズを、モット散乱によって見られるピークを完全に損なわずにできるだけカットすることである。(図 (4.3) 参照) 今回はオシロスコープで読み取られたモット散乱のシグナルから、Threshold をまず推測し、さらに本実験のセットアップで数回 Threshold を変えて測定を繰り返すことで、理想的な Threshold を得ることができた。

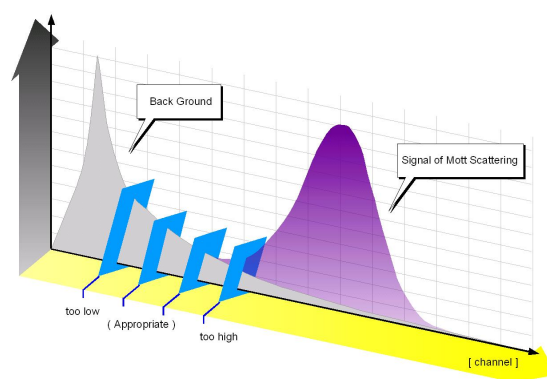


図 4.3: Threshold 模式図

本実験では Threshold を以下のように設定した。

PMT No,	Threshold [mV]
1	35
2	35
3	700

表 4.1: PMT の Threshold



この Threshold を用いて、本実験で用いる実際のセットアップを組んで実験を行い、各々の PMT が観測するモット散乱した粒子の個数を SCALAR で測定した。この 2 つのカウント数が大体同じになるように、PMT の HV を微調整し、それに対応して Threshold に関しても調整を繰り返し、各々の HV、及び Threshold についてその値を決定する。

実験結果より、我々は今回の実験では以下のように HV、及び Threshold を設定した。

PMT No,	Threshold [mV]	HV [V]
1	35	1350
2	35	1260
3	700	1700

表 4.2: PMT の Threshold および、HV

我々は用意された 3 本の PMT のうち、特性の似ていると思われた PMT-No,1 と PMT-No,2 とをモット散乱測定に、PMT-No,3 をビームフラックス測定用に用いることにした。

最終的に PMT-No.3 のみには AMP をかけることにしたのでさらに Threshold の較正を行った。上記の表 (4.2) は、その最終的な結果を表している。PMT-No,3 のみが大きな Threshold の値を持っていることについては、PMT-No,3 に対してのみ、AMP を使用したことに起因している。

### 4.3 エネルギー較正

PMT-No.3 について channel とエネルギーとの較正を行うことを考える。ここでは  $^{137}\text{Cs}$  を用いて観測される、内部転換電子による Conversion Line を用いてエネルギー較正をする。

使用する source の表と裏と、両方に対して以下で述べるように測定を行った。source のケースについて、表からは  $\gamma$  線と  $\beta$  線との両方が放出され検出される。一方、裏からは、裏地に貼り付けられたプラスチック板によって  $\beta$  線は吸収され、 $\gamma$  線のみが検出される。この  $\gamma$  線は  $^{137}\text{Cs}$  の内部転換によって放出されたものなので、エネルギーはよく規定されていて、約 625[keV] であることが既に分かっている。よって、表で得たデータから裏で得たデータを適切に Normalize して引いてやることによって、この  $\beta$  線の成す PEAK を見ることができる。もちろん Pedestal は GATE をずらしてやることで測定できる。以下にその図をあげる。

よって、channel とエネルギーとの対応が結論付けられた。

ここで PMT-No.1 及び No.2 についてこの較正を行わなかったのは、PMT-No.1 及び No.2 に付随させたシンチレータは  $0.2\text{mm}+1.0\text{mm}$  と非常に薄く、ここで計測すべき 625keV というエネルギーを持つ粒子についてはそのエネルギーを完全にシンチレータの内部で落とさず、その PEAK が測定できないからである。

この較正を用いて、以下に続く章でシミュレーションによって求められた electron のエネルギーと PEAK の channel との対応についても含め、Mott-Scattering について考えてみよう。

### 4.4 Mott-Scattering の確認

実験で得られたピークが、果たして本当にモット散乱によるものであるのかどうかについて述べる必要がある。本実験で、実際にデータを長時間録っていくうえで、モット散乱の PEAK を観測してい

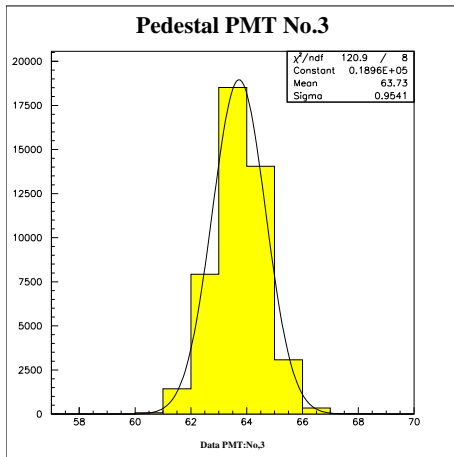


図 4.4: PMT No.3 Pedestal

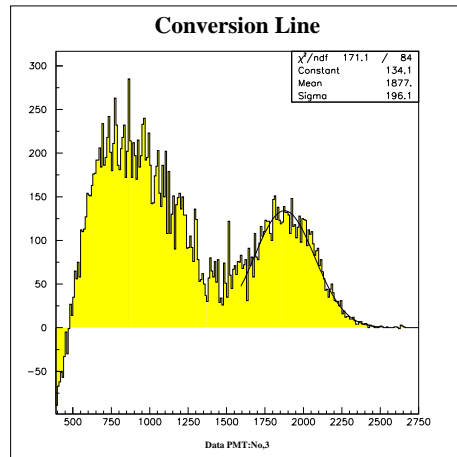


図 4.5: Conversion Line

ということとは完全に前提条件である。データを無駄にしないためにも、もちろん実験を成功に導くためにも、確実に我々がモット散乱を検出しているということを示す論拠が欲しいところである。

我々の実験では electrode にかける高電圧を変化させることによって、測定する電子のエネルギーを任意に選択することができる。これを利用して、ピークの示す channel[channel] とかけた高電圧 [kV] との間の相関を見ることでモット散乱を見ることができているかどうかを判断することができる。

かけた高電圧と選択された電子のエネルギーとの相関は、シミュレーションによって以下のようになることが分かる。

High Voltage [kV]	Energy of Electron [keV]	error
0	0	±0
15.0	89.6	±2.27
17.5	105	±2.59
20.0	129	±3.20
22.5	141	±3.60
25.0	165	±4.26

表 4.3: electrode 電圧と electron energy との相関

この傾向がピークに現れているか測定する。本実験と同様にデータを整理して、得られた PEAK に対して Gaussian で FIT を行い、PEAK の位置と error とを規定する。結果を以下の表に載せる。

このデータは実際には線形に並ぶのではないが、ごく短い範囲内に限定することで線形であると考えて近似することができる。実際に線形で FIT して表したものが以下の図 (4.6)、及び図 (4.7) である。

以上のグラフで示された結果により、明らかに電子の持つエネルギーと channel とが近似的に線形になっていることが読み取れる。すなわち、我々が観測しているピークは、確かにモット散乱によるものであるという確証を得ることができた。

Energy [keV]	PMT No.1	error	PMT No.2	error	PMT No.3	error
0	45.453	$\pm 3.62 \times 10^{-3}$	55.038	$\pm 4.09 \times 10^{-3}$	64.162	$\pm 5.47 \times 10^{-2}$
89.6	79.993	$\pm 5.21 \times 10^{-1}$	99.484	$\pm 9.64 \times 10^{-1}$	-no data-	
105	86.294	$\pm 7.12 \times 10^{-1}$	105.87	$\pm 7.76 \times 10^{-1}$	365.60	$\pm 6.08$
129	98.365	$\pm 7.23 \times 10^{-1}$	110.72	$\pm 8.61 \times 10^{-1}$	480.76	$\pm 3.54$
141	106.99	$\pm 5.75 \times 10^{-1}$	125.85	$\pm 7.69 \times 10^{-1}$	580.35	$\pm 2.77$
165	113.57	$\pm 7.06 \times 10^{-1}$	131.55	$\pm 7.12 \times 10^{-1}$	672.75	$\pm 2.27$

表 4.4: Electron Energy [keV] と、各 PMT での PEAK の位置 [channel] との相関

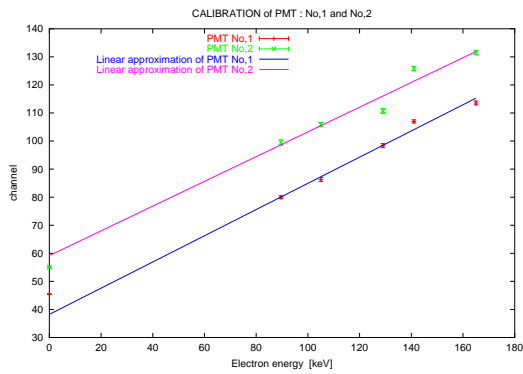


図 4.6: Cariblation PMT No.1,2

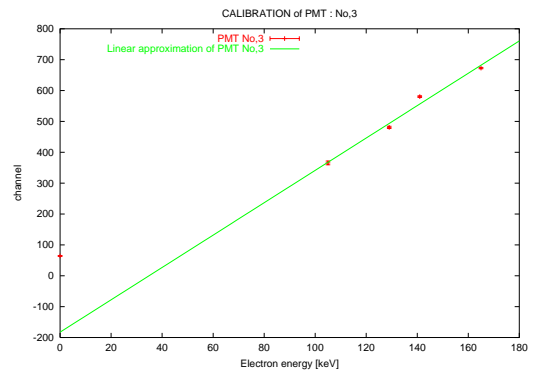


図 4.7: Cariblation PMT No,3

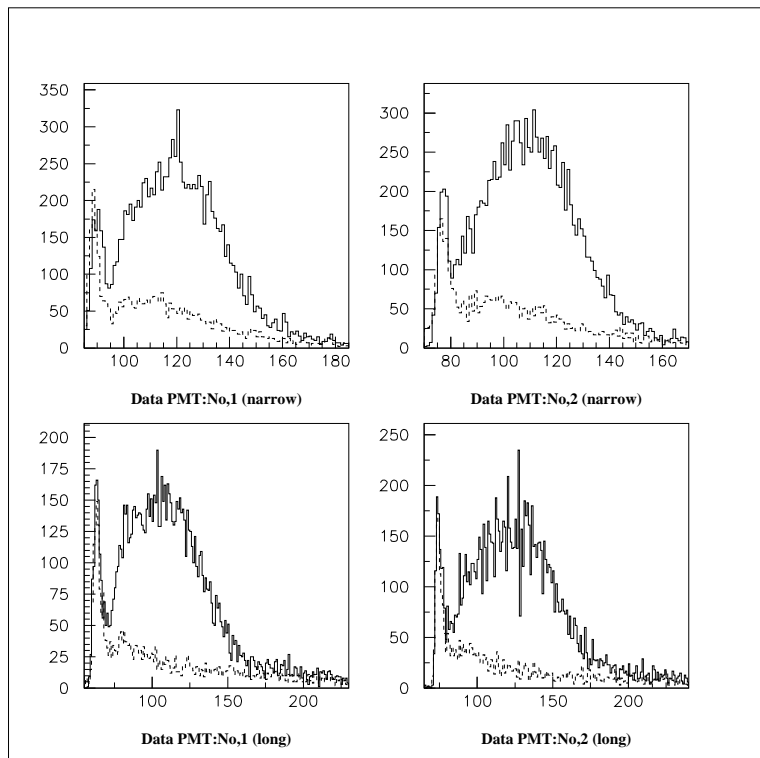
## 第5章 Results of Experiments

今回の実験の実際に測定して得た結果をここに載せる。我々は今回 8 方位について、アルミ・金・空の 3 つの Target を用い、表・裏について実験を行った。これは、

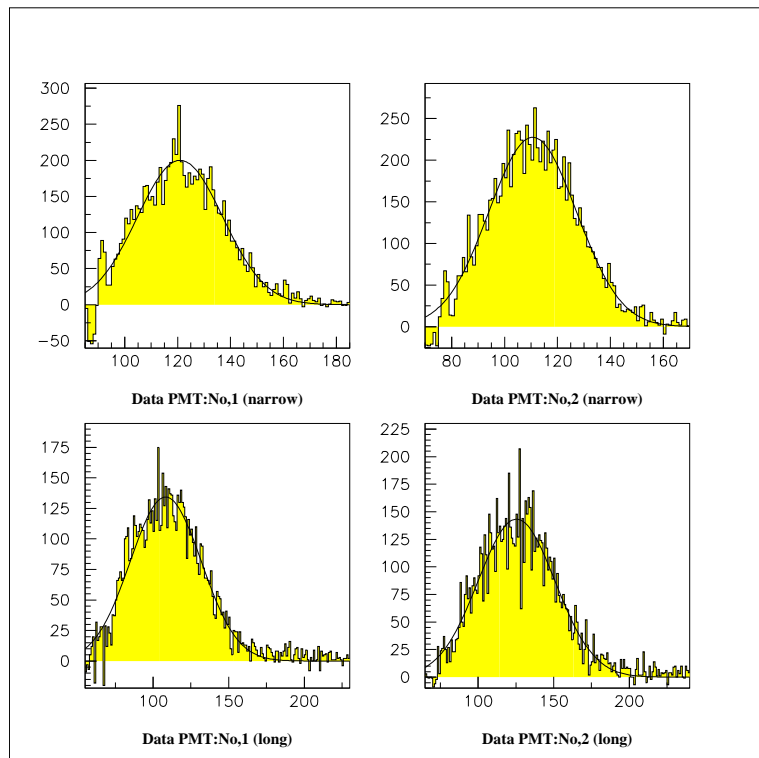
$$(8 \text{ 方位}) \times (\text{Target} \dots \times 3) \times (\text{表} \cdot \text{裏}) \times (3 \text{ 時間}) = 144 \text{ 時間}$$

測定を行った計算になる。

実際の測定結果を以下にグラフの形で挙げよう。ここで、以下の図には 2 種類があることに注意する。すなわち、得られたデータそのままの形のもの、実際に金・アルミでの値から空のデータを引いた形のものとの 2 つである。

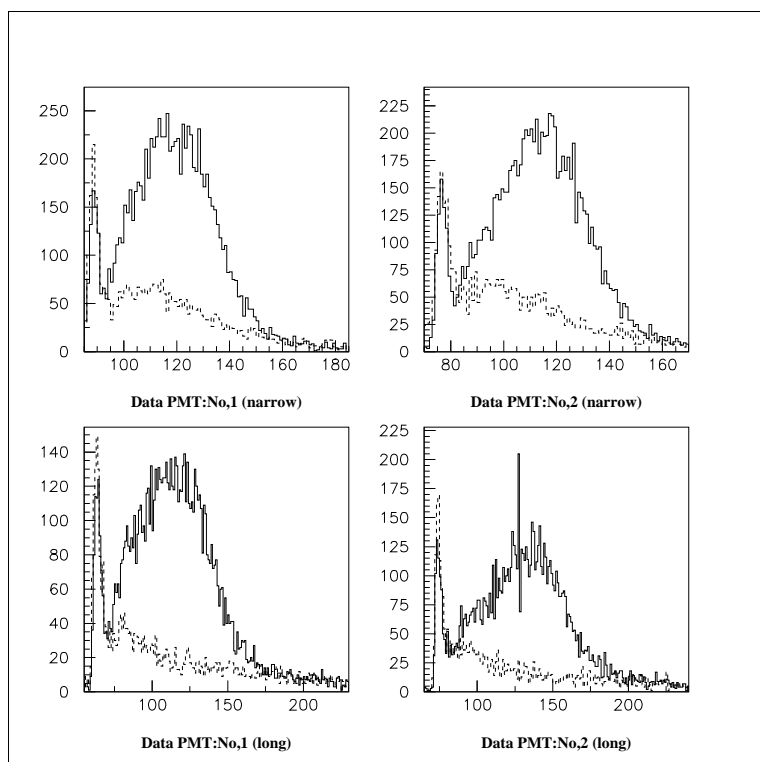


Al Target & empty Target  $\theta = 0^\circ$

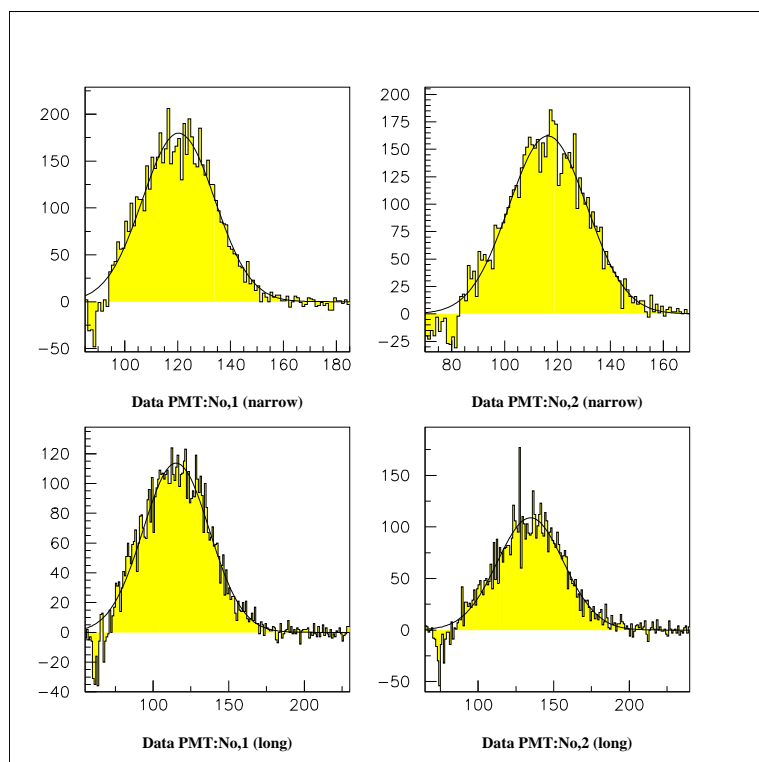


Al Target - empty Target  $\theta = 0^\circ$

図 1: Target=Al 測定データ ( $\theta = 0^\circ$ )

