Hyperfine Structure of Positronium in Its Ground State

Preliminary Measurements on Positronium
and
Microwave Engineering
for
The Measurement of The Hyperfine Structure

I.Kato, T.Kimura, E.Shinya, K.Futamoto
— Positronium Group in P2-98 —

June 12, 1999

Abstract

Positronium is the bound state of electron and positron. In its ground state there are two differnt states. One is spin singlet state, described as $^1S_0$-state, and the other is spin triplet state, described as $^3S_1$-state. There exists spin-spin interaction between electron and positron. This makes an energy splitting between the two states of positronium, which is called hyperfine structure. The theory of quantum electrodynamics predicts the value of the hyperfine structure to be $\Delta\nu = 203.381$ GHz. To measure the hyperfine structure is a good experiment for a test of quantum electrodynamics.

Experimentally to determine the hyperfine structure, we need to put positronium in static magnetic field and give oscillating magnetic field of microwave frequency over positronium. So we did some preliminary measurement on positron and microwave engineering, which are mandatory for the measurement of the hyperfine structure. And we obtained some results and techniques on them.

目 次

1 Introduction **1**

2 Principle of Experiment **2**

2.1 Theory of Experiment . . . 2

2.1.1 Spin Eigenstates . . . 2

2.1.2 Transition by Static Magnetic Field and Microwave . . . 2

2.1.3 Resonance Line Shape . . . 3

2.2 Design of Experiment . . . 4

2.2.1 Magnetic Field . . . 5

2.2.2 Cavity and Microwave System . . . 5

2.2.3 γ-Ray Coincidence Detection . . . 5

2.2.4 Problems . . . 6

3 Passage of Positron through the Air **7**

4 2γ Trigger of Positronium Decay **8**

4.1 PMT Calibration . . . 9

4.1.1 Caliblation . . . 9

4.1.2 Resolution . . . 9

4.1.3 The End of The Calibration . . . 10

4.1.4 Calibration Again . . . 10

4.2 Coincidence of PMT 1 and PMT 2; Run 1 . . . 11

4.2.1 Set up and Logic . . . 11

4.2.2 Data and Ananlysis . . . 12

4.3 1275 keV Cut Geometry; Run 2 . . . 14

4.3.1 Set up . . . 14

4.3.2 Data and Analysis . . . 14

4.3.3 A Few Consideration on Run 1 and Run 2 . . . 15

4.4 Trigger with 1275 keV γ; Run 3 . . . 16

4.4.1 Discriminator Threshold of PMT 0 . . . 16

4.4.2 Data and Analysis . . . 16

4.4.3 Consideration . . . 17

4.5 Conclusion . . . 19

5 Static Magnetic Field **21**
5.1 Current Dependence of Static Magnetic Field . . . 21
5.2 Theoretical Estimate for the Output above 5000 Gauss . . . 22

6 Waveguide **25**
6.1 Design of Waveguide . . . 25
6.2 Measurement of Reflectance . . . 25

7 Measurement of SiC Dielectric Constant and $\tan\delta$ **32**
7.1 Purpose . . . 32
7.2 Design of Reflectivity Meter . . . 32
7.3 Experiment . . . 34
7.3.1 Apparatus . . . 34
7.3.2 Correction of Output/Input Ratio and '-20dB'/Input Ratio of Directional Coupler 35
7.3.3 Procedure to measure ϵ and $\tan\delta$ of SiC . . . 37
7.3.4 Summary of Data . . . 37
7.3.5 Analysis of Data . . . 40
7.3.6 Results and Discussion . . . 40

8 Magnetron Oscillator in AC Mode **43**
8.1 Circuit for AC mode . . . 43
8.2 Properties of High Voltage Transformer . . . 44
8.3 Properties of Magnetron Circuit . . . 46
8.4 Magnetron Oscillation in AC mode . . . 47

9 Magnetron Oscillator in DC Mode **50**
9.1 Circuit for DC mode . . . 50
9.2 Magnetron Oscillating in DC Mode . . . 51
9.3 Output Power of Magnetron . . . 52
9.3.1 Correlation between High Voltage and Output Power . . . 52
9.3.2 Correlation between Heat-Up Current and Output Power . . . 53
9.4 Output Frequency of Magnetron . . . 53
9.5 Summary of Magnetron Oscillation . . . 54

10 Lastly ... **56**
10.1 Acknowlegdement . . . 56
10.2 Special Thanks to 56
10.3 Sentiment . . . 56

A Positronium Hyperfine Structure **59**
A.1 The Bethe-Salpeter Equation . . . 59
A.2 The Bethe-Salpeter Equation for Positronium . . . 61
A.3 Nonretarded Approximation . . . 63
A.4 Nonrelativistic Reduction . . . 66

B The Annihilation Rate of Positronium **69**
B.1 Selection Rule . . . 69
B.2 The Annihilation Rate of Singlet-Ps . . . 70
B.3 The Annihilation Rate of Triplet-Ps . . . 72

C Theory of Experiment **75**
C.1 Spin Eigenstates of Positronium . . . 75
C.2 Eigenstates on Static Magnetic Field . . . 75
C.3 The Annihilation Rate on Static Magnetic Field . . . 76
C.4 States Translation by Microwave . . . 77
C.5 Resonance Line Shape . . . 81

D Transmission Lines and Waveguides **86**
D.1 Classification of Wave Solutions . . . 86
D.1.1 TEM Waves . . . 87
D.1.2 TE Waves . . . 89
D.1.3 TM Waves . . . 90
D.2 Coaxial Line . . . 90
D.2.1 TEM Wave in Coaxial Line . . . 91
D.2.2 TE Waves in Coaxial Line . . . 92
D.2.3 TM Waves in Coaxial Line . . . 95
D.3 Rectangular Waveguide . . . 97
D.3.1 TE Waves in Rectangular Waveguide . . . 98
D.3.2 TM Waves in Rectangular Waveguide . . . 100

E Transmission Line with Small Loss **101**

F S-Matrix of Reflector **104**

G Principle of Magnetron Oscillator **106**
G.1 Floquet's Theorem . . . 106
G.2 Magnetron Oscillator . . . 107

Chapter 1

Introduction

Positronium は Electron と Positron の Bound State であり、そこにはそれ以外の他の粒子が存在しないために、QED (Quantum Electrodynamics) の検証実験には非常に良い対象である。さらに、Bound State 2 Body System は Bethe-Salpeter Equation で記述される拡張した理論が必要である。従って、Positronium の Study は Bethe-Salpeter Equation の検証にもなる。

