1997 年度課題研究Ｐ２レポート
Positronium の寿命の測定

担当教官 笹尾　登　先生
畑　浩之 先生
蔵重 久弥 先生
Ｔ　Ａ　中村 友昭 さん

礒野 貴亘
岩長 祐伸
篠原 俊一
西田 昌平

1998 年 7 月 15 日

Abstract

Positronium is the bound state of electron and positron. The triplet state decays into 3 photons in about 100 nsec, while the singlet state decays into 2 photons in less than 1 nsec. In a magnetic field, there occurs a mixing between the singlet state and the triplet state. From the lifetime of the mixed state, we can tell the lifetime of the singlet state.

We measured the lifetime of the triplet state of positronium by using a ^{22}Na source. After, we measured the lifetime of the singlet state by applying a magnetic field. We got the value of 140.2 ± 2.3 nsec for the lifetime of the triplet state, and 0.15 ± 0.03 nsec for that of the singlet state, which are consistent with the theoretical calculation.

目 次

1 実験の目的 **3**

1.1 一番の目的 :Ps の寿命測定 . . . 3

1.2 singlet Ps の寿命測定 :磁場による混合 . . . 3

1.3 かっこいい目的 . . . 3

1.3.1 理論の検証といった類いのもの :其の壱 . . . 3

1.3.2 理論の検証といった類いのもの :其の弐 (さらに激しく) . . . 3

2 理論 **4**

2.1 セレクションルール . . . 4

2.2 Singlet Positronium の寿命 . . . 5

2.3 Triplet Positronium の寿命 . . . 8

2.4 Magnetic Quenching of the Positronium Dacay . . . 9

3 実験方法 **12**

3.1 寿命測定の原理 . . . 12

3.2 実験の方法 . . . 14

3.3 triplet Ps の寿命の測定のための装置 (実験 1) . . . 14

3.4 singlet Ps の寿命を求めるための装置 (実験 2) . . . 16

3.5 データ収集 . . . 18

3.6 解析方法 . . . 19

4 データと解析 **20**

4.1 triplet Ps の寿命測定 (実験 1) . . . 20

4.1.1 TDC ヒストグラム . . . 20

4.1.2 測定結果 . . . 21

4.1.3 フィットについて . . . 22

4.1.4 真空中での測定結果 . . . 22

4.2 磁場中の状態混合と singlet Ps の寿命測定 (実験 2) . . . 23

4.2.1 プラスチックシンチレータについて . . . 23

4.2.2 磁場なしでの測定 . . . 24

4.2.3 磁場中での測定結果 . . . 25

4.3 窒素中での寿命測定 . . . 27

5 考察 **29**
5.1 気体中での Ps の生成 . . . 29
5.1.1 positron と電子の相互作用 . . . 29
5.1.2 対消滅 . . . 30
5.1.3 窒素中での対消滅率 . . . 31
5.2 反省と課題 . . . 32

6 まとめ **33**

7 感想と謝辞 **34**
7.1 感想 . . . 34
7.2 謝辞 . . . 34

A ぽじとろんスタート型のひげき **35**

B Formula **36**

C The details of $e^+e^- \to \gamma\gamma$ **37**

D The details of $e^+e^- \to \gamma\gamma\gamma$ **39**

Notation

このレポート中で用いた略称や記法を示す。

- Ps ：ポジトロニウム (positronium)
- Pb ：鉛
- NRL ：非相対論的極限
- $\tau_{\rm triplet} = \tau_t$ ：triplet Ps の寿命
- $\tau_{\rm singlet} = \tau_s$ ：singlet Ps の寿命
- $\tau_{\rm mixed}$ ：triplet Ps と singlet Ps の混合状態 (mixed state) の寿命
- $\Gamma_{\rm triplet} = \Gamma_t$ ：triplet Ps の崩壊幅 (decay rate)。$\Gamma_{\rm singlet}$ 等についても同様。
- $\gamma_t = \Gamma_t/2$ ： (存在確率ではなく) 波動関数で状態を考えたときの崩壊幅。

Chapter 1

実験の目的

1.1 一番の目的 :Ps の寿命測定

電子と陽電子の束縛系をポジトロニウム (以下 Ps) という。Ps の状態は $n\,^{2S+1}L_J$ で表すことが多い。ここで n は主量子数、S, L, J はそれぞれ全スピン、全軌道角運動量、全角運動量の大きさである。

一般に Ps はいくつかの γ 線に崩壊するが、$S=0$ (singlet Ps または para-Ps) 、$S=1$ (triplet Ps または ortho-Ps) のそれぞれの基底状態 1^1S_0, 1^3S_1 (この S は $L=0$ の意味) は後に述べる選択則より、異なる終状態しか許されず、寿命に差が出る。これらの寿命を測定することが本実験の目的である。

1.2 singlet Ps の寿命測定 :磁場による混合

triplet Ps の寿命は 100 nsec のオーダーなので、 (少なくとも時間分解能の立場からは) 測定可能な範囲にある。これに対し singlet Ps は寿命が 1 nsec 以下であり、シンチレーターなどの時間分解能 ($\sim$ 1 nsec) の範囲を越えている。

このため、磁場中では triplet と singlet の状態が混合することを用いる。triplet Ps は混合により寿命が短くなるが、この変化が singlet Ps の寿命の情報を持っているので、singlet Ps の寿命が (間接的に) 測定できる。

1.3 かっこいい目的

1.3.1 理論の検証といった類いのもの :其の壱

きちんと実験をすると、Ps の寿命は 3 桁から 4 桁ぐらいは測ることができ、量子電磁力学 (QED) の tree level の誤差を越えてしまう。このため、QED の 1-loop の計算と実験を比較することにより、QED の正当性や、はたまたくりこみの妥当性等の検証が可能になる (らしい)。

1.3.2 理論の検証といった類いのもの :其の弐 (さらに激しく)

後の理論編で分かることだが、磁場による混合の議論では、状態間の混合、つまり量子力学の原理である、 「状態の線形結合をとる」という操作が本質となる。つまり非常に単純な系での量子力学の検証が可能となる (かもしれない)。

Chapter 2

理論

2.1 セレクションルール

記号やいろいろな約束は全て「ゲージ場の量子論」(九後汰一郎 著) による。(Clebsch-Goldan 係数については普通の (?) 約束) 荷電共役演算子 $\mathcal{C}$ の電子の場 $\psi(x)$、光子の場 $A_\mu(x)$ への作用を次式で定義する。

$$\mathcal{C}\,\psi(x)\,\mathcal{C}^{-1} = i\gamma_2\,\bar{\psi}^T(x) \tag{2.1}$$

$$\mathcal{C}\,A_\mu(x)\,\mathcal{C}^{-1} = -A_\mu(x) \tag{2.2}$$

この定義で QED の ラグランジアン は $\mathcal{C}$ 不変となる。

光子、電子、陽電子の生成演算子 $a^\dagger_\mu(\boldsymbol{p}), b^\dagger(\boldsymbol{p},s), d^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ に対する作用に読み替えると次のようになる。

$$\mathcal{C}\,a^\dagger_\mu(\boldsymbol{p})\,\mathcal{C}^{-1} = -a^\dagger_\mu(\boldsymbol{p}) \tag{2.3}$$

$$\mathcal{C}\,b^\dagger(\boldsymbol{p},s)\,\mathcal{C}^{-1} = \quad d^\dagger(\boldsymbol{p},s) \tag{2.4}$$

$$\mathcal{C}\,d^\dagger(\boldsymbol{p},s)\,\mathcal{C}^{-1} = \quad b^\dagger(\boldsymbol{p},s) \tag{2.5}$$

まず n 個の光子がある状態に対して $\mathcal{C}$ の固有値を求めよう。

$$|\,n\gamma\,\rangle = a^\dagger_{\mu_1}(\boldsymbol{p}_1)\cdots a^\dagger_{\mu_n}(\boldsymbol{p}_n)|\,0\rangle \tag{2.6}$$

と書けるので、

$$\mathcal{C}\,|\,n\gamma\,\rangle = (-)^n|\,n\gamma\,\rangle \tag{2.7}$$

となる。

次に、全軌道角運動量 $L,\ M$ 全スピン $S,\ S_z$ を持つ Ps の状態を考えると、(非相対論的極限で)

$$|\,LM, SS_z\,;\,\mathrm{Ps}\,\rangle = \sum_{\substack{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 s_{1z}s_{2z}\\ L_1L_2M_1M_2}} |\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,;\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,\rangle\langle\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,;\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,|\,L_1M_1 s_{1z}\,;\,L_2M_2 s_{2z}\,\rangle \times\langle\,L_1M_1 s_{1z}\,;\,L_2M_2 s_{2z}\,|\,LM(L_1L_2)SS_z\,\rangle \tag{2.8}$$

と書ける (2 つの完全系、それぞれの角運動固有状態とそれぞれの運動量固有状態、を挟んだだけ)。ここで、

$$|\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,;\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,\rangle = b^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1)d^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)|\,0\rangle \tag{2.9}$$

である。この式に $\mathcal{C}$ をかけると、

$$\mathcal{C}\,|\,LM, SS_Z\,;\,\mathrm{Ps}\,\rangle = \sum_{\substack{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 s_{1z}s_{2z}\\ L_1L_2M_1M_2}} \mathcal{C}\,|\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,;\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,\rangle\langle\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,;\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,|\,L_1M_1 s_{1z}\,;\,L_2M_2 s_{2z}\,\rangle \times\langle\,L_1M_1 s_{1z}\,;\,L_2M_2 s_{2z}\,|\,LM(L_1L_2)SS_z\,\rangle$$

$$= \sum_{\substack{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 s_{1z}s_{2z} \\ L_1L_2M_1M_2}} (-)|\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,;\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,\rangle\langle\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,;\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,|\,L_1M_1 s_{1z}\,;\,L_2M_2 s_{2z}\,\rangle \times\langle\,L_1M_1 s_{1z}\,;\,L_2M_2 s_{2z}\,|\,LM(L_1L_2)SS_z\,\rangle$$

$$= \sum_{\substack{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 s_{1z}s_{2z} \\ L_1L_2M_1M_2}} (-)|\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,;\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,\rangle\langle\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,;\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,|\,L_2M_2 s_{2z}\,;\,L_1M_1 s_{1z}\,\rangle \times\langle\,L_2M_2 s_{2z}\,;\,L_1M_1 s_{1z}\,|\,LM(L_2L_1)SS_z\,\rangle$$

$$= \sum_{\substack{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 s_{1z}s_{2z} \\ L_1L_2M_1M_2}} (-)^{L-L_1-L_2+S}|\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,;\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,\rangle\langle\,\boldsymbol{p}_1 s_{1z}\,;\,\boldsymbol{p}_2 s_{2z}\,|\,L_1M_1 s_{1z}\,;\,L_2M_2 s_{2z}\,\rangle \times\langle\,L_1M_1 s_{1z}\,;\,L_2M_2 s_{2z}\,|\,LM(L_1L_2)SS_z\,\rangle \tag{2.10}$$

この変形は、和を取っている文字の取り替えと、Clebsch-Goldan 係数の性質

$$\langle\,J_2J_{2z}\,;\,J_1J_{1z}\,|\,JJ_z(J_2J_1)\,\rangle = (-)^{J-J_1-J_2}\langle\,J_1J_{1z}\,;\,J_2J_{2z}\,|\,JJ_z(J_1J_2)\,\rangle \tag{2.11}$$

を用いた。よって $L=0$ の時 ($L_1=L_2$ しか和に効かない)、$(-)^{L-L_1-L_2+S}=(-)^S$ となり、和に無関係になるのでので、結局

$$\mathcal{C}\,|\,L=0\,M=0\,,SS_Z\,;\,\mathrm{Ps}\rangle = (-)^S\,|\,L=0\,M=0\,,SS_Z\,;\,\mathrm{Ps}\,\rangle \tag{2.12}$$

である。

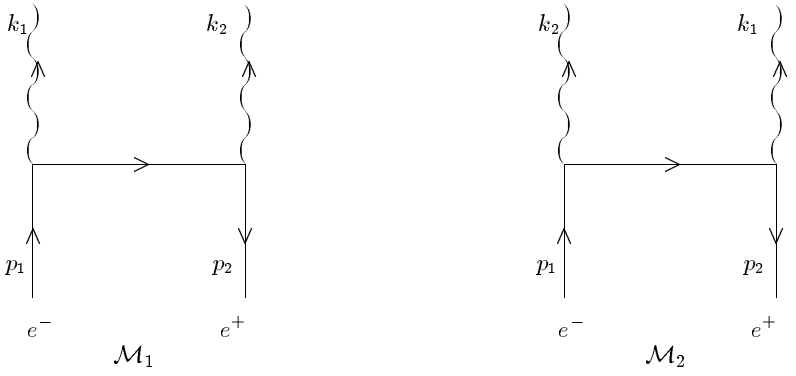
以上より、$L=0,\ S=0$ の singlet Ps は奇数個の光子には崩壊できず、$L=0, S=1$ の triplet Ps は偶数個の光子には崩壊できないことが分かる。

実際の主な崩壊モードは、

- singlet Ps $\longrightarrow 2\ \gamma$
- triplet Ps $\longrightarrow 3\ \gamma$

である。

2.2 Singlet Positronium の寿命



上の Feynman diagram の左図の不変振幅を $\mathcal{M}_1$、右図の不変振幅を $\mathcal{M}_2$ とする。(以下で特に断らなければ自然単位系を使う)

$$-i\mathcal{M}_1 = \varepsilon^*_{\nu(k_2)}\, ie\gamma^\nu\, \bar{v}_{(p_2)}\, \frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)}{(p_1-k_1)^2-m^2}\, \varepsilon^*_{\mu(k_1)}\, ie\gamma^\mu\, u_{(p_1)}$$

$$-i\mathcal{M}_2 = \varepsilon^*_{\mu(k_2)}\, ie\gamma^\mu\, \bar{v}_{(p_2)} \frac{i(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m)}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \varepsilon^*_{\nu(k_1)}\, ie\gamma^\nu\, u_{(p_1)}$$

まず、$\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$ を求める。

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{polalization}} \mathcal{M}_1 {\mathcal{M}_1}^*$$

と定めると、

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{e^4}{16(p_1\cdot k_1)^2} \sum_{s,s',t,t'} \Bigg(\bar{v}^{(s')}_{(p_2)}\, \gamma^{\nu_1} \varepsilon^{(t')*}_{\nu_1\,(k_2)} (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \varepsilon^{(t)*}_{\mu_1\,(k_1)} \gamma^{\mu_1} u^{(s)}_{(p_1)} \bar{u}^{(s)}_{(p_1)}$$
$$\cdot\, \gamma^{\mu_2} \varepsilon^{(t)}_{\mu_2\,(k_1)} (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \varepsilon^{(t')}_{\nu_2\,(k_2)} \gamma^{\nu_2} v^{(s')}_{(p_2)} \Bigg) \tag{2.13}$$

ここで実光子にたいして、

$$\sum_t \varepsilon^{(t)*}_{\mu_1} \varepsilon^{(t)}_{\mu_2} = -g_{\mu_1\mu_2}$$

$$\sum_{t'} \varepsilon^{(t')*}_{\nu_1} \varepsilon^{(t')}_{\nu_2} = -g_{\nu_1\nu_2}$$

が成り立ち、次式のフェルミオンにたいして完全性

$$\sum_s u^{(s)}_{(p_1)} \bar{u}^{(s)}_{(p_1)} = (\not{p}_1 + m)$$

$$\sum_{s'} v^{(s')}_{(p_2)} \bar{v}^{(s')}_{(p_2)} = (\not{p}_2 - m)$$

を式 (2.13) に用いると、

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{e^4}{16(p_1\cdot k_1)^2}\, \mathrm{Tr}[(\not{p}_2 - m)\gamma^\nu (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)\gamma^\mu (\not{p}_1 + m)\gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)\gamma_\nu] \tag{2.14}$$

Trace 計算の詳細は Appendix C に譲ると、

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{2e^4}{(p_1\cdot k_1)^2} \left((p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1) + m^2(p_2\cdot k_1) - m^2(p_1\cdot p_2) + 2m^2(p_1\cdot k_1) - 2m^4 \right) \tag{2.15}$$

一方、$\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$ は式 (2.15) で k_1 と k_2 を入れ換えたものなので、

$$\overline{|\mathcal{M}_2|^2} = \frac{2e^4}{(p_1\cdot k_2)^2} \left((p_1\cdot k_2)(p_2\cdot k_2) + m^2(p_2\cdot k_2) - m^2(p_1\cdot p_2) + 2m^2(p_1\cdot k_2) - 2m^4 \right) \tag{2.16}$$

で得られる。

$$\overline{|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2} = \overline{|\mathcal{M}_1|^2} + \overline{|\mathcal{M}_2|^2} + \overline{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*} + \overline{\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^*}$$

だから、次に $\overline{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*}$ を求める。

$$\overline{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*} = \frac{e^4}{16(p_1\cdot k_1)(p_1\cdot k_2)} \sum_{s,s',t,t'} \Bigg(\bar{v}^{(s')}_{(p_2)}\, \gamma^{\nu_1} \varepsilon^{(t')*}_{\nu_1\,(k_2)} (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \varepsilon^{(t)*}_{\mu_1\,(k_1)} \gamma^{\mu_1} u^{(s)}_{(p_1)} \bar{u}^{(s)}_{(p_1)}$$
$$\cdot\, \gamma^{\mu_2} \varepsilon^{(t)}_{\mu_2\,(k_1)} (\not{p}_1 - \not{k}_2 + m) \varepsilon^{(t')}_{\nu_2\,(k_2)} \gamma^{\nu_2} v^{(s')}_{(p_2)} \Bigg) \tag{2.17}$$