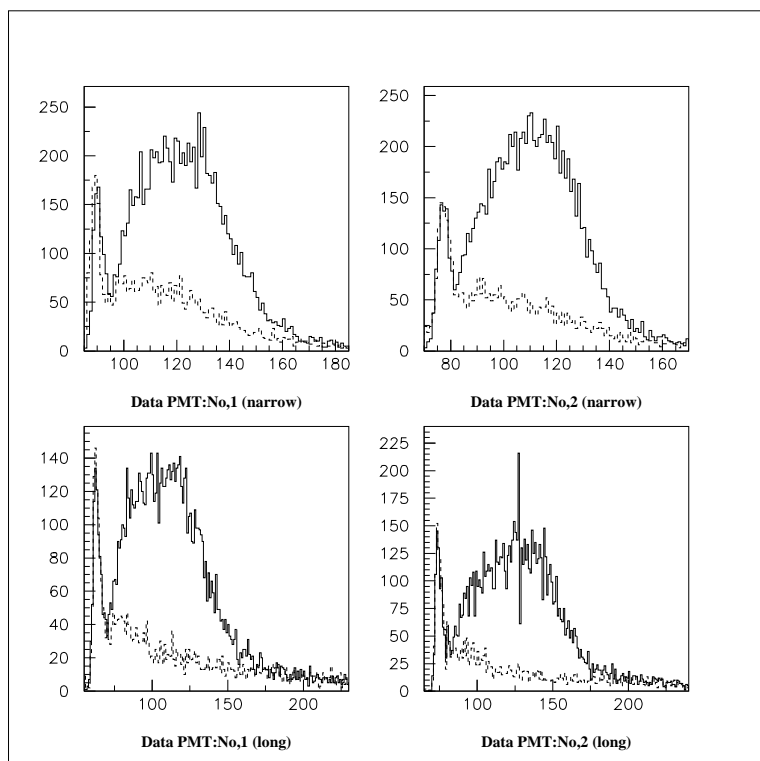


Au Target & empty Target  $\theta = 0^\circ$

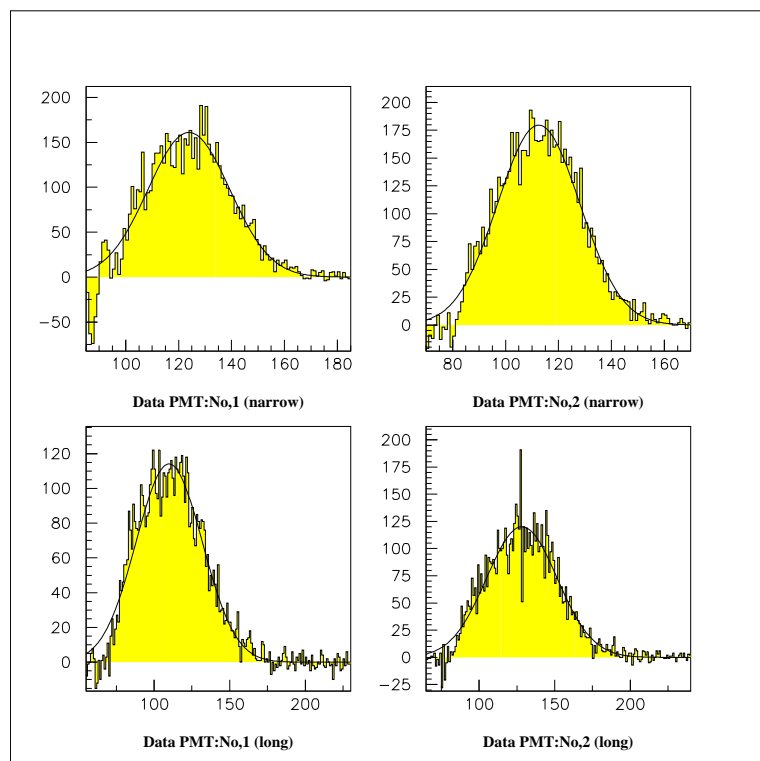


Au Target - empty Target  $\theta = 0^\circ$

図 2: Target=Au 測定データ ( $\theta = 0^\circ$ )

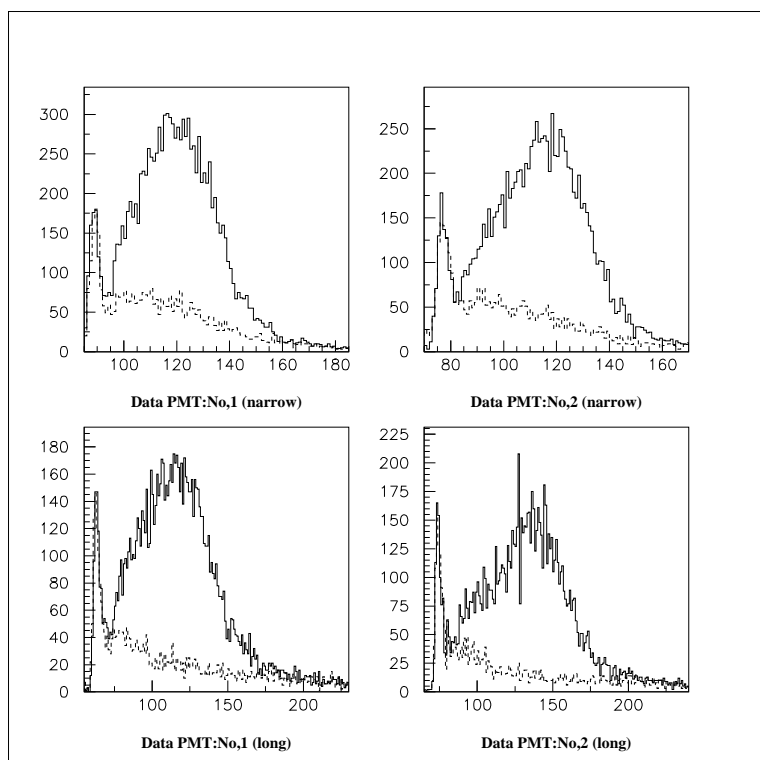


Al Target & empty Target  $\theta = 45^\circ$

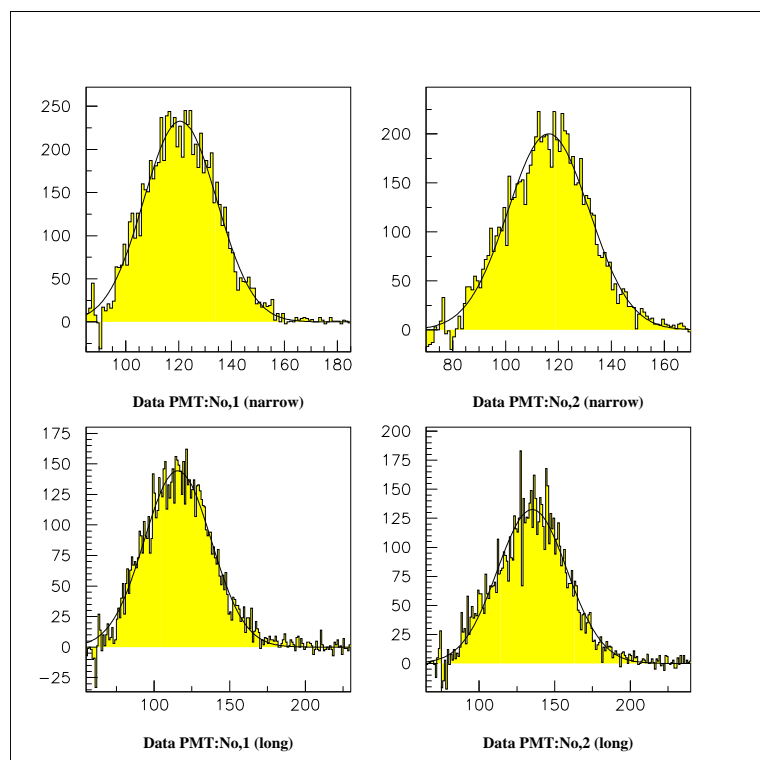


Al Target - empty Target  $\theta = 45^\circ$

図 3: Target=Al 測定データ ( $\theta = 45^\circ$ )

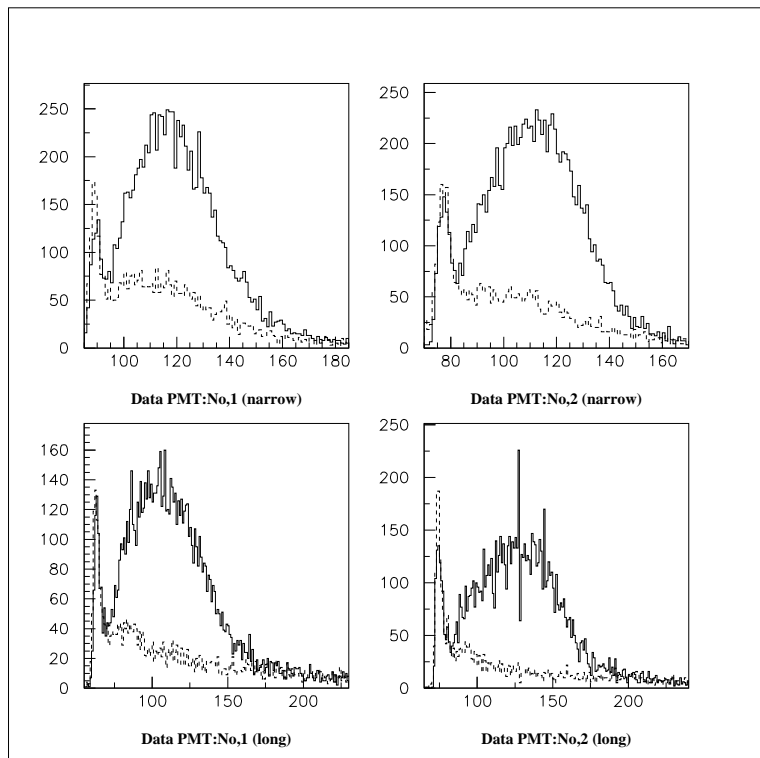


Au Target & empty Target  $\theta = 45^\circ$

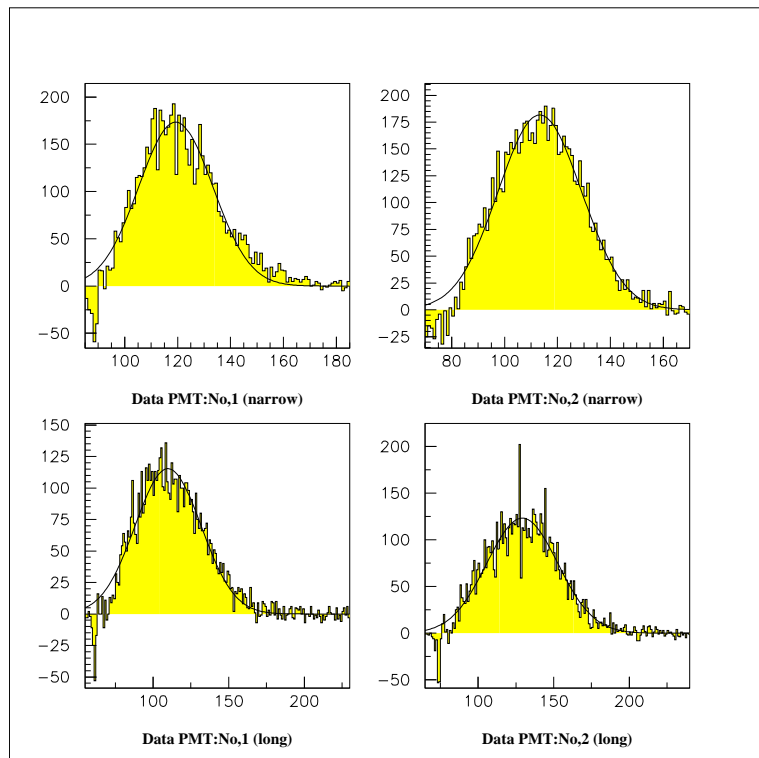


Au Target - empty Target  $\theta = 45^\circ$

図 4: Target=Au 測定データ ( $\theta = 45^\circ$ )

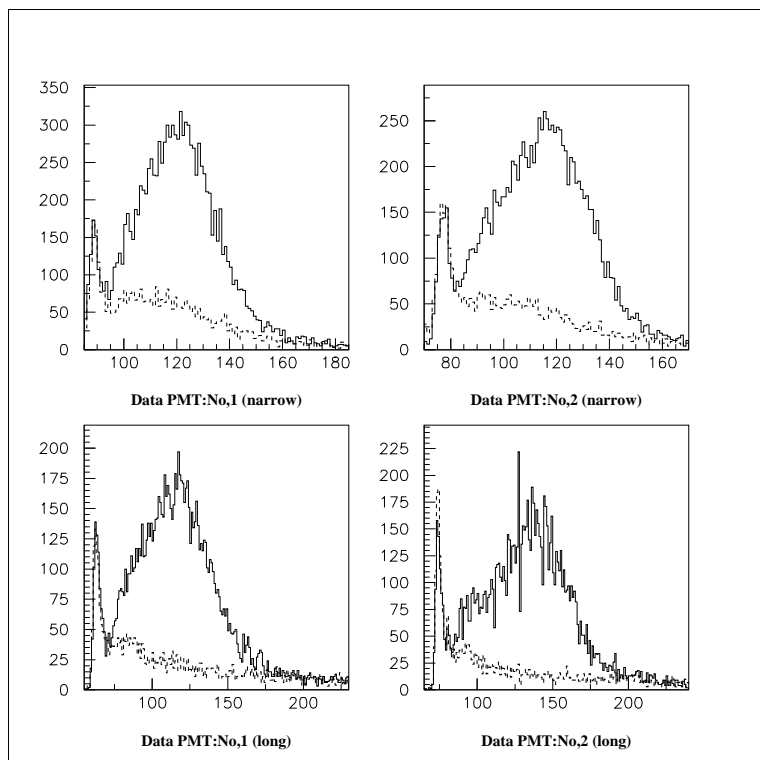


Al Target & empty Target  $\theta = 90^\circ$

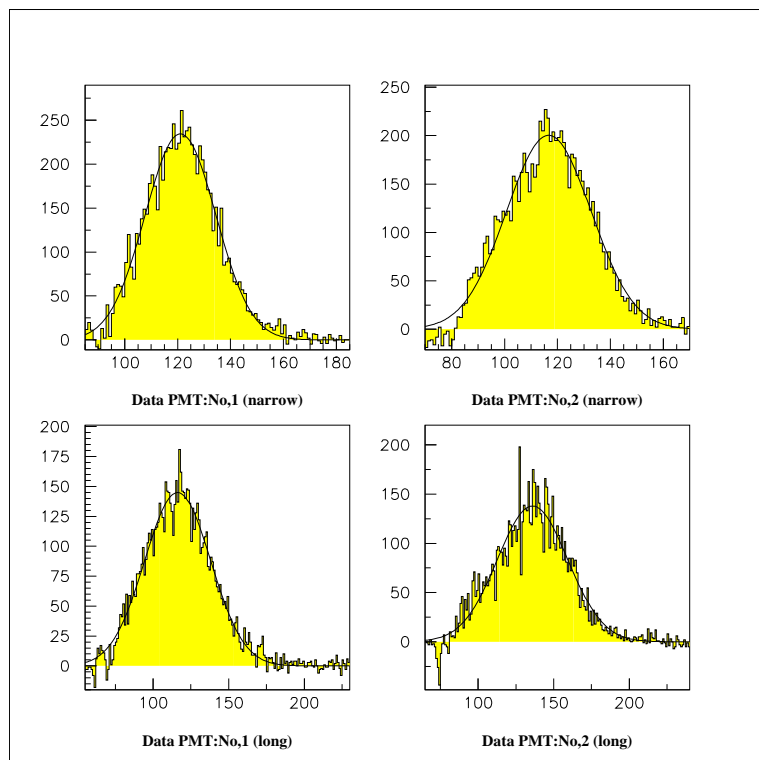


Al Target - empty Target  $\theta = 90^\circ$

図 5: Target=Al 測定データ ( $\theta = 90^\circ$ )



Au Target & empty Target  $\theta = 90^\circ$



Au Target - empty Target  $\theta = 90^\circ$

図 6: Target=Au 測定データ ( $\theta = 90^\circ$ )

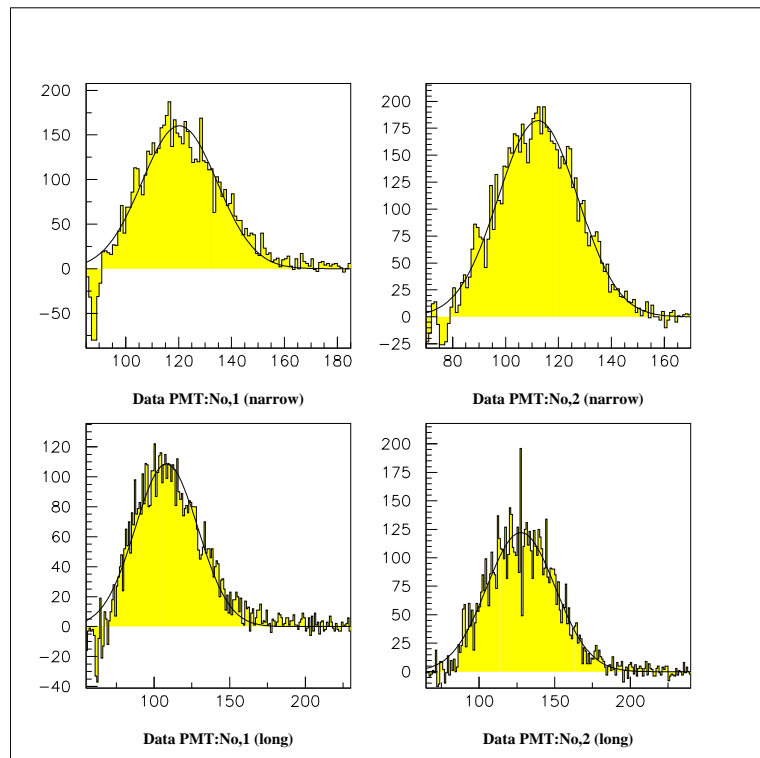
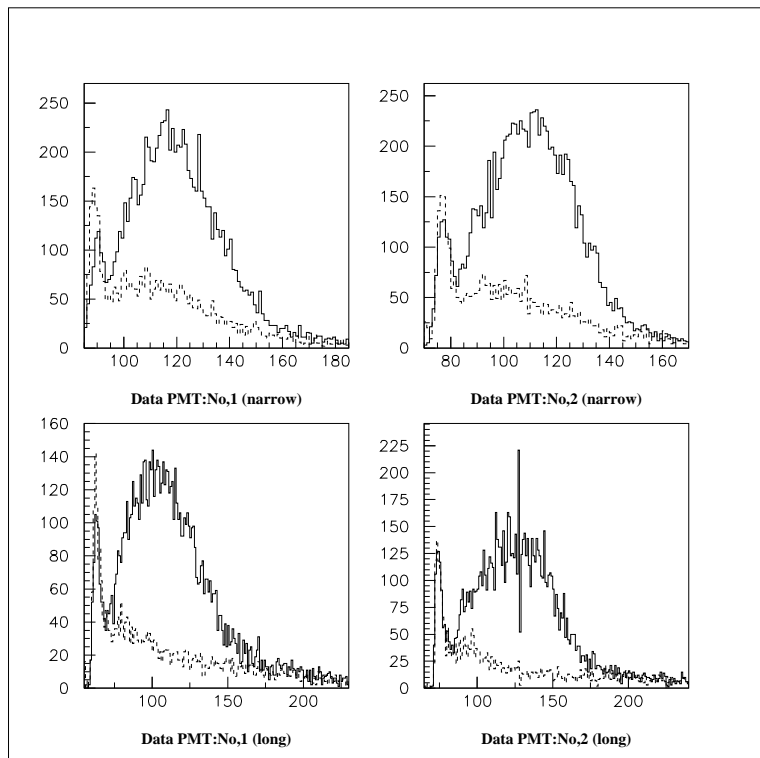


図 7: Target=Al 測定データ ( $\theta = 135^\circ$ )