Positronium の Ground State には Spin Singlet State ${}^1S_0$ と Spin Triplet State ${}^3S_1$ がある。この 2 つの状態はほとんど縮退しているが、Electron-Positron 間に Spin-Spin Interaction が存在するため、わずかに縮退が解けていて、この 2 つの Energy Level が Split している。この Energy Level Splitting のことを Hyperfine Structure という。

QED が予言するこの Hyperfine Structure の値は 2 次の摂動で $\Delta\nu = 203.381$ GHz である。この値を実験的に測定するには、Positronium を静磁場中に入れ Microwave を照射し、その Resonance Line を測定する。

QED Process では Charge Conjugation が保存することから、${}^1S_0$-State の Positronium は 2γ に崩壊し、また ${}^3S_1$-State は 3γ に崩壊する。

静磁場中では ${}^3S_1$-State はさらに分裂し、$m = \pm 1$ の状態と $m = 0$ の状態の間には Energy Splitting が生じる。この Energy Splitting の大きさは外部静磁場の大きさに依存する量であるが、1-10 kGauss 程度の大きさ磁場中ではそれは Microwave の周波数に対応するような大きさである。また、この Energy Splitting の大きさと Hyperfine Structure にはある関係がある。

Positronium に一定周波数の Microwave を照射し、外部磁場の大きさを Scanning していくと、Energy Splitting がその周波数と一致したときに Resonance が起こり、${}^3S_1$ の $m = \pm 1$ の状態から $m = 0$ の状態への間で遷移が起こる。この遷移は Magnetic Dipole Transition であり、また ${}^3S_1$-State の寿命が 1 nsec 程度で非常に短いため、Microwave の磁場は 1-10 Gauss 程度の大きさが必要である。

磁場中では ${}^3S_1$ の $m = 0$ の状態と ${}^1S_0$ $(m = 0)$ の状態は Mixing している。${}^3S_1$ の $m = \pm 1$ の状態から $m = 0$ の状態へ遷移した Positronium は、さらに ${}^1S_0$ $(m = 0)$ の状態へ遷移する。従って、Resonance した時には ${}^1S_0$ $(m = 0)$ の状態にある Positronium が多くなり、2γ-Decay の Event Rate が大きくなる。外部磁場の大きさに対して 2γ-Decay の Event を Count することで Reconance を観測でき、それから Hyoerfine Structure を計算できる。

Microwave Source としては、安価で手に入ることから、家庭用電子レンジについている Magnetron を用いることにした。この Magnetron は 2.45 GHz の周波数の Microwave を発振する。この周波数は約 8 kGauss の磁場をかけた時の ${}^3S_1$ の $m = \pm 1$-State と $m = 0$-State の Energy Splitting に対応するものであり、適当である。

当初の我々の目的は、Microwave を用いて Hyoerfine Structure を測定することであったが、Microwave を扱うことは非常に難しいことであったため、途中で目的を変更し、Hyperfine Structure を測定するための基礎的な実験を行なうことにした。この結果、Positronium についての基本的な Data を取り、Microwave の取り扱いについての様々な技術を習得し、また今後改善すべき点、行なわなければならないこと等を認識することができた。

次の章以降で、今回我々が行なった様々な実験について報告する。

Chapter 2

Principle of Experiment

Positronium (電子と陽電子の束縛状態) はそのスピンにより基底状態が大きく 2 種類に分けられる。Ps としてのスピンが 1 のものは 3 重縮退をしており、Triplet-Ps、もしくは 1^3S_1 と呼ばれる。外場がない時のこの崩壊は 3γ となる。一方スピンが 0 のものは 縮退がなく、Singlet-Ps、もしくは 1^1S_0 と呼ばれる。これは 2γ に崩壊する (Appendix B 参照)。外場として磁場を導入すると状態の遷移が起こり、うまく外場を調整することで崩壊過程をほとんど 2γ にすることができる。これはそれぞれの基底状態のエネルギー準位の差 (Hyperfine Structure, 略して hfs) が 2γ 崩壊の Event Rate の変化に直接関わっていることに由来する。従ってこの Rate の変化を測定すれば hfs を知ることができるわけである。

まずはじめに、Positronium Hyperfine Structure 測定に関わる理論的な考察と実験設備の準備から説明する。

2.1 Theory of Experiment

理論の詳しい説明は Appendix A で述べるのでここでは簡単に触れるだけとする。

2.1.1 Spin Eigenstates

実験で扱うのは基底状態だけであると考えるので、その時の Positronium の状態を

$$| S, m \rangle \quad \big(S = 1\ ,\ m = \pm 1, 0 \ \text{ or } \ S = 0\ ,\ m = 0\big) \tag{2.1}$$

で記述しよう。$S = 1$ のものを Triplet-Ps、$S = 0$ のものを Singlet-Ps と呼ぶ。名前の通り、スピン 3 重項とスピン 1 重項を成す。外場として何も加えないときは Triplet-Ps と Singlet-Ps のそれぞれがエネルギー的に縮退しており (W_1、W_0 とする)、そのエネルギー固有値の差 $\Delta W = W_1 - W_0$ を振動数で表すと次のように表せる。この理論的導出は Appendix A に譲る。

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \frac{\Delta W}{2\pi\hbar} = \frac{1}{4}\alpha^4 mc^2 \Big[\ \frac{7}{3} - \frac{\alpha}{\pi}\big(\frac{32}{9} + 2\ln 2\big) + \mathcal{O}(\alpha^2)\ \Big] \\ &= 2.03381 \times 10^2 \ \text{ GHz} \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.2 Transition by Static Magnetic Field and Microwave

まず静磁場を外場として導入する。この導入によって Positronium の状態は以下のようになる。ただし状態はエネルギー固有状態 $| \psi_{S,m} \rangle$ で記述する。

$$| \psi_{1,\pm 1} \rangle = | 1, \pm 1 \rangle \ , \ E_{1,\pm 1} = W_1 \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} | \psi_{1,0} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \{| 0,0 \rangle + y| 1,0 \rangle\} \\ E_{1,0} &= \frac{1}{2}\Big\{(W_1 + W_0) + \Delta W\sqrt{1+x^2}\Big\} \equiv E_+ \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} | \psi_{0,0} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \{| 0,0 \rangle - z| 1,0 \rangle\} \\ E_{0,0} &= \frac{1}{2}\Big\{(W_1 + W_0) - \Delta W\sqrt{1+x^2}\Big\} \equiv E_- \end{aligned} \tag{2.5}$$