式 (2.13) と同様にして、

$$\overline{\mathcal{M}_1 {\mathcal{M}_2}^*} = \frac{m^2 e^4}{(p_1\cdot k_1)(p_1\cdot k_2)} \left((p_1\cdot k_1) + m^2(p_1\cdot k_2) - 2m^4 \right) \tag{2.18}$$

$\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2{}^*}$ は式 (2.18) で k_1 と k_2 を入れ換えたものだから、

$$\overline{\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1{}^*} = \frac{m^2e^4}{(p_1\cdot k_2)(p_1\cdot k_1)}\left((p_1\cdot k_2)+m^2(p_1\cdot k_1)-2m^4\right) \tag{2.19}$$

以上の式 (2.14) (2.16) (2.18) (2.19) により

$$\overline{|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2} = 2e^4\left\{\left(\frac{p_1\cdot k_2}{p_1\cdot k_1}+\frac{p_1\cdot k_1}{p_1\cdot k_2}\right)+2m^2\left(\frac{1}{p_1\cdot k_1}+\frac{1}{p_1\cdot k_2}\right)-\left(\frac{m^2}{p_1\cdot k_1}+\frac{m^2}{p_1\cdot k_2}\right)^2\right\} \tag{2.20}$$

$k_i=(\omega_i,\vec{k}_i)\ \ (i=1,2)$ と表すことにすると、散乱断面積 σ は以下のようにして得られる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \frac{d\vec{k_1}}{(2\pi)^3 2\omega_1}\frac{d\vec{k_2}}{(2\pi)^3 2\omega_2}\frac{\overline{|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2}}{4\sqrt{p_1\cdot p_2-m^4}}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)\\ &= \frac{\alpha^2}{2}\int d\vec{k_1}d\vec{k_2}\frac{\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)}{\omega_1\omega_2\sqrt{p_1\cdot p_2-m^4}}\\ &\qquad\left\{\left(\frac{p_1\cdot k_2}{p_1\cdot k_1}+\frac{p_1\cdot k_1}{p_1\cdot k_2}\right)+\left(\frac{2m^2}{p_1\cdot k_1}+\frac{2m^2}{p_1\cdot k_2}\right)-\left(\frac{m^2}{p_1\cdot k_1}+\frac{m^2}{p_1\cdot k_2}\right)^2\right\}\end{aligned} \tag{2.21}$$

式 (2.21) で α は微細構造定数であり、ここで電子が静止する系 (実験室系) で考えると、$p_1=(m,\vec{0})$, $p_2=(m\gamma,\vec{p}_2)$ より、$p_1\cdot k_1=m\omega_1$, $p_1\cdot k_2=m\omega_2$, $p_1\cdot p_2=m^2\gamma$ であるから、

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{2}\int d\omega_1\, d\Omega\, \omega_1^2\,\frac{\delta(\omega_1+\omega_2-m-m\gamma)}{\omega_1\omega_2 m^2\beta\gamma}\left\{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)+2m\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)-\left(\frac{m}{\omega_1}+\frac{m}{\omega_2}\right)^2\right\} \tag{2.22}$$

ただし、δ^3 の処理に伴い、$\omega_2=|\vec{p}_2-\vec{k}_1|$ で β は $\vec{\beta}=\vec{p}_2/m\gamma$ で定まるベクトルの絶対値である。

さらに陽電子も非相対論的極限 (i.e. $\gamma=1$) で扱うことができるから、容易に

$$\sigma = \frac{\pi {r_0}^2}{\beta} \tag{2.23}$$

を得る。ただし、式 (2.23) では k_i の置換の数 $2!$ を考慮して 2 で割り、$r_0=e^2/(4\pi m)$:古典電子半径とした。

一方、崩壊確率 $\Gamma_{\rm singlet}$ は媒質中で陽電子と束縛 1^1S_0 状態を作ることができる電子密度 ρ を用いて、

$$\Gamma_{\rm singlet} = \sigma\beta\rho = \pi {r_0}^2\rho \tag{2.24}$$

と書ける。理想的に Ps が真空中に一個だけある場合を考えて、ρ として $\rho=|\psi_1(0)|^2$ (ψ_1 : Ps の 1^1S_0 状態の波動関数) をとると、a_0 を Bohr 半径として

$$|\psi_1(0)|^2 = \frac{1}{\pi(2a_0)^3}$$

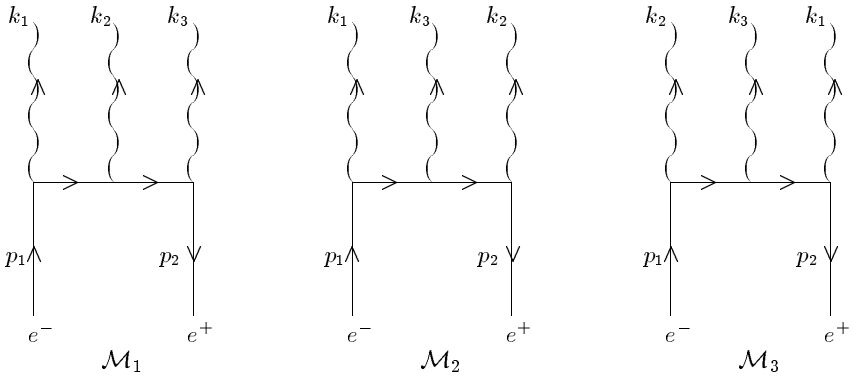
であり、$r_0=\alpha^2 a_0$ より

$$\Gamma_{\rm singlet} = \frac{\alpha^4 c}{2a_0}\ [\sec^{-1}] = 8.0\times10^9\ [\sec^{-1}] \tag{2.25}$$

$$\tau_{\rm singlet} = 1/\Gamma_{\rm singlet} = 1.25\times10^{-10}\ [\sec] \tag{2.26}$$

となる。

2.3 Triplet Positronium の寿命



上図の不変振幅を列挙すると

$$\mathcal{M}_1 = \frac{-e^3}{4(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_3)}\bar{v}^{(s')}_{(p_2)}\not{\epsilon}_3^{(t_3)^*}(\not{k}_3-\not{p}_2+m)\not{\epsilon}_2^{(t_2)^*}(\not{p}_1-\not{k}_1+m)\not{\epsilon}_1^{(t_1)^*}u^{(s)}_{(p_1)} \tag{2.27}$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{-e^3}{4(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_2)}\bar{v}^{(s')}_{(p_2)}\not{\epsilon}_2^{(t_2)^*}(\not{k}_2-\not{p}_2+m)\not{\epsilon}_3^{(t_3)^*}(\not{p}_1-\not{k}_1+m)\not{\epsilon}_1^{(t_1)^*}u^{(s)}_{(p_1)} \tag{2.28}$$

$$\mathcal{M}_3 = \frac{-e^3}{4(p_1\cdot k_2)(p_2\cdot k_1)}\bar{v}^{(s')}_{(p_2)}\not{\epsilon}_1^{(t_1)^*}(\not{k}_1-\not{p}_2+m)\not{\epsilon}_3^{(t_3)^*}(\not{p}_1-\not{k}_2+m)\not{\epsilon}_2^{(t_2)^*}u^{(s)}_{(p_1)} \tag{2.29}$$

$$\mathcal{M}_4 = \frac{-e^3}{4(p_1\cdot k_3)(p_2\cdot k_1)}\bar{v}^{(s')}_{(p_2)}\not{\epsilon}_1^{(t_1)^*}(\not{k}_1-\not{p}_2+m)\not{\epsilon}_2^{(t_2)^*}(\not{p}_1-\not{k}_3+m)\not{\epsilon}_3^{(t_3)^*}u^{(s)}_{(p_1)} \tag{2.30}$$

$$\mathcal{M}_5 = \frac{-e^3}{4(p_1\cdot k_3)(p_2\cdot k_2)}\bar{v}^{(s')}_{(p_2)}\not{\epsilon}_2^{(t_2)^*}(\not{k}_2-\not{p}_2+m)\not{\epsilon}_1^{(t_1)^*}(\not{p}_1-\not{k}_3+m)\not{\epsilon}_3^{(t_3)^*}u^{(s)}_{(p_1)} \tag{2.31}$$

$$\mathcal{M}_6 = \frac{-e^3}{4(p_1\cdot k_2)(p_2\cdot k_3)}\bar{v}^{(s')}_{(p_2)}\not{\epsilon}_3^{(t_3)^*}(\not{k}_3-\not{p}_2+m)\not{\epsilon}_1^{(t_1)^*}(\not{p}_1-\not{k}_2+m)\not{\epsilon}_2^{(t_2)^*}u^{(s)}_{(p_1)} \tag{2.32}$$

$\mathcal{M}=\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2+\mathcal{M}_3+\mathcal{M}_4+\mathcal{M}_5+\mathcal{M}_6$ とおくと、散乱断面積 σ を求めるのに必要なのは、$\overline{|\mathcal{M}|^2}$ である。ただし、$\overline{|\mathcal{M}|^2}=(1/4)\sum_{s,s',t_1,t_2,t_3}\mathcal{M}\mathcal{M}^*$ である。

$$d\sigma=\prod_{i=1}^{3}\frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^3 2\omega_i}\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m^4}}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3-p_1-p_2) \tag{2.33}$$

e^+ , e^- がともに静止している系 (実験室系) ではスカラーが $(p_1\cdot k_i)=m\omega_i\,,(p_1\cdot p_2)=m^2$ のように簡

単化できることにより、長い計算の後に

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \left(\frac{4e^3}{m\omega_1\omega_2\omega_3}\right)^2 \sum_{i=1}^{3} {\omega_i}^2 (m-\omega_i)^2 \tag{2.34}$$

を得る。式 (2.34) を 式 (2.33) に代入して関係式

$$\frac{d\Omega_2}{4\pi} = \frac{m(m-\omega_1)}{\omega_1\omega_2}\frac{d\omega_2}{\omega_2}$$

等を使って整理すると、

$$\sigma = \frac{8\alpha {r_0}^2}{\beta}\int_0^m d\omega_1 \int_{m-\omega_1}^{m} d\omega_2 \sum_{\text{(ijk):cyclic(123)}} \left(\frac{m-\omega_i}{\omega_j\omega_k}\right)^2 = \frac{8\alpha {r_0}^2}{\beta}(\pi^2-9) \tag{2.35}$$

最後に k_i の置換の数 3! を考慮して、式 (2.35) を 6 で割ると

$$\sigma = \frac{4}{3}\frac{\alpha {r_0}^2}{\beta}(\pi^2-9) \tag{2.36}$$

崩壊確率 Γ_{triplet} は媒質中で陽電子と束縛 1^3S_1 状態を作ることができる電子密度 ρ を用いて

$$\Gamma_{\text{triplet}} = \frac{4}{3}\alpha(\pi^2-9){r_0}^2\rho \tag{2.37}$$

式 (2.24),(2.37) より

$$\Gamma_{\text{triplet}} = (4\alpha(\pi^2-9)/9\pi)\Gamma_{\text{singlet}} = 7.1\times10^6\ [\text{sec}^{-1}]$$

であるから

$$\tau_{\text{triplet}} = 1/\Gamma_{\text{triplet}} = 1.41\times10^{-7}\ [\text{sec}] \tag{2.38}$$

2.4 Magnetic Quenching of the Positronium Dacay

ここでは静磁場中の Ps の寿命がどのように変化するかを現象論的に提示する。

まず静磁場の向きに Z 軸をとり、Z 軸に平行、反平行なスピンを持つ電子状態をそれぞれ $|e(\uparrow)\rangle, |e(\downarrow)\rangle$ と表し、同様に陽電子状態を $|p(\uparrow)\rangle, |p(\downarrow)\rangle$ と表す。このとき、

$$\begin{aligned}
&1\text{ 重項状態}: |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|e(\uparrow)\rangle|p(\downarrow)\rangle - |e(\downarrow)\rangle|p(\uparrow)\rangle\Big)\\
&3\text{ 重項状態}: |\psi_1\rangle = |e(\uparrow)\rangle|p(\uparrow)\rangle\\
&\qquad\qquad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|e(\uparrow)\rangle|p(\downarrow)\rangle + |e(\downarrow)\rangle|p(\uparrow)\rangle\Big)\\
&\qquad\qquad |\psi_{-1}\rangle = |e(\downarrow)\rangle|p(\downarrow)\rangle
\end{aligned}$$

いま Magnetic Hamiltonian $H_m = \mu_B B_z(\sigma_{ez}-\sigma_{pz})$ で与えられるから、微分方程式を書き下すために Matrix elements を求める。(ここで μ_B は Bohr 磁子で $\mu_B = \frac{\hbar e}{2m} = 5.8\times10^{-11}\,[\text{MeV/T}]$、磁場 $\boldsymbol{B} = B_z\hat{z}$、$\sigma$ は Pauli matrix である。)

$$\begin{aligned}
M_z = \langle\psi_0|H_m|\psi\rangle &= \mu_B B_z \qquad (2.39)\\
\langle\psi_0|H_m|\psi_1\rangle = \langle\psi_0|H_m|\psi_0\rangle &= \langle\psi_0|H_m|\psi_{-1}\rangle = 0\\
\langle\psi_1|H_m|\psi_1\rangle = \langle\psi_1|H_m|\psi_{-1}\rangle &= 0\\
\langle\psi_1|H_m|\psi\rangle = \langle\psi_{-1}|H_m|\psi\rangle &= 0\\
\langle\psi|H_m|\psi\rangle = \langle\psi_{-1}|H_m|\psi_{-1}\rangle &= 0
\end{aligned}$$

ここで、状態 $|\varphi\rangle$ を

$$|\varphi\rangle = C\,|\psi\rangle \exp(-iEt/\hbar) + \sum_{i=-1}^{1} C_i\,|\psi_i\rangle \exp(-iE_0 t/\hbar)$$

と展開すると、$C,\ C_i$ の decay を考慮した微分方程式は次のようになる

$$\frac{dC_0}{dt} = -\frac{i}{\hbar} M_z C \exp(i\omega_0 t) - \gamma_t C_0 \tag{2.40}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{i}{\hbar} M_z C_0 \exp(-i\omega_0 t) - \gamma_s C \tag{2.41}$$

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{dC_{-1}}{dt} = 0 \tag{2.42}$$

ただし、$\hbar\omega_0 = E_0 - E$　(図 2.1 参照) である。式 (2.26) (2.38) より、Singlet life $= 1.2 \times 10^{-10}$ [sec] 、Triplet life $= 1.4 \times 10^{-7}$ [sec] 。これらから $\gamma_t = 3.7 \times 10^6\,[\mathrm{sec}^{-1}]$ 、$\gamma_s = 4 \times 10^9\,[\mathrm{sec}^{-1}]$ にとる。ここで、式 (2.42) から分かるように、triplet Ps でスピンが ± 1 の状態は、磁場の影響を受けず、従って寿命も変化しない。

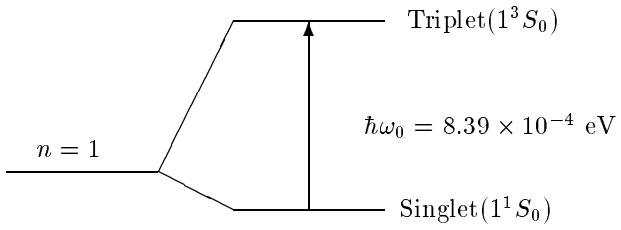


図 2.1 :Positronium の微細構造

b_0 を $C_0 = b_0 \exp(-\gamma_t t)$、$b$ を $C = b \exp(-\gamma_s t)$ で定めて、式 (2.40) (2.41) を書き直すと

$$\frac{db_0}{dt} = -\frac{i}{\hbar} M_z b \exp\left((i\omega_0 - \gamma_s')t\right) \tag{2.43}$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{i}{\hbar} M_z b_0 \exp\left(-(i\omega_0 - \gamma_s')t\right) \tag{2.44}$$

ここで $\gamma' = \gamma_s - \gamma_t$ とした。式 (2.43) (2.44) から b を消去して b_0 の方程式を導くと、

$$\ddot{b_0} + (\gamma' - i\omega_0)\dot{b_0} + \frac{{M_z}^2}{\hbar^2} b_0 = 0 \tag{2.45}$$

式 (2.45) の固有方程式 ；

$$\alpha^2 + (\gamma' - i\omega_0)\alpha + (M_z/\hbar)^2 = 0$$

この解を $\alpha_+\,,\ \alpha_-$ とすると、

$$b_0(t) = A \exp(\alpha_+ t) + B \exp(\alpha_- t) \quad (A,\ B \text{ は定数 })$$

$$\alpha_\pm = \frac{i\omega_0 - \gamma'}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(i\omega_0 - \gamma')^2 - 4\left(\frac{M_z}{\hbar}\right)^2}$$

これから

$$C_0(t) = A \exp\left((\alpha_+ - \gamma_t)t\right) + B \exp\left((\alpha_- - \gamma_t)t\right) \tag{2.46}$$

$$C(t) = A' \exp\left((\alpha_+ - \gamma_t + i\omega_0)t\right) + B' \exp\left((\alpha_- - \gamma_t + i\omega_0)t\right) \tag{2.47}$$

ただし、$A \sim A'$　$B \sim B'$

以上から、$\alpha_\pm$ を評価すると mixed decay rate が分かる。$\gamma'/\omega_0 \ll 1$ に注意して 1 次のオーダーまでとると、

$$\alpha_- = -i\omega_0 \left(1 + \frac{\gamma'}{i\omega_0}\right) \left(\frac{M_z}{\hbar\omega_0}\right)^2 + \mathcal{O}\left((\gamma'/\omega_0)^2\right)$$
$$\alpha_+ = i\omega_0 - \gamma' - \alpha_-$$