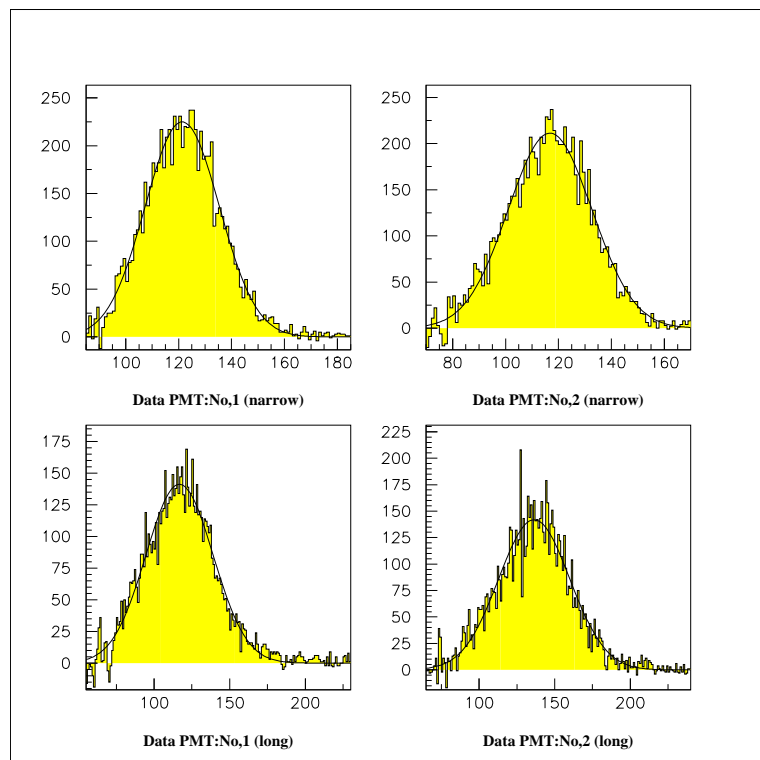
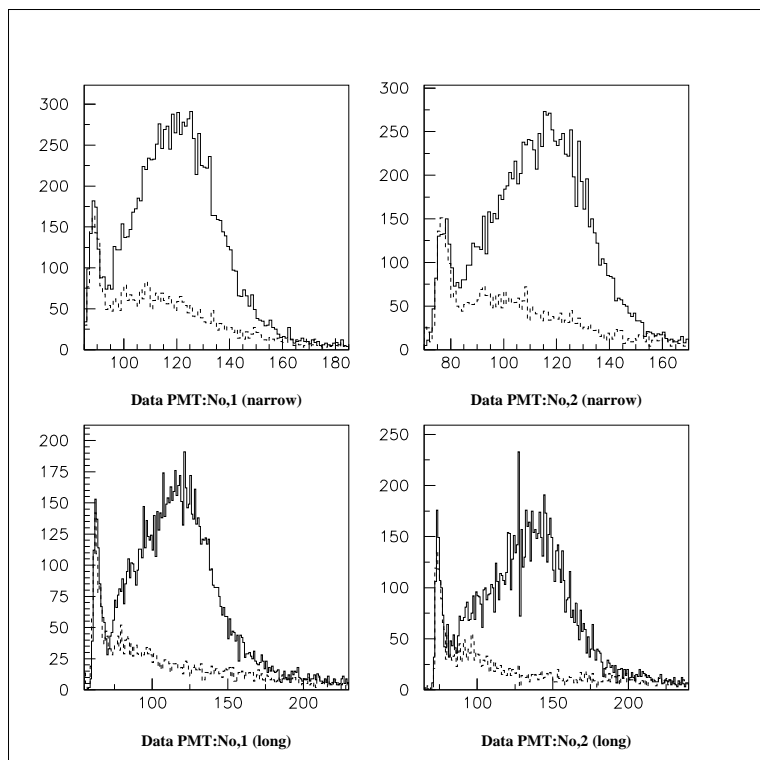
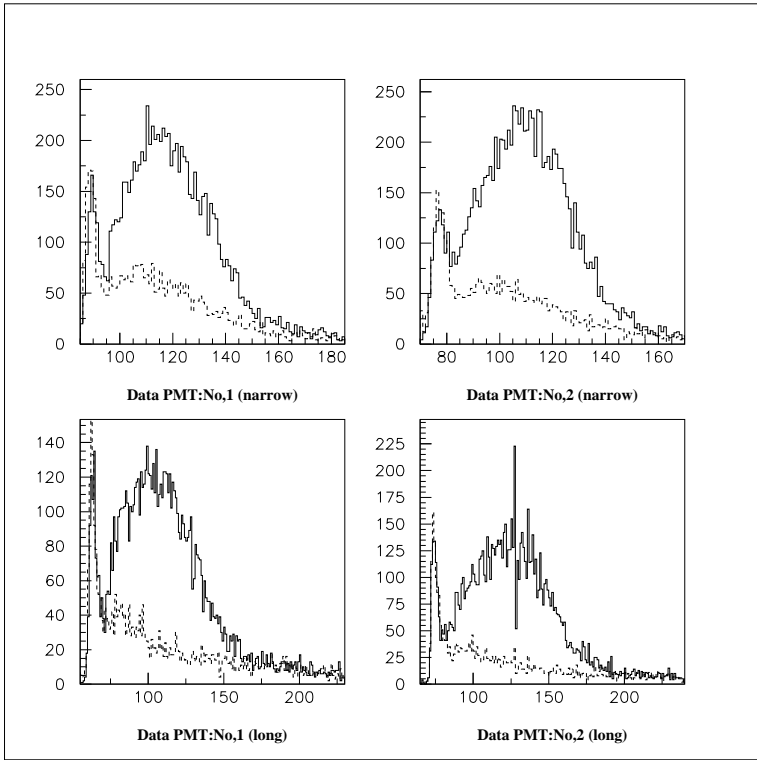
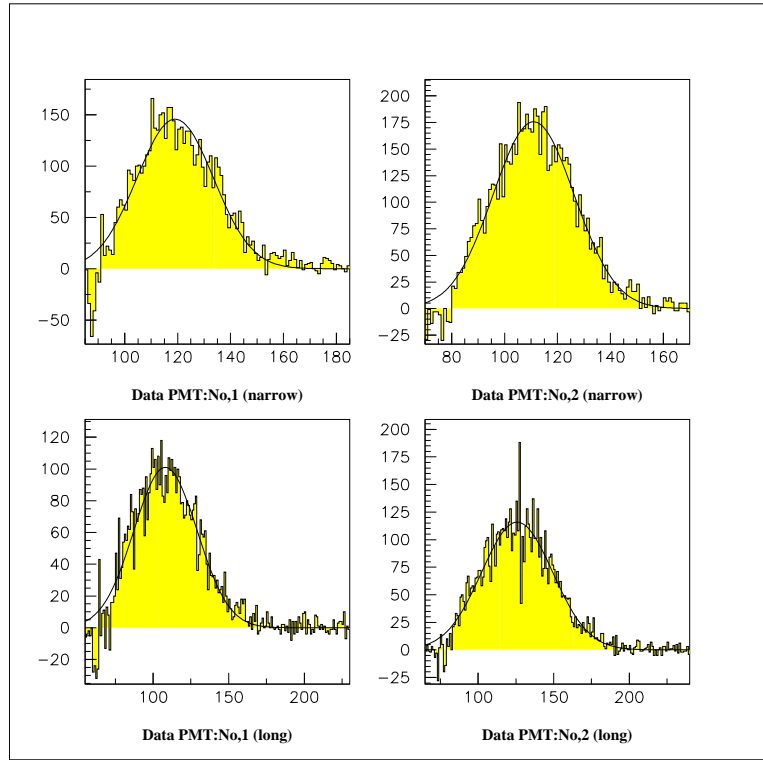


図 8: Target=Au 測定データ ( $\theta = 135^\circ$ )



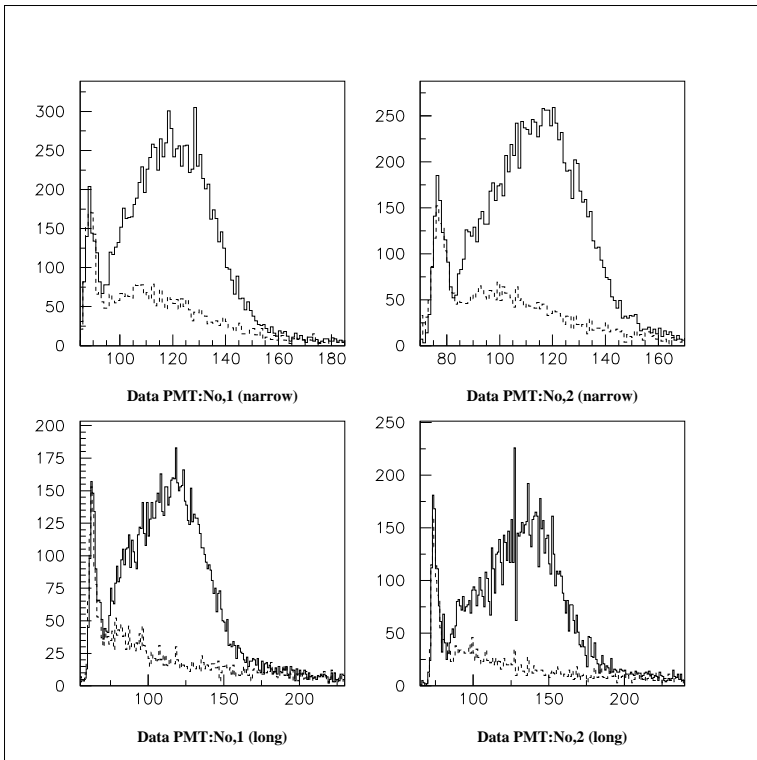


Al Target & empty Target  $\theta = 180^\circ$

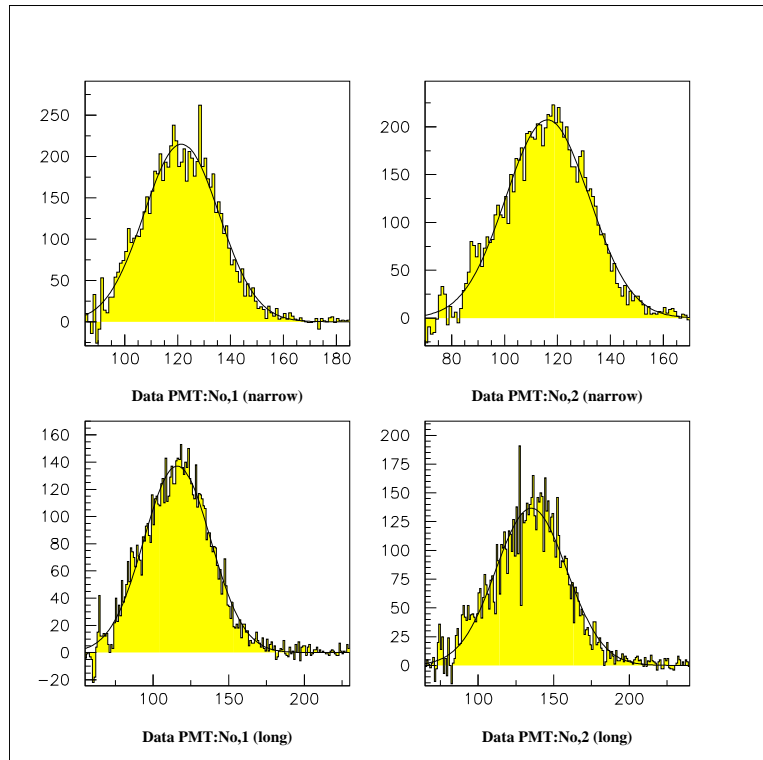


Al Target - empty Target  $\theta = 180^\circ$

図 9: Target=Al 測定データ ( $\theta = 180^\circ$ )

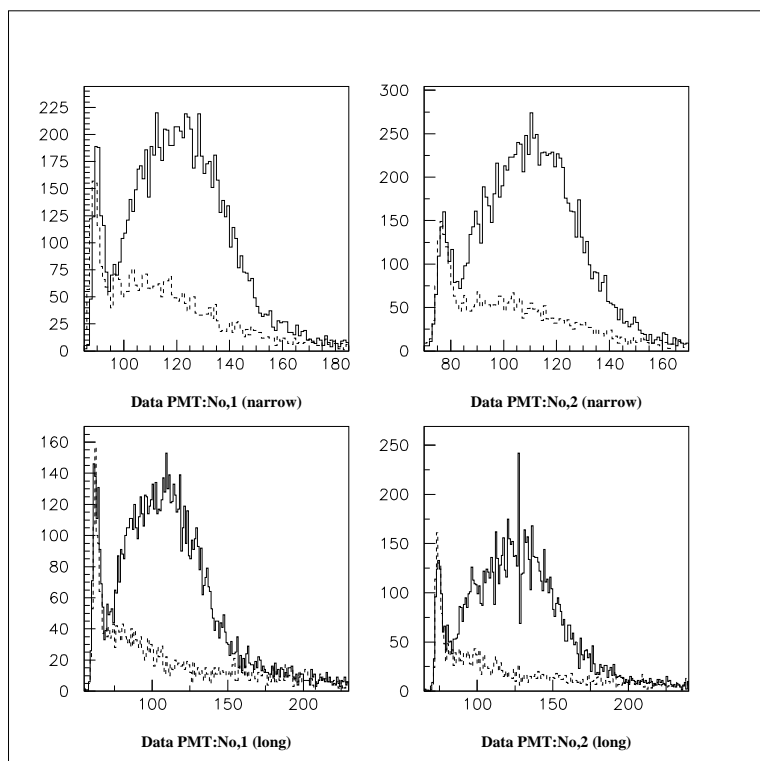


Au Target & empty Target  $\theta = 180^\circ$

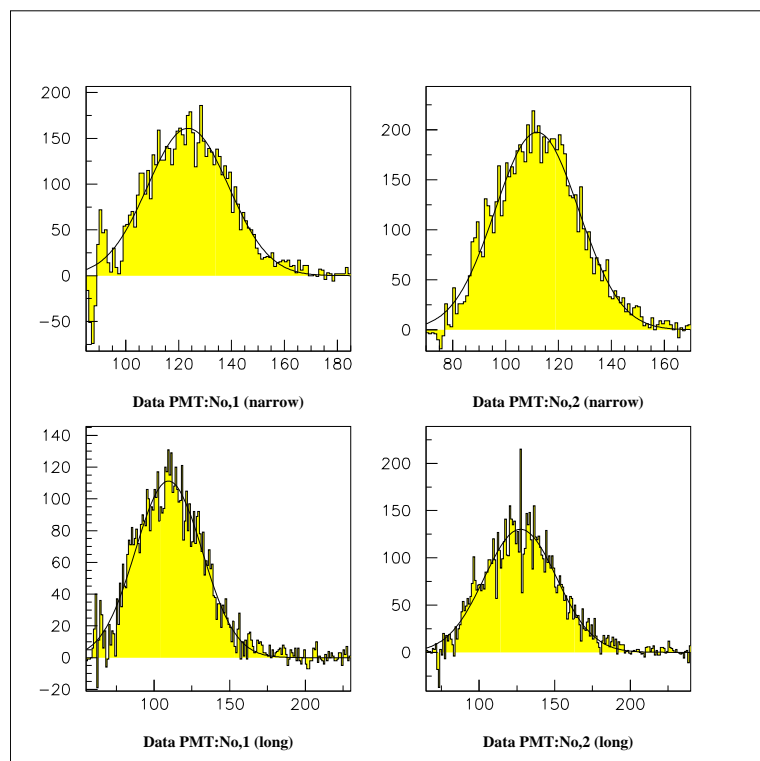


Au Target - empty Target  $\theta = 180^\circ$

図 10: Target=Au 測定データ ( $\theta = 180^\circ$ )

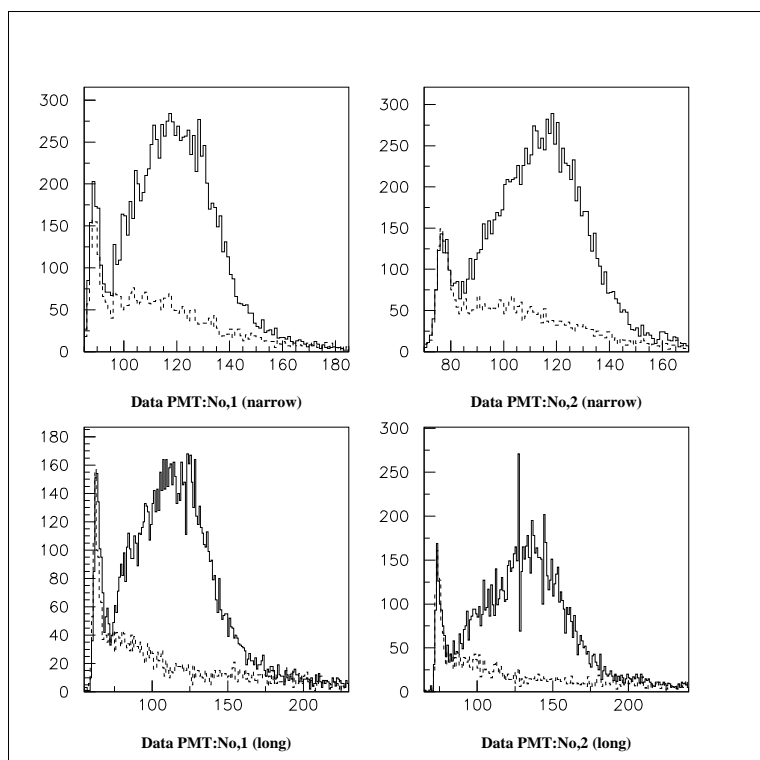


Al Target & empty Target  $\theta = 225^\circ$

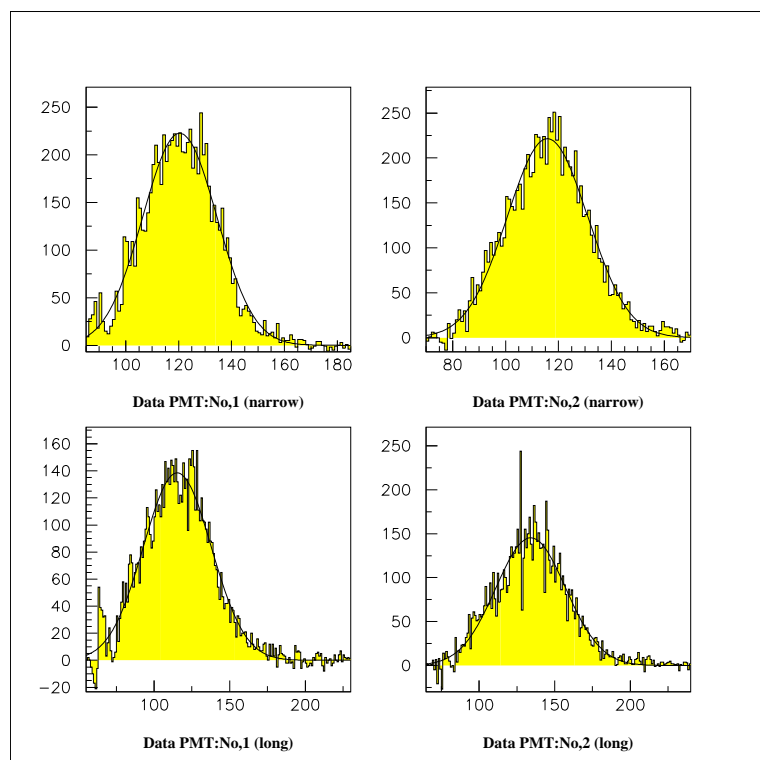


Al Target - empty Target  $\theta = 225^\circ$

図 11: Target=Al 測定データ ( $\theta = 225^\circ$ )