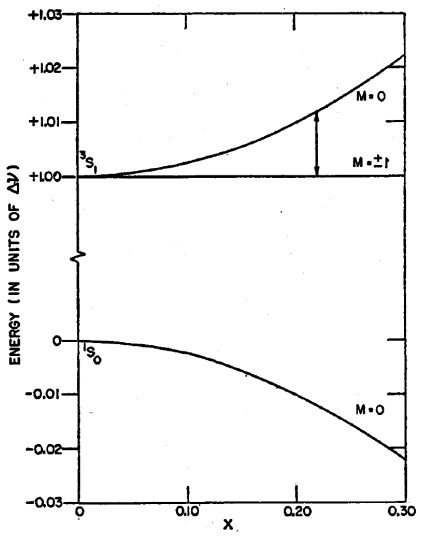


FIGURE 2.1: The energy splitting by static magnetic field

ただしここで

$$y \;=\; \frac{1}{x}\left\{\sqrt{1+x^2}+1\right\} \quad , \quad z \;=\; \frac{1}{x}\left\{\sqrt{1+x^2}-1\right\}$$

である。これによるエネルギー準位の分裂は FIG 2.1 のようになる。

一方、状態については $S=1, m=0$ の状態と $S=0, m=0$ の状態の混合が起こる。また静磁場の強さを十分大きく (2000 Gauss 以上。Appendix C 参照。) とることで、この混合部分の崩壊をほとんど 2γ にすることができるのである。しかし一方では $S=1, m=\pm 1$ の部分は依然としてそのままで、3γ 崩壊を起こしている。

今度は Microwave を導入する。先の静磁場は $m=0$ 状態同士の遷移であったが、Microwave によって $S=1, m=\pm 1$ が $S=1, m=0$ 状態に遷移する。

この 2 つの外場によってそれぞれの状態が 2γ に崩壊する確率 $P_{S,m}$ を理論計算すると次のようになることが知られている。(ここの記号の意味、導出は Appendix C に譲る。)

$$P_{0,0} \;=\; \frac{\lambda_{00,2}}{\lambda_{0,0}} \tag{2.6}$$

$$P_{1,0} \;=\; \frac{\lambda_{10,2}}{|\delta_1-\delta_2|^2}\Big[\frac{|\delta_1|^2}{\delta_1+{\delta_1}^*+\lambda_o}-\frac{{\delta_1}^*\delta_2}{{\delta_1}^*+\delta_2+\lambda_o} \;+\; \big(\text{interchange } 1\leftrightarrow 2\big)\Big] \tag{2.7}$$

$$P_{1,1} \;=\; \lambda_{10,2}\left|\frac{\hbar}{2V}\right|^2\left|\frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1-\delta_2}\right|^2\Big[\frac{1}{\delta_1+{\delta_1}^*+\lambda_o}-\frac{1}{{\delta_1}^*+\delta_2+\lambda_o} \;+\; \big(\text{interchange } 1\leftrightarrow 2\big)\Big] \tag{2.8}$$

$$P_{1,-1} \;=\; P_{1,1} \tag{2.9}$$

2.1.3 Resonance Line Shape

先に与えた確率を使うことで、外場なしの時の 2γ 崩壊と外場ありの時の 2γ 崩壊を起こす Ps の個数変化を求めることができる。Ps 生成時に各状態には $N_{S,m}$ 個存在していたとすると、Ps 生成時の全体数で

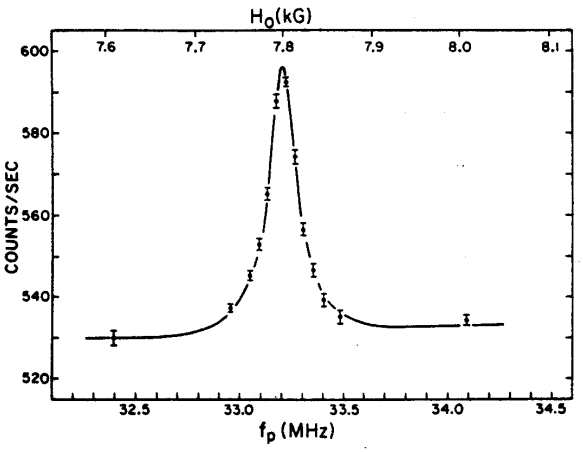


FIGURE 2.2: The Resonance Line Shape

規格化した個数変化率 P_T は次のように与えられる。

$$P_T = \frac{P_{1,1}N_{1,1} + P_{1,-1}N_{1,-1} + \left(P_{1,0} - \frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}}\right) N_{1,0}}{N_{0,0} + N_{1,0} + N_{1,1} + N_{1,-1}} \tag{2.10}$$

これを崩壊の Resonance Line Shape と呼ぶ。ここでは近似を行ってもっとすっきりとした形に書き直そう。Appendix C を見ればわかるように、Microwave の周波数と静磁場の大きさは大きく関係している。今回の実験では 2.45 GHz の出力をする Magnetron を使用するので、Resonance Line Shape が最大になる静磁場の大きさは 8000 Gauss である。この付近の振る舞いがあからさまに見えるようにするため、次式のように変形することができる。

$$P_T = A\frac{{B_1}^2}{\left(B_0 - B_{0r}\right)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \tag{2.11}$$

$$A = \frac{x^2}{256h^2}\frac{\left(g'\mu_B B_{0r}\right)^2}{{f_{01}}^2}\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_o} \tag{2.12}$$

$$\Gamma = \frac{B_{0r}\gamma}{2f_{01}} = \frac{B_{0r}}{4\pi f_{01}}\left[\left(2 - \frac{x^2}{4-x^2}\right)\lambda_o + \frac{x^2}{4-x^2}\lambda_p\right] \tag{2.13}$$

$$B_{0r} = \frac{h}{g'\mu_B}\sqrt{\Delta\nu f_{01}} \tag{2.14}$$

$$h = 2\pi\hbar \tag{2.15}$$

この Resonance Line Shape の概略図を FIG 2.2 に示す。なお、この図における Microwave は 2.45 GHz 出力ではなく、2.33GHz 出力であるためにピーク位置が我々の予想より若干ずれているが、それはそれだけのことである。