よって $C_0,\ C$ の decay rate は、$\gamma_t + \gamma'(M_z/\hbar\omega_0)^2,\ \gamma_s - \gamma'(M_z/\hbar\omega_0)^2$ で与えられる。我々の実験で観測の対象となるのは前者のほうなので、

$$\gamma_{\text{mixed}} = \gamma_t + \gamma' \left(\frac{M_z}{\hbar\omega_0}\right)^2 \tag{2.48}$$

とおいておく。$\gamma = \Gamma/2,\ \gamma' = \gamma_s - \gamma_t \sim \gamma_s$ 及び式 (2.39) を代入すると、

$$\Gamma_{\text{mixed}} = \Gamma_t + \Gamma_s \left(\frac{\mu_B}{\hbar\omega_0}\right)^2 B_z^2 \tag{2.49}$$

となる。これを計算すると、B_z を [kG] 単位として、

$$\Gamma_{\text{mixed}} = \Gamma_t + \Gamma_s B_z^2 (2.0 \times 10^{-4}) \tag{2.50}$$

が得られる。

Chapter 3

実験方法

3.1 寿命測定の原理

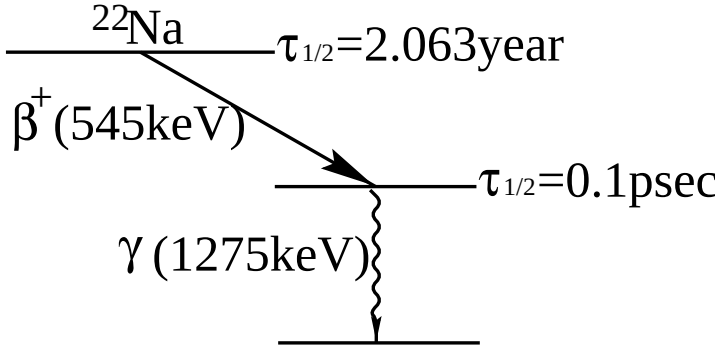


図 3.1 :^{22}Na の崩壊モード

本実験では e^+ ソースとして ^{22}Na を用いた。まず ^{22}Na の崩壊を図 3.1 に示す。^{22}Na は、β^+ 崩壊し、その後すぐ ($\ll 1$ nsec) γ 崩壊する。実験は、この e^+ がまわりにいる e^- と Ps をつくり、対消滅するまでの時間を測り、寿命を決定することである。

e^+ が放出されてから e^- と束縛状態をつくるまでの時間が無視できるならば、次のような 2 つのやり方が考えられる。これらのセットアップで実験するときのシンチレーターについての注意と、簡単に分かる長所、短所を書いておく。

e^+ スタート型 放出される e^+ と Ps 崩壊後の γ を見て、その時間間隔を測る (図 3.2)

シンチレーター e^+ の通るものは、非常に薄くなくてはならない

長所 コンパクトなセットが組める

短所 1275keV γ 線がノイズになる

γ スタート型 e^+ と同時に放出される γ と Ps 崩壊後の γ を見て、その時間間隔を測る (図 3.3)

シンチレーター 1275keV γ を見るものは、ある程度の重さと大きさが必要

長所 e^+ がエネルギーロスしない。

短所 e^+ がどっちに飛んだかは分からない

また、どちらにしても全てのシンチレーターには良い時間分解能が必要である。

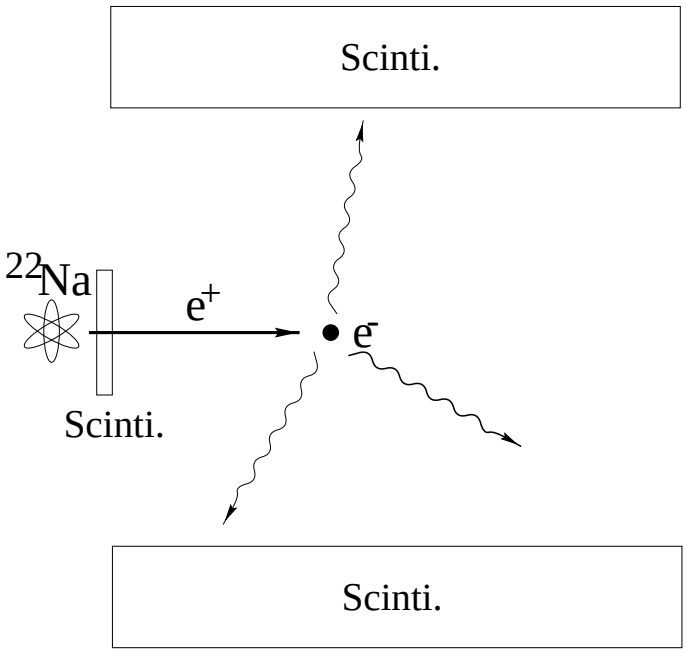


図 3.2 :e^+ スタート型の測定原理

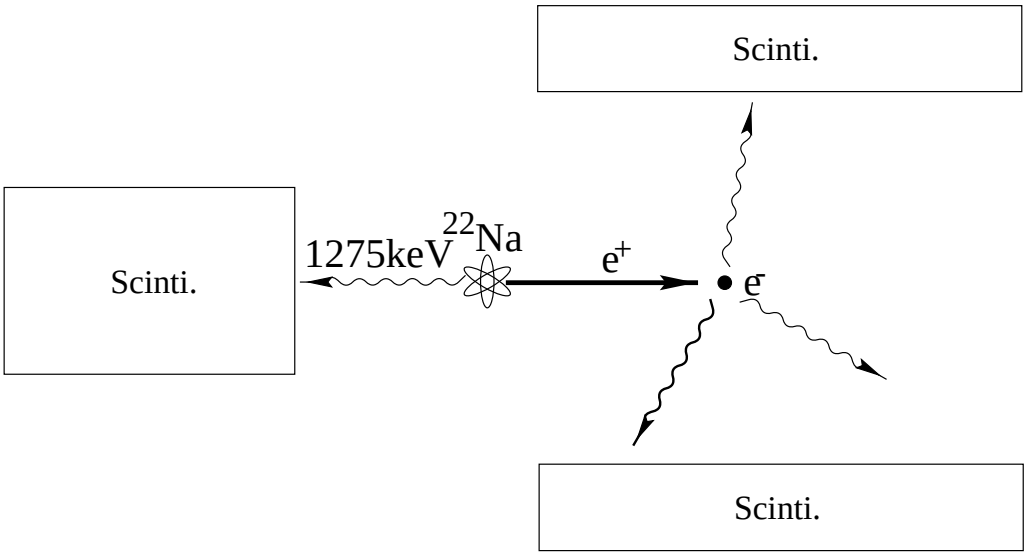


図 3.3 :γ スタート型の測定原理

3.2 実験の方法

e^+ スタート型の方法で実験を行うためには、薄いプラスチックシンチレータと ^{22}Na ソースが一体となったものが必要である。当初は、過去の課題研究Ｐ２で使われていたものを用いていた。しかし、その部品はシンチレータの厚さが約 1 mm あり、e^+ が通り出来ることが出来なかったらしく、実験はうまく行かなかった。そこで、γ スタート型で実験を行うことにした（Appendix A を参照）。

我々の求めたいのは真空中での Ps の寿命であるが、真空中では Ps が形成されない。そこで、気体の圧力を変化させて decay rate を測定し、decay rate と圧力の関係を求め、圧力が 0 の時の寿命を推測することにした。気体は、当初は窒素（N_2）を用いていたが、あとで述べるように窒素ではうまく行かないことがわかったので、最終的にはイソブタン（C_4H_{10}）を用いた。

行った実験は以下の通りである。

実験１ まず、triplet Ps の寿命を測定した。具体的には、磁場をかけない状態で、気体（イソブタン）の圧力を 0.97 atm, 0.73 atm, 0.48 atm, 0.24 atm にし、それぞれの状態で decay rate を測定した。そして、圧力と decay rate の関係が線形であると仮定して、真空中での decay rate 及び寿命を推定した。

実験２ 次に、磁場をかけて同じ実験をし、singlet Ps と triplet Ps の状態の混合が起こることを確認した。そして、混合状態の decay rate から、singlet Ps の寿命を求めた。具体的には、磁場を 2 kG, 3 kG, 4 kG の場合に、圧力を 0.97 atm, 0.73 atm, 0.48 atm にして測定を行った。

原理的には、この 2 つの実験は同じセットアップで行うことができる。しかし、実験２の装置は磁場中を用いる関係から種々の制約が加わる。そこで、実験１と実験２では少しセットアップを変えた。念のため、実験２の装置でも磁場をかけずに測定を行い、実験１と比較した。

ところで、Ps 崩壊後の γ 線をとらえる際には、原理的には 3 つのシンチレータが光ることを要求すれば、Ps が 3 γ に崩壊したイベントだと同定することが出来る。しかし、こうするとイベント数が極端に減ってしまい、返って不利であるので、今回の実験では 1 つ以上のシンチレータが光ることしか要求しなかった。

3.3 triplet Ps の寿命の測定のための装置（実験１）

図 3.4 及び図 3.5 に、triplet Ps の寿命測定のための装置を示す。以下に、各々の要素について説明する。

BaF_2 ^{22}Na からでる 1275 keV の γ 線をとらえるために、BaF_2（バリウムフロライド）シンチレータを用いた。BaF_2 の発する光は、時間幅が 1 nsec 以下のもの（fast component）と 1 μsec 程度のもの（slow component）の 2 成分からなる。前者は時間の精度が必要な時に、後者はエネルギーの測定の際に用いることが出来る。この 2 つの成分は、共に紫外光である。それ故、PMT は紫外光を通すタイプのもの（R2256）を用いた。

BaF_2 は 1275 keV の γ 線を検出しなければならないが、e^+ と e^- の対消滅によって生じる、511 keV の γ 線には反応してはならない。そこで、BaF_2 の ^{22}Na に対する ADC 分布をディスクリミネータの threshold を変えながら取り、条件を満たすような threshold の値を決定した。

triplet Ps の寿命を測定するために用いた BaF_2 の結晶の大きさは 40 mm × 60 mm × 150 mm である。

plastic scintillator Ps の崩壊後の γ 線を検出するために、プラスチックシンチレータを用いた。triplet Ps の寿命を測定するためには、大きさが 60 mm × 100 mm × 200 mm のものを 4 つ用いた。なお、シンチレータは PMT に接着したのち、遮光してある。

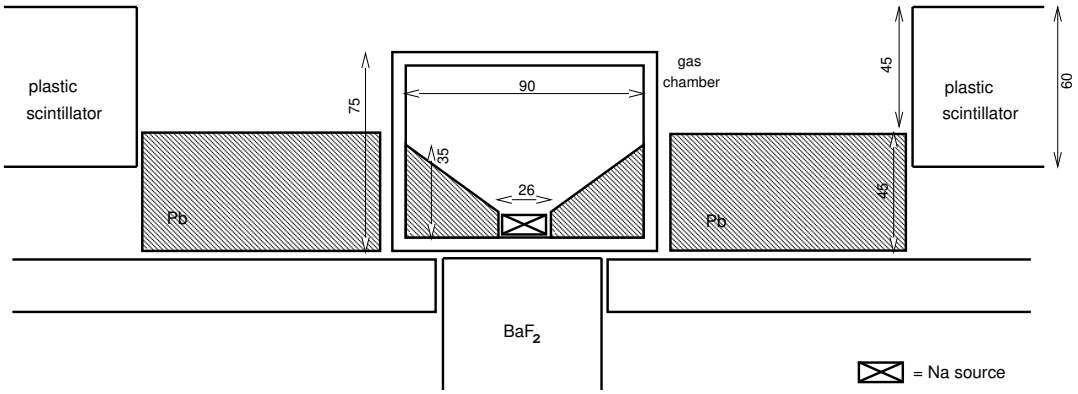


図 3.4 :triplet Ps の寿命測定のための装置 (断面図)

実験装置を横から見たときの断面図。

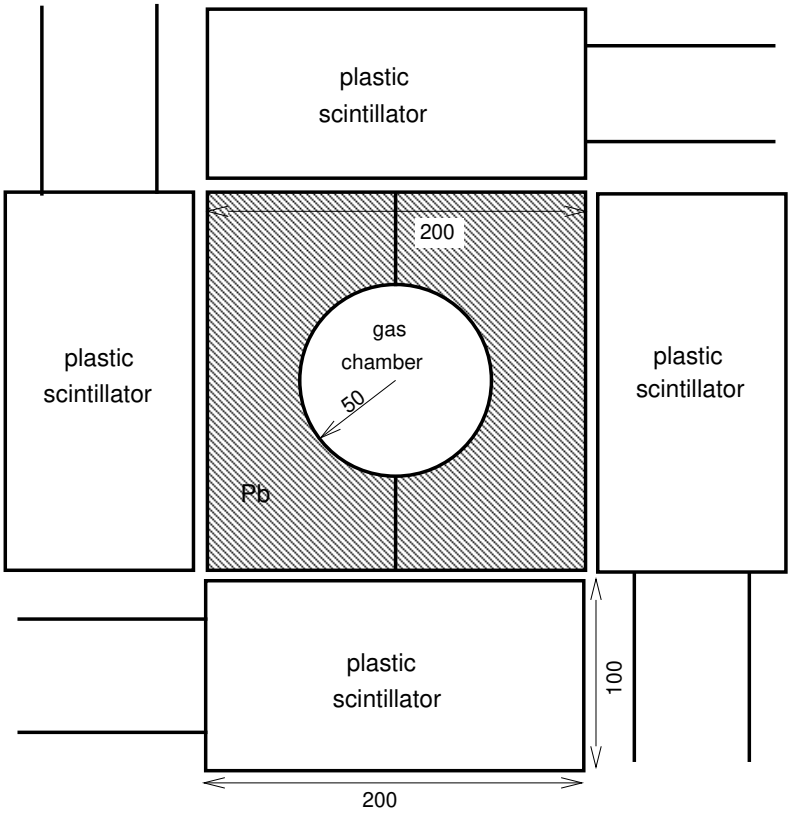


図 3.5 :triplet Ps の寿命測定のための装置 (外観)

実験装置を上から見たときの図。

Ps が 3 γ に崩壊した場合、γ 線のエネルギーは 300 keV 程度であると思われるので、PMT の HV は PMT がこれらに十分反応するような値に設定した。

容器及びガス Ps を生成するための容器 (gas chamber) は図 3.4 のように、半径 10 cm 高さ 7.5 cm の円筒形をしている。材質はアルミニウムで厚さは 5 mm である。この容器は、図 3.6 の様に、ボンベや真空ポンプと繋がっていて、1 気圧以下の自由な圧力を保つことが出来る。ただ、容器の構造上、1 気圧以上を長時間保つことはできない。

ガスは、当初窒素 (N_2) を用いていたが、最終的にはイソブタン (C_4H_{10}) を用いた。

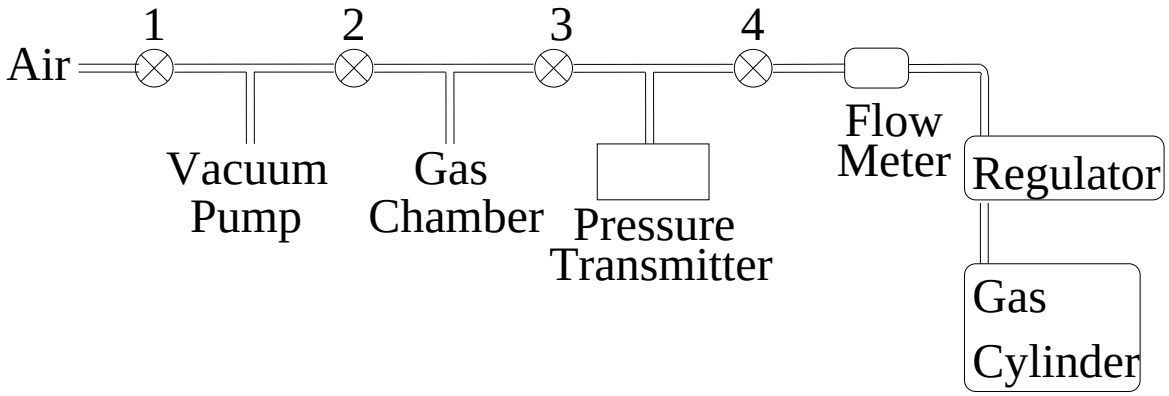


図 3.6 :ガス系

Air は外気、Gas Cylinder はガスボンベ。Flow Meter は流量計。容器 (Gas Chamber) 内に気体を入れる際には、まず、1, 4 の弁を閉じて真空を引いた後、2 の弁を閉じ 4 の弁を開け、ガスボンベから気体を注入する。

鉛 ソースからでる γ 線が直接 plastic scintillator に当たらないように、ガス容器の中と外に、遮蔽用の鉛を配置した。ガス容器の中のものは、円筒から円錐を切り取ったような形をしている。一方、外にあるものは、直方体から円筒を切り取ったような形をしている。

3.4 singlet Ps の寿命を求めるための装置 (実験２)

singlet Ps の寿命を求めるためには、装置全体を磁場中に入れる必要がある。測定のために用いたの装置を、図 3.7、3.8 に示す。ここで用いたもののうち、ガス容器と遮蔽用鉛は triplet Ps の寿命測定 (実験１) のときに用いたものと同じものである。