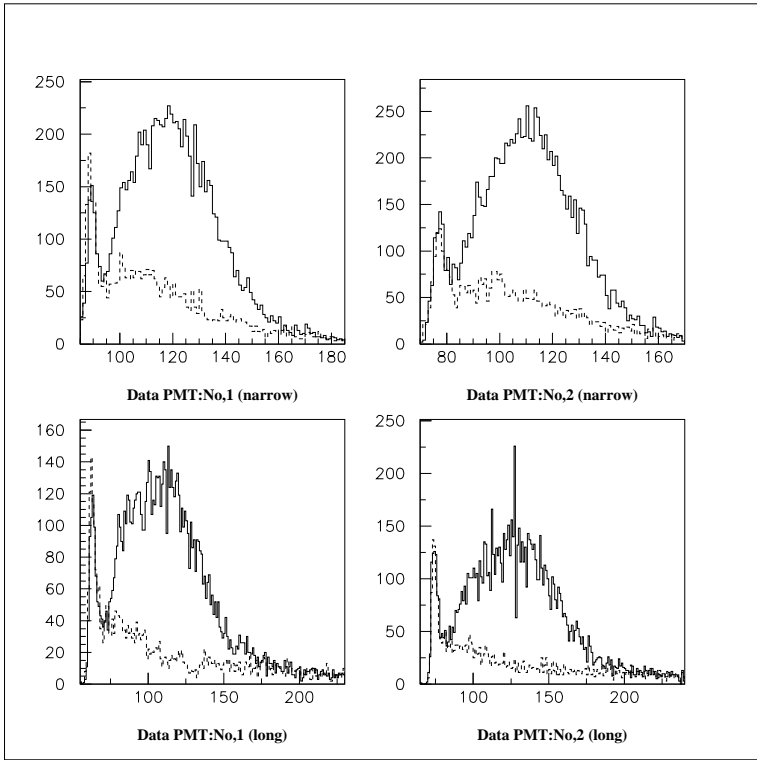


Au Target & empty Target  $\theta = 225^\circ$

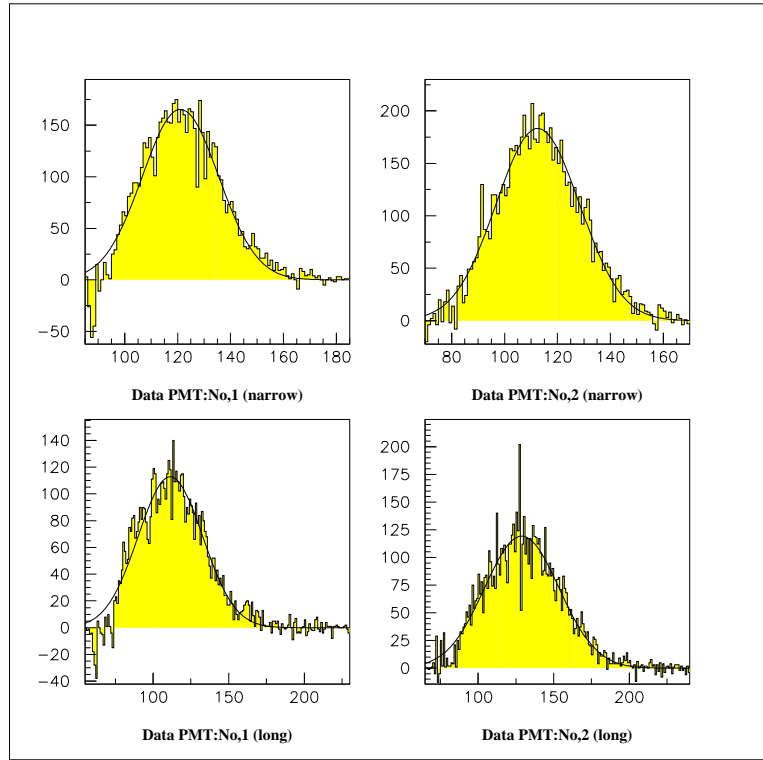


Au Target - empty Target  $\theta = 225^\circ$

図 12: Target=Au 測定データ ( $\theta = 225^\circ$ )

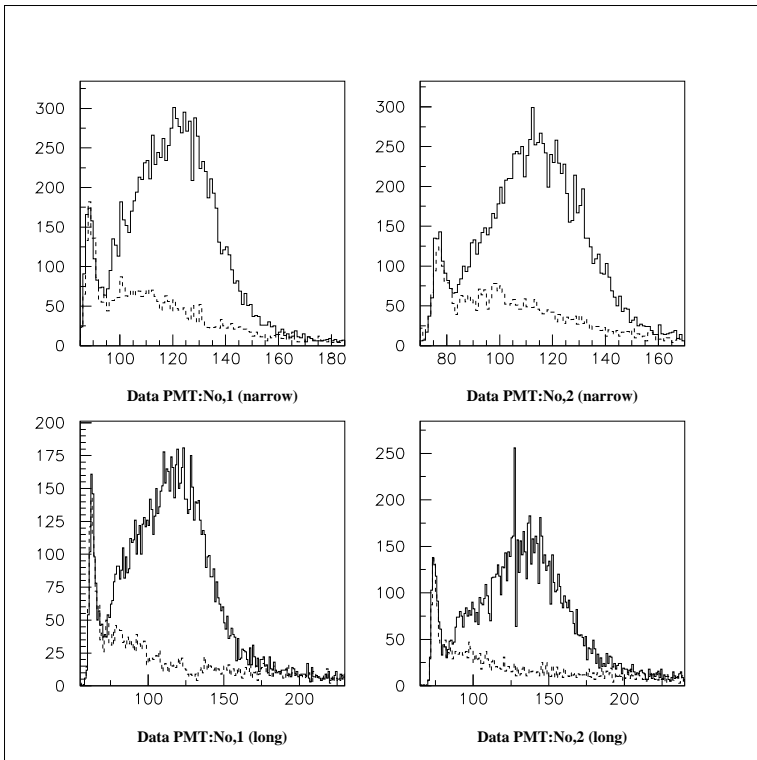


Al Target & empty Target  $\theta = 270^\circ$

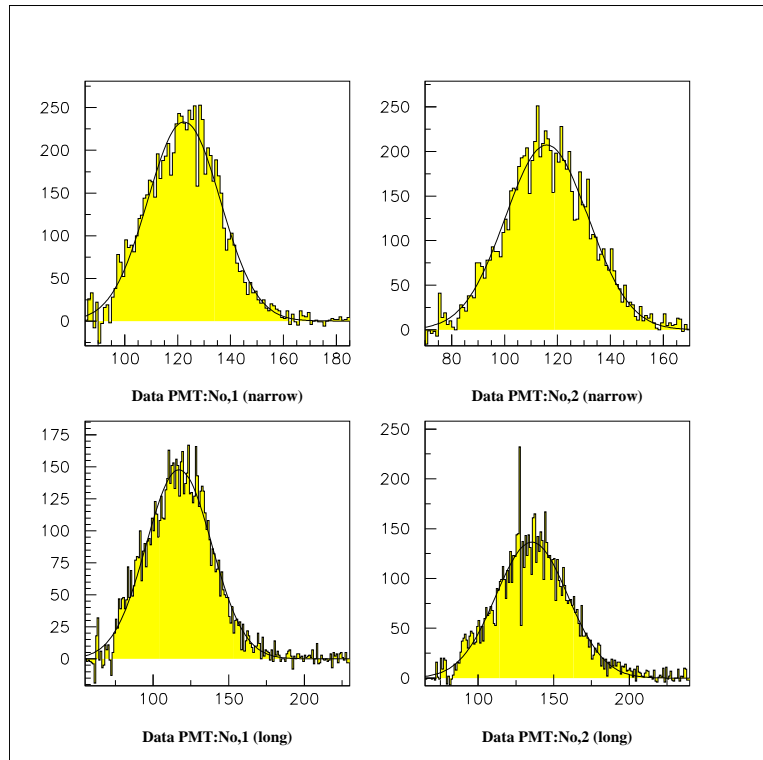


Al Target - empty Target  $\theta = 270^\circ$

図 13: Target=Al 測定データ ( $\theta = 270^\circ$ )

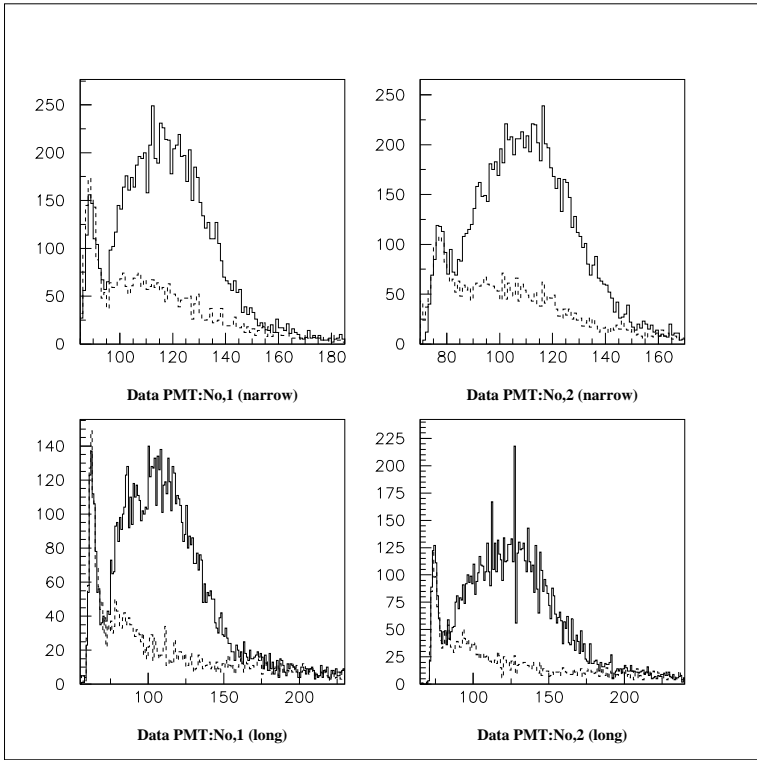


Au Target & empty Target  $\theta = 270^\circ$

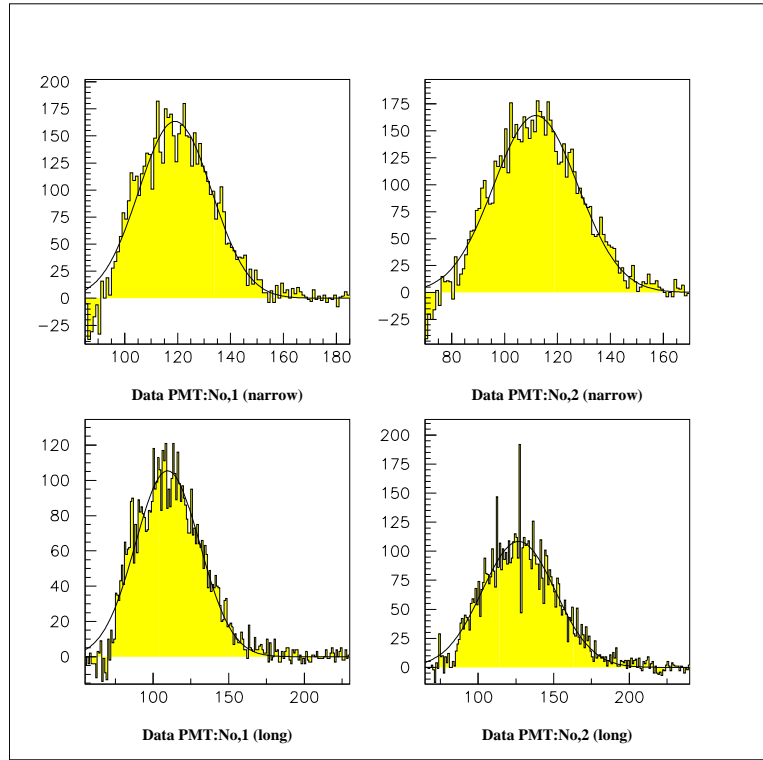


Au Target - empty Target  $\theta = 270^\circ$

図 14: Target=Au 測定データ ( $\theta = 270^\circ$ )

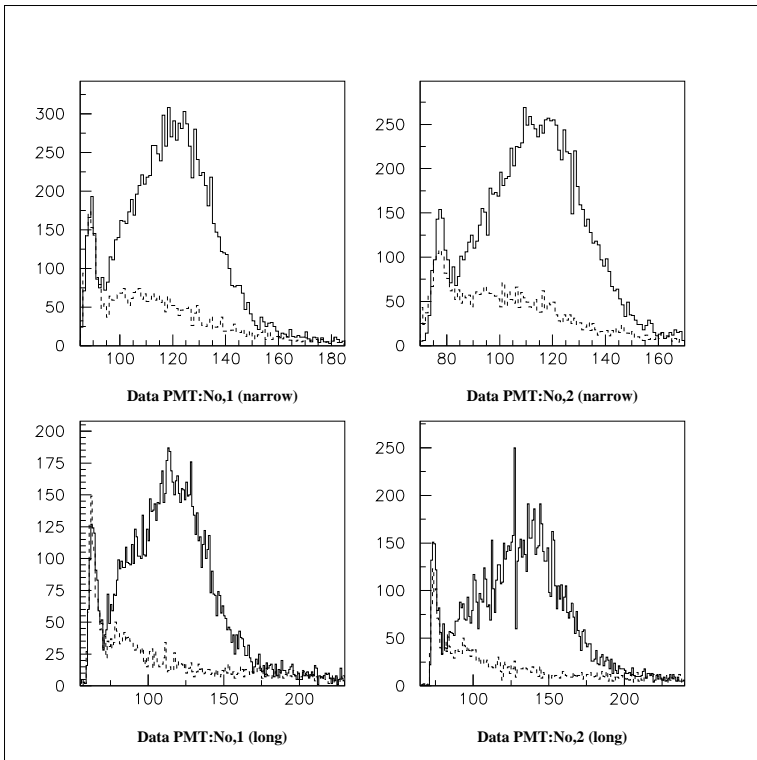


Al Target & empty Target  $\theta = 315^\circ$

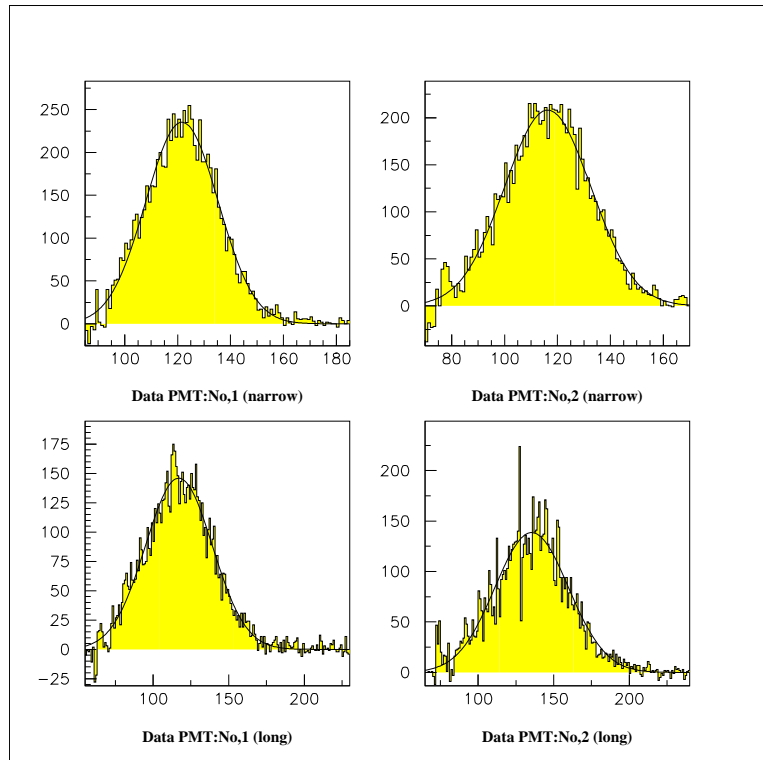


Al Target - empty Target  $\theta = 315^\circ$

図 15: Target=Al 測定データ ( $\theta = 315^\circ$ )



Au Target & empty Target  $\theta = 315^\circ$



Au Target - empty Target  $\theta = 315^\circ$

図 16: Target=Au 測定データ ( $\theta = 315^\circ$ )

## 第6章 Analysis

### 6.1 測定結果

得られたデータについて実際に解析していくことについて考える。

我々は CAMAC から得られたデータを .dat ファイルの形で保存し PAW(Physics Analysis Workstation) を用いて Histogram を製作し解析した。

前章で示したとおり各方位、各 Target のデータについて GAUSSIAN FIT を行い、半値幅、及び、 $2\sigma$  の範囲内で Histogram を積分しその結果をモット散乱によって得られた electron の粒子数であるとした。

以下にその全結果を載せる。

角度	PMT-No.1		PMT-No.2		PMT-No.1		PMT-No.2	
	(narrow)	empty	(narrow)	empty	(long)	empty	(long)	empty
0	7884	2594	7574	2386	7821	1929	7455	1727
45	7720	2810	7467	2346	7650	2105	7368	1599
90	7538	2865	7783	2401	7596	2048	7791	1625
135	7577	2686	8079	2510	7518	1945	8047	1717
180	7068	2755	7768	2406	6999	1985	7677	1758
225	7397	2590	8150	2431	7363	1851	8127	1740
270	7718	2487	7819	2685	7687	1748	7833	1857
315	7783	2486	8153	2590	7768	1773	8091	1839

表 6.1:  $2\sigma$  幅範囲での Au Target 結果 (表) (表記は empty を引いたもの)

角度	PMT-No.1		PMT-No.2		PMT-No.1		PMT-No.2	
	(narrow)	empty	(narrow)	empty	(long)	empty	(long)	empty
0	6395	1727	6130	1474	6299	1044	5966	882
45	6333	1849	6028	1413	6111	1123	5837	792
90	6134	1862	6244	1503	6064	1121	6194	830
135	6133	1737	6549	1570	6029	1070	6368	829
180	5676	1774	6173	1496	5558	1080	6092	975
225	6106	1640	6537	1523	6004	973	6407	904
270	6291	1559	6285	1731	6120	901	6237	971
315	6180	1560	6613	1641	6189	921	6462	930

表 6.2: 半値幅範囲での Au Target 結果 (表) (表記は empty を引いたもの)

角度	PMT-No.1		PMT-No.2		PMT-No.1		PMT-No.2	
	(narrow)	empty	(narrow)	empty	(long)	empty	(long)	empty
0	7755	3012	9154	3089	7530	2683	8775	2590
45	5999	2921	6782	2527	5975	2269	6778	1774
90	5874	3045	6971	2518	6027	2273	7019	1786
135	5570	2754	6678	2575	5431	2048	6643	1850
180	5133	2990	6584	2623	5084	2136	6588	1978
225	5845	2615	7563	2702	5821	2043	7513	1986
270	5770	2665	6956	2856	5763	1883	7061	2133
315	5443	2583	6329	2766	5390	1914	6286	2109

表 6.3:  $2\sigma$  幅範囲での Al Target 結果 (表) (表記は empty を引いたもの)

角度	PMT-No.1		PMT-No.2		PMT-No.1		PMT-No.2	
	(narrow)	empty	(narrow)	empty	(long)	empty	(long)	empty
0	6284	1895	7321	1821	6148	1235	7144	1226
45	4798	1878	5505	1561	4893	1245	5432	926
90	4744	1964	5599	1560	4938	1290	5662	937
135	4363	1774	5407	1657	4366	1160	5429	954
180	4131	1909	5234	1652	4081	1146	5323	1123
225	4812	1632	6129	1712	4792	1099	6019	1079
270	4643	1667	5574	1826	4674	984	5696	1118
315	4336	1656	5094	1780	4351	1046	5144	1120

表 6.4: 半値幅範囲での Al Target 結果 (表) (表記は empty を引いたもの)

角度	PMT-No.1		PMT-No.2		PMT-No.1		PMT-No.2	
	(narrow)	empty	(narrow)	empty	(long)	empty	(long)	empty
0	8003	2521	7502	2485	7964	1810	7466	1685
45	8162	2739	7657	2491	8105	1943	7589	1811
90	8797	2684	7606	2408	8812	1808	7516	1629
135	8510	2478	8075	2406	8479	1778	7936	1712
180	7573	2446	7659	2384	7653	1773	7679	1669
225	7802	2526	8560	2445	7729	1779	8476	1737
270	7761	2580	8697	2428	7689	1886	8652	1714
315	8449	2590	8498	2403	8423	1860	8449	1734

表 6.5:  $2\sigma$  幅範囲での Au Target 結果 (裏) (表記は empty を引いたもの)

角度	PMT-No.1		PMT-No.2		PMT-No.1		PMT-No.2	
	(narrow)	empty	(narrow)	empty	(long)	empty	(long)	empty
0	6397	1612	6159	1593	6342	989	6001	891
45	6634	1756	6225	1588	6570	1044	5969	942
90	7170	1733	6240	1451	6995	982	6043	813
135	6840	1531	6541	1495	6804	936	6356	880
180	6043	1565	6193	1447	6003	924	6161	860
225	6313	1598	6881	1584	6265	915	6773	863
270	6347	1689	7032	1533	6173	1021	6943	862
315	6738	1713	6843	1524	6702	940	6767	867

表 6.6: 半値幅範囲での Au Target 結果 (裏) (表記は empty を引いたもの)

角度	PMT-No.1		PMT-No.2		PMT-No.1		PMT-No.2	
	(narrow)	empty	(narrow)	empty	(long)	empty	(long)	empty
0	5969	3039	6503	2814	5902	2087	6477	2035
45	6405	2958	6064	2589	6429	2144	6054	1943
90	6135	2915	6032	2605	6018	2088	5978	1870
135	5862	3094	6030	2667	5864	2233	5934	1980
180	5733	2793	6715	2489	5672	2082	6724	1861
225	5797	2674	7134	2631	5743	2001	7089	2048
270	5580	2893	7152	2680	5504	2150	7143	2008
315	5312	2872	6271	2549	5354	2033	6296	1856