この理論曲線と、実験によって得られる 2γ 崩壊の Event 数の変化を比較、検討することで hfs を求めることができる。

2.2 Design of Experiment

Positronium Hyperfine Structure の測定には、Ps の 2γ 崩壊の外場による変化を見れば良いことを簡単に触れたが、では実際にはどのようにしてその 2γ 崩壊を見ればよいであろうか。また外場をどのように

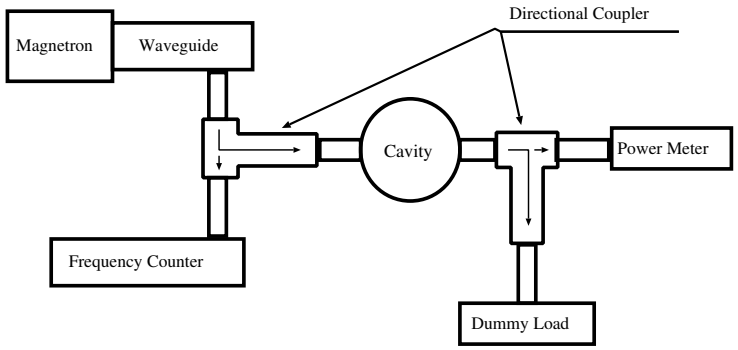


FIGURE 2.3: The schematic diagram of microwave system

作用させるのか。そこでここでは測定に必要な Setup を紹介する。基本的には Magnetic Field を発生させる機構、Ps を発生させ、閉じ込める Cavity と Microwave System、崩壊による 2γ を捕捉する方法の 3 つである。

2.2.1 Magnetic Field

測定に必要な静磁場の大きさは 2000 Gauss 以上、実際には 8000 Gauss 必要である。このように巨大な出力を得るための機械として、物理教室で使われている巨大電磁石を使用する。この電磁石は後に述べる Cavity を挿入することが可能であり、また安定した静磁場を出力するのでこの実験に適している。

2.2.2 Cavity and Microwave System

Microwave 発進実験装置として家庭電化製品である電子レンジのなかにある Magnetron を使用する。また Positron を発生させる線源 ^{22}Na を組み込み、Microwave や静磁場を作用させる場所として Cavity を準備する。Microwave System の概略を FIG 2.3 に示す。

Magnetron の出力口は特殊な形状をしており、直接同軸ケーブルに接続することができない。したがって一度導波管に Magnetron の出力部を挿入し、同軸ケーブルも同じ導波管に接続することで、効率の良い接続を図る。また出力の周波数も同じ計測したいので、Directional Coupler で十分出力を押さえた後、Frequency Counter で計測する。

2.2.3 γ-Ray Coincidence Detection

さて、静磁場、Microwave との相互作用の後 Ps は 2γ 崩壊するが、その捕捉方法を述べる。元々 ^{22}Na から放出された Positron は低エネルギーであるとして、Electron との束縛状態の後崩壊するので、崩壊で放出される 2γ は Back-to-Back に飛び出すと思われる。この 2γ を Photomultiplier (PMT) で Detect する。その概略を FIG 2.4 に示す。

より多くの data を収集するなら、PMT を 2 本 1 組として数組用意すると良い。これは場所と備品の許す限り可能であろう。また外部からの Noise をできるだけ取り除き、かつ磁場の影響を受けないようにするため、PMT は鉛で覆われ、電磁石からは遠ざけておく。

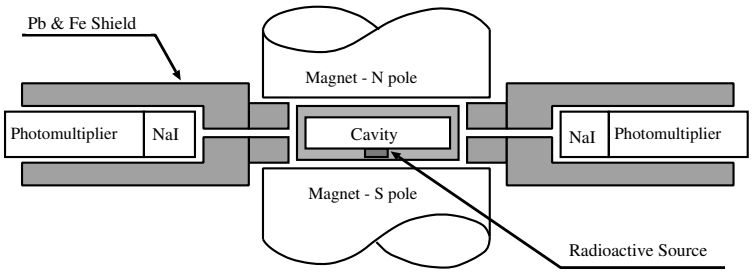


FIGURE 2.4: The schematic diagram of experimental apparatus

2.2.4 Problems

概略は以上であるが、本格的に実験を開始するにあたり、物理的な問題、技術的な問題などが現れてくることになる。それを次章から順を追って考察するのであるが、今ここで簡単に列挙しておこう。

1. Positron – from creation to annihilation –

   放射線源 ^{22}Na から 放出される Positron はどのような挙動を示すのか。空気中の Electron とはどのように相互作用するのか。それを考慮した Cavity の高さは如何に設定するのか。

2. 2γ Detection Using ADC System

   ただ単純に PMT で 2γ を拾うだけでは十分ではない。線源から Positron が放出されたという合図は何か、それを Trigger として ADC で如何に効率よく 2γ Coincidence を拾うか。

3. Output of Electromagnet

   既存の巨大電磁石の振る舞いの特性を調べる必要がある。できるだけ一定出力、大出力を望むには如何に使用すればよいか。

4. Waveguide and Coaxial Line

   Magnetron から出力される Microwave を如何にして Cavity に伝送させるのか。効率よく、かつ危険でない方法はどのようにすればよいか。

5. Dummy Load Using SiC

   電子レンジからの Microwave は人体にとっても非常に危険なものである。これを単に出すだけではどこに危険が分散されるかわからない。この出力を殺すための Dummy Load を設計しなければならないが、それはどうすべきか。

6. Magnetron

   電子レンジに内蔵されている Magnetron はどのような形で Microwave を出力しているのか。Positronium に一定の Microwave を作用させるための発振機構を工夫すべきなのか。

Chapter 3

Passage of Positron through the Air

我々は、空気中における Positron の飛距離を調べるために以下のような実験を行なった。実験のセットアップは Fig. 3.1のようなものである。

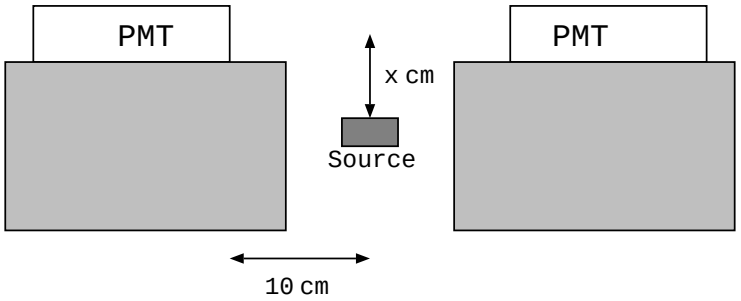


Figure 3.1: Measurement of 2-gamma

ここで、Source は ^{22}Na であり、x の値を変えて 2 つの PMT の Coincidence をとることにより、 2γ の個数を測定する。測定時間はそれぞれ 2 分間である。さらに、得られたデータの対数をとり、線形 Fit することで空気中における Positron の減衰定数を求める。