電磁石 (magnet) 磁場を発生させるために、ヘルムホルツコイル型の電磁石を用いた。電磁石のギャップの広さは 10 cm であった。実際に電流を流してみたところ、10 A の電流を流したときに 1.0 kG の磁場が発生した。電流と磁場の関係には、ヒステレシス効果が見られたが、この効果による線形からのずれはせいぜい 5%程度であった。また、磁場の大きさは当然場所によって異なったが、ガス容器をおいた部分では、やはり 5%ぐらいの精度で一様であった。

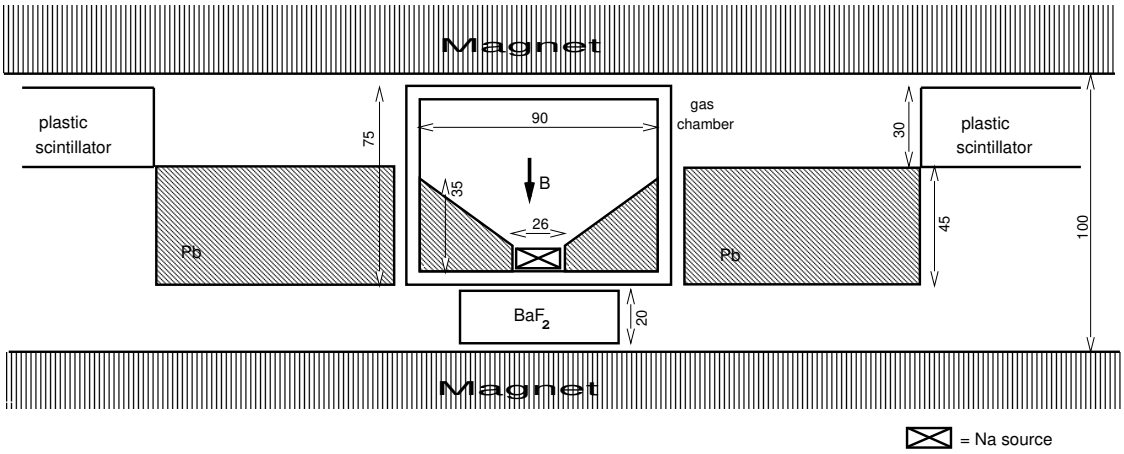


図 3.7 :singlet Ps の寿命測定のための装置 (断面図)

実験装置を上から見たときの断面図。

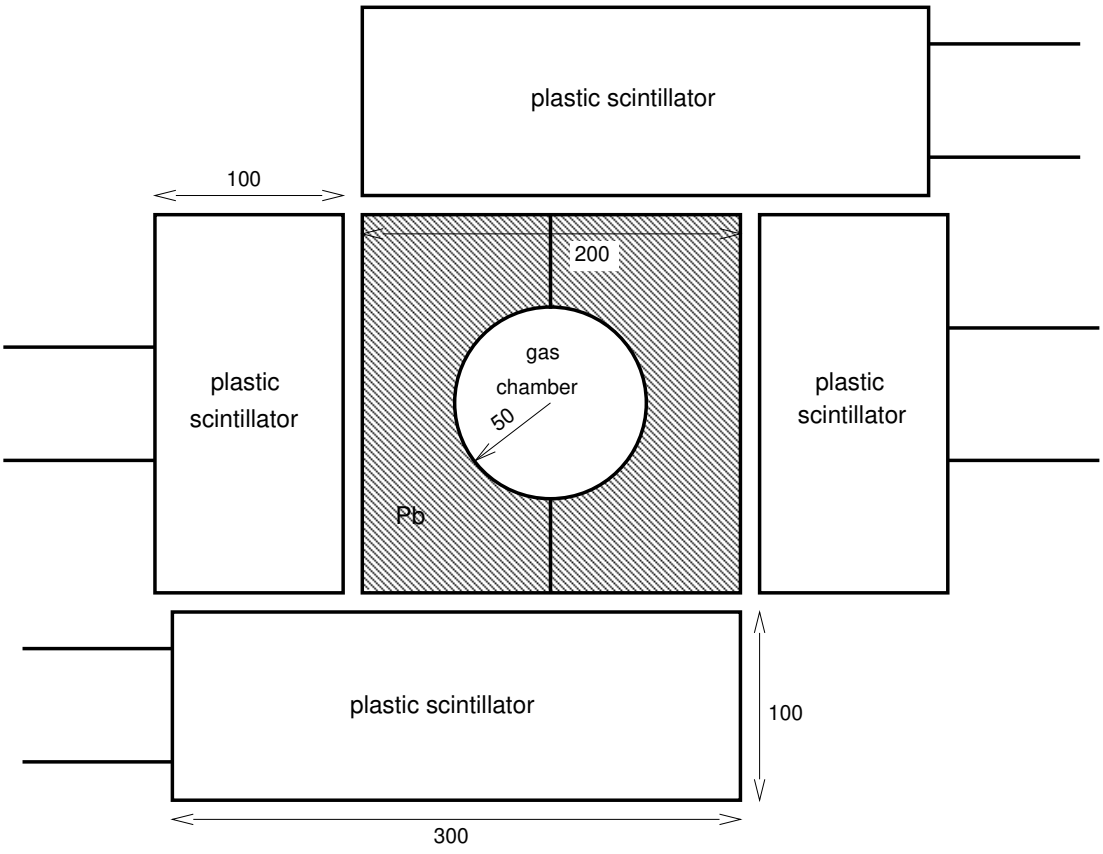


図 3.8 :singlet Ps の寿命測定のための装置 (外観)

実験装置を横から見たときの図。但し、電磁石は描いてない。

BaF_2　磁場中に入れた BaF_2 は、電磁石のギャップの広さが 10 cm であるという制約から、厚さが 20 mm 縦 75 mm 横 60 mm の大きさの結晶を用いた。一方、PMT は磁場の影響を受けないようにしなければならない。そこで、20 mm × 60 mm × 250 mm の石英の板をライトガイドとして用い、BaF_2 と PMT の間に挿入した。これにより、PMT を電磁石の外に出すことが出来た。PMT は磁気遮蔽のために鉄ブロックで囲った。それでも、漏れ磁場の影響で PMT のゲインが小さくなっていたので、PMT の HV を大きくして対処した。

実験 1 と同様に、ディスクリミネータの threshold の値は、1275 keV の γ 線のみには反応するが 511 keV の γ 線には反応しないような値に設定した。

plastic scintillator　BaF_2 と同様に、プラスチックシンチレータ側も PMT を磁石の外に配置するために、ライトガイドを用いた。こちらはアクリル製のライトガイドを用いた。プラスチックシンチレータは、30 mm × 100 mm × 200 mm 及び 30 mm × 100 mm × 300 mm の二種類のものを 2 つずつ用意した。ライトガイドは 30 mm × 60 mm × 450 mm のものを 4 つ用意した。これらを、図 3.8 のように接着した。

3.5　データ収集

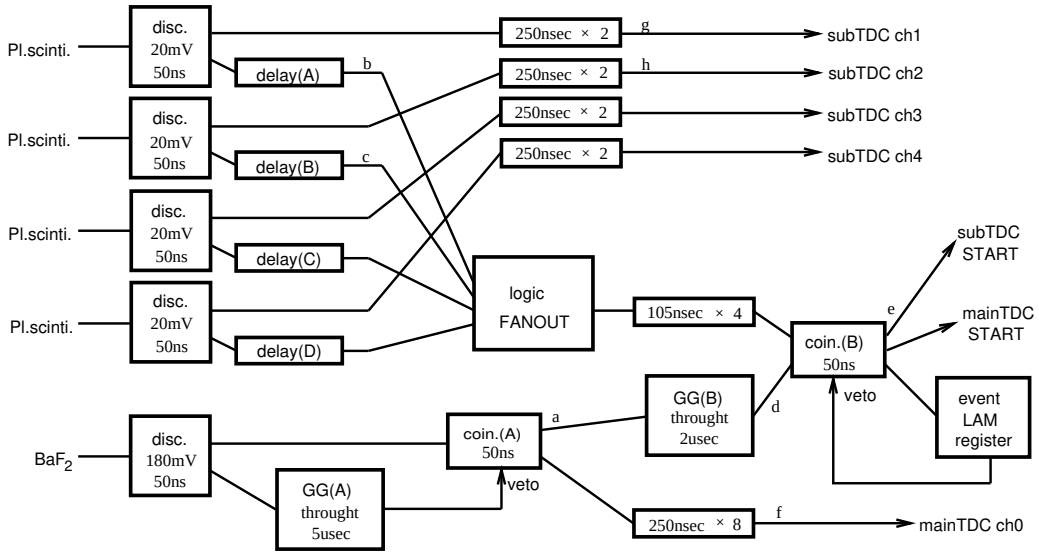


図 3.9 :データ収集のための回路

disc. はディスクリミネータで、値は threshold と width。coin. はコインシデンスで、値は width。GG はゲートジェネレータで、値は delay と gate width。単に 250 nsec × 5 のように記してあるのは、logic delay である。

測定したい量は、BaF_2 が 1275 keV γ 線を検出してからプラスチックシンチレータのいずれか（1 つ以上）が γ 線を検出するまでの時間である。

データの収集のための回路を図 3.9 に示す。logic FANOUT とは単純にシグナルの OR をとるものである。又、TDC (図中には main TDC と書いてある) は、較正を行った結果、1 channel が 1.29 nsec に相当することがわかった。

シンチレータから来た信号は、全てディスクリミネータによってデジタル信号に変えられる。まず、BaF_2

が 1275 keV の γ 線を検出すると、ゲートジェネレータ B によって幅 2 μsec のゲートが開く。このゲートが開いている間に、いずれかのプラスチックシンチレータが信号を検出したとすると、コインシデンス B が ON になるので。コンピュータ及び TDC に START がかかる。実際には、プラスチックシンチレータ側には 105 nsec の logic delay が 4 つ入っているので、BaF_2 とプラスチックシンチレータが同時に光ったとしても START がかかるようになっている。一方、BaF_2 の信号は、250 nsec の delay を 8 個通したあとに、TDC の STOP にも入っている。もし、BaF_2 が光ってから遅れてプラスチックシンチレータが光ったとすると、その時間差だけ遅れて START シグナルは発生するが、STOP シグナルは常に BaF_2 から一定時間遅れて TDC に到達する。これにより、BaF_2 が光ってからのプラスチックシンチレータが光までの時間を測定することが出来る。但し、この時間が大きければ大きいほど TDC の値は小さくなる。また、各プラスチックシンチレータのシグナルも別の TDC (図では sub TDC と書いてある) の STOP シグナルになっている。これによって、どのシンチレータが鳴ったかを知ることが出来る。

尚、ゲートジェネレータ A は、BaF_2 の slow component がディスクリミネータの threshold を越えたとしても、それが新たなゲートを作らないようにするためのものである。

図 3.10 に、各地点でのデジタル信号の様子の一例を示す。これは、BaF_2 が光ってからしばらくしてプラスチックシンチレータが 1 つだけ光った場合である。

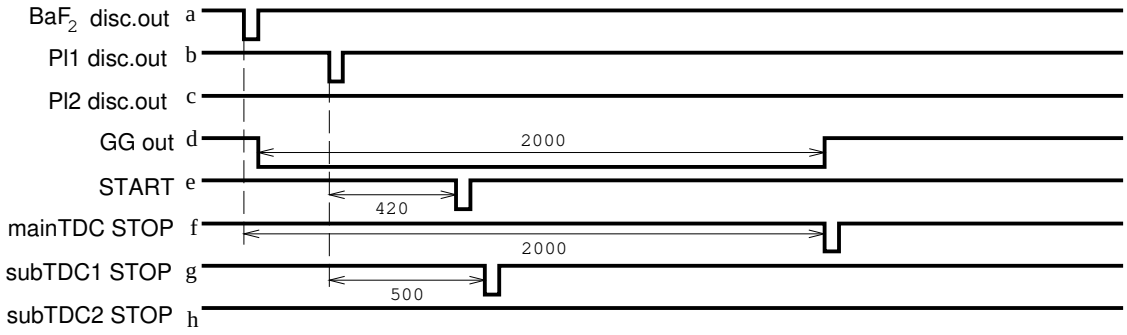


図 3.10 :タイミング図

数字の単位は nsec 。

3.6 解析方法

実験 1 では、得られた TDC のヒストグラムを $y = a\exp(\Gamma_t x) + c$ の形にフィットした。このとき、triplet Ps の寿命 τ_t は $\tau_t = 1/\Gamma_t$ で与えられる。

実験 2 では、triplet Ps と singlet Ps の混合が起こる。但し、混合するのは triplet Ps のスピンが 0 のものだけで、スピンが ± 1 の状態は混合せずに、τ_t の寿命で崩壊する。よって、TDC のヒストグラムを $y = a\exp(\Gamma_{\rm mixed} x) + b\exp(\Gamma_t x) + c)$ の形にフィットした。ここで、フィットを簡単にするため、Γ_t をフリーパラメータとせずに、実験 1 で得られた値を用いた。一方、$\Gamma_{\rm mixed}$ と磁場 B 及び singlet Ps の decay rate Γ_s の間には、式 (2.50)

$$\Gamma_{\rm mixed} = \Gamma_t + \Gamma_s B^2 (2.0 \times 10^{-4})$$

(但し、B は [kG] 単位) の関係があるので、B^2 と $\Gamma_{\rm mixed}$ を線形フィットすれば、その係数から Γ_s が (従って τ_s が) 求まる。

Chapter 4

データと解析

4.1 triplet Ps の寿命測定 (実験１)

4.1.1 TDC ヒストグラム

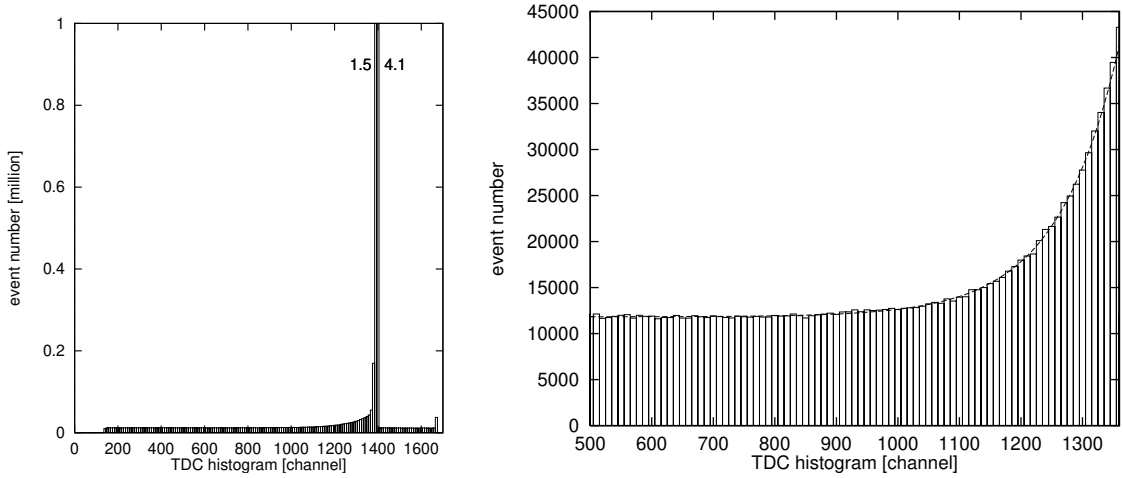


図 4.1 :TDC ヒストグラム (圧力 0.97 atm)

左の図が全データ。右の図は、そのうち 500 channel 以上 1360 channel 以下を拡大したもの。
右の図の点線は、データを $y = a\exp[\Gamma(x - x_{\max})] + c$ の形でフィットしたもの。

まず、最初に実験１で triplet Ps の寿命を測定した結果を示す。この実験では、8 kHz で BaF_2 が光り、200 Hz でデータをとることが出来た。

図 4.1 に、イソブタンの圧力を 0.97 atm にしたときの TDC ヒストグラムを示す。棒グラフの 1 ビンは、10 channel である。曲線は、500 channel 以上 1320 channel のデータを $y = a\exp[\Gamma(x - x_{\max})] + c$ (但し $x_{\max} = 1360$) の形でフィットしたものである。

表 4.1 に 4 つのプラスチックシンチレータ (A,B,C,D) 毎に別のヒストグラムを作り、それをフィットした結果を載せる。この表の χ^2/n (1 自由度あたりの χ^2) をみると、シンチレータＤのデータが特にうまくフィットできていないことがわかる。シンチレータＡのデータとシンチレータＤのヒストグラムを図 4.2 に示すが、このヒストグラムを見ると、シンチレータＤのデータには、950 channel の付近に小さな山 (ピーク) が見える。これは、他のシンチレータには見えず、かつ圧力を変えても消えないことから、PMT 又は回路上の問題と思われるが、原因は解明できなかった。そこで、以後の解析ではこのシンチレータのデータを使わず、他の 3 つのシンチレータのデータ (表 4.1 で 「A,B,C 合計」と書いてあるデータ) のみを用いた。

scintillator	$\Gamma\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}]$	$\sigma_\Gamma\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}]$	χ^2/n
A	7.71	0.10	1.06
B	7.71	0.12	1.14
C	7.67	0.10	1.37
D	7.85	0.11	1.93
total	7.73	0.05	2.01
A,B,C 合計	7.69	0.06	1.30