表 6.7:  $2\sigma$  幅範囲での Al Target 結果 (裏) (表記は empty を引いたもの)

角度	PMT-No.1		PMT-No.2		PMT-No.1		PMT-No.2	
	(narrow)	empty	(narrow)	empty	(long)	empty	(long)	empty
0	4859	1806	5359	1808	4868	1139	5300	1132
45	5294	1793	4903	1656	5249	1213	4895	1055
90	5043	1829	4809	1583	4955	1121	4761	933
135	4805	1773	4930	1692	4837	1163	4909	1097
180	4775	1784	5339	1617	4722	1132	5414	1014
225	4732	1729	5799	1723	4647	1053	5728	1116
270	4610	1734	5784	1646	4490	1114	5796	1021
315	4339	1747	5060	1680	4358	1114	5053	1047

表 6.8: 半値幅範囲での Al Target 結果 (裏) (表記は empty を引いたもの)

以上の表により、やはり長い Gate を用いたときのほうが短い Gate での結果よりも、empty のデータが著しく少なくなっているということが出来る。得ることのできた PEAK からの粒子数にたいした違いは見えないのは当然であるが、この結果は先の我々の目論見と良く一致しているといえる。これにより、より精度の高い実験結果を得ることに成功したということが出来る。

実験結果についてもう少し深く解析を行っていく。

## 6.2 Scatter Plot

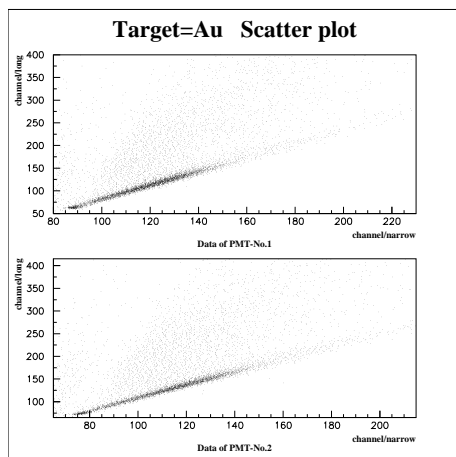


図 6.1: 2D Scatter Plot

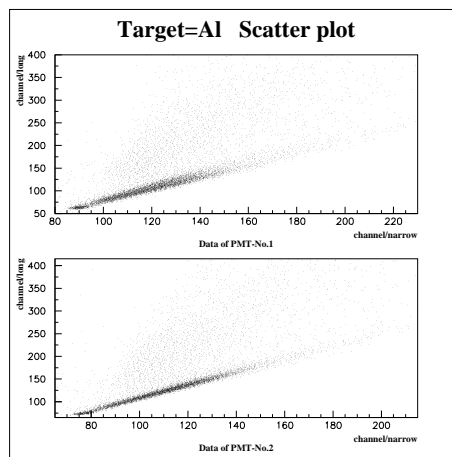


図 6.2: 2D Scatter Plot

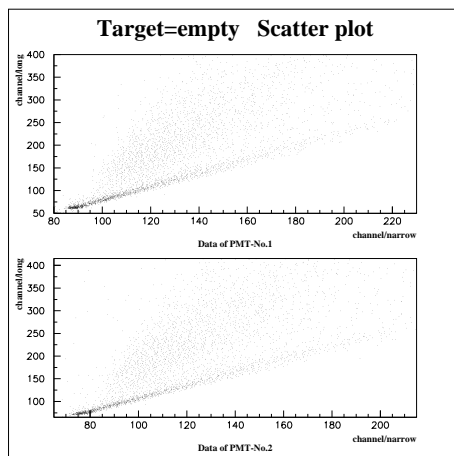


図 6.3: 2D Scatter Plot

図 (6.1) は Scatter Plot と呼ばれるもので縦軸はロングゲートでのスケーラーの値を各イベントごとにプロットしたもので、横軸はナローゲートでのそれである。図 (6.1) は threshold 50mV でターゲッ



トに Au を用いたものであり図 (6.3) は同じ threshold で空のときのものである。図 (6.3) にくらべて図 (6.1) で濃くなっているところがモット散乱電子と考えられる。

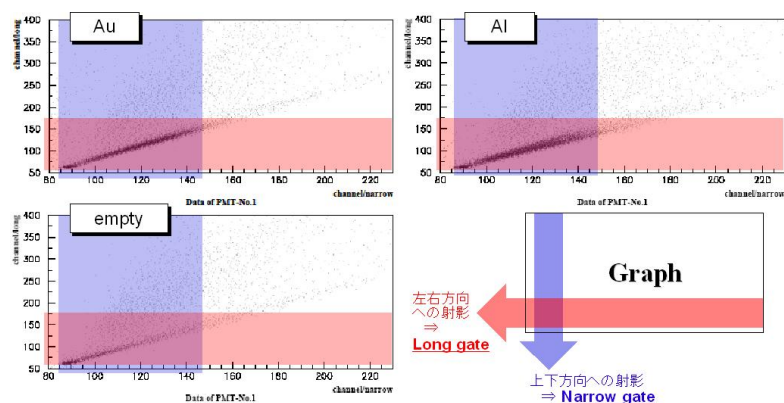


図 6.4: 2D Scatter Plot について

図 (6.4) に示すように、Long Gate のデータは先の Scatter Plot を左方向に射影したものであり、Narrow Gate のデータは下方向に射影したものになっている。図 (6.4) の青の部分は下方向に射影されたとき、下に見えるカット部分に覆いかぶさる。すなわち Narrow Gate での PEAK は『青 + 紫』が観測されることになる。反対に、左方向に射影したときには、赤い部分がカット部分に覆いかぶさることになる。すなわち、Long Gate での PEAK は『赤 + 紫』が観測される。測定データについてみると、青い部分には幾つか点が見られるが、赤い部分にはほとんど点は見られないことがわかる。すなわち、この差が先の表での noise の差に表れているということが出来る。この考察から逆に Mott 散乱によるデータは下に直線形に見えるカット部分に含まれているということが出来る。

これについて考察してゆく。高いエネルギーの粒子はナローゲートではすべてのエネルギーを落とさず、ロングゲートだと残りのエネルギーをおとして図 (6.1) にあるカットよりロング側に大きいところにカウントがたまることになると予想される。逆に低エネルギーの粒子はカット付近にエネルギーを落とすことになる。同時に図 (6.1) は高エネルギーの粒子ほどナローで落とすエネルギーも大きくなることを表しているはずである。モット散乱と予想されるプロットは残念ながらロングゲートでシフトするほどの高エネルギーでなかったと考えられる。ロングゲートで高い値がでている粒子はだからより高いエネルギーの線であるだろう。これによってナローゲートでモット散乱とかぶっていたノイズが実際データをみればわかるようにロングゲートでは大幅に減ることになった。

### 6.3 誤差の評価

モット散乱においてアシンメトリーは

$$A = \frac{N(\phi) - N(\phi + \pi)}{N(\phi) + N(\phi + \pi)} \quad (6.1)$$

$$= \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \quad (6.2)$$

で定義される。 $N(\phi)$  は  $\phi$  方向に散乱された電子のカウント数である。例えば散乱槽を 180 度まわして一つの検出器で同時間でとられた二つのデータと解釈できる。それらを簡単に  $N_+$ ,  $N_-$  と表す。角

度の基準点は散乱槽へ飛んでくると予想される電子の崩壊時の偏極の方向が  $0^\circ$  とする。誤差の伝搬を用いるとアシンメトリーの統計誤差は

$$\sqrt{\frac{4N_-N_+}{(N_+ + N_-)^3}} \quad (6.3)$$

と表される。実際に測定する電子のカウントは空データのバックグラウンドと重なっているので我々の実験ではアシンメトリーは

$$A = \frac{N_{t+} - N_{e+} - (N_{t-} - N_{e-})}{N_{t+} - N_{e+} + (N_{t-} - N_{e-})} \quad (6.4)$$

であり、 $N_t, N_e$  はそれぞれターゲットがあるときのカウントと空でのカウントである。用いたカウント数自体はモット散乱と思われる電子のなすガウス分布からきまった分散の定数倍幅内にあるデータのカウント数である。 $N_{t+}, N_{e+}, N_{t-}, N_{e-}$  を独立変数とみて再び統計誤差が評価された。

## 6.4 フォトマルアシンメトリー

フォトマルアシンメトリーの定義は

$$A_{photo} = \frac{N_s - N_n}{N_s + N_n} \quad (6.5)$$

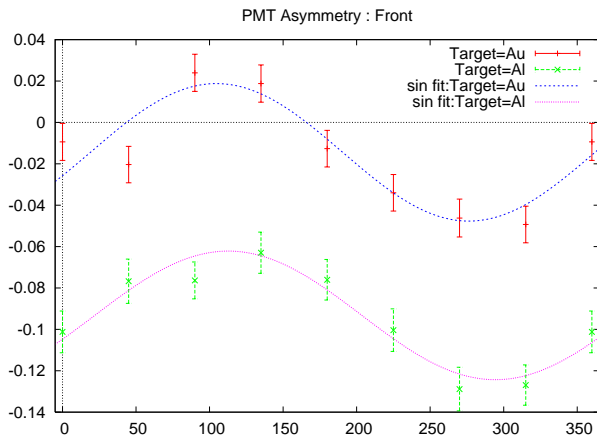
である。これは一回のランで左右の検出器によって測定されたデータのアシンメトリーである。もし検出器がターゲットに対して左右対称についていてビームが一樣ならこれは正しいアシンメトリーの値をあたえる。以下に  $A_{photo}$  のデータをあたえる。これをみてわかるようにデータはサインカーブを描く。これは後でわかるように装置のアシンメトリーからくるものであり計算により予測ができる(パラメーターをきめる)。またこのカーブの多くは原点を通過していないがこれはまた別の原因からくるものであって最初の条件は否定されたことになる。

### 6.4.1 様々な装置のアシンメトリー

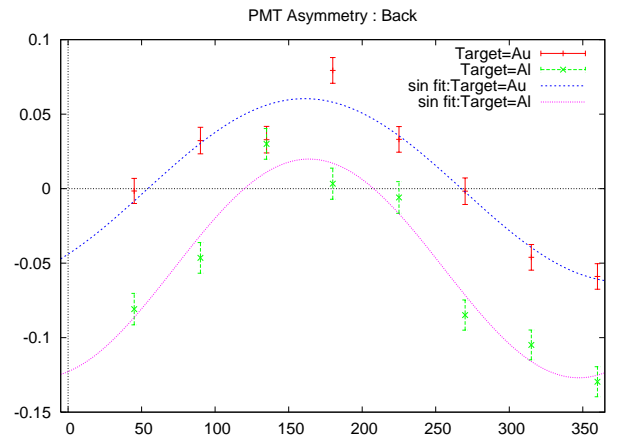
モット散乱の本来みたいアシンメトリーはわずか1パーセント程であると予想されるが実際に見えるアシンメトリーはそれだけではなく装置の非対称性からくるアシンメトリーによって重ねあわされる。しかしその多くは左右のフォトマルの平均をとればじゅうぶん小さくなる。そこでアシンメトリーを

$$A = \frac{\frac{N_{s+} + N_{n-}}{N_{s-} + N_{n+}} - 1}{\frac{N_{s+} + N_{n-}}{N_{s-} + N_{n+}} + 1} \quad (6.6)$$

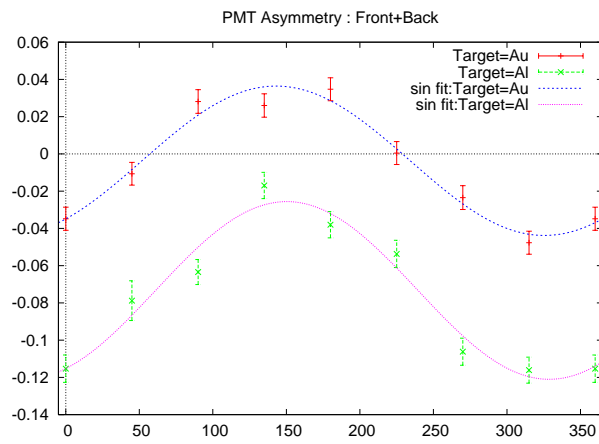
と定義し直す。+, - の意味は前と同様である。平均の意味をかねているが各変数は独立であるから統計量を2倍に稼いだことにもなる。この平均の作用でめだって消える装置のアシンメトリーはビーム分布の非一樣さからくるものと検出器のついている位置のずれからくるものである。さらにビームはターゲットホルダーで規格化されるから、ホルダーの表と裏でデータをとることでさらに平均化がおこなわれる。実際ターゲットの表と裏でデータは結構かわってしまった。しかしターゲットでの散乱はホルダーを固定してとられるから表だけ裏だけのデータもアシンメトリーを評価するために使えると考えられる。



☒ 6.5: pmt asymmetry front



☒ 6.6: pmt asymmetry back



☒ 6.7: pmt asymmetry front+back

次にこの操作で消せないもので装置のアシンメトリーの大部分をあたえるものにビーム軸の傾きからくるアシンメトリーが考えられる。これは図 (6.8) を考えれば分かる。計算上は

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \eta - P\zeta \sin(\phi - \phi_0) \quad (6.7)$$

$$\text{where } \eta = d\sigma_0/d\Omega \quad \text{and} \quad \zeta = S\eta \quad (6.8)$$

$$\text{then for } \left| \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \right| / \left| \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} \right| \gg 1 \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial^2\eta}{\partial\theta^2} \right| \theta' / \left| \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \right| \ll 1 \quad (6.9)$$

$$A \sim \left( -\theta' \frac{\partial\eta/\partial\theta}{\eta} \sin\phi' - PS \cos\phi_0 \right) \sin\phi + \left( -\theta' \frac{\partial\eta/\partial\theta}{\eta} \cos\phi' - PS \sin\phi_0 \right) \cos\phi \quad (6.10)$$

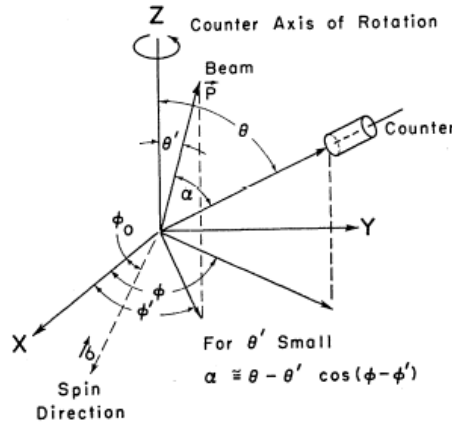


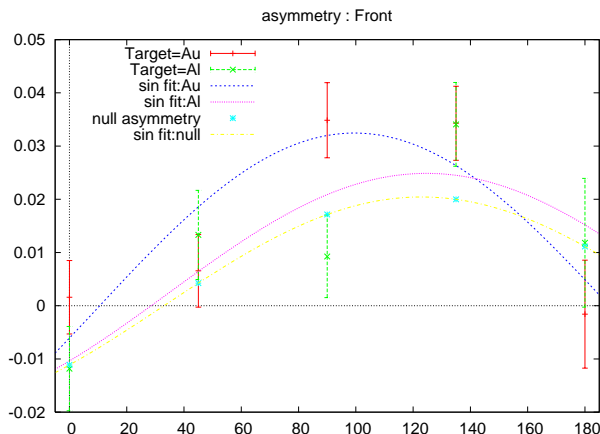
図 6.8: ビーム軸のずれ

ここで  $P$  は横偏極度 (理論部分で  $\sin\chi$  に相当する部分) で  $S$  は残りの部分である。微分断面積は極角に強く依存するから電極から曲げられてきた電子が散乱槽にたいして  $1^\circ$  傾いているだけで数パーセントものアシンメトリーが現れる。しかしこれは数値計算によってパラメーターを決める操作で完全に予測ができる。

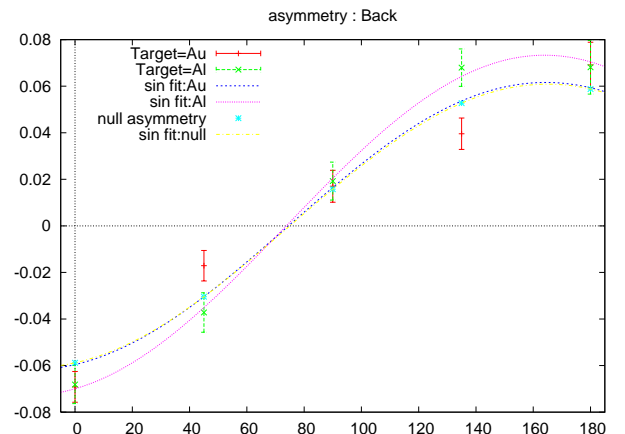
## 6.5 データ評価

我々はデータを表で 3 時間ずつ 8 方位、裏でも同様の測定を行った。最終的にアシンメトリーは理論が予測するアシンメトリーが非常に小さいアルミで装置のアシンメトリーを測定し、パラメーター  $(\theta', \phi', \chi)$  をだす。それを用いて金の装置のアシンメトリーを評価しそれを金の本データから差し引く事で本来のアシンメトリーを取り出した。式を見れば分かるように装置のアシンメトリーのパラメーターは極の面ではほぼ一意的である。以下に各表、裏、表+裏でのデータをあげる。

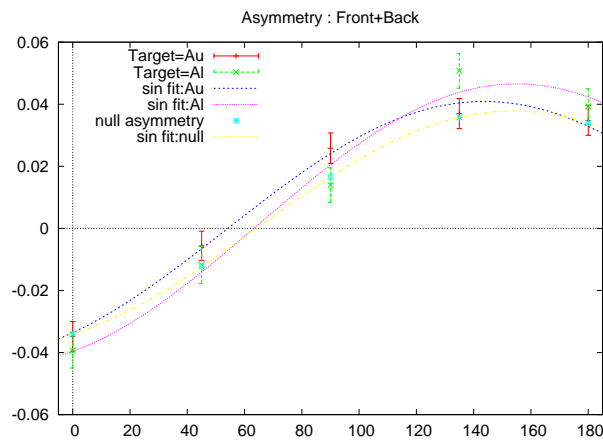
図 (6.9)、(6.10)、及び (6.11) で示されたアルミでのデータから、金を Target として、Parity 対称性の破れが無いとした時の Asymmetry の示す値、いわゆる『null asymmetry』の値を求めてみる。シミュレーションから、null アシンメトリーを与えるパラメーターは表、裏それぞれ、 $(\theta', \phi', \chi^2) = (0.47, 123, 3.88), (1.5, 165, 4.59), (0.87, 154, 3.29)$  となった。このデータと、実際に得られたデータとを比較してみることで、Parity 対称性の破れに起因する Asymmetry を求めることができる。