Fit の結果は Fig. 3.2のようになり、生成した Positron の個数が $\frac{1}{e}$ になる距離は

$$1.08 \pm 0.09$$

となった。また、 Fit の精度の参考として次の数値を挙げておく。

χ^2	27.444616
Freedom	3
Reduced χ^2	9.148206

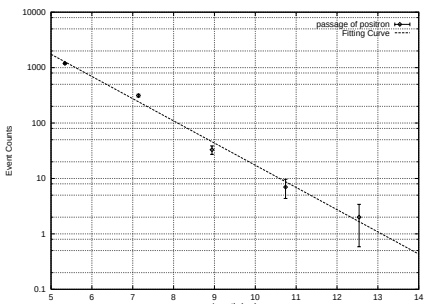


Figure 3.2: Measurement of 2-gamma

Chapter 4

2γ Trigger of Positronium Decay

Hyperfine Structure の測定にあたって、測定自体がどの程度の時間を要するかを見積もるために、2γ Decay の Event Rate がどの程度であるかを知っておく必要がある。そのことについて予備的に行なった測定についてまとめる。Hyperfine Structure の測定では、できる限り Positronium (Ps) が 2γ に Decay した Event だけを取り出さなければならない。主な Background として考えられるのは以下の通りである。

- Accidental Background (Room Background etc.)
- Ps 3γ Decay
- 1275 keV γ-Ray from ^{22}Na

Ps が Decay する時には、Ps の速度はほとんど止まっているとして良いので、2γ は Back-to-Back に放出される。そこで 2 つの Detector を Positron Source をはさんで向かい合わせに置き、それらの Coincidence を取ることで Background (特に Room Background) を減らすことができる。しかしながら、3γ Decay で放出される 3 つの γ のうち 2 つがほとんど Back-to-Back であったり、または Ps を生成するための Positron が ^{22}Na から放出されるのとほとんど同時に放出される 1275 keV の γ-Ray (See Fig. 4.1) が 1 つの Detector に入り、Ps からの γ がもうひとつの Detector に入ったりすると、Detector の Count を見ていただけでは 2γ-Decay と見分けがつかない。

そこで ADC Spectrum も同時にとり、γ-Ray の Energy で Data を Cut することで、できる限り 2γ Decay の Event だけを取り出そうと考えた。そして、その Event Rate を調べた。

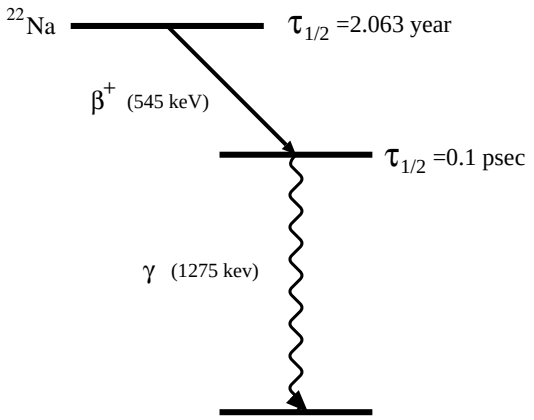


Figure 4.1: Decay Scheme of ^{22}Na

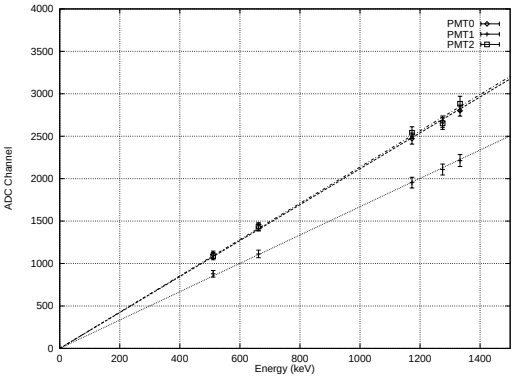


FIGURE 4.2: PMT calibration.

TABLE 4.1: PMT calibration factor

PMT	Calibration Factor [keV/ch]
PMT 0	0.5988 ± 0.0093
PMT 1	0.4680 ± 0.0006
PMT 2	0.4724 ± 0.0058

4.1 PMT Calibration

まずはじめに Photomultiplier Tube (PMT) の特性を調べた。調べた PMT は PMT 0, 1, 2 の 3 本である。それぞれの PMT には 2 inch の NaI Scintilator が付けられてる。

PMT の High Voltage は以下の通りである。

PMT 0; 1660 V
PMT 1; 1400 V
PMT 2; 1540 V

Source として ^{137}Cs, ^{60}Co および ^{22}Na を用いた。

4.1.1 Caliblation

^{137}Cs の 662 keV、^{60}Co の 1173 keV および 1333 keV、^{22}Na の 511keV (Positron Electron Pair Annihilation) および 1275 keV の γ-Ray を使って PMT の Calibration を行なった。

それぞれの ADC Spectrum の Photoelectron Peak に対応するところを Gaussian で Fit し、その平均値と Pedestal から Caliblation した。その結果 FIG. 4.2, TABLE 4.1 に示す。

4.1.2 Resolution

Calibration をするときに行なった Gaussian Fitting の分散を用いて、各エネルギーに対する PMT の Resorution を求めることができる。これらの Resolution R は、Pedestal から Peak までの ADC Channel

TABLE 4.2: Resolution of PMT

Energy [keV]	PMT 0 Res. [%]	PMT 1 Res. [%]	PMT 2 Res. [%]
511	7.524 ± 0.118	8.724 ± 0.163	7.830 ± 0.188
662	6.214 ± 0.106	7.874 ± 0.116	6.576 ± 0.148
1173	5.298 ± 0.192	6.462 ± 0.900	5.530 ± 0.440
1275	5.986 ± 0.154	6.150 ± 0.338	5.566 ± 0.192
1333	4.646 ± 0.130	6.386 ± 0.410	6.062 ± 0.452