表 4.1 :圧力 0.97atm の場合のヒストグラムをフィットした結果。

χ^2/n は 1 自由度あたりの χ^2

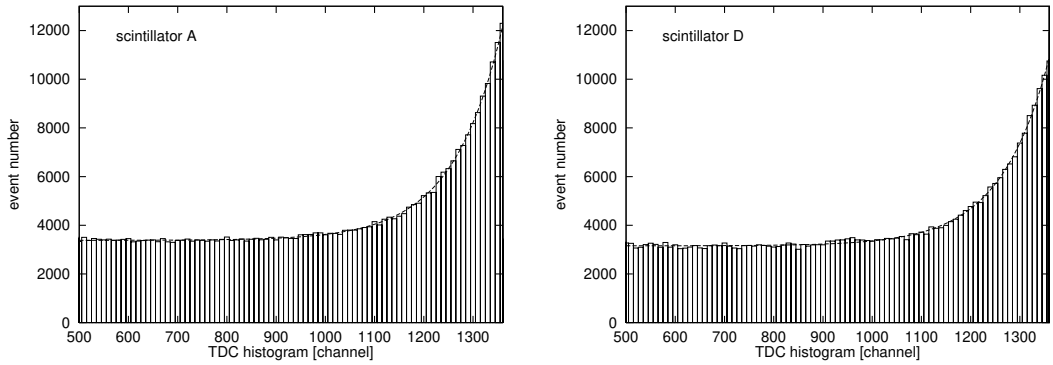


図 4.2 :シンチレータ A,D の TDC ヒストグラム (圧力 0.97 atm)

左がシンチレータ A、右がシンチレータ D のヒストグラム。シンチレータ D のデータには、950 channel 付近に、小さな山が見える。点線は、データを $y = a\exp[\Gamma(x - x_{\max})] + c$ の形でフィットしたもの。

4.1.2 測定結果

既に述べたように、今回の実験では圧力を 0.97 atm, 0.73 atm, 0.48 atm, 0.24 atm の 4 通りで測定を行った。それぞれの場合について、前節と同様にフィットを行った。その結果を表 4.2 に示す。

この表のデータ数とは、2 γ イベント (BaF_2 とプラスチックシンチレータが同時になったようなイベント) やバックグラウンドのイベントも含めた全イベント数である。これに対して、3 γ イベント数とは、フィットした結果から、triplet Ps が 3 γ に崩壊したと思われるイベント数を推定したものである。これを見ると、ガスの圧力が小さくなるとともに、全イベント数に対する 3 γ イベントの比も小さくなっている。これは、ガスが希薄な場合、^{22}Na から放出された e^+ がガス中の e^- と結合できず、そのままガス容器の側壁に衝突してしまい、即座に消滅してしまったためと思われる。

triplet Ps の decay rate Γ とガスの圧力 P の関係が関係が線形であると仮定して、$\Gamma = a + bP$ の形で線形フィットを行ったところ、

$$a = 7.13 \pm 0.12\ [\mu\mathrm{sec}^{-1}], \quad b = 0.57 \pm 0.15\ [\mu\mathrm{sec}^{-1}]$$

という結果が得られた (図 4.3)。この a の値が、真空中での decay rate である。

圧力 [atm]	データ数	3 γ イベント数	Γ [μsec^{-1}]	σ_Γ [μsec^{-1}]	χ^2/n
0.97	5.8×10^6	2.2×10^5	7.69	0.06	1.30
0.73	4.9×10^6	1.9×10^5	7.57	0.07	1.54
0.48	7.3×10^6	1.8×10^5	7.34	0.08	1.56
0.24	1.2×10^7	1.5×10^5	7.35	0.12	1.75

表 4.2 :圧力を変化させて測定したときのデータ

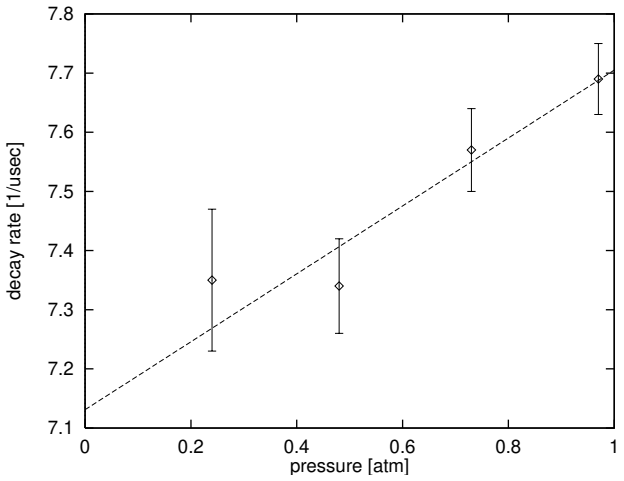


図 4.3 :triplet Ps の decay rate と圧力の関係

以上より、triplet Ps の寿命は、

$$\tau_t = \frac{1}{a} = 140.2 \pm 2.3 \ [\mathrm{nsec}] \tag{4.1}$$

と求まった。

4.1.3 フィットについて

triplet Ps の寿命を求めるために $y = a \exp[\Gamma(x - x_{\max})] + c$ の形にフィットしたが、その際、フィットは 500 channel 以上、1320 channel 以下のデータを用いた。また、10 channel (12.9 nsec) を 1 ビンとして扱った。しかし、このようにする必然性はないので、使うデータの範囲、ヒストグラムのビン幅の取り方を変えた場合に、結果がどのように異なるかを調べておく。

例によって、圧力が 0.97 atm の場合について見てみることにする。表 4.3 に、フィットの際に使うデータの範囲、ヒストグラムのビン幅を変えてフィットを行った結果を示す。

この表を見ると、統計誤差の範囲内には収まっているものの、フィットの仕方を変えると、少し結果が変わってしまうことがわかる。他の圧力の場合についても同様なことを調べてみた結果、大方同じような傾向にあった。

4.1.4 真空中での測定結果

同様の測定は真空中でも行った。そのときのデータを図 4.4 に示す。

フィットに使うデータの範囲	ビン幅 [channel]	Γ [μsec^{-1}]	σ_Γ [μsec^{-1}]	χ^2/n
500 $\sim$ 1320	10	7.69	0.06	1.30
500 $\sim$ 1260	10	7.74	0.11	1.21
500 $\sim$ 1200	10	7.67	0.19	0.91
800 $\sim$ 1320	10	7.75	0.08	1.57
500 $\sim$ 1320	5	7.71	0.06	2.23
500 $\sim$ 1320	20	7.72	0.05	1.20

表 4.3 :フィットの方法を変えたときの結果への影響

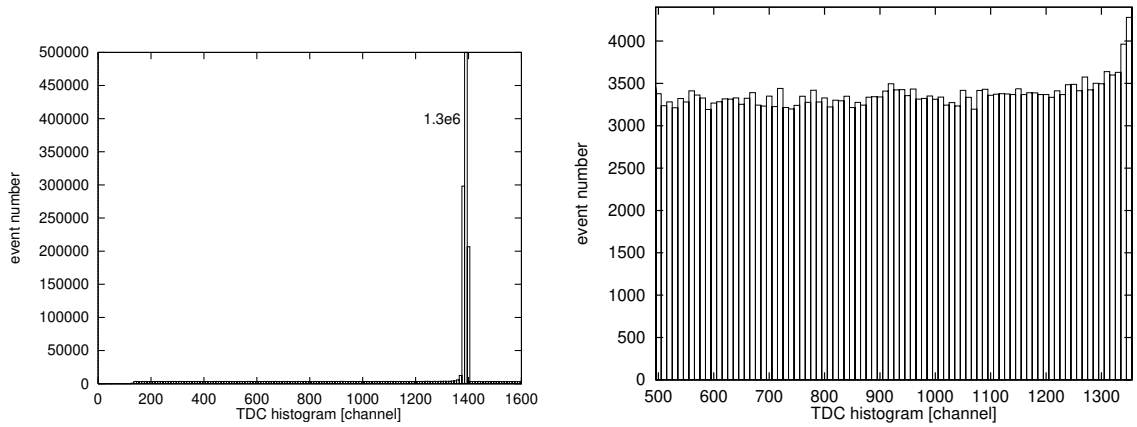


図 4.4 :真空中で測定したときの TDC ヒストグラム

真空中でのデータ。3 γ に崩壊したイベントは見当たらない。1400 channel 付近にあるピークは、金属内などで形成された Ps がすぐに 2 γ に崩壊したイベントである。

金属中 (容器等) で Ps が形成された場合、周りの電子の影響で即座に 2 γ に崩壊する。一方、真空中では Ps が生成されないので、3 γ に崩壊するイベントはないはずである。それ故、このデータはガス中で見えた崩壊曲線が Ps が 3 γ に崩壊したイベントであることの間接的な証拠になっている。

4.2 磁場中の状態混合と singlet Ps の寿命測定 (実験 2)

4.2.1 プラスチックシンチレータについて

この実験でも 4 つのプラスチックシンチレータを用いた。しかし、これらは実験 1 で用いたシンチレータとは異なるにもかかわらず、やはり 4 本のうち 1 本のシンチレータに同じような症状が現れた。やむなくこのシンチレータのデータは捨て、残りの 3 本のシンチレータのデータのみを使った。なお、データが使えなかったシンチレータは大きさが 30 mm $\times$ 100 mm $\times$ 300 mm のもの (ライトガイドと T 字型に接着されたのではない方。図 3.8 参照。) である。

4.2.2　磁場なしでの測定

磁場をかけて測定する前に、磁場をかけずにデータをとってみた。ガスの圧力が $0.97\,\mathrm{atm}$ の場合の TDC ヒストグラムを図 4.5 に示す。実験 1 のデータに比べ S/N 比 (signal と noise の比) が少し悪いのは、装置の差から来るものである。

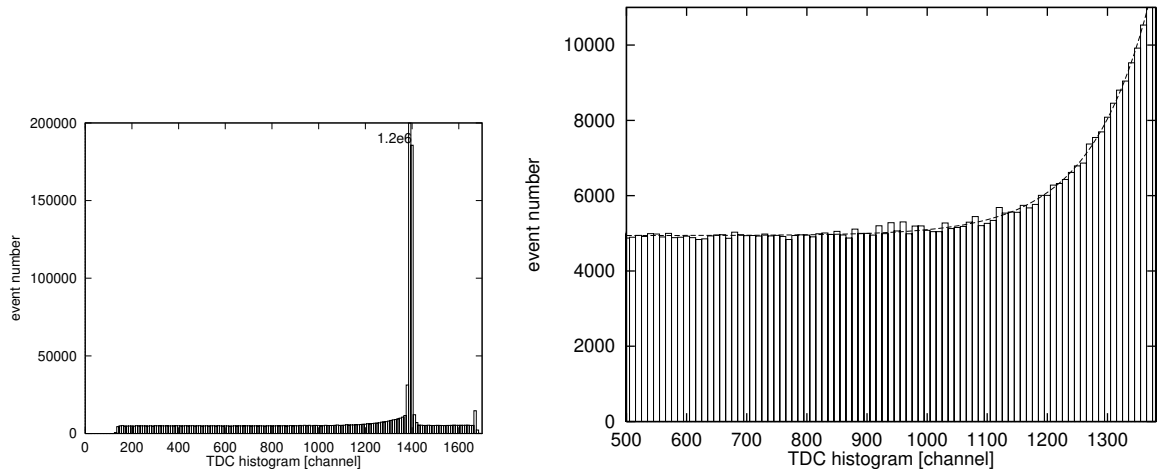


図 4.5 :磁場をかけないときの TDC ヒストグラム (圧力 $0.97\,\mathrm{atm}$)

左の図が全データ。右の図は、そのうち $500\,\mathrm{channel}$ 以上 $1380\,\mathrm{channel}$ 以下を拡大したもの。右の図の点線は、データを $y = a\exp[\Gamma(x - x_{\max})] + c$ の形でフィットしたもの。

表 4.4 に、実験 2 の装置で実験 1 と同様の実験を行った結果を示す。

圧力 [atm]	データ数	3γ イベント数	$\Gamma\ [\mu\mathrm{sec}^{-1}]$	$\sigma_\Gamma\ [\mu\mathrm{sec}^{-1}]$	χ^2/n
0.97	2.3×10^6	6.9×10^4	7.74	0.14	1.31
0.73	1.3×10^6	2.8×10^5	7.84	0.26	1.11
0.48	1.8×10^6	3.4×10^4	7.33	0.22	1.34
0.24	1.2×10^7	1.5×10^4	7.21	0.40	1.52

表 4.4 :磁場をかけなかったときのデータ

このデータを、decay rate Γ とガスの圧力 P について、$\Gamma = a + bP$ の形でフィットしたところ、

$$a = 7.05 \pm 0.34\ [\mu\mathrm{sec}^{-1}], \quad b = 0.75 \pm 0.42\ [\mu\mathrm{sec}^{-1}\mathrm{atm}^{-1}]$$

の値が得られ、真空中での triplet Ps の寿命は、

$$\tau_t = \frac{1}{a} = 141.8 \pm 6.8\ [\mathrm{nsec}]$$

と求まった。これは、実験 1 の結果 (式 (4.1) 参照) と合致している。

4.2.3 磁場中での測定結果

次に磁場をかけて測定を行った。このときの BaF_2 のレート及びスタートレートは、磁場の大きさにもよるが、それぞれおよそ 3 kHz、50 Hz であった。

図 4.6 にガスの圧力を 0.97 atm にし、3.0 kG の磁場をかけたときの TDC ヒストグラムを示す。ヒストグラムを見ただけでは、状態の混合が起こり、decay rate が異なる 2 つの成分があるかどうかは分かりにくいので、バックグラウンド分をヒストグラムから引いたものを log でプロットしたものを一緒に載せる。もし状態の混合がなければ、TDC の channel とイベント数の log との関係は直線的になるはずであるが、微妙にずれている。比較のために、図 4.7 に、磁場をかけず、ガスの圧力を 0.97 atm にして測定したデータ (図 4.1 参照) について、同様に log でプロットしたものを載せた。このことから、decay rate が異なる 2 つの成分があることが分かる。尚、実際にこのヒストグラムを $y = a\exp[\Gamma x] + c$ の形にフィットすると、単に χ^2 が悪いだけでなく、フィットに用いるデータの範囲を変えただけで、Γ の値は大きく変わってしまう。

同じような測定を、磁場の大きさを 2.0 kG, 3.0 kG, 4.0 kG に、ガスの圧力を 0.97 atm, 0.73 atm, 0.48 atm にして、合計 9 通りの場合について行った。そして、得られたデータを $y = a\exp[\Gamma(x-x_{\max})] + b\exp[\Gamma_t(x-x_{\max})] + c$ の形でフィットした。但し、ここで Γ が求めたい混合状態の decay rate である。既に述べたように、フィットを簡単にするため、triplet Ps の decay rate Γ_t はフリーパラメータとせず、実験 1 で得られた値 $\Gamma_t\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}] = 7.13 + 0.57P\,[\mathrm{atm}]$ を用いた。ガスの圧力を 0.24 atm にして測定しなかったのは、S/N 比が非常に悪かったためである。

この測定結果を、表 4.5 に示す。

磁場 [kG]	圧力 [atm]	データ数	#normal	#mixed	Γ $[\mu\mathrm{sec}^{-1}]$	σ_Γ $[\mu\mathrm{sec}^{-1}]$	χ^2/n
4.0	0.97	1.4×10^6	4.8×10^4	1.9×10^4	30.9	1.8	1.22
4.0	0.73	1.6×10^6	4.5×10^4	1.8×10^4	30.2	1.9	1.28
4.0	0.48	1.5×10^6	3.4×10^4	1.4×10^4	29.7	2.2	1.17
3.0	0.97	2.2×10^6	6.3×10^4	2.5×10^4	21.7	1.5	1.48
3.0	0.73	1.7×10^6	3.8×10^4	1.9×10^4	19.5	1.6	1.31
3.0	0.48	1.6×10^6	3.6×10^4	2.2×10^4	19.8	1.9	1.16
2.0	0.97	1.9×10^6	7.6×10^4	2.7×10^4	16.4	1.2	1.33
2.0	0.73	1.8×10^6	4.5×10^4	1.7×10^4	16.7	1.9	1.21
2.0	0.48	2.3×10^6	5.4×10^4	1.8×10^4	15.7	1.8	1.70

表 4.5 :磁場をかけたときのデータ

#normal は混合を起こさなかった triplet Ps が (decay rate Γ_t で) 崩壊したと思われるイベントの数。#mixed は混合を起こして decay rate Γ_{mixed} で崩壊したと思われるイベント数。尚、表中の Γ とは Γ_{mixed} のこと。

triplet Ps の場合と同様にして、混合状態の真空中の decay rate を評価した。表 4.5 のデータを、磁場の値ごとに、$\Gamma = a + bP$ の形にフィットした結果。

$$B = 4.0\,[\mathrm{kG}] \text{ のとき} \quad a = 28.5 \pm 4.5\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}],\ b = 2.48 \pm 5.77\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}\mathrm{atm}^{-1}]$$
$$B = 3.0\,[\mathrm{kG}] \text{ のとき} \quad a = 17.2 \pm 3.9\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}],\ b = 4.27 \pm 4.90\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}\mathrm{atm}^{-1}]$$
$$B = 2.0\,[\mathrm{kG}] \text{ のとき} \quad a = 15.3 \pm 3.6\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}],\ b = 1.19 \pm 4.34\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}\mathrm{atm}^{-1}]$$