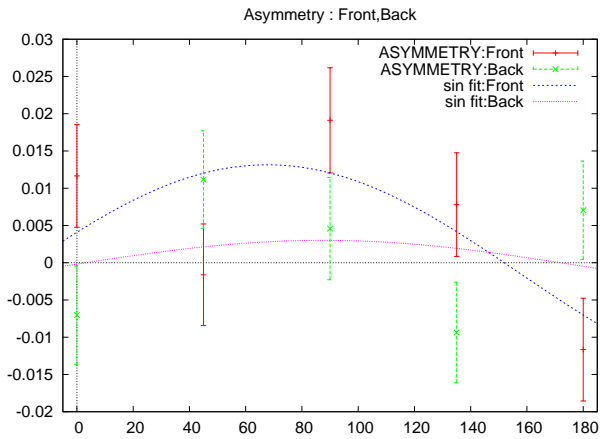
☒ 6.9: asymmetry front



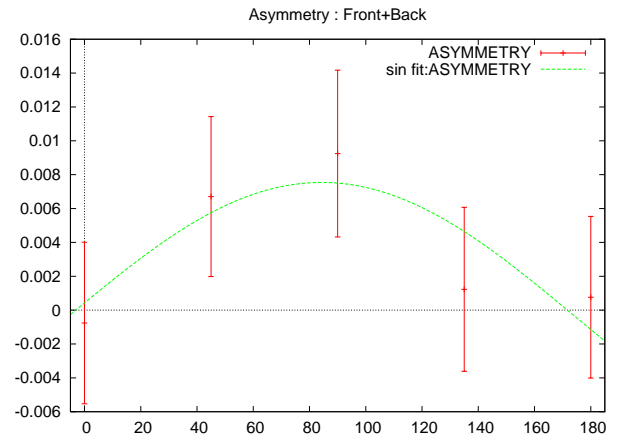
☒ 6.10: asymmetry back



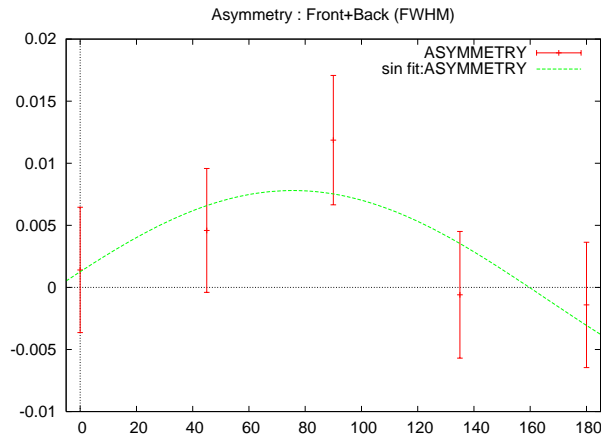
☒ 6.11: asymmetry front+back



☒ 6.12: Au asymmetry - Au Null asymmetry (front and back)



☒ 6.13: Au asymmetry - Au Null asymmetry (front+back)



☒ 6.14: Au asymmetry - Au Null asymmetry (front+back) FWHM

理論による、測定されるであろう Asymmetry の予想値について考えてみる。これは、以下に述べるような予想からくる。相対論的電子のスピンの電磁場の中での運動により、電子静止系でのスピンスは電極を通過したとき

$$\theta_C = \frac{m\gamma c^2 - mc^2}{m\gamma c^2} \frac{\pi}{2} \quad (6.11)$$

だけ回転する。これは電極でまげられる平面内でおこる。このためアシンメトリーはこの影響により 163.7keV 電子に対し約 21.8 °値が小さくなる。これはアシンメトリーにして約  $\sin(90 - 21.8) / \sin 90 \sim 0.93$  倍だけ小さくなる。また他方でこの実験は本来多重散乱の影響を考慮しなければならない。先に述べた、図 (2.32) は 194keV 電子を用いて Au での散乱を厚さを変えて行った時のものである。厚さが厚いほどアシンメトリーの値は小さくなる。この図で示された線形性が今回の厚さ 2.5 $\mu\text{m}$  まで続くと仮定したときのアシンメトリーの振幅は 0.006 は、実験結果とほぼ一致している。

## 6.6 評価

測定結果をサイン関数でフィッティングした結果について、観測された Asymmetry の値の関数として、 $\chi^2$  を計算してみる。ここで、 $\chi^2$  は、 $O$  を Observed(測定値)・ $E$  を Expected(理論値)・ $\sigma$  を誤差として、以下の式で表される。

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{O_k - E_k}{\sigma_k} \right)^2 \quad (6.12)$$

今回の実験では、8 方位に関して測定を行い、対角の 2 つを比較することで Asymmetry を計算したので、 $n$  については  $8/2 = 4$  を代入する必要がある。 $n = 4$  の  $\chi^2$  分布は以下の式で表すことができる。

$$f_n(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (6.13)$$

より

$$f_4(\chi^2) = \frac{\chi^2 e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{4} \quad (6.14)$$

またこの式から、ある  $\chi^2$  についてそれ以上の  $\chi^2$  を持つ確率を計算すると、

$$\int_{\chi^2}^{\infty} f_4(x) dx = \left(1 + \frac{\chi^2}{2}\right) e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad (6.15)$$

この式は確かに  $\chi^2 = 0$  の時、1 になっている。これについてグラフ化したものが以下の図である。

図 (6.15) 及び、図 (6.16) より、 $2\sigma$  の範囲では 0.743% の Asymmetry が存在するという仮説は、91.78% の確かさで正しいであろうということが分かった。また一方で、Asymmetry が存在しないという仮説は、77.16% の確かさで破棄されるだろうということが出来る。

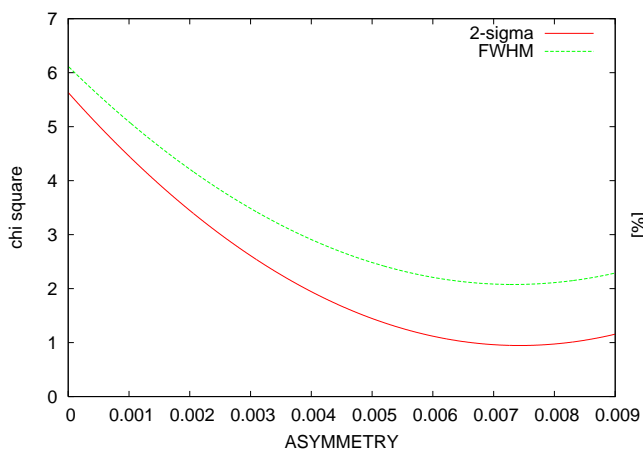


図 6.15: sin 関数の振幅を変化させたときの  $\chi^2$  値

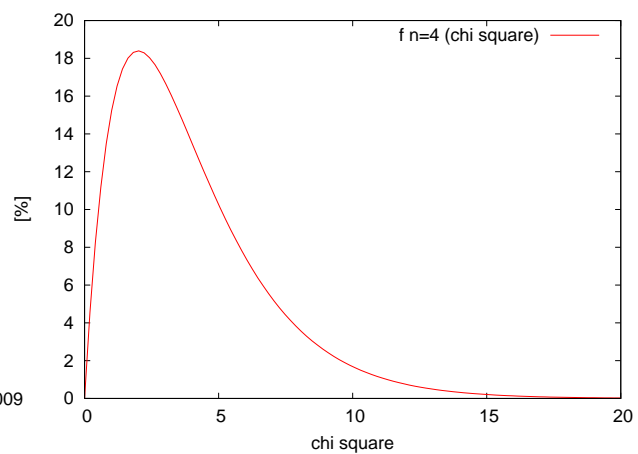


図 6.16:  $n = 4$  での関数  $f_n(\chi^2)$



## 第7章 Discussion and Results

今回の実験で、我々は理論による予測とほぼ同程度の値の Asymmetry、0.007 を望む方向に観測することができた。

しかしながら、得られた Asymmetry の値に比べて誤差範囲が大きいことをはじめ、問題点はまだ残ってるといわざるを得ない。ここではそういった問題点と、その改善点を挙げる。

### 問題点

1. Target の向きが表と裏とで Asymmetry の値が誤差以上に変わってしまった。
2. 理論で予測される Asymmetry の値が、絶対的に小さい。
3. Asymmetry の値が、統計誤差と比べて小さい。
4. count rate が低い。
5. 電極板の不安定性。
6. データの再現性の問題。表で測定しているときは気にならなかったが、それは測定した日付が近いことにもよるだろうが、裏で表と違いがでたことを含めて特に裏での 1 時間ごとのデータがそれぞれで条件は多少かわるがデータを再現できているかという問題が残っている。

### 改善点

1. 裏と表とによる違いを無くするためにホルダーをより強く固定する、規格化のスリットを設ける。
2. より安定な磁気レンズを用いることでビームをより高度に制御することを考える。
3. 蒸着によって作られた、もっと薄い金の薄膜を用いて測定を行う。
4. より長い時間をかけて実験を行い、カウントを稼ぎ相対誤差を小さくする。
5. 精密な 3 次元シミュレーションを行い、四重極レンズを導入することで rate を増加させる。(約 20 倍)
6. 放電しない電極板を手に入れ、より高い電圧でより高エネルギーの電子を用いることで、得られる Asymmetry の値を増やす。

うまくいけば、数 % の Asymmetry を見ることもできるかもしれない。

## 第8章 Acknowledgments

中野シントロー 僕は、何故 P2 を選んだのか？それは好奇心に突き動かされてでした。その時点では僕はどの実験がどんなものなのかというのは何も知りませんでした。たまたま本実験の班分けのときに用があって欠席していたばかりに、本実験は僕の意思とは関係なく、モット散乱の実験をやることとなりました。そして、その週に前の年の本実験のモット散乱のレポートを読みました。すると、なんだか、変なのです。明らかに、実験の時間が 50 時間くらいあります。僕はその時点で愕然としました。そして、何回も見直しましたが、本実験はやはり 50 時間くらいありました。まあ、どうにかなるだろうとその時は思いました。そして、もうひとつ驚愕することがありました。この実験はよほど注意深く行わないと、成功しないようなのです。そこには、ノイズに埋もれる可能性に満ち満ちていました。これは結構大変なことになるな、と思いましたが、生来からの楽観主義から、まあ何とかかなるだろうと思って考えないことにして寝ました。そして、十月の終わりごろから、本実験が始まりました。最初年明けまでは週一回でしたが、年が明けてからは毎日大学に行って最低でも五時間くらいはいろいろやってたように覚えてます。本実験が始まるまでの期間は度々野村先生を呼び出して、野村先生ご本人の研究に差支えがあるのではないと思うくらい、いろいろと実験の不具合を聞いていました。しかし、野村先生は神のように親切にご指導くださり、とても参考になる御意見をいろいろと聞かせていただき、誠に感謝しています。そして、3月の10日を過ぎたあたりから、本実験を行う準備が整いました。そこで、本実験が始まりました。本実験は朝9時に大学にいて夜11時に家に帰る、という半ば、大学のP2部屋に住むようなことをして、いろいろ失敗を繰り返しながら、最終的には4月の9日までかかりました。この期間、笹尾先生は親切にもなんどもP2部屋に足をお運びいただき、僕らだけではどうしたらいいかわからない解析のことやマグネットのことをお教えいただき、僕らの実験が不完全ながらもアシンメトリーが見えたことは、その御指導なくしては考えられないほどです。深く感謝いたします。そして最後に半年あまりも実験を共にした仲間のことについて述べたいと思います。僕はどちらかというと、がさつで、思いついたら即実行という方ですが、五味君、藤田君の両氏は熟考を重ねて物事を判断するタイプの人でした。僕が、せっかちに highVoltage を高くしようとした時に、二人はそれを押しとどめたりとしました。その時は、作業に検証を与えるのに時間がかかることに、いらいらしたりすることもありましたが、今思えば、その慎重な態度は大変良かったと思います。三人とも全然性格は違いました。もちろん、ものの考え方も違いました。しかし、僕らは三人の意見で実験を進めることを尊重しました。そして、実験を成功させることに対して、三人で一致してがんばりました。最終的には半年も実験の準備をしたのだから、僕らの実験の成功に対する思い入れは大変なものとなっていました。最終的には僕らの合言葉は「アシンメトリーを見たい」でした。そして、アシンメトリーが見えたときはすごうれしかったです。僕は今はP2にして良かったと今思っています。いろいろなことがありました、その中にはうんざりすることもありました。しかし、貴重な体験をすることができました。本当に実験にご協力くださった皆さんに感謝します。どうもありがとうございました。

藤田 充俊 色々助言をくださった先生方と長時間の間放電から耐えた(?)最後のタフなセッティングに感謝します。

五味 慎一 助言を下された先生方、TAの横山さん、本当にありがとうございました。これからも高エネルギー研でお世話になると思います。よろしく願います。

## 第9章 Appendix

### 9.1 合流型超幾何関数の漸近形

合流型超幾何関数、

$$F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (\text{a-1})$$

は微分方程式

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0 \quad (\text{a-2})$$

を満足する。置換  $u = z^{1-\gamma}u_1$  を行うとこの方程式は同じ形の方程式

$$zu_1'' + (2 - \gamma - z)u_1' - (\alpha - \gamma + 1)u_1 = 0 \quad (\text{a-3})$$

に変換される。方程式 (a-2) の解はラプラス型に属し、径路積分の形に表すことができる。すなわち

$$u = \int e^{tz} t^{\alpha-1} (t-1)^{\gamma-\alpha-1} dt \quad (\text{a-4})$$

は方程式 (a-2) を満足する。ただし積分路は  $V(t) = e^{tz} t^{\alpha} (t-1)^{\gamma-\alpha}$  がそれを通過したあとに初めの値にもどってくるようにとられなければならない。方程式 (a-2) に同じ方法を適用すると別の径路積分をえる。

$$u = z^{1-\gamma} \int e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha} dt \quad (\text{a-5})$$

この積分において  $tz \rightarrow t$  なる置換を行うと、

$$u = \int e^t t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha} dt \quad (\text{a-6})$$

となる。この場合の関数  $V$  は

$$V(t) = e^t t^{\alpha-\gamma+1} (t-z)^{1-\alpha} \quad (\text{a-7})$$

となる。(a-6) の被積分関数は  $t=0, t=z$  に特異点をもつ。積分路  $C$  は無限遠点 ( $\text{Re}t \rightarrow -\infty$ ) から出発し二つの特異点を正の方向にまわり再び無限遠点へ去るように選ぶ。この径路はその両端で  $V$  がゼロになるので条件を満たす。径路  $C$  に沿って行った積分は後でわかるように  $z=0$  に特異点をもたない。したがってこの積分は定数因子を除いて特異点を持たない関数  $F(\alpha, \gamma, z)$  と一致しなければならない。ガンマ関数の公式

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-\gamma} dt = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \quad (\text{a-8})$$

を用いると  $F(\alpha, \gamma, 0) = 1$  なので、

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C e^t (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma} dt \quad (\text{a-9})$$

がわかる。この式は合流型超幾何関数の漸近形を得るのに適している。同じ特異点の周りをかこっている限り径路は変更してかまわないから、 $t=0, t=z$  を回る二つの径路  $C_1, C_2$  に積分路を変更する。図参照。

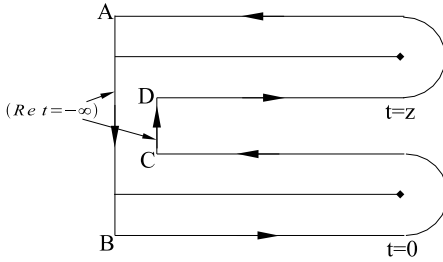


図 9.1:

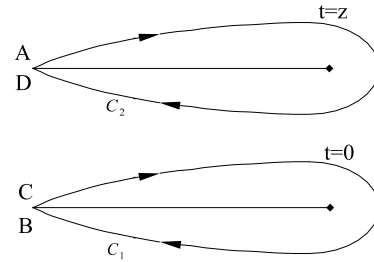


図 9.2:

$C_1$  における積分路では径路上で  $t = -t_0 \pm i\epsilon$  であるがこれは無限に大きい  $z$  に比べて小さい。このため被積分関数を  $\frac{t}{z}$  で展開することができる。 $C_2$  においては  $t = s + z$  なる変数変換を行うと  $C_1$  と類似した問題に帰着する。このとき被積分関数を  $\frac{s}{z}$  で展開することができる。これとガンマ関数の公式 (a-8) を用いれば、漸近形

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \quad (\text{a-10})$$

をえる。 $-2\alpha + \gamma$  がゼロより大きい小さいかでそれぞれ右辺第一項および第二項が主要項になる。

## 9.2 波動関数の漸近形

本章 (2-62) の  $r \rightarrow \infty$  での漸近形を考える。

$$\begin{aligned} \Psi_a &= i \sum (k\zeta'_k + (k+1)\zeta'_{k+1}) (-1)^k P_k(\cos \theta) \\ \Psi_b &= i \sum (kB_k \zeta_k + (k+1)B_{-k-1} \zeta_{k+1}) (-1)^k P_k(\cos \theta) \\ \Psi_c &= i \sum (\zeta'_k - \zeta'_{k+1}) (-1)^k P_k^1(\cos \theta) \\ \Psi_d &= i \sum (B_k \zeta'_k - B_{-k-1} \zeta_{k+1}) (-1)^k P_k^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{a-11})$$

であった。まず  $\Psi_a$  を評価する。 $\theta = \pi - \beta$  とするとルジャンドル多項式の偶奇性から見通しがよくなる。すなわち  $(-1)^k$  の項が消える。

$\zeta'$  の超幾何関数を  $r$  で展開するために  $\zeta'_k$  はオイラーの積分を用いて、

$$\zeta'_k = \frac{1}{2} r^{-1} e^{-ir} (2r)^\rho e^{-\frac{1}{2}\pi i \rho + \frac{1}{2}\pi q} 1/\Gamma(\rho + iq) \cdot \int_0^1 (1-x)^{\rho-iq} x^{\rho+iq-1} e^{2ixr} dx \quad (\text{a-12})$$

とあらわされる。これらが等しいことはベータ関数の性質  $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$  を用いて確かめることができる。いま

$$\phi_{q,a}(z) = \sum_0^{\infty} \left( \frac{kz^{\rho_k}}{\Gamma(\rho_k + iq)} + \frac{(k+1)z^{\rho_{k+1}}}{\Gamma(\rho_{k+1} + iq)} \right) P_k(\cos \beta) \quad (\text{a-13})$$

とかくと、

$$\Psi_a = \frac{1}{2} ir^{-1} e^{-ir} e^{\frac{1}{2}\pi q} \int_0^1 \left( \frac{x}{1-x} \right)^{iq} \phi_{q,a}(-2ixr(1-x)) e^{2ixr} \frac{dx}{x} \quad (\text{a-14})$$

がわかる。 $\Psi_a$  の漸近形は次のようにして求められる。まず  $\phi_{q,a}$  の  $|z|$  の大きい極限の振る舞いを得て、(a-14) 式の積分にそれを代入する。積分路は極である  $x = 0, 1$  を除いてとる。(a-14) の積分は  $x$  平面に鞍点をもつことがあきらかになるので積分路を複素平面へ拡張し、鞍点法を用いる。そのあと点  $x = 0, 1$  の近傍の積分への寄与も考える。まず  $\phi_{q,a}$  の漸近形を考える。 $F_\alpha(z)$  を

$$F_\alpha(z) = \sum_0^{\infty} (kz^{\rho_k} + (k+1)z^{\rho_{k+1}}) P_k(\cos \beta) \quad (\text{a-15})$$

とかく。この関数は

$$|z| < 1 - \epsilon \quad (\text{a-16})$$

で定義されている。 $y$  の関数

$$\psi(y) = \exp(p((1-y^2)^{\frac{1}{2}} - 1)/y) \quad (\text{a-17})$$

を考える。 $p$  はパラメーターである。この関数は

$$|y| < 1 - \epsilon \quad (\text{a-18})$$

で解析的であるからこの領域でテイラー展開できる。ゆえに  $\alpha^2 < 1$  であるから、

$$\begin{aligned} z^\rho &= z^k \exp(\alpha \log z \frac{k}{\alpha} ((1 - \frac{\alpha^2}{k^2})^{\frac{1}{2}} - 1)) \\ &= z^k \sum_n \left( \frac{\alpha}{k} \right)^n f_n(\alpha \log z) \end{aligned} \quad (\text{a-19})$$

この展開がすべての  $z$  に対して収束する。ゆえに  $|z| < 1 - \epsilon$  に対して、

$$F_\alpha(z) = \left( \sum_0^{\infty} \right)^* (kz^k \sum \left( \frac{\alpha}{k} \right)^n f_n + (k+1)z^{k+1} \sum \left( \frac{\alpha}{k+1} \right)^n f_n) P_k \quad (\text{a-20})$$

ここで  $(\sum)^*$  とは  $k = 0$  に対する  $z^k$  を和から省いたものである。和の順序を変えてやると

$$F_\alpha(z) = \sum_n \alpha^n f_n(\alpha \log z) \left( \sum \right)^* (z^k k^{1-n} + z^{k+1} (1+k)^{1-n}) P_k \quad (\text{a-21})$$