数を G、Gaussian の分散を σ として

$$R = \frac{\sigma}{G}$$

で求めた。その結果を TABLE 4.2 にまとめておく。

この結果は、ADC Spectrum によって Data を Cut するのに用いる。

4.1.3 The End of The Calibration

これで PMT についての基本的な情報が集まったので、Ps 2γ Trigger についての解析に入ろうと思った真夜中 1 時、なぜか 2γ Trigger の Photoelectron Peak が今までと約 50 Channel 程度ずれていることを発見した。今までも各 Run ごとに Pedestal がずれていることがあったので、それが原因かと思ったが、Pedestal のずれはせいぜい 10-20 Channel であり、ちょっと説明できない。それで Log Note を見直してみると、PMT の特性調べで使った ADC Channel と 2γ Trigger で使った ADC Channel が異なっていることが発覚した。今までの解析は水に流してもう一度やりなおし。しかし、2γ Trigger の実験では Caribration 等のための Data を取っていないどころか、Pedestal すら取っていない Run もあって、ちょっとびっくりした。

とにかく、この Section 4.1 が結構いい加減なのは、そういうわけです。

4.1.4 Calibration Again

Ps Decay の 2γ Trigger の Data Taking では、あらかじめその Set での Calibration 用の Data を取るのを忘れたので、その Data 自身で Calibration をすることにした。Pedestal を取ってある Run とそうでない Run があったので、次のように Calibration することにした。

- Pedestal を取ってある Run については、PMT 0 は 1275 keV の Photoelectron Peak で、PMT 1 と PMT2 は 511 keV の Photoelectron Peak で、それぞれ Calibration した。
- Pedestal を取っていない Run については、その前後に行なった Run の Pedestal の平均をその Pedestal とし、PMT 0 は 1275 keV の Photoelectron Peak で、PMT 1 と PMT2 は 511 keV の Photoelectron Peak で、それぞれ Calibration した。

このやり方についてはあまり根拠はない。しかし、Calibration Factor は各 Run ごとではそれほど変化はなかったので、だいたい妥当であろうと思う。

4.2 Coincidence of PMT 1 and PMT 2; Run 1

4.2.1 Set up and Logic

PMT 1 と PMT 2 を ^{22}Na Source をはさんで向かい合わせに置き、Ps の 2γ Decay を観測した。その時の Set-Up は Fig. 4.2.1 に示してある。また、その Logic は Fig. 4.4 に示してある。

Source は PMT 1 と PMT 2 の中間に置いてあり、図のように PMT の中心軸からはずらしてある。PMT 1 と PMT 2 が Source から 10 cm 離してあるが、これは 3γ Decay が見えないように、かつ Count Rate が極端に低くならないようにするためである。また、実際の Hyperfine Structure の測定では、扱う Microwave の周波数が 2.45 GHz であり、そのとき Cavity の直径は 15 cm 程度である。したがって、PMT 1 と PMT 2 の間には約 20 cm 程度の間隔を置かねばならず、このことも考慮に入れて、このような Set-Up にした。図のように、Source は PMT の中心軸からずらしてある。これも実際の測定を考慮に入れた結果である。

Logic は基本的であり、ただ単に PMT 1 と PMT 2 の Coincidence で ADC Gate を作り、PMT 1 と PMT 2 の ADC Spectrum を取る。PMT 0 との Coincidence は後の測定のためにあり、今の場合は PMT 0 の Coincidence は OFF にしてある。Delay は Raw Signal と Gate の Timing 合わせのために入れてある。

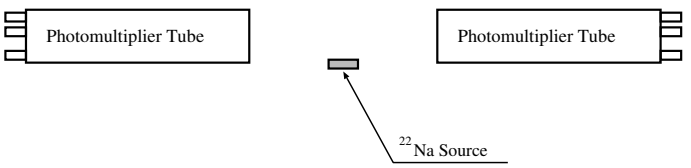


Figure 4.3: Set up for the coincidence of PMT 1 and PMT 2.

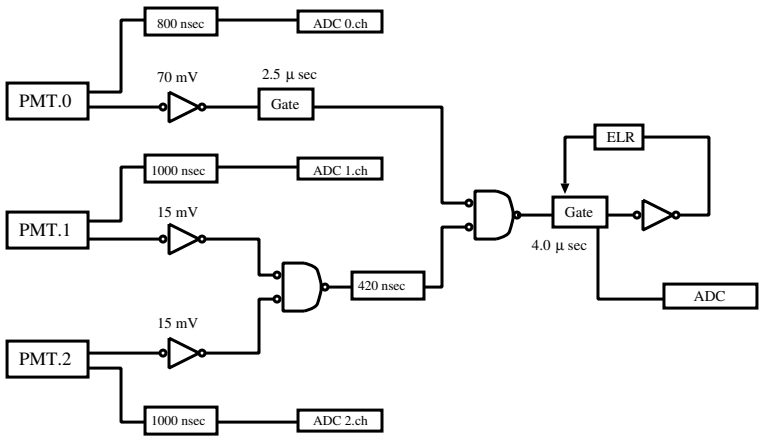
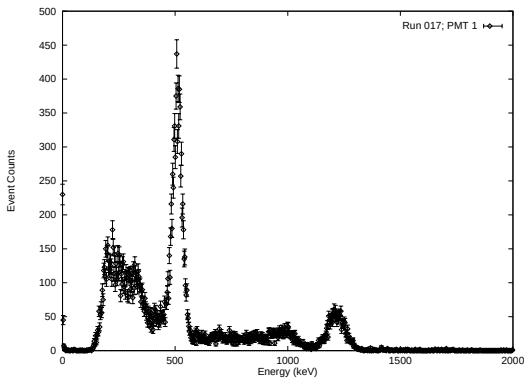
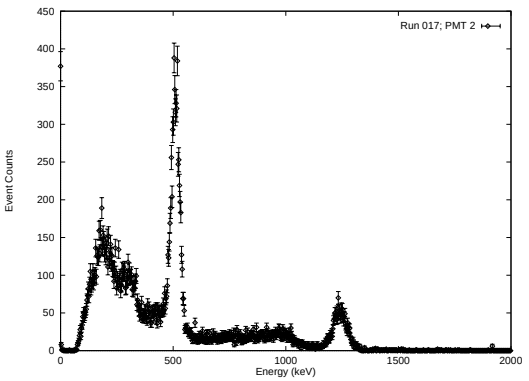


Figure 4.4: Logic circuit for 2γ trigger.