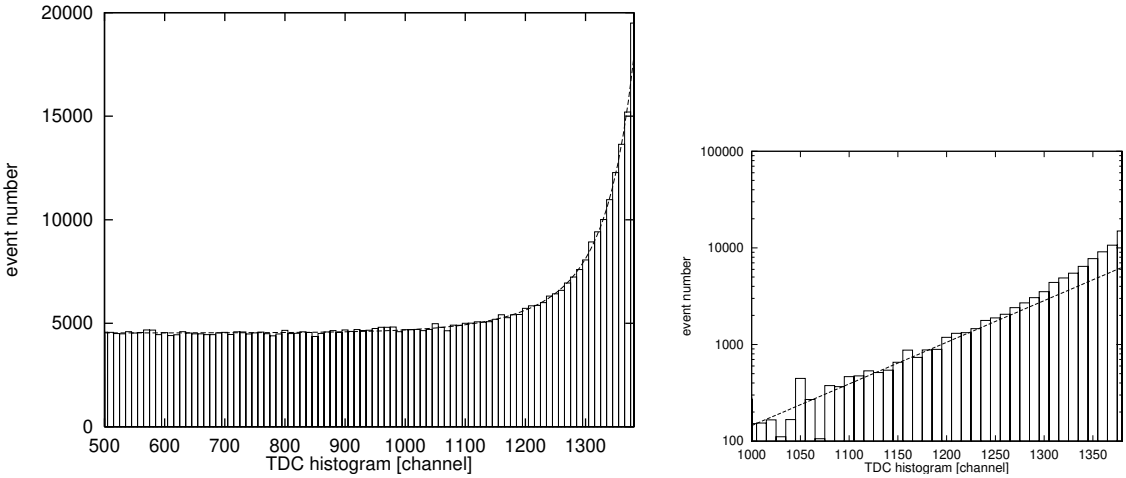


図 4.6 :TDC ヒストグラム (圧力 0.97 atm 磁場 3.0 kG)

左の図は 500 channel 以上 1380 channel 以下のデータ。点線はデータを $y = a\exp[\Gamma(x-x_{\max})]+b\exp[\Gamma_t(x-x_{\max})]+c$ の形でフィットしたもの。右の図は、constant background 分を除いた上、縦軸を log scale でプロットしたもの。直線は、フィットされた関数の $b\exp[\Gamma_t(x-x_{\max})]$ の項。

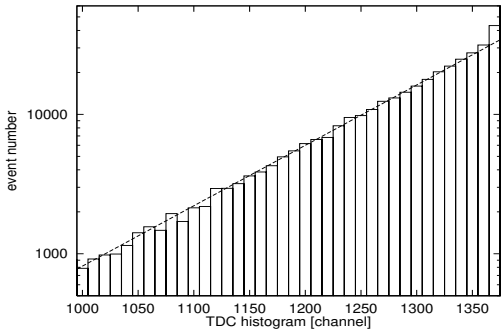


図 4.7 :磁場なし時のデータの log プロット

磁場をかけない時のデータ (図 4.1) について、constant background 分を除いた上、縦軸を log scale でプロットしたもの (図 4.6 との比較のため)。直線は、フィットされた関数。

となった (図 4.8 参照)。この a が真空中の decay rate $\Gamma_{\rm mixed}$ である。

磁場 B と $\Gamma_{\rm mixed}$ の間には式 2.50 のような関係がある。特に、$B=0$ の場合には、$\Gamma_{\rm mixed}=\Gamma_t$ となるはずである。そこで、$B=2.0\,[\mathrm{kG}]$, $3.0\,[\mathrm{kG}]$, $4.0\,[\mathrm{kG}]$ の場合に加え、 $B=0\,[\mathrm{kG}]$ の時 $\Gamma_{\rm mixed}=\Gamma_t=7.13\pm0.57\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}]$ をもデータ点として扱ってフィットを行った。その結果、

$$\Gamma_t = 7.17\pm1.3\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}],\quad \Gamma_s=(6.6\pm1.2)\times10^3[\mu\mathrm{sec}^{-1}]$$

という結果が得られた (図 4.9 参照)。これより、singlet Ps の寿命は、

$$\tau_s = 0.15\pm0.03\,[\mathrm{nsec}]$$

と求まった。

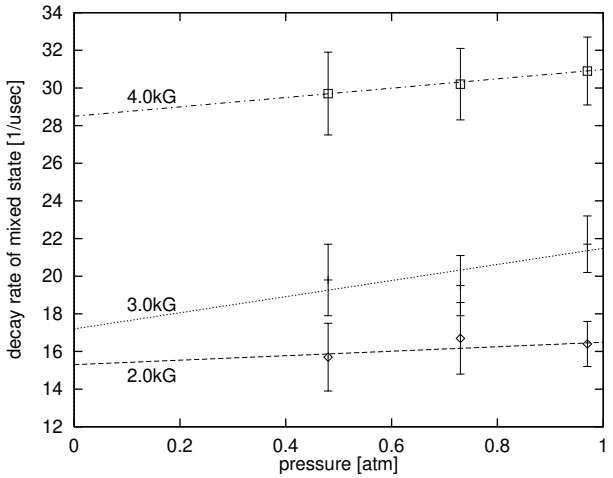


図 4.8 :混合状態の decay rate と圧力の関係

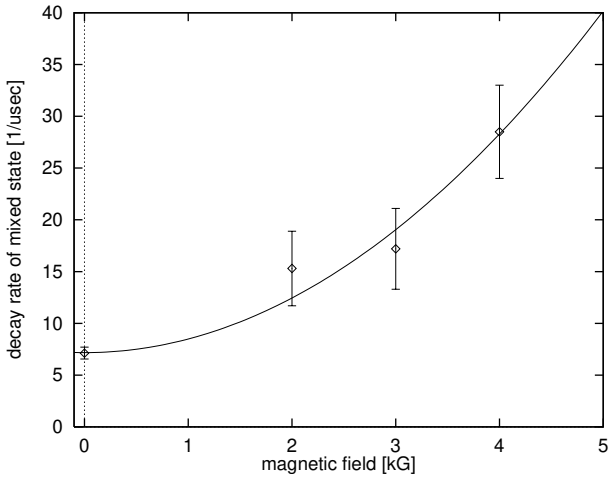


図 4.9 :混合状態の decay rate と磁場の関係

4.3 窒素中での寿命測定

当初は、容器内に入れるガスとして、窒素 (N_2) を用いていた。以下に、その時の TDC ヒストグラムを図 4.10 に示す。窒素の圧力は、1.03 atm, 0.73 atm, 0.48 atm で測定した。

図 4.10 中の曲線は、500 channel 以上 1340 channel 以下のデータを $y = a\exp[\Gamma(x - 1380)] + c$ の形にフィットしたものである。フィットから得られた Γ の値を表 4.6 に示す。この表から、窒素中でこの実験を行うと、磁場をかけなくても decay rate が異なる 2 つの成分があることがわかる。このことは図 4.10 の 4 番目の図を見ても分かるかもしれない。この decay curve の様子が、磁場中での振舞と大きく異なる点は、長い方の成分の decay rate が窒素の圧力に大きく依存するということである。

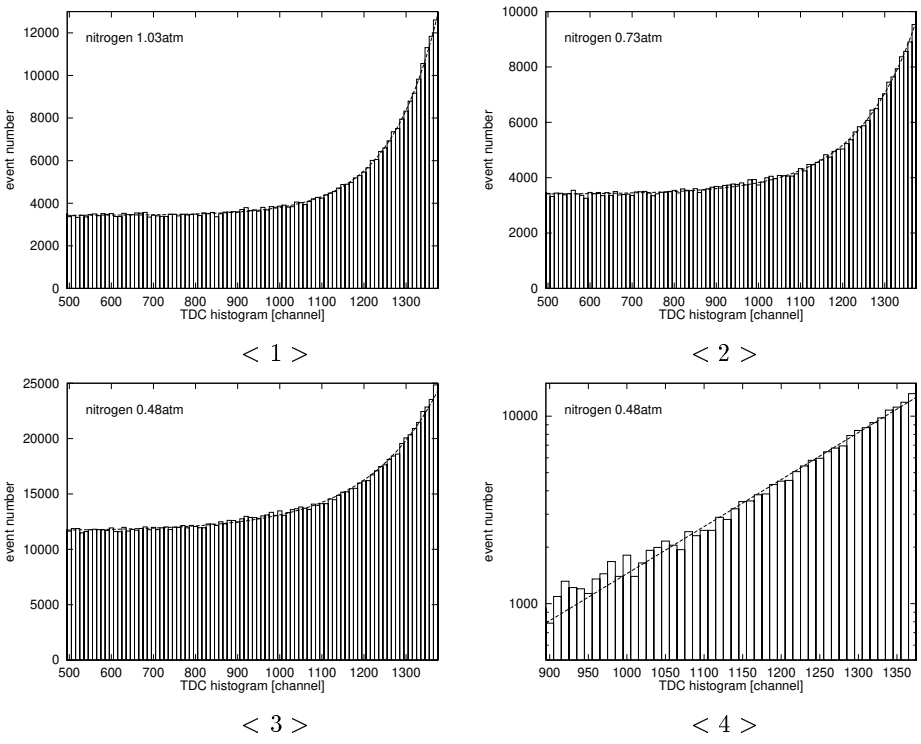


図 4.10 :ガスとして窒素を用いたときの TDC ヒストグラム

$< 1 >$ 1.03 atm $< 2 >$ 0.73 atm $< 3 >$ 0.48 atm のデータ。$< 4 >$ は 0.48 atm の時のデータからバックグラウンド分を除き、縦軸を対数でプロットしたもの。$< 1 >$〜$< 3 >$ の曲線は、データを $y = a\exp[\Gamma(x - 1380)] + c$ の形にフィットしたもの。

圧力 [atm]	[500,1340]	[500:1200]
1.03	6.67	6.32
0.73	5.55	4.81
0.48	4.48	3.81

表 4.6 :ガスとして窒素を用いた時のデータから求まる decay rate

窒素中で得られたデータのうち 500 channel 以上 1340 channel 以下、あるいは 500 channel 以上 1200 channel 以下のものを用いてフィットしたときの decary rate 。フィット範囲によって大きく値が変わっていることから、窒素中では decay curve が 2 成分になっていることがわかる。

Chapter 5

考察

5.1 気体中での Ps の生成

N_2 中で測定した際、triplet Ps の崩壊とは異なる、気体の圧力に大きく依存する成分が見られた。この原因を解明するため、気体中での Ps の生成過程を考えてみる。

5.1.1 positron と電子の相互作用

^{22}Na ソースから気体中に放出された positron e^+ は、気体分子や電子と相互作用すると考えられる。今、e^+ の運動エネルギーを E、分子の半径を $R_0 = \mathcal{O}(a_0)$ (但し、a_0 はボーア半径 $(=0.5 \times 10^{-10}\ [\mathrm{m}])$ とし、簡単のために気体を単原子分子として扱うと、この相互作用には以下のものが考えられる。

1) 気体分子と非弾性衝突し、分子をイオン化する。

この反応が起こるためには、$E > E_i$ でなければならない。ここで、E_i は分子のイオン化エネルギーである。この反応の散乱断面積は $\sigma_i = \mathcal{O}(R_0^2) \sim 10^{-20}\,[\mathrm{m}^2]$ となる。

2) 気体分子と非弾性衝突し、分子を励起する。

分子の励起エネルギーを E_{ex} とすると、 $E > E_{\mathrm{ex}}$ のときに、この反応が起こる。イオン化の時と同様、散乱断面積は $\sigma_{\mathrm{ex}} = \mathcal{O}(R_0^2) \sim 10^{-20}\,[\mathrm{m}^2]$ となる。

3) 気体分子から電子を剥ぎ取り、Ps を形成する。

電子を捕縛するためには、$E > E_i - E_{\mathrm{Ps}}$ でなければならない。ここで、E_{Ps} は Ps の基底状態のエネルギーで、$E_{\mathrm{Ps}} = 6.8\,[\mathrm{eV}]$ である。しかし、もし $E > E_i$ なら、生成した Ps の運動エネルギーは E_{Ps} よりも大きくなるので、Ps はすぐに解離してしまう。また、$E > E_{\mathrm{ex}}$ なら 2) の反応の方がはるかに起こりやすい。従って、実質的に Ps が形成されるためには ($E_i > E_{\mathrm{ex}}$ とすると)

$$E_{\mathrm{ex}} > E > E_i - E_{\mathrm{Ps}} \tag{5.1}$$

でなければならない。このエネルギー領域を Öre gap と呼ぶ。

4) 気体分子との弾性衝突。

この反応は E の大きさに関係なく起こりうる。散乱断面積は $\sigma_{\mathrm{ex}} = \mathcal{O}(R_0^2) \sim 10^{-20}\,[\mathrm{m}^2]$ となる。しかし、弾性衝突しても、失うエネルギーは $2mE/M$ (M は分子の質量) 程度である。

5) 電子との対消滅

e^+ が電子と衝突し、Ps を形成することなく、2 γ 又は 3 γ に崩壊する反応である。その散乱断面積は 2 γ に崩壊する場合、式 (2.23) より、

$$\sigma_{2\gamma} = \frac{\pi r_0^2 c}{v} = \frac{\pi}{cv}\left(\frac{\hbar\alpha}{m_e}\right)^2$$

と与えられる。e^+ が ($T = 300\,[\mathrm{K}]$ の) 熱平衡状態にある、即ち $mv^2/2 = (3/2)k_B T$ と仮定すると、

$$\sigma_{2\gamma} = 0.8 \times 10^{-25}\ [\mathrm{m}^2] = 8 \times 10^2\ [\mathrm{b}]$$

となる。一方 3 γ に崩壊する場合は、式 (2.36) より、

$$\sigma_{3\gamma} = \frac{4}{3}(\pi^2 - 9)\alpha^3\left(\frac{\hbar}{m_e c}\right)^2 \frac{c}{v}$$

この場合も、熱平衡状態を仮定すると、

$$\sigma_{2\gamma} = 2 \times 10^{-28}\ [\mathrm{m}^2] = 2\ [\mathrm{b}]$$

となり、2 γ に崩壊する断面積は 3 γ の場合の 400 倍であるので、殆どは 2 γ に崩壊する。尚、この見積もりでは、e^+ が熱平衡状態にあると仮定したが、もっとエネルギーを持っているときは、速度 v が大きいので、断面積はさらに小さくなる。

^{22}Na ソースから生成された e^+ が持っている運動エネルギーは数 100 keV である。このエネルギー領域では、1) や 2) の過程が起こりやすいので、e^+ は E_i や E_{ex} 程度のエネルギーになるまではエネルギーを失い続ける。そして、エネルギーが E_{ex} 以下になると、4) の弾性衝突を行いながら、徐々にエネルギーを失う。この途中に、式 (5.1) の条件をみたすエネルギーの時に電子を剥ぎ取ると Ps が形成される。しかし、エネルギーを失い続けて $E < E_i - E_{\mathrm{Ps}}$ となってしまうと、もはや Ps を形成することは出来ず、ひたすらエネルギーを失い、ついには熱平衡状態に達してしまう。その後、過程 5) によって対消滅すると考えられる。

気体分子が単原子分子でなければ、分子の振動や回転のモードの励起を考える必要があり、さらに複雑になるが、近似的には上の過程が起こると考えてよい。

5.1.2 対消滅

ここで、Ps が形成できなかった場合、e^+ が対消滅までにどれくらいの時間を要するか計算してみる。単位時間当たりの対消滅の確率を λ とすると、

$$\lambda = Zn\sigma_{2\gamma}v = Zn\frac{\pi}{c}\left(\frac{\hbar\alpha}{m_e}\right)^2$$

ここで、Z は 1 分子当たりの実効的な電子数、n は単位体積当たりの分子数である。$T = 300\,[\mathrm{K}]$ とすると、N_{A} をアボガドロ数、P を atm 単位の圧力として、

$$n = N_{\mathrm{A}}\frac{273}{300}\frac{P}{22.4 \times 10^{-3}}\,[\mathrm{m}^2] = (2.4 \times 10^{25})\mathrm{P}\ [\mathrm{m}^2]$$

であるから、式 (5.1.2) に代入すると、

$$\lambda = (1.8 \times 10^5)ZP\ [\mathrm{sec}^{-1}] \sim 0.2ZP\ [\mu\mathrm{sec}^{-1}] \tag{5.2}$$

となる。

5.1.3 窒素中での対消滅率

ここで、窒素中で triplet Ps の寿命を測定しようとした際のことを思い起こしてみる。triplet Ps の崩壊曲線をとろうとした時、その曲線は予想に反して 2 成分になってしまった。そのうちの寿命の長い成分は、decay rate が圧力に大きく依存していたようであった。また、その decay rate は $\mathcal{O}(1\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}])$ 程度であろう。

これらのことは、式 (5.2) と一致している。そこで、窒素中での測定では、triplet Ps の崩壊曲線のほかに、e^+ の対消滅の時間スペクトルが見えたと仮定し、磁場中での測定の際と同様に、TDC ヒストグラムを $y = a\exp[\lambda(x - x_{\max})] + b\exp[\Gamma_t(x - x_{\max})] + c$ の形でフィットし、λ を求めてみた。ただし、今回は、窒素中での Γ_t の値、及びその圧力依存性はわからないので、おおざっぱに寿命が $\tau_t = 100\,[\mathrm{channel}] = 129\,[\mathrm{nsec}]$ であるとして、$\Gamma_t = 7.75\,[\mu\mathrm{sec}^{-1}]$ の値を用いた。すると、λ は、1.03 atm のとき 5.2 $\mu\mathrm{sec}^{-1}$、0.73 atm のとき 3.8 $\mu\mathrm{sec}^{-1}$、0.48 atm のとき 5.2 $\mu\mathrm{sec}^{-1}$ と求まった。これを図示すると、図 5.1 のようになる。