いま関数の一組  $\phi_n(z)$  を  $|z| < 1$  で定義する。

$$\phi_n(z) = \sum_k^* (z^k k^{1-n} + z^{k+1} (1+k)^{1-n}) P_k \quad (\text{a-22})$$

そのとき、

$$\begin{aligned}\phi_0(z) &= \sum_k (kz^k + (k+1)z^{k+1})P_k \quad |z| < 1 \\ &= z(1-z)(1+\cos\theta)/(1-2z\cos\theta+z^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\tag{a-23}$$

さらに  $\phi_n$  は漸化式

$$\phi_{n+1} = \int_0^z \phi_n(z) \frac{dz}{z}\tag{a-24}$$

を満たす。これらから  $|z| < 1$  に対して、

$$F_\alpha(z) = \sum_n \alpha^n f_n(\alpha \log z) \phi_n(z)\tag{a-25}$$

である。もしこの級数がすべての  $z$  に対して収束するなら (a-24),(a-23),(a-22) を  $F_\alpha(z)$  を定義するために使ってもよい。級数

$$\sum x^n f_n\tag{a-26}$$

は  $x$  が 1 より小さいと絶対収束する。いま  $z$  が

$$z = \exp(\pm i\beta)\tag{a-27}$$

でないとき  $|\phi_0(z)/z|$  がそれにそって束縛される (正則となる) 0 から  $z$  までの通路  $\Gamma$  が存在する。だから数  $M$  が存在して、

$$|\phi_0(z)/z| < M\tag{a-28}$$

がすべての  $\Gamma$  の点で成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned}|\phi_1(z)| &= \left| \int_0^z \phi_0(z) dz/z \right| \\ &< \int_0^z |\phi_0(z)/z| |dz| < Ml\end{aligned}\tag{a-29}$$

ここで  $l$  は選んだ通路の長さである。さらにこのパスを次のように選ぶことができる。

$$l = |z|\tau\tag{a-30}$$

ここで  $\tau$  は 1 より大きい。しかし 1 の近くの値をとることができる。パスを

$$\tau\alpha < 1\tag{a-31}$$

に選ぶ。それからパス上のすべての点に対し  $|\phi_1(z)/z| < M\tau$  である。同様にしてそれぞれの  $|\phi_n|$  が  $M|z|^\tau$  より小さいことが言える。ゆえに級数 (a-25) は絶対収束する。だから関数  $F_\alpha(z)$  は

$$z = \exp(\pm i\beta)\tag{a-32}$$

を除くすべての点で正則である。これらの極の性質は容易にみられる。これらの点で正則でない  $\phi_n$  は  $\phi_0, \phi_1$  だけである。だから

$$F_\alpha(z) = f_0\phi_0(z) + f_1\phi_1(z) + G(z)\phi_0(z) + f_1\phi_1(z) + G(z)\tag{a-33}$$

ここで  $G(z)$  は無限遠を除いて解析的である。  $\phi_0$  は (a-23) に与えられている。  $\phi_1$  は

$$\phi_1(z) = \frac{z+1}{(1-2z\cos\beta+z^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \quad (\text{a-34})$$

である。またテイラー展開の係数を比較することによって

$$f_0 = 1, f_1 = -\frac{1}{2}\alpha^2 \log z \quad (\text{a-35})$$

いま極  $z = \exp(-i\beta)$  の近傍で妥当な  $F_\alpha(z)$  の展開を要求する。

$$z = y + \exp(-i\beta) \quad (\text{a-36})$$

と書くと、

$$F_\alpha(z) = Ay^{-\frac{3}{2}} + By^{-\frac{1}{2}} + D(y) \quad (\text{a-37})$$

ここで  $A, B$  は定数であり  $D(y)$  は  $y = 0$  の近傍で正則な関数である。  $A$  は

$$A = e^{-i\beta}(1 - e^{-i\beta})(1 + \cos\beta)(e^{-i\beta} - e^{i\beta})^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{a-38})$$

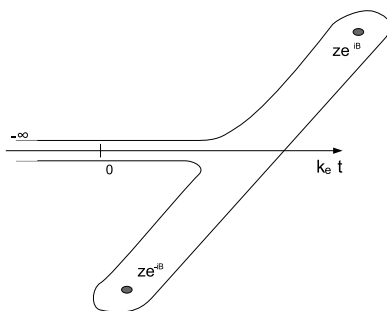
であたえられる。この関数  $F_\alpha(z)$  をつかって  $\phi_{q,\alpha}(z)$  の大きい  $r$  での展開を見出すことができる。定義 (a-13), (a-15) より

$$2\pi i/\Gamma(n) = \int_{-\infty, -\infty}^{0+} t^{-n} e^t dt \quad (\text{a-39})$$

を用いると、

$$\phi_{q,\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C t^{-iq} F_\alpha\left(\frac{z}{t}\right) e^t dt \quad (\text{a-40})$$

をえる。  $C$  は  $-\infty$  からきて原点の周りを反時計回りにまわって  $-\infty$  にもどるパスである。さらに条件に従って  $C$  はすべての点で  $|t| > |z|$  である。(a-40) の積分は  $t = 0, t = ze^{\pm i\beta}$  を除いて正則だから積分路は以下の図のように変換されることができる。いま後に示されるように  $z$  は積分路の全ての点



でその虚部が負であるようにとられる。だから  $e^{\pm i\beta}$  の実部は  $\cos(\alpha \pm \beta)$  の形である。ここで  $\alpha, \beta$  はともに  $0, \pi$  の間にある。だから  $ze^{i\beta}$  の実部は  $ze^{-i\beta}$  の実部より大きい。それから  $z$  が十分大きいとき積分 (a-40) は  $t = ze^{i\beta}$  の近傍でもっともおおきくなる。この項の寄与は実際  $e^{z \cos\beta}$  ほどであり、積分の他の極の影響を無視する事ができる。いま変換

$$t = z(e^{i\beta} + y) \quad (\text{a-41})$$

をする。すると、

$$z/t = e^{-i\beta}(1 - ye^{-i\beta} + \dots), \quad |y| < 1 \quad (\text{a-42})$$

であり、(a-39)と同様の計算によって  $y = 0$  のまわりで

$$F_\alpha\left(\frac{z}{t}\right) = A'y^{-\frac{3}{2}} + B'y^{-\frac{1}{2}} + D(y) \quad (\text{a-43})$$

ここで  $D(y)$  は束縛関数であり  $A', B'$  は定数であり、

$$A' = e^{3i\beta - \frac{3}{2}\pi i} \quad (\text{a-44})$$

(a-40)の被積分関数はこのとき  $t = ze^{i\beta}$  の近傍で

$$(z \exp i\beta)^{-iq} e^{z \exp(i\beta) + zy} (A'y^{-\frac{3}{2}} + B''y^{-\frac{1}{2}} + D(y)) \quad (\text{a-45})$$

となる。 $B''$  は別の定数である。 $C$  上の積分は  $t = ze^{i\beta}$  の近傍に帰着し、(a-40)の積分は

$$z^{1-iq} (e^{i\beta})^{-iq} e^{z \exp(i\beta)} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zy} (A'y^{-\frac{3}{2}} + B''y^{-\frac{1}{2}} \dots) \quad (\text{a-45})$$

いま  $|z| \rightarrow \infty$  で

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zy} y^{-\frac{3}{2}} dy &\sim z^{\frac{1}{2}} / \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zy} y^{-\frac{1}{2}} dy &\sim z^{-\frac{1}{2}} / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{a-46})$$

よって漸近形として

$$\phi_{q,\alpha}(z) = z^{\frac{3}{2}-iq} (e^{i\beta})^{-iq} e^{z \exp(i\beta)} \left(a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} \dots\right) \quad (\text{a-47})$$

ここで  $a, b, c$  は定数  $a = 2A'\pi^{-\frac{1}{2}}$  である。よって積分の端を除いて  $\Psi_a$  は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} i e^{-ir} e^{\frac{1}{2}\pi q + \beta q} \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{iq} e^{2irx} z^{\frac{3}{2}-iq} e^{z \exp(i\beta)} \left(a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} \dots\right) \\ z = -2irx(1-x) \end{aligned} \quad (\text{a-48})$$

非積分関数は指数部分

$$\exp(-2ir(x(1-x)e^{i\beta} - x)) \quad (\text{a-49})$$

を含む。これは鞍点

$$x = \frac{1}{2}(1 - e^{-i\beta}) \quad (\text{a-50})$$

をあたえる。 $z$  にすれば

$$z = \frac{1}{2} ir (e^{-2i\beta} - 1) \quad (\text{a-51})$$

これで鞍点で  $Im(z) < 0$  がわかった。これらの  $x, z$  の値を  $x_0, y_0$  とかくと (a-48) は

$$\frac{1}{2} i e^{-ir} r^{-1} e^{\frac{1}{2}\pi q + \beta q} \left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)^{iq} z_0^{\frac{3}{2}-iq} x_0^{-1} \left(a + \frac{b}{z_0} + \dots\right) \int_0^1 \exp(-2ir(x(1-x)e^{i\beta} - x)) dx \quad (\text{a-52})$$



(a-52) での積分は  $r$  が大きいときのガウス積分をもちいて

$$\pi^{\frac{1}{2}}(-2ir \exp(i\beta))^{-\frac{1}{2}} \exp(ir(1 - \cos \beta)) \quad (\text{a-53})$$

とかける。累乗の符号に注意しよう。条件次第で最終的な値はかわる。積分の公式導出のうえで  $-\frac{1}{2}$  乗の中のマイナスは  $\frac{1}{2}$  でとられるべきだろう。それから (a-52) は  $x_0, z_0$  を代入して、

$$\Psi_a \sim \frac{1}{2}(1 + \cos \beta)\left(1 + \frac{A}{r} + B^2 r + \dots\right) \exp(-ir \cos \beta - iq \log r(1 + \cos \beta)) \quad (\text{a-54})$$

ここで  $A, B$  は  $r$  の関数ではない。

いま (a-14) における積分において  $x = 0, x = 1$  の極限が  $\Psi_a$  にどれほど寄与するかをみる。今積分の 0 から 1 へのパスは鞍点法を用いるため  $\text{Im}(z) < 0$  でとられている。パスは実際次の図のように選ばれる。まず  $x=1$  のまわりの近傍のきよを調べる。置換

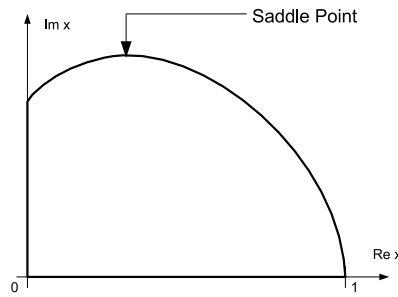


図 9.3:

$$2ir(1 - x) = y \quad (\text{a-55})$$

をおこなうと  $x = 1$  の近傍は  $r^{-2}$  でしか効いて来ないことがわかる。 $x = 0$  の近傍ではまず置換

$$-2irx = y \quad (\text{a-56})$$

を行う。すると (a-14) の積分への  $x = 0$  のまわりの寄与は  $r \rightarrow \infty$  で

$$\int_0^\infty (iy/2r)^{iq} \phi_{q,\alpha}(y) e^{-y} dy/y \quad (\text{a-57})$$

でありこれは 0 に等しいことが明らかになる。より詳しい議論が必要であるが省略する。これによって  $x = 0, x = 1$  の点の近傍が積分には  $1/r^2$  以上のオーダーでしか効いて来ないことがわかった。

いま他の関数  $\Psi_b, \Psi_c, etc$  を評価しなければならない。(a-14) の相当して、

$$\Psi_{b,d} = \frac{1}{2} r^{-1} e^{-ir} e^{\frac{1}{2} \pi q} \int_0^1 e^{2irx} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1+iq} \Phi_{b,d}(2irx(1-x)) dx/x \quad (\text{a-58})$$

$\Psi_c$  については (a-14) で  $\phi_{q,\alpha}(z)$  を  $\Phi_c(z)$  で置き換える (係数はそろえる)。ここで  $\Phi$  はつぎの値を

もつ。

$$\begin{aligned}\Phi_b(z) &= i \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{k B_k z^{\rho_k}}{\Gamma(\rho_k - iq)} + \frac{(k+1) B_{-k-1} z^{\rho_{k+1}}}{\Gamma(\rho_{k+1} - iq)} \right) P_k(\cos \beta) \\ \Phi_c(z) &= i \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z^{\rho_k}}{\Gamma(\rho_k + iq)} - \frac{z^{\rho_{k+1}}}{\Gamma(\rho_{k+1} + iq)} \right) P_k^1(\cos \beta) \\ \Phi_d(z) &= i \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{B_k z^{\rho_k}}{\Gamma(\rho_k - iq)} - \frac{B_{-k-1} z^{\rho_{k+1}}}{\Gamma(\rho_{k+1} - iq)} \right) P_k^1(\cos \beta)\end{aligned}\tag{a-59}$$

漸近形は  $\Psi_a$  のときと同様にして得られる。それぞれの場合に鞍点  $x = \frac{1}{2}(1 - \exp(-i\beta))$  からの漸近形への寄与を得て、それぞれの場合に  $x = 0, x = 1$  の近傍からのそれを得た。鞍点からのきよは角度を  $\beta$  から  $\theta$  に戻して

$$\begin{aligned}\Psi_a &\sim \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) I G_a \\ \Psi_b &\sim \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) I G_b \\ \Psi_c &\sim -\frac{1}{2} \sin \theta I G_c \\ \Psi_d &\sim \frac{1}{2} \sin \theta I G_d\end{aligned}\tag{a-60}$$

ここで  $I$  と  $G$  は

$$\begin{aligned}I &= \exp i(r \cos \theta - q \log r(1 - \cos \theta)) \\ G_a &= \left(1 + \frac{A}{r} + B r^2 + \dots\right)\end{aligned}\tag{a-61}$$

各  $G$  はこのタイプの関数である。

いま  $x = 0, x = 1$  の近傍からの積分への寄与をみる。  $\Psi_c$  の場合には  $\Psi_a$  の時と同様に  $r^{-2}$  でのみ寄与することがわかる。  $\Psi_b, \Psi_d$  の場合  $x = 0$  からの寄与は  $r^{-2}$  のオーダーである。  $x = 1$  からのきよを見るために、

$$2ir(1-x) = y\tag{a-62}$$

とおくと積分 (a-58) は

$$S \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^{-1-iq} \Phi(y) e^{-y} dy\tag{a-63}$$

をえる。ここで

$$S = r^{-1} \exp(ir + iq \log 2r)\tag{a-64}$$

であり  $\Phi$  は (a-59) によってあたえられる二つの場合である。この項は散乱波をあたえる。最終的に

$$\begin{aligned}\Psi_a &\sim \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) I G_a \\ \Psi_b &\sim \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) I G_b + S f(\theta) \\ \Psi_c &\sim -\frac{1}{2} \sin \theta I G_c \\ \Psi_d &\sim \frac{1}{2} \sin \theta I G_d + S g(\theta)\end{aligned}\tag{a-65}$$

ここで

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{-1-iq} \Phi_b(y) e^{-y} dy \quad (\text{a-66})$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{-1-iq} \Phi_d(y) e^{-y} dy$$

であり積分を項ごとにおこなうと本章でもちいている級数を与える。本章で用いている級数  $\psi_1, \psi_2$  の評価も同様である。漸近形は近似の一次しか効いてこないから  $B_k$  の評価は (a-15) から (a-20) の議論においてこれから (a-33) をえるときに  $\pm 1$  でしか効いてこない。このため鞍点からの寄与は (a-63) でマイナスがついたものがあらわれうまく表示とキャンセルする。したがって本章で得られる漸近形がえられる。

### 9.3 非相対論的振幅の計算

$f(\theta), g(\theta)$  の和は次のようにとられる。非相対論の場合 ( $q = q', \alpha = 0$ ),

$$f(\theta) = -\frac{i}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) x^k \frac{\Gamma(k+1-iq)}{\Gamma(k+1+iq)} P_k(\cos \theta) \quad (\text{a-67})$$

$$g(\theta) = 0$$

であるがオイラー積分の手法を使うと

$$f(\theta) = -\frac{i}{2} \frac{1}{\Gamma(2iq)} \int_0^1 (1-x)^{2iq-1} x^{-iq} F(x) dx \quad (\text{a-68})$$

ここで

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) x^k P_k$$

$$= (1-x^2)/(1-2x \cos \theta + x^2)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{a-69})$$

式 ( ) と ( ) の一致はベータ関数の性質、複素変数  $x, y$  に対し、 $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$  を用いるとを用いると示せる。式 ( ) を評価するために  $t^2 = (\frac{1}{2}(x+x^{-1}) - 1)/2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  なる変数変換をおこなうと、積分の範囲は  $\infty \rightarrow 0$  となり、

$$f(\theta) = -\frac{i}{2} \frac{1}{\Gamma(2iq)} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2iq-2} \int_0^\infty \frac{(2t)^{2iq-1} t dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{a-70})$$

をえる。途中  $-2 \sin \frac{\theta}{2} t = (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})$  等を用いた。さらに  $1+t^2 = 1/z$  なる置換を行うと積分は

$$2^{2iq-2} \int_0^1 (1-z)^{iq-\frac{1}{2}} z^{-iq} dz \quad (\text{a-71})$$

となるがこれは

$$2^{2iq-2} \Gamma(iq + \frac{1}{2}) \Gamma(1-iq) / \Gamma(iq) \quad (\text{a-72})$$

に等しい。さらに公式  $\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2})$  を用いると

$$\Gamma(2iq) \Gamma(1-iq) / \Gamma(iq) \quad (\text{a-73})$$

となり、ゆえに  $f(\theta)$  として

$$f(\theta) = \frac{q \Gamma(1 - iq)}{2 \Gamma(1 + iq)} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2iq-2} \quad (\text{a-74})$$

をえる。

## 9.4 電磁場中での相対論的粒子の取り扱い

相対論的粒子の電磁場内でのスピン角運動量の変化は、次の Thomas の方程式で与えられる。

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{mc} \vec{s} \times \left[ \left( \frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \vec{\beta} - \left( \frac{g}{2} - \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right) \vec{\beta} \times \vec{E} \right] \quad (\text{a-75})$$

$e$  素電荷  
 $m$  粒子の質量  
 $g$  Lande の  $g$  因子

これを用いて電子が静電場内で運動する場合のスピンの向きの変化について考える。  $\vec{B} = 0, g = 2$  として式 (a-75) は、

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} &= \frac{e}{mc} \vec{s} \times \left[ - \left( 1 - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right) \vec{\beta} \times \vec{E} \right] \\ &= \left( \frac{e}{mc} \frac{1}{1 + \gamma} \vec{\beta} \times \vec{E} \right) \times \vec{s} \end{aligned} \quad (\text{a-76})$$

となる。本実験では、電子は常に運動方向に垂直な一定電場を受け 4 分の 1 円軌道を描く。今、電場及び軌道平面に垂直に  $z$  軸をとると、式 (a-76) はさらに、

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{mc} \frac{1}{1 + \gamma} \beta E \hat{z} \times \vec{s} = \vec{\omega}_S \times \vec{s} \quad (\text{a-77})$$

と書ける。ここで  $\hat{z}$  は  $z$  軸方向の単位ベクトルである。式 (a-77) よりこのとき電子のスピンは  $z$  軸の正の方から見て反時計回りに角速度

$$\omega_S = |\vec{\omega}_S| = \frac{e\beta E}{mc(1 + \gamma)} \quad (\text{a-78})$$

で回転することがわかる。よって、スピンの回転角を知るためには電子の電場内での運動時間がわかればよい。電子の運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} (\gamma mc \vec{\beta}) = -e\vec{E} \quad (\text{a-79})$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma mc^2) = e\vec{E} \cdot \vec{v} \quad (\text{a-80})$$

と表される。 $\vec{E}, \vec{v}$ は直交するから式 (a-80) の右辺は0となる。よって  $\gamma$  及び  $\beta$  は一定であるから式 (a-80) は次のように書ける。

$$\frac{d}{dt}\vec{\beta} = \frac{-e}{\gamma mc}\vec{E} = \frac{-eE}{\gamma mc\beta}\hat{z} \times \vec{\beta} = \vec{\beta} \times \vec{\omega}_C \quad (\text{a-81})$$