(a) ADC spectrum of PMT 1



(b) ADC spectrum of PMT 2

FIGURE 4.5: ADC spectrums of PMT 1 and PMT 2 of Run 1. We aimed to take the data of 2γ decay events, however these spectrums have many events which energy is larger than 511 keV. This shows the presence of γ-ray of 1275 keV in the spectrums.

4.2.2 Data and Ananlysis

この Set で Data を取った (この Data Taking を Run 1 と呼ぶことにする)。Trigger Rate は 33.51 ± 0.23 Hz であった。ここで得られた PMT 1 と PMT 2 の ADC Spectrum は FIG. 4.5 に示した。(a) は PMT 1、(b) は PMT 2 の Spectrum である。

この Spectrum を見ると 511 keV よりも Energy の大きい Event があることが分かる。1200-1300 keV のところに Peak があることから、明らかに 1275 keV の γ-Ray も見ている。

そこで 横軸に PMT 1 の Energy を、縦軸に PMT 2 の Energy を取り、Scatter Plot をしてみた。それが FIG. 4.6 である。

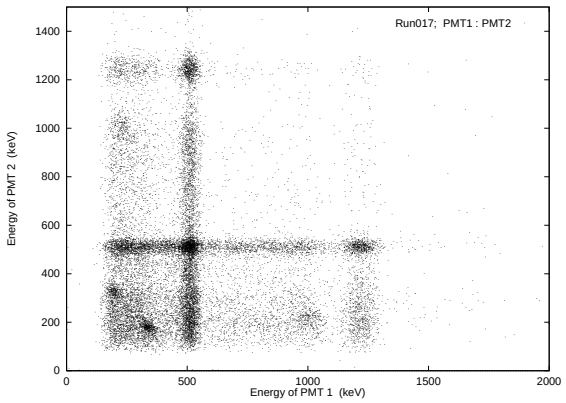


FIGURE 4.6: Scatter plot of PMT 1 and PMT 2.

TABLE 4.3: Event rate of Run 1 with Cut. N Cut means Narrow Cut, and W means Wide Cut.

Cut	Event/Trigger	Count Rate [Hz]
No Cut	1	33.51
N Cut	0.0799	2.68
W Cut	0.5409	18.13

Spectrum over 511 keV

511 keV を越えるような Event について考える。FIG. 4.6 の Scatter Plot から、PMT 1, PMT 2 の両方が 511 keV を越えるような Event はほとんどない。したがって、これは片方の PMT が 1275 keV の γ を、もう片方の PMT が Ps の Decay を見ていると考えられる。1275 keV の γ を拾わないように Geometry を考えるか、または 1275 keV を Cut する方法を考えなければならない。

Data Cut

511 keV 以上の γ を見ている Event は明らかに 2γ Decay Event ではないので、その Event を Cut した時の Count Rate を調べることにした。

Narrow Cut

PMT 1 および PMT 2 がともに Photoelectron Peak の Event だけを取り出す。これは最も確実に 511 keV の γ を取り出せる Cut である。取り出した Region は以下の通りである。

PMT	Low Limit – High Limit (keV)
PMT 1	463 – 582
PMT 2	470 – 572

これはそれぞれの PMT の Resolution をもとに、上側は 99 % の Event を取るために 511 keV から上側に 3σ、下側は Compton Edge から尾を引いている Event が混じるのをなくすために 511 keV から下側に 3σ ではなく 2σ を取った。

Trigger に対するこの Event の割合、および Count Rate は TABLE 4.3 にまとめた。

Wide Cut

PMT 1 および PMT 2 がともに Photoelectron Peak 以下の Energy の Event を取り出す。この場合には 3γ Decay の Event も混じるが、PMT 1 と PMT 2 の Coincidence を取っているため、それはあまり多くないと考えられる。取り出した Region は以下の通りである。

PMT	High Limit (keV)
PMT 1	582
PMT 2	572

これは 511 keV から上側に 3σ 取ってある。

Trigger に対するこの Event の割合、および Count Rate は TABLE 4.3 にまとめた。

4.3 1275 keV Cut Geometry; Run 2

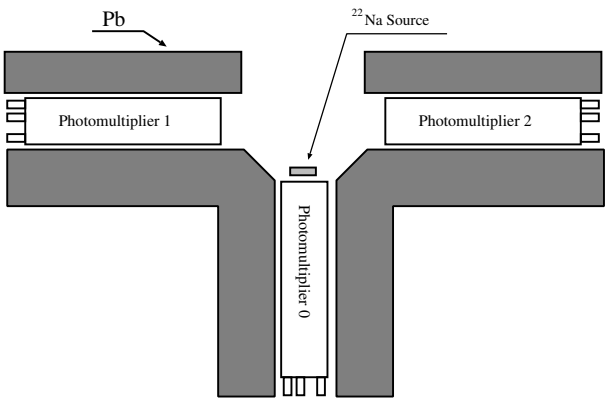


FIGURE 4.7: Set up for 1275 keV γ trigger.

4.3.1 Set up

次に PMT 1, 2 からは直接 ^{22}Na Source が見えないように Geomotry を FIG. 4.7 のようにした。ここでも PMT 1 と PMT 2 の Coincidence を取る。FIG. 4.7 には PMT 0 が置かれているが、この測定ではこれは使わない。また、この Data Taking に使った Logic も FIG. 4.4 と同じである。PMT 0 の Coincidence は OFF にしてある。

4.3.2 Data and Analysis

これで得られた PMT 1 および PMT 2 の ADC Spectrum は FIG. 4.8 に示した。これを見ると、FIG. 4.5 に比べて 511 keV 以上の Event が少なくなっている。したがって、ある程度は 1275 keV の γ を Cut できている。