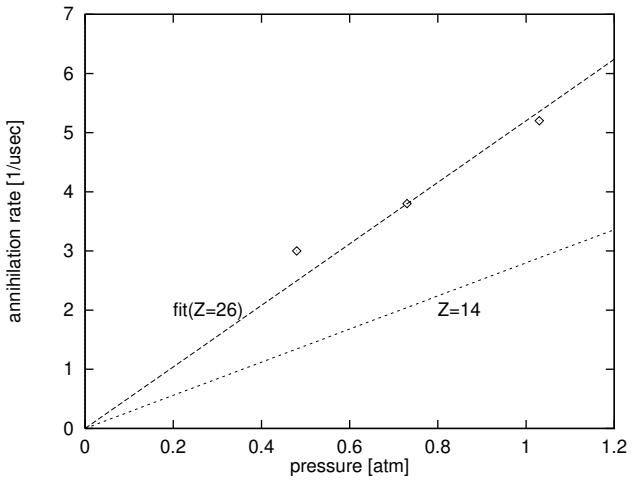


図 5.1 :annihilation rate (λ) と圧力の関係

2 本の点線は、式 (5.2) から得られる直線で、実効的な電子数 Z をデータから計算したものと、素朴に $Z = 14$ としたもの。

図の直線は、式 (5.2) である。ここで、1 分子当たりの実効的な電子数 Z として、素朴に窒素分子の電子数 $Z = 14$ をとった場合とした場合と、データに合うように $Z = 26$ ととった場合の両方を載せておいた。これを見ると、$Z = 14$ とした場合よりも 2 倍程度 λ は大きいものの、今まで述べてきたモデルは的外れではないと考えられる。さらに、ヘリウムガスの場合には、実験的に $Z = 3.9$ と求まり、これはヘリウム原子の波動関数を用いた計算とも一致しているそうである。ヘリウムと窒素を単純に比較することはできないが、この両者の実効的な電子数と真の電子数の比が等しいとすると、窒素分子の実効的な電子数は 27 となり、実験とよく合っているといえる。

結局、窒素ガス中で実験を行った際には、triplet Ps の崩壊とともに、Ps を形成できなかった e^+ が対消滅を起こす過程が見えたため、2 種類の崩壊曲線が見えてしまったのであろう。

尚、イソブタンの場合に Ps の寿命がうまく測定できたのは、イソブタンは何らかの理由で λ の値が大きいためであると考えられる。他に、フロンガス等も λ の値が大きいガスであるとされている。

5.2 反省と課題

今回の実験で反省すべき点や改良すべきことを述べる。

- 解析のところで述べたように、一部のプラスチックシンチレータには、TDC ヒストグラムに小さなピークが現れた。これは PMT のアフターパルス等の可能性もあるが、原因は解明できてない。このためデータの 4 分の 1 は破棄せざるを得なくなってしまった。実験の信頼性を上げるためにも、この原因を特定する必要がある。

- 今回の実験では、少しでもデータの量を少なくするために、測定の際には TDC ヒストグラムしか記録しなかったが、プラスチックシンチレータや BaF_2 シンチレータの ADC 値等も記録しておけば解析の際に役立ったかもしれない。特に、BaF_2 の ADC 値を event ごとに測定し、γ 線のエネルギーが 1275 keV なのかどうかを調べれば、単にディスクリミネータの threshold で区別するよりも少しは S/N 比が良くなったかもしれない。

- プラスチックシンチレータの PMT の HV の値を決定するいい方法が思いつかなかったので、HV の値を変えながら実験し、最も S/N 比が良くなるような値に設定しようとした。しかし、時間の関係から、また S/N 比があまり変化しなかったこともあって、最終的には適当に決めてしまった。出来れば HV を決定する方法を見いだしたい。

- 磁場中での実験の場合であるが、BaF_2 につながっている PMT が磁石に近すぎて、磁場の影響をかなり受けてしまった。当初、石英棒 (ライトガイド) を長くしすぎると BaF_2 のシグナルが見えなくなるかもしれない、と思い短くしたのであるが、もっと長くして十分に電磁石から離すべきであった。

- 実験に熱心になるあまり、多くの機器を破壊してしまった。もっと注意をしなければならない。

実験の精度を上げるためには、次のようなことを行うとよいだろう。

- ガスの圧力をさらに低く (例えば 0.1 atm 程度) してデータをとれるようにしたい。今回の実験では、最も低い圧力で 0.24 atm であった。低圧のデータが多いほど、zero-extraporation が正確に行えるであろう。そのためには、ガス容器を大きくしたり、ソースを非常に薄いもので覆って e^+ をエネルギーロスさせ、ガス中でちょうど止まるようにすることを考えるとよいと思う。

- BaF_2 による γ スタート型の実験法をやめ、e^+ スタート型の実験を行った方が得であると思われる (3.1節参照)。われわれの用いた方法では、e^+ が容器中に放出されても、γ detector (BaF_2) に 1275 keV γ 線が当たらなければ、スタートがかからない。そのため、かなりのイベントを逃していると思われる。逆に、e^+ が容器と反対側に放出されても、γ detector が反応することは当然ありうる。その場合には、無駄にスタートがかかってしまい、結果的にノイズを増やしてしまうことになる。e^+ スタート型を採用すればこのような問題はなく、効率よく 3 γ イベントを拾うことができるであろう。さらに、磁場中で測定する場合には、BaF_2 の厚みの分だけ容器が小さくなってしまうのも問題である。このほか、BaF_2 を用いた場合、ディスクリミネータがスローコンポーネントに引っかからないようにしていたが、このために BaF_2 のレートが制限されてしまう。このような点を考え合わせると、e^+ スタート型の方が有利であろう。

- 実験の精度には関係がないが、ガスの種類をいろいろ変えて実験し、Ps の寿命がガスの種類に依存しないことを確かめる必要がある。

Chapter 6

まとめ

今回の実験の結果をまとめておく。
イソブタン中で triplet Ps の寿命を測定した結果、

$$\tau_{\mathrm{triplet}} = 140.2 \pm 2.3 \ [\mathrm{nsec}]$$

を得た。また、磁場中で同様の実験を行った結果、triplet Ps の一部と singlet Ps の混合を見ることができた。その混合状態の寿命から

$$\tau_{\mathrm{singlet}} = 0.15 \pm 0.03 \ [\mathrm{nsec}]$$

が得られた。但し、解析の方法を変えると、統計誤差程度は値が変わるので、十分に信頼度があるとは言えず、統計誤差と同程度の systematic error があるかもしれない。
これらの理論値は、最低次の Feynman diagram の計算結果 (2.38) (2.26) により、

$$\tau_{\mathrm{triplet}} = 141 \ [\mathrm{nsec}], \quad \tau_{\mathrm{singlet}} = 0.125 \ [\mathrm{nsec}]$$

であるから、実験結果はよく一致していると言える。ただし、高次の diagram と比較するためには、実験精度をさらに上げる必要がある。
一方、同じ実験を窒素中で行おうとすると、窒素中での e^+ の対消滅の過程が見えてしまうらしく、うまく行かないことが分かった。

Chapter 7

感想と謝辞

7.1 感想

- Ｐ２は「目の前」に起こっている出来事を知るには自ら idea を出し、それを実行してデータを採り、時には計算をしてさらに考えて行動し、もうこれ以上がない所まで進んで行くしかないのだと体験的に教えてくれた。そうした経験を共有できる仲間がいることもＰ２の有難さなのだと発展的解散を迎えた今になって思う。また、忘れた頃に座礁しかけの僕らに力を借して下さるスタッフの存在も忘れられない。スタッフの方々は学生を助けすぎるとかえって逆効果になることを経験的に知っているのだ（常識的な解釈としては忙しさにかまけて学生実験は後回しになっているらしいが）。ともあれ実験結果も出すことができ、僕個人としても快く新たなる生活に向かうことができるというものです。

- 実のところ、実験終了の一ヶ月前までは、結果が出そうな気配すらなかった。それが、気体を窒素からイソブタンに変えたことで、急に進展したのである。論文を読むと、窒素ではうまく行かないことがほのめかされているところがあったので、それに気付いていればもっと早く実験が終わったかもしれない。論文をきちんと読むことは重要なことだと思った。

- 長々と実験を行ったが、殆どの時間は試行錯誤の時間だった。特に、窒素ガスとプラスチックシンチレータ付きソースにはひどい目に遭わされた。

- 実験がうまく行かないとつい冷静さを欠いてしまい、貴重なＰ２の備品の数々を壊してしまった。この場を借りて謝らせていただきます。しかし、不注意だったのは間違いないが、運も悪かった。が、しかし、こういうところで悪運を使い果たした分実験がうまく行ったのだと思っている。

7.2 謝辞

positronium の寿命の測定は、過去にＰ２で何度か行われた実験でしたが、今回少し進歩させることが出来ました。これも、多くの人の協力が得られたからだと思います。

実験の面倒を見、数多くの助言を下さった笹尾先生。笹尾先生には、多忙にも拘わらず部品の発注までもしていただきました。つまらない質問をしても懇切丁寧に教えて下さった、そして物集めにご尽力下さった蔵重先生。蔵重先生は９７年度Ｐ２の結末を知ることなく３月末で神戸大に転勤されてしまい、非常に残念です。また、一緒に実験をして下さったＴＡの中村友昭さん。前年度Ｐ２というだけで鉛切りを手伝って下さった島尚徳さん。一緒に実験を行った Møller 班の勝沼君、佐野君、湯村君、横山君。その他大勢の方々。本当にどうもありがとうございました。心より感謝いたします。

また、陰に陰にＰ２を支えて下さった理論担当の畑先生にもこの場を借りてお礼を申し上げます。畑先生の理論ゼミは人生で最も心に残るゼミだったと思います。

そして何よりも、このような実験の機会を得ることが出来たことを非常にうれしく思います。

Appendix A

ぽじとろんスタート型のひげき

むかーしむかしある村にコイケさんという、えらーい「ソース付き」プラスチックシンチレーターがいたそうな。その村では何年も前からコイケさんといっしょにちょくせつがたのじっけんをやっていたということじゃ。しかし一週間たっても、一ヶ月がたっても、はたまた一年たってもまったくぽじとろにうむは姿をあらわさんかった。村人達の間には、「コイケさんはぽじとろんを一人占めしてわしらには渡さんようにしとるんじゃなかか？」という疑いもあったのじゃが、コイケさん無しではなーんにもできんので、だれも言えんかったそうな。

その年にも、三人がかり（四人？）でがんばっていたのじゃが、くる日もくる日も見えるのはばっくぐらうんどだけじゃった。ある男（とくめいきぼう）は「もういやじゃ。わしはやめるぞ。」などといっていた。

しかしある日、遠い東のばりうむふろらいど村から、重い、おおきい、高い、という三拍子そろった、あるふぁさんが村にやってきたんじゃ。「コイケさんの天下がが終わるかもしれん。」村人達はあるふぁさんとかんせつがたのじっけんを始めたそうじゃ。最初は言葉が通じずに苦労もしたのじゃがひとつきもしないうちに、ぽじとろにうむを発見したのじゃった。

その後、コイケさんへの疑いを確かめようと裁きが行われたそうじゃ。村人達の思っていた通りコイケさんはぽじとろんをぜーんぶ一人占めして、村人達にはごみにしかならないがんまばっかりをはきだしていたそうな。

コイケさんはそれから一人、くらい小さな部屋で、もうなさそうな次の出番を待っているそうな。コイケさんのごめいふくをいのって、合掌。

Appendix B

Formula

ここでは γ 行列に関する公式を掲げる。

Metric $g_{\mu\nu}$ を $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \quad g_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu)$ で定める。$g^2 = \mathbf{1_2}$ より $g^{-1} = g$。さらに $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$。

γ 行列は

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{B.1}$$

をみたすものであるが、標準的な表示をとると

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \boldsymbol{\sigma}_i \\ -\boldsymbol{\sigma}_i & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

ただし、$\boldsymbol{\sigma}_i$ は Pauli matrix。$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ で定義する。

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad \gamma^\mu\gamma^\mu = g^{\mu\mu}, \quad (\gamma^\mu)^\dagger = g^{\mu\mu}\gamma^\mu \tag{B.2}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0\ ,\ (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \tag{B.3}$$

4 元運動量 a に対して $\not{a}$ を $\not{a} = a_\mu\gamma^\mu$ で定義する。γ 行列に関する公式 ：

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4, \quad \gamma^\mu\not{a}\gamma_\mu = -2\not{a} \tag{B.4}$$

$$\gamma^\mu\not{a}\not{b}\gamma_\mu = 4(a\cdot b) \tag{B.5}$$

$$\gamma^\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a} \tag{B.6}$$

$$\gamma^\mu\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\gamma_\mu = 2(\not{d}\not{b}\not{c}\not{a} + \not{b}\not{c}\not{d}\not{a} - \not{a}\not{c}\not{d}\not{b} + \not{a}\not{b}\not{d}\not{c}) \tag{B.7}$$

$$\gamma^\mu\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\gamma_\mu = 2(\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{a} - \not{a}\not{c}\not{d}\not{e}\not{b} + \not{a}\not{b}\not{d}\not{e}\not{c} - \not{a}\not{b}\not{c}\not{e}\not{d} - \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}) \tag{B.8}$$

$$\mathrm{Tr}[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0 \tag{B.9}$$

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}] = 4(a\cdot b) \tag{B.10}$$

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)] \tag{B.11}$$

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{h}] = (a\cdot b)\mathrm{Tr}[\not{c}\not{d}\not{e}\not{h}] - (a\cdot c)\mathrm{Tr}[\not{b}\not{d}\not{e}\not{h}] + (a\cdot d)\mathrm{Tr}[\not{b}\not{c}\not{e}\not{h}] - (a\cdot e)\mathrm{Tr}[\not{b}\not{c}\not{d}\not{h}] + (a\cdot h)\mathrm{Tr}[\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}] \tag{B.12}$$

Appendix C

The details of $e^+e^- \to \gamma\gamma$

まず式 (2.14) から式 (2.15) を導く。式 (B.4) により

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{e^4}{4(p_1\cdot k_1)^2}\,\mathrm{Tr}[(\not{p}_2+2m)(\not{p}_1-\not{k}_1+m)(\not{p}_1-2m)(\not{p}_1-\not{k}_1+m)]$$

後は Trace の [ ] 内を展開して式 (B.4) (B.5) (B.6) (B.7) (B.9) を用いて整理すると式 (2.15)

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{2e^4}{(p_1\cdot k_1)^2}\left((p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_1)+m^2(p_2\cdot k_1)-m^2(p_1\cdot p_2)+2m^2(p_1\cdot k_1)-2m^4\right)$$

を得る。

次に $\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*}$ をもとめる。式 (2.17) に実光子とフェルミオンについての関係式を用いると、

$$\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*} = \frac{e^4}{16(p_1\cdot k_1)(p_1\cdot k_2)}\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_2-m)\gamma^\nu(\not{p}_1-\not{k}_1+m)\gamma^\mu(\not{p}_1+m)\gamma_\nu(\not{p}_1-\not{k}_2+m)\gamma_\mu\right]$$

ここで $a=(0,g_{\nu\nu},0,0)$ （ν 成分だけ nonzero ）とおくと $\not{a}=\gamma_\nu$ であるから、$\gamma^\mu(\not{p}_1+m)\not{a}(\not{p}_1-\not{k}_2+m)\gamma_\nu$ に式 (B.4) (B.5) (B.6) を適用すると、後は式 (B.9) (B.10) (B.11) (B.12) を使って単純計算を経ると

$$\mathrm{Trace} = -32m^4+16m^2(p_1\cdot k_1)+16m^2(p_1\cdot k_2)$$

したがって、式 (2.18)

$$\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2{}^*} = \frac{m^2e^4}{(p_1\cdot k_1)(p_1\cdot k_2)}\left((p_1\cdot k_1)+m^2(p_1\cdot k_2)-2m^4\right)$$

を得る。

式 (2.23) では陽電子を非相対論的極限で扱うことで断面積を求めたが、ここで陽電子を相対論的に取り扱う一般的な断面積を算出する。式 (2.22)

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{2}\int d\omega_1\, d\Omega\, \omega_1^2\,\frac{\delta(\omega_1+\omega_2-m-m\gamma)}{\omega_1\omega_2 m^2\beta\gamma}\left\{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)+2m\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)-\left(\frac{m}{\omega_1}+\frac{m}{\omega_2}\right)^2\right\}$$

（ただし、δ^3 の処理に伴い、$\omega_2=|\vec{p}_2-\vec{k}_1|$ で β は $\vec{\beta}=\vec{p}_2/m\gamma$ で定まるベクトルの絶対値である）ω_1 について積分を実行すると、$\omega_1+\omega_2(\omega_1)-m-m\gamma=0$ なる $\omega_1=\tilde{\omega}$ とおくことで、式 (2.22) は

$$\sigma = \frac{{r_0}^2}{2\beta\gamma}\int d\Omega\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{d\omega_1}{d(\omega_1+\omega_2)}\left\{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)+2m\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)-\left(\frac{m}{\omega_1}+\frac{m}{\omega_2}\right)^2\right\}\Bigg|_{\omega_1=\tilde{\omega}} \tag{C.1}$$

ここで、エネルギー保存 $:\omega_1+\omega_2=m+m\gamma$ に注意すると （$\cos\theta_1$ を $\vec{p}_2\cdot\vec{k}_1=m\omega_1\cos\theta_1$ で定義する）

$$\frac{d(\omega_1+\omega_2)}{d\omega_1} = \frac{1}{\omega_2}(\omega_1+\omega_2-m\beta\gamma\cos\theta_1)$$

さらに $p_1 \cdot k_2 = p_2 \cdot k_1$ i.e. $\omega_2 = \omega_1 \gamma(1 - \beta\cos\theta_1)$ とエネルギー保存を合わせると

$$\frac{\omega_1}{m} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma(1-\beta\cos\theta_1)} \ , \quad \frac{\omega_2}{m} = \frac{\gamma(1+\gamma)(1-\beta\cos\theta_1)}{1+\gamma(1-\beta\cos\theta_1)}$$