式 (a-81) より電子は z 軸正の方から見て時計回りに角速度

$$\omega_C = |\vec{\omega}_C| = \frac{eE}{\gamma mc\beta} \quad (\text{a-82})$$

で回転することがわかる。よって、電子が 90 度回転する (曲がる) のに要する時間  $\tau$  は

$$\tau = \frac{\pi\gamma mc\beta}{2eE} \quad (\text{a-83})$$

となる。従って、電子のスピンがこの間の回転角  $\theta_S$  は

$$\begin{aligned} \theta_S &= \omega_S \tau \\ &= \frac{e\beta E}{mc(1+\gamma)} \cdot \frac{\pi\gamma mc\beta}{2eE} \\ &= \frac{\gamma\beta^2}{1+\gamma} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \frac{(\gamma+1)(\gamma-1)}{\gamma^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \left( \frac{\gamma mc^2 - mc^2}{\gamma mc^2} \right) \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (\text{a-84})$$

つまり、スピンの回転角  $\theta_S$  は全エネルギーと運動エネルギーの比のみによって決まることがわかる。

## 9.5 プログラム

### 9.5.1 モット散乱断面積用プログラム

```

program asym
implicit none

real*8 pi
parameter(pi=3.141592654)
complex*16 i
parameter(i=(0.0D+00,1.0D+00))
real*8 alpha,beta,b_in
parameter(alpha=1.0D+00/137.035989)
parameter(b_in=6.5D-01)
integer z
parameter(z=13)
real*8 mc2
parameter(mc2=0.511)
real*8 hbarc
parameter(hbarc=197.2)
real*8 q
real*8 thetad

```

```

real*8 thetar
real*8 sigma0
integer l,t,m,u
real*8 P(0:10000)
complex*16 D(0:10000),A(-1:10000,0:3),
& B(-1:10000,0:3)
complex*16 F0(0:180),F1(0:180),G0(0:180),
& G1(0:180)
complex*16 F(0:180),G(0:180)
real*8 difc0(0:180),S(0:180)
real*8 r_error
real*8 abc
integer v,w,x
parameter(v=1,w=3,x=4)
integer phi
real*8 phidash,thetadash,deltheta
parameter(deltheta=1.0D-08)
real*8 phirad,pdrad,tdrad,delrad
integer diff
real*8 difc1(0:10)
real*8 adifc0dash
real*8 asymmetry
real*8 pola
parameter(pola=0)
real*8 kai(0:10) !kai4 a kai kai5 minkai

open(10,file='kaimin.f',status='unknown')
kai(5)=1.0D+10
thetadash=0.88D+00
do while(thetadash.le.0.91)
phidash=1.52D+02
do while(phidash.le.158)
write(*,*) 'thetadash',thetadash
write(*,*) 'phidash',phidash
phi=0
do while(phi.le.180)
do diff=0,1
thetad=7.0D+01+diff*deltheta
beta=b_in

thetar=thetad*pi/1.8D+02
pdrad=phidash*pi/1.8D+02
tdrad=thetadash*pi/1.8D+02
phirad=phi*pi/1.8D+02
delrad=deltheta*pi/1.8D+02
q=z*alpha/beta

call calcsigma0(q,sigma0)

F0(thetad)=(i/2.0D+00)*(exp(-2.0D+00*i*sigma0))
& *exp(i*q*log((sin(thetar/2.0D+00))**2.0D+00))

G0(thetad)=-i*q*(1.0D+00/((tan(thetar/2.0D+00)
& ))**2.0D+00))*F0(thetad)

call calcdk(q,D)

do l=0,1000
A(l,0)=(i/2.0D+00)*(1*D(l)
& +(1+1.0D+00)*D(l+1))*((-1.0D+00)
& **l)
B(l,0)=(i/2.0D+00)*((1**2.0D+00)*D(l)
& -((1+1.0D+00)**2.0D+00)*D(l+1))
& *((-1.0D+00)**l)

```

```

end do

do m=1,3
do u=0,990
A(-1,m-1)=1
A(u,m)=(A(u,m-1))-((u+1.0D+00)/(2.0D
& +00*u+3.0D+00))*A(u+1,m-1)
& -(u/(2.0D+00*u-1.0D+00))
& *A(u-1,m-1)
B(-1,m-1)=1
B(u,m)=(B(u,m-1))-((u+1.0D+00)/(2.0D
& +00*u+3.0D+00))*B(u+1,m-1)
& -(u/(2.0D+00*u-1.0D+00))
& *B(u-1,m-1)

end do
end do

F1(thetad)=0.0D+00
G1(thetad)=0.0D+00
call calcpk(thetad,P)
do t=0,980

F1(thetad)= F1(thetad)+A(t,3)*P(t)
G1(thetad)=G1(thetad)+B(t,3)*P(t)
end do

F(thetad)=F0(thetad)+(F1(thetad)/
& ((1.0D+00-cos(thetar))*3.0D+00))
G(thetad)=G0(thetad)+(G1(thetad)/
& ((1.0D+00-cos(thetar))*3.0D+00))

difc0(thetad)=(hbarc/(mc2*beta)**2.0D+00)*
& (1.0D+00-(beta**2.0D+00))*
& ((q**2.0D+00)*(1.0D+00-(beta**2.0D+00)
& ))*(abs(F(thetad))**2.0D+00)/
& ((sin(thetar/2.0D+00))**2.0D+00)
& +(abs(G(thetad))**2.0D+00)/
& ((cos(thetar/2.0D+00))**2.0D+00))
& *(1.0D+01**(-2.0D+00))

difc1(diff)=difc0(thetad)

S(thetad)=2.0D+00*(hbarc/(mc2*beta)**2.0D+00
& *(1.0D+00-(beta**2.0D+00)
& )*q*sqrt(1.0D+00-(beta**2.0D+00))*
& (F(thetad)*conjg(G(thetad))+conjg(F(thetad))
& *G(thetad))/
& (sin(thetar)*difc0(thetad)*(1.0D+01**2.0D+00))

r_error=sqrt(1.0D+00/((difc0(thetad))
& *(1.0D+00-beta*S(thetad))*((beta*S(thetad))
& **2.0D+00)))

end do
adifc0dash=abs((difc1(1)-difc1(0))/delrad)
asymmetry=(tgrad*(adifc0dash/difc1(0))
& *sin(pdrad)-pola*S(thetad))*sin(phirad)
& +(tgrad*(adifc0dash/difc1(0))
& *cos(pdrad))*cos(phirad)
write(*,*) 'asymmetry',asymmetry
if (phi.eq.0) then
kai(0)=((asymmetry-(-0.0438836))/0.0058709)**2

```

```

else if (phi.eq.45) then
kai(1)=(asymmetry-(-0.0091814))/0.0061461)**2
else if (phi.eq.90) then
kai(2)=(asymmetry-(0.011767))/0.0057577)**2
else if (phi.eq.135) then
kai(3)=(asymmetry-(0.050966))/0.0058341)**2
end if

phi=phi+45
end do
kai(4) = kai(0)+kai(1)+kai(2)+kai(3)
write(*,*) 'kai',kai(4)

if (kai(5).ge.kai(4)) then
kai(5)=kai(4)
write(10,*) 'thetadash',thetadash
write(10,*) 'phidash',phidash
write(*,*) 'kaimin',kai(5)
write(10,*) 'kaimin',kai(5)
end if
phidash=phidash+1
end do
thetadash=thetadash+0.01
end do

close(10)

write(*,*) 'kaimin',kai(5)

stop
end

subroutine calcsigma0(q,sigma0)
implicit none

integer n
real*8 q
real*8 sigma0,sigma1,sigma2,seg
sigma0=(q/2)*log(1+(q**2))
& +5.0D-01*atan(q)
& -q*(1+1/(1.2D+01*(1+(q**2))))
& -(3-(q**2))/
& (3.6D+02*((1+(q**2))**3))
& +(5-10*(q**2)+(q**4))/(1260*((1
& +(q**2)**5)))

sigma1=-q+(q/2.)*log((q**2.)+16.)
& +3.5*atan(q/4.)-(atan(q)+atan(q/2.)+atan(q/3.))
& -q/(12.*((q**2.)+16.))*(1.+(q**2.)-48.)/(30.*(
& (q**2.+16.）**2.))+((q**4.)-160.*(q**2.)+1280.)
& /(105.*(((q**2.)+16.）**4.))

seg=0.
do n=1,1000
seg=seg-acos(1/sqrt(1+(q/float(n))**2.))+q/float(n)
end do

sigma2=-0.57722*q+seg

return
end

subroutine calcpk(thetad,P)
implicit none

```



```

integer k
real*8 pi1
parameter(pi1=3.141592654)
real*8 x, thetad
real*8 P(0:10000)

x=cos(pi1*thetad/1.8D+02)
P(0)=1
P(1)=x
do k=1,9999
P(k+1)=((2.0D+00*k+1.0D+00)*x*P(k)
& -k*P(k-1))/(k+1.0D+00)

end do

return
end

subroutine calcdk(q,D)
implicit none

complex*16 i2
parameter(i2=(0.0D+00,1.0D+00))
real*8 pi2
parameter(pi2=3.141592654)
real*8 alpha2
parameter(alpha2=1.0D+00/137.035989)
integer z1
parameter(z1=13)
integer k
real*8 q
real*8 rho(0:10000)
real*8 tau(0:10000), taurho(0:10000)
complex*16 D(0:10000)

do k=1,10000

rho(k)=sqrt((k**2.0D+00)-((z1*alpha2)**2.0D
& +00))

tau(k)=(q/2.0D+00)*log(((k+2.0D+00)**2.0D+00)
& +(q**2.0D+00))
& +(k+1.5D+00)*atan(q/(k+2.0D+00))
& -q*(1.0D+00+1.0D+00/(1.2D+01*((k+2.0D+00
& )**2.0D+00)+(q**2.0D+00)))
& -(3.0D+00*((k+2.0D+00)**2.0D+00)-(q**2.0D+00
& ))/
& (3.6D+02*(((k+2.0D+00)**2.0D+00)+(q**2.0D+00
& ))**3.0D+00))
& +(5.0D+00*((k+2.0D+00)**4.0D+00
& )-1.0D+01*(q**2.0D+00)*((k
& +2.0D+00)**2.0D+00)+(q**4.0D+00))/(1.26D+03
& *(((k+2.0D+00)**2.0D+00)
& +(q**2.0D+00)**5.0D+00)))

taurho(k)=(q/2.0D+00)*log(((rho(k)+2.0D+00)
& **2.0D+00)+(q**2.0D+00))
& +(rho(k)+1.5D+00)*atan(q/(rho(k)+2.0D+00))
& -q*(1.0D+00+1.0D+00/(1.2D+01*((rho(k)+2.0D+00
& )**2.0D+00)+(q**2.0D+00)))
& -(3.0D+00*((rho(k)+2.0D+00)**2.0D+00)-(q**2.0D+00
& ))/
& (3.6D+02*(((rho(k)+2.0D+00)**2.0D+00)+(q**2.0D+00
& ))**3.0D+00))
& +(5.0D+00*((rho(k)+2.0D+00)**4.0D+00

```

```

& )-1.0D+01*(q**2.0D+00)*((rho(k)
& +2.0D+00)**2.0D+00)+(q**4.0D+00))/(1.26D+03
& *(((rho(k)+2.0D+00)**2.0D+00)
& +(q**2.0D+00)**5.0D+00)))

D(0)=0
D(k)=((-1.0D+00)**k)*(k+1.0D+00+i2*q)
& *exp(-2.0D+00*i2*tau(k))
& /((k-i2*q)*(k+1.0D+00-i2*q))
& -(exp(-i2*pi2*rho(k))*rho(k)+1.0D+00+i2*q)
& *exp(-2.0D+00*i2*taurho(k))
& /((rho(k)-i2*q)*(rho(k)+1.0D+00-i2*q))

end do

return
end

```

## 9.5.2 電極による電子軌道計算プログラム

```

program elecdeflec
implicit none

real*8 pi
parameter(pi=3.141592654D+00)
real x_min,y_min,x_max,y_max ! unit mm
parameter(x_min=0.0,y_min=0.0)
parameter(x_max=560.0,y_max=400.0)
real x_in,y_in
parameter(x_in=152.,y_in=78.)
real x_g,y_g
parameter(x_g=361.0,y_g=324.7)
real c
parameter(c=2.9979E+11) ! unit mm/s
real*8 b_maxy,b_miny,b_step
parameter(b_maxy=0.75,b_miny=2.0D-01
& ,b_step=5.0D-03)
real step
parameter (step=1.0E-11)
real b_iny
integer lunout /2/,err /-1/
real slit
parameter(slit=30./2.)
real thetad
real*8 thetan,thetax,thetah
parameter(thetan=-1.5D+01,thetax=1.5D+01
& ,thetah=2.5D+00)

real x(1:4)
real x_next(1:4)
integer loop /0/
logical complete /.false./
real a1,a2,a3,a4,a5,a6
real Ex(0:600,0:600),Ey(0:600,0:600)
integer i,j,k

open(10,file='datax.xls',status='unknown')
open(11,file='datay.xls',status='unknown')

open(12,file='sf7-5kv.f',status='old')

do i=0,560

```

```

do j=0,560

    read(12,*) a1,a2,a3,a4,a5,a6
    Ex(j,i)=a3
    Ey(j,i)=a4

    end do
end do
close(12)

b_iny=b_miny
do while (b_iny.le.b_maxy)
write(*,*) 'b_iny',b_iny
thetad=thetan
do while (thetad.le.thetax)
x(1)=x_in
x(2)=y_in
x(3)=b_iny*sin(thetad*pi/180.)*c
x(4)=b_iny*cos(thetad*pi/180.)*c
loop=loop+1
do while ((x(1).ge.x_min).and.(x(1).le.x_max)
& .and.(x(2).ge.y_min).and.(x(2).le.y_max))
call solve(Ex,Ey,step,x,x_next)
x(1)=x_next(1)
x(2)=x_next(2)
x(3)=x_next(3)
x(4)=x_next(4)
write(10,*) x(1)
write(11,*) x(2)
if((x(2).ge.115).and.
& ((x(1).le.361).and.
& ((220**2.le.(x(1)-361)**2
& +(x(2)-115)**2).or.(200**2.ge.(x(1)-361)**2
& +(x(2)-115)**2))))
& then

goto 100
endif
if(((x(1).le.466.).and.(x(1).ge.456.)).and.(
& (x(2).le.324.72-slit).or.(x(2).ge.324.72+slit)))
& then

goto 100
endif
end do
write(*,*) 'x(1)',x(1)
write(*,*) 'x(2)',x(2)
write(*,*) 'betax',x(3)/c
write(*,*) 'betay',x(4)/c
100 continue
thetad=thetad+thetah
end do
b_iny=b_iny+b_step
end do
close(10)
close(11)
stop
end

subroutine solve(Ex,Ey,step,x,x_next)
implicit none

real step
real x(1:4)
real x_next(1:4)
real Ex(0:600,0:600),Ey(0:600,0:600)

```

```

integer i
real x_local(1:4)
real k1_x(1:4),k2_x(1:4),k3_x(1:4),k4_x(1:4)

do i=1,4
x_local(i)=x(i)
end do
call solve_1step(Ex,Ey,step,x_local,k1_x)
do i=1,4
x_local(i)=x(i)+0.5*k1_x(i)
end do
call solve_1step(Ex,Ey,step,x_local,k2_x)
do i=1,4
x_local(i)=x(i)+0.5*k2_x(i)
end do
call solve_1step(Ex,Ey,step,x_local,k3_x)
do i=1,4
x_local(i)=x(i)+k3_x(i)
end do
call solve_1step(Ex,Ey,step,x_local,k4_x)
do i=1,4
x_next(i)=x(i)+(k1_x(i)
& +2.0*(k2_x(i)+k3_x(i))+k4_x(i))/6.0
end do

return
end

subroutine solve_1step(Ex,Ey,step,x,k_x)
implicit none
real step
real x(1:4)
real k_x(1:4)
real diff_eq
real Ex(0:600,0:600),Ey(0:600,0:600)

k_x(1)=step*diff_eq('X',x,Ex,Ey)
k_x(2)=step*diff_eq('Y',x,Ex,Ey)
k_x(3)=step*diff_eq('V_X',x,Ex,Ey)
k_x(4)=step*diff_eq('V_Y',x,Ex,Ey)

return
end

real function diff_eq(arg,x,Ex,Ey)
implicit none

character*(*) arg
real x(1:4)
real c1
parameter(c1=2.9979E+11) !unit mm/s
real m_e
parameter(m_e=9.1093897E-31) ! unit kg
real e
parameter(e=1.60218925E-19) ! unit Coulomb
real Ex(0:600,0:600),Ey(0:600,0:600)

if (arg.eq.'X') then
diff_eq=x(3)
else if (arg.eq.'Y') then
diff_eq=x(4)
else if (arg.eq.'V_X') then
diff_eq=-(e/m_e)*sqrt(1.-(x(3)**2+x(4)**2)/

```

```

& (c1**2))*((x(1)-int(x(1)))*(x(2)-int(x(2)))
& *Ex(int(x(1))+1,int(x(2))+1)
& +(1.-(x(1)-int(x(1))))*(x(2)-int(x(2)))
& *Ex(int(x(1)),int(x(2))+1)
& +(x(1)-int(x(1)))*(1.-(x(2)-int(x(2))))
& *Ex(int(x(1))+1,int(x(2)))
& +(1.-(x(1)-int(x(1))))*(1.-(x(2)-int(x(2))))
& *Ex(int(x(1)),int(x(2)))*(1.0E+05)

else if (arg.eq.'V_Y') then
diff_eq=-(e/m_e)*sqrt(1.-((x(3)**2+x(4)**2)/
& (c1**2))*((x(1)-int(x(1)))*(x(2)-int(x(2)))
& *Ey(int(x(1))+1,int(x(2))+1)
& +(1.-(x(1)-int(x(1))))*(x(2)-int(x(2)))
& *Ey(int(x(1)),int(x(2))+1)
& +(x(1)-int(x(1)))*(1.-(x(2)-int(x(2))))
& *Ey(int(x(1))+1,int(x(2)))
& +(1.-(x(1)-int(x(1))))*(1.-(x(2)-int(x(2))))
& *Ey(int(x(1)),int(x(2)))*(1.0E+05)

else
write(*,*) 'illeg arg',arg

end if

return
end

```

## 関連図書

- [1] J.S.GREENBERG, D.P.MALONE, R.L.GLUCKSTERN, V.W.HUGHES 「*Mott-Scattering Analysis of Longitudinal Polarization of Electron from Co<sup>60</sup>*」 Phys.Rev.120,4 (November 1960)
- [2] 長島順清 「素粒子物理学の基礎 I」 朝倉物理学体系
- [3] 長島順清 「素粒子物理学の基礎 II」 朝倉物理学体系
- [4] H.A.TOLHOEK 「*Electron Polarization Theory and Experiment*」 REVIEWS OF MODERN PHYSICS.28,3 (July 1956)
- [5] D.F.NELON, R.W.PIDD 「*Mesurement of the Mott Asymmetry in Double Scattering of Elements*」 Phys.Rev.114,3 (May 1959)
- [6] D.C.SIMM, R.M.STEFFEN 「*Beta-Gamma Angular Correlation Measurements on Au198:II: Transverse Polarization of the Beta Particles*」 Phys.Rev.118, 3(May 1960)
- [7] C.S.Wu 「*Parity Experiments in Beta Decays*」 REVIEWS OF MODERN PHYSICS 31, 3 (July 1959)
- [8] 電気学会放電ハンドブック出版委員会 「放電ハンドブック」 電気学会
- [9] 京都大学課題研究 P2 「beta 崩壊における parity 非保存の検証」(2003)
- [10] 京都大学課題研究 P2 「偏極  $\beta$  線を用いた Mott 散乱による Parity 対称性の検証」(2004)