いま、z 軸を $\vec{p}$ の向きにとると、 $\int d\Omega = 2\pi \int d(\cos\theta_1)$ の置き換えができるから

$$\sigma = \frac{{r_0}^2}{\beta\gamma} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-\beta x} \left\{ 3 + \gamma - \frac{\left(1+\gamma(1-\beta x)\right)^2}{\gamma(1+\gamma)(1-\beta x)} - \frac{2\gamma(1+\gamma)(1-\beta x)}{\left(1+\gamma(1-\beta x)\right)^2} \right\} \tag{C.2}$$

ただし $x = \cos\theta_1$ とした。積分に関して

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-\beta x} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \ , \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-\beta x} \frac{\left(1+\gamma(1-\beta x)\right)^2}{1-\beta x} = \frac{2\gamma}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1}{\beta} \left(\frac{2\beta}{1-\beta^2} \right)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\left(1+\gamma(1-\beta x)\right)^2} = \frac{1}{\beta\gamma} \left(\frac{1}{1+\gamma-\beta\gamma} - \frac{1}{1+\gamma+\beta\gamma} \right)$$

を使い、さらに $(1+\beta)/(1-\beta) = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1}$ などにより β を γ で表すと、式 (C.2) から一般的な散乱断面積は次式になる。

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{2\beta\gamma} \left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{(\gamma+1)\sqrt{\gamma^2-1}} \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}\right) - 2 \right] \tag{C.3}$$

ただし、放出される 2 光子の置換数 2! で割ってある。

補注 :NRL (i.e. $\beta \to 0$) で式 (C.3) の右辺の大括弧の中は 2 に近づくので式 (2.23) を与える。

Appendix D

The details of $e^+e^- \to \gamma\gamma\gamma$

まず、$\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$ を求める。

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{e^6}{64(p_1\cdot k_1)^2(p_2\cdot k_3)^2} \sum_{s,s',t_1,t_2,t_3} \Big(\bar{v}^{(s')}_{(p_2)} \not{\epsilon}_3^{(t_3)^*} (\not{k}_3 - \not{p}_2 + m) \not{\epsilon}_2^{(t_2)^*} (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}_1^{(t_1)^*} u^{(s)}_{(p_1)} \bar{u}^{(s)}_{(p_1)} \cdot \not{\epsilon}_1^{(t_1)} (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}_2^{(t_2)} (\not{k}_3 - \not{p}_2 + m) \not{\epsilon}_3^{(t_3)} v^{(s')}_{(p_2)} \Big) \tag{D.1}$$

この式に実光子とフェルミオンの関係式を使い、$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = (e^6/(64(p_1\cdot k_1)^2(p_2\cdot k_3)^2)T$ で T を定めると

$$T = -\mathrm{Tr}[(\not{p}_2 - m)\gamma^\mu(\not{k}_3 - \not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)\gamma^\tau(\not{p}_1 + m)\gamma_\tau(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)\gamma_\nu(\not{k}_3 - \not{p}_2 + m)\gamma_\mu] \tag{D.2}$$

ここで式 (B.4) により μ と τ が消えて式 (D.2) は

$$T = -4\mathrm{Tr}[(\not{p}_2 + 2m)(\not{k}_3 - \not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)(\not{p}_1 - 2m)(\not{p}_1 - \not{k}_1 + m)\gamma_\nu(\not{k}_3 - \not{p}_2 + m)] \tag{D.3}$$

となり、γ^ν と γ_ν で挟まれる部分に式 (B.4) (B.5) (B.6) を適用してから、Trace の [ ] 内を展開して式 (B.9) (B.10) (B.11) (B.12) により

$$\begin{aligned} T = -8[&32m^6 + 16m^4\{(p_1\cdot k_3) - (p_1\cdot p_2) - (k_1\cdot k_3) + (p_2\cdot k_1) - 2(p_1\cdot k_1) - 2(p_2\cdot k_3)\} \\ &+ 16m^2\{2(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_3) - 2(p_1\cdot k_1)(p_1\cdot k_3) + 3(p_1\cdot p_2)(p_1\cdot k_1) + 3(k_1\cdot k_3)(p_1\cdot k_1) \\ &- 3(p_2\cdot k_1)(p_1\cdot k_1) + 3(p_1\cdot p_2)(p_2\cdot k_3) - 3(k_1\cdot k_3)(p_2\cdot k_3) - 3(p_2\cdot k_1)(p_2\cdot k_3) \\ &- 3(p_1\cdot k_3)(p_2\cdot k_3)\} + 48(p_1\cdot k_3)(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_3) - 56(p_1\cdot p_2)(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_3) \\ &- 32(k_1\cdot k_3)(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_3) + 48(p_2\cdot k_1)(p_1\cdot k_1)(p_2\cdot k_3)\,] \end{aligned} \tag{D.4}$$

ここで、$p_1 = (m, \vec{0}),\ p_1 = (m, \vec{0})$ の極限 （NRL ）を考えると、$(p_i\cdot k_j) = m\omega_j\ ,\ \ (p_i\cdot p_j) = m^2$ と形式的に置き換えればよい。 (ただし、$(k_i\cdot k_j)$ はそのまま) このとき

$$\begin{aligned} T = -8\big[&16m^6 + 32m^5(\omega_1 + \omega_3) - 48m^4(\omega_1^2 + \omega_3^2) - 104m^4\omega_1\omega_3 + 48m^3\omega_1\omega_3(\omega_1 + \omega_3) \\ &- 32m^2\omega_1\omega_3(k_1\cdot k_3) + 48m^3(\omega_1 + \omega_3)(k_1\cdot k_3)\big] \end{aligned} \tag{D.5}$$

よって

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_1|^2} = e^6 \Bigg(&\frac{13}{\omega_1\omega_3} + \frac{6(\omega_1^2 + \omega_3^2)}{\omega_1^2\omega_3^2} + \frac{4(k_1\cdot k_3)}{m^2\omega_1\omega_3} - \frac{6(\omega_1 + \omega_3)}{m\omega_1\omega_3} \\ &- \frac{6(\omega_1 + \omega_3)(k_1\cdot k_3)}{m\omega_1^2\omega_3^2} - \frac{4m(\omega_1 + \omega_3)}{\omega_1^2\omega_3^2} - \frac{2m^2}{\omega_1^2\omega_3^2} \Bigg) \end{aligned} \tag{D.6}$$

次に $\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*}$ を算出する。

$$\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*} = \frac{e^6}{64(p_1\cdot k_1)^2(p_2\cdot k_2)(p_2\cdot k_3)} \sum_{s,s',t_1,t_2,t_3} \Big(\bar{v}^{(s')}_{(p_2)} \not{\epsilon}_3^{(t_3)^*} (\not{k}_3 - \not{p}_2 + m) \not{\epsilon}_2^{(t_2)^*} (\not{p}_1 - \not{k}_1 + m) \not{\epsilon}_1^{(t_1)^*} u^{(s)}_{(p_1)}$$

$$\cdot\,\bar{u}^{(s)}_{(p_1)}\not{\epsilon}^{(t_1)}_1(\not{p}_1-\not{k}_1+m)\not{\epsilon}^{(t_3)}_3(\not{k}_2-\not{p}_2+m)\not{\epsilon}^{(t_2)}_2 v^{(s')}_{(p_2)}\Big) \tag{D.7}$$

$\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$ と同様に実光子とフェルミオンの関係式より

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2}=\frac{-e^6}{64(p_1\cdot k_1)^2(p_2\cdot k_2)(p_2\cdot k_3)}\mathrm{Tr}\big[(\not{p}_2-m)\gamma^\mu(\not{k}_3-\not{p}_2+m)\gamma^\nu(\not{p}_1-\not{k}_1+m)\gamma^\tau(\not{p}_1+m)\gamma_\tau \\ (\not{p}_1-\not{k}_1+m)\gamma_\mu(\not{k}_3-\not{p}_2+m)\gamma_\nu\big] \tag{D.8}$$

Trace の [ ] 内は式 (B.4) (B.5) (B.6) (B.7) を使って、γ 行列を消して、式 (B.9) (B.10) (B.11) (B.12) により

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}=&-32\left((p_1-k_1)\cdot p_1\right)\left((p_1-k_1)\cdot p_2\right)\left((p_2-k_2)\cdot(p_2-k_3)\right)\\
&-16\left((p_1-k_1)\cdot p_1\right)\left((p_2-k_2)\cdot p_2\right)\left((p_2-k_3)\cdot p_1\right)\\
&-16\left((p_1-k_1)\cdot p_1\right)\left((p_2-k_2)\cdot p_2\right)\left((p_2-k_3)\cdot p_1\right)\\
&+16\left((p_1-k_1)\cdot p_1\right)\left((p_2-k_2)\cdot p_1\right)\left((p_2-k_3)\cdot p_1\right)\\
&+16(p_1-k_1)^2(p_1\cdot p_2)\left((p_2-k_2)\cdot(p_2-k_3)\right)\\
&+16\left((p_1-k_1)\cdot p_1\right)\left((p_1-k_1)\cdot(p_2-k_3)\right)\left((p_2-k_2)\cdot p_2\right)\\
&-16m^2(p_1\cdot k_1)\left((p_2-k_3)\cdot p_2\right)-4m^2(p_1\cdot p_2)\left((p_2-k_2)\cdot(p_2-k_3)\right)\\
&+64\left(p_2\cdot(p_1-k_1)\right)\left((p_2-k_2)\cdot(p_2-k_3)\right)-8m^4p_2\cdot(p_2-k_3)+32m^4p_1\cdot(p_1-k_1)\\
&+8m^2\{2\left(p_1\cdot(p_1-k_1)\right)\left((p_1-k_1)\cdot(p_2-k_2)\right)-(p_1-k_1)^2\left(p_1\cdot(p_2-k_2)\right)\}\\
&-32m^4(p_1-k_1)\cdot(p_2-k_2)+8m^4p_1\cdot(p_2-k_2)-32m^4(p_1-k_1)^2
\end{aligned} \tag{D.9}$$

これから $\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*}$ の NRL は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*}=e^6\Bigg(&\frac{2(m-\omega_1)^3}{m\omega_1^2\omega_2\omega_3}+\frac{2(m-\omega_1)^2(k_2\cdot k_3)}{m^2\omega_1^2\omega_2\omega_3}+\frac{(m-2\omega_1)(k_2\cdot k_3)}{m\omega_1^2\omega_2\omega_3}-\frac{(m-2\omega_1)(m-\omega_1)}{m\omega_1^2\omega_2\omega_3}\\
&+\frac{(m-\omega_1)(m-\omega_2)(k_2\cdot k_3)}{m^2\omega_1^2\omega_2\omega_3}-\frac{4(m-\omega_1)^2}{\omega_1^2\omega_2\omega_3}-\frac{(m-\omega_1)(m-\omega_2)}{\omega_1^2\omega_2\omega_3}\\
&+\frac{(m-\omega_1)(k_1\cdot k_2)}{m\omega_1^2\omega_2\omega_3}+\frac{7m}{4\omega_1\omega_2\omega_3}+\frac{1}{\omega_1\omega_2}-\frac{3}{\omega_1\omega_3}+\frac{2m}{\omega_1^2\omega_3}-\frac{m^2}{4\omega_1^2\omega_2\omega_3}\Bigg)
\end{aligned} \tag{D.10}$$

これまでの 2 つの計算から察することができるように Trace には計算しなければならない 6 つのタイプがある。$\not{a}=(\not{p}_2-m)$ などとラフにおくと、

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\gamma^\mu\not{b}\gamma^\nu\not{c}\gamma^\tau\not{d}\gamma_\tau\not{e}\gamma_\nu\not{k}\gamma_\mu] \tag{D.11}$$
$$\mathrm{Tr}[\not{a}\gamma^\mu\not{b}\gamma^\nu\not{c}\gamma^\tau\not{d}\gamma_\tau\not{e}\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu] \tag{D.12}$$
$$\mathrm{Tr}[\not{a}\gamma^\mu\not{b}\gamma^\nu\not{c}\gamma^\tau\not{d}\gamma_\nu\not{e}\gamma_\mu\not{k}\gamma_\tau] \tag{D.13}$$
$$\mathrm{Tr}[\not{a}\gamma^\mu\not{b}\gamma^\nu\not{c}\gamma^\tau\not{d}\gamma_\mu\not{e}\gamma_\nu\not{k}\gamma_\tau] \tag{D.14}$$
$$\mathrm{Tr}[\not{a}\gamma^\mu\not{b}\gamma^\nu\not{c}\gamma^\tau\not{d}\gamma_\mu\not{e}\gamma_\tau\not{k}\gamma_\nu] \tag{D.15}$$
$$\mathrm{Tr}[\not{a}\gamma^\mu\not{b}\gamma^\nu\not{c}\gamma^\tau\not{d}\gamma_\nu\not{e}\gamma_\tau\not{k}\gamma_\mu] \tag{D.16}$$

の（γ 行列の現れ方による）6 タイプである。式 (B.8) を使う (D.14) は特に面倒だが、辛抱強く正確な計算を実行して上の 6 タイプの NRL を求めれば、後は $\{k_1,k_2,k_3\}$ を置換して足しあげることで $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ を

得ることができる。(その際、$\omega_1+\omega_2+\omega_3=2m$ を使うと $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ の NRL は著しく簡潔になる。) その結果が式 (2.34)

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=\left(\frac{4e^3}{m\omega_1\omega_2\omega_3}\right)^2\sum_{i=1}^{3}{\omega_i}^2(m-\omega_i)^2 \tag{D.17}$$

である。この $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ を式 (2.33) に代入して、$\int d\vec{k}_3$ を実行すると

$$d\sigma=\frac{\alpha r_0^2}{(4\pi)^2}\frac{d\vec{k}_1\omega_2^2 d\omega_2 d\Omega_2}{\omega_1\omega_2\omega_3}\frac{\overline{|\mathcal{M}'|^2}}{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m^4}}\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-p_1^0-p_2^0) \tag{D.18}$$

ただし、$\omega_3=|\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{k}_1-\vec{k}_2|$, $\mathcal{M}'=m\mathcal{M}/e^3$ である。いま、ω_1 を固定して、$\omega_1+\omega_2+\omega_3(\omega_2)-p_1^0-p_2^0=0$ なる $\omega_2=\tilde{\omega}$ とおくと

$$\left.\frac{d(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}{d\omega_2}\right|_{\omega_2=\tilde{\omega}}=\frac{m}{\omega_3}\left[\gamma_1(1-\beta_1\cos\theta_2)+\gamma_2(1-\beta_2\cos\theta_2')-\frac{\omega_1}{m}(1-\cos\theta_{12})\right]$$

ただし、$p_i=(m\gamma_i,\vec{p}_i)$, $\beta_i=|\vec{p}_i|/m\gamma_i$, $\vec{k}_i^2=\omega_i^2$ $(i=1,2)$, $\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2=\omega_1\omega_2\cos\theta_{12}$, $\vec{p}_1\cdot\vec{k}_2=m\beta_1\gamma_1\omega_2\cos\theta_2$, $\vec{p}_2\cdot\vec{k}_2=m\beta_2\gamma_2\omega_2\cos\theta_2'$ と記号を設定した。電子の静止系 ($\vec{p}_1=\mathbf{0}$) では、($\beta_2=\beta$ 等として)

$$\sigma=\alpha r_0^2\int\frac{\overline{|\mathcal{M}'|^2}\omega_1\omega_2 d\omega_1}{m^2\beta\gamma[2m-\omega_1(1-\cos\theta_{12})]}\frac{d\Omega_1}{4\pi}\frac{d\Omega_2}{4\pi} \tag{D.19}$$

さらに陽電子の非相対論的極限 (i.e. $\gamma\approx 1$) では $\cos\theta_{12}=2m(m-\omega_3)/\omega_1\omega_2$ に注意すると

$$\sigma=\frac{8\alpha r_0^2}{3!\cdot\beta}\int_0^m d\omega_1\int_{m-\omega_1}^m d\omega_2\left[\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2+\left(\frac{m-\omega_2}{\omega_3\omega_1}\right)^2+\left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2\right] \tag{D.20}$$

ここで放出 3 粒子の同一性から 3! で割り、$\omega_3=2m-\omega_1-\omega_2$ である。積分を実行する事により、$e^+e^-\to 3\gamma$ の散乱断面積 (2.36)

$$\sigma=\frac{4\alpha r_0^2}{3\beta}(\pi^2-9)$$

が得られた。

参考文献

[1] 九後汰一郎　『ゲージ場の量子論 (I) (II) 』新物理学シリーズ 23,24　(培風館)

[2] J. M. Jauch and F. Rohrich, *The Theory of Photons and Electrons*, Springer-Verlag (1975)

[3] O. Halpern, Phys. Rev, 94, *904* (1954)

[4] A. Ore and J. L. Powell, Phys. Rev, 75, *1696* (1949)

[5] D. W. Gidley, A. Rich, E. Sweetman and D. West, Phys. Rev. Lett, 49, *525* (1982)

[6] C. I. Westbrook, D. W. Gidley, P. S. Conti and A. Rich, Phys. Rev. Lett, 58, *1328* (1987)

[7] D. W. Gidley, A. Rich P. W. Zitzewitz and D. A. L. Paul, Phys. Rev. Lett, 40, *737* (1978)

[8] S. Berko and H. N. Pendleton, *Positronium*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci, 30, *543* (1980)

[9] H. Massey, *Slow positron in gases*, Physics Today, *march*, *42* (1976)