この時の Trigger Rate は 8.534 ± 0.059 Hz であった。この Data の解析は Section 4.2 と同様に行なった。

Narrow Cut

Photoelectron Peak 付近の Event だけを取り出した。その Region は以下の通りである。

PMT	Low Limit – High Limit (keV)
PMT 1	467 – 576
PMT 2	472 – 568

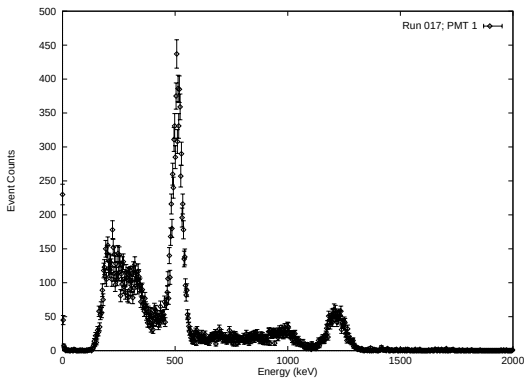
この Region を選んだ理由も Section 4.2 と同様である。

Trigger に対するこの Event の割合、および Count Rate は TABLE 4.4 にまとめた。

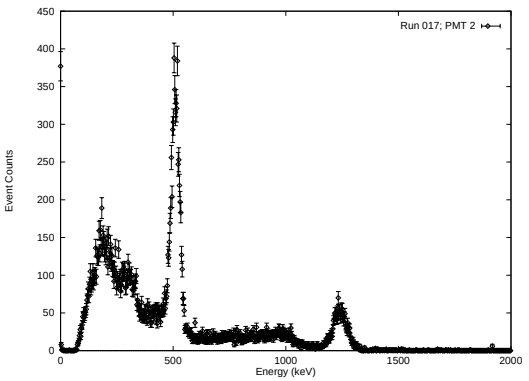
Wide Cut

Photoelectron Peak 以下の Energy 領域の Event だけを取り出した。その Region は以下の通りである。また Trigger に対するこの Event の割合、および Count Rate は TABLE 4.4 にまとめた。

PMT	High Limit (keV)
PMT 1	576
PMT 2	568



(a) ADC spectrum of PMT 1



(b) ADC spectrum of PMT 2

FIGURE 4.8: ADC spectrums of PMT 1 and PMT 2 of Run 2. Compared with Run 1, this shows less events over 511 keV.

TABLE 4.4: Event rate of Run 2 with Cut.

Cut	Event/Trigger	Count Rate [Hz]
No Cut	1	8.534
N Cut	0.1633	1.394
W Cut	0.8323	7.103

4.3.3 A Few Consideration on Run 1 and Run 2

Run 1 と Run 2 の違いは次の 2 点である。

1. Run 1 では PMT 1, 2 から直接 Source が見える Geometry であるが、Run 2 では見えない (つもり ?)。
2. Run 1 では Source は PMT 1, 2 の中心軸から約 2.5cm のところにあったが、Run 2 では約 6 cm のところにある。

そこで PMT 1, 2 のうちの少なくとも一方が 511 keV を越えるような Event を取り出した。その Count Rate は以下の通りである。

$$\text{Run 1;}\quad 15.39 \pm 0.15 \text{ Hz}$$
$$\text{Run 2;}\quad 1.431 \pm 0.024 \text{ Hz}$$

Run 1 に比べ Run 2 は Order 1 落ちているので、ある程度は 1275 keV の γ を Cut できている。

しかしながら FIG. 4.9 を見ると、Lead (Pb) に対して 1 MeV 程度の γ の Attenuation Coefficient μ_{Pb} は $\mu_{\mathrm{Pb}} \approx 20$ g/cm^2 であり、Lead の密度は $\rho = 11.34$ g/cm^3 なので、Attenuation Length λ_{Pb} は $\lambda_{\mathrm{Pb}} \approx 1.76$ cm である。Run 2 の Geometry では γ が Source から PMT に入るためには約 5 cm 程度の Lead を通過しなければならず、この Attenuarion Length から計算すると、Run 1 に比べ Run 2 は約 0.06 倍になっていなければならず、Run 2 では 1275 keV の γ はほとんど見えないはずである。Run 2 で

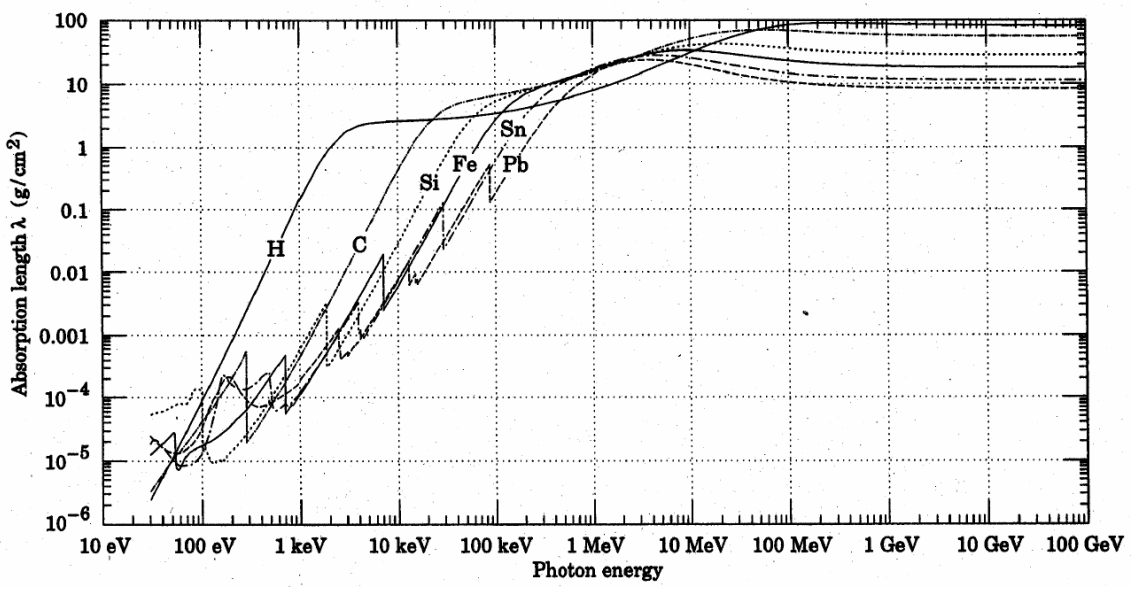


FIGURE 4.9: Attenuation coefficient for several matters. (From Particle Data Book)

も 1275 keV の Photoelectron Peak が見えていることから、その Energy の γ は PMT に入っている。これは PMT からは直接 Source が見えなくなっているつもりでいたが、実際にはそうはなっていなかったのではないかと考えられる。

4.4 Trigger with 1275 keV γ; Run 3

最後に、^{22}Na が β-Decay する際に同時に放出される 1275 keV の γ-Ray で Trigger することを考えた。これをすることにより、Trigger Rate はより小さくなるが、積極的にこれに起因する Background を Cut できる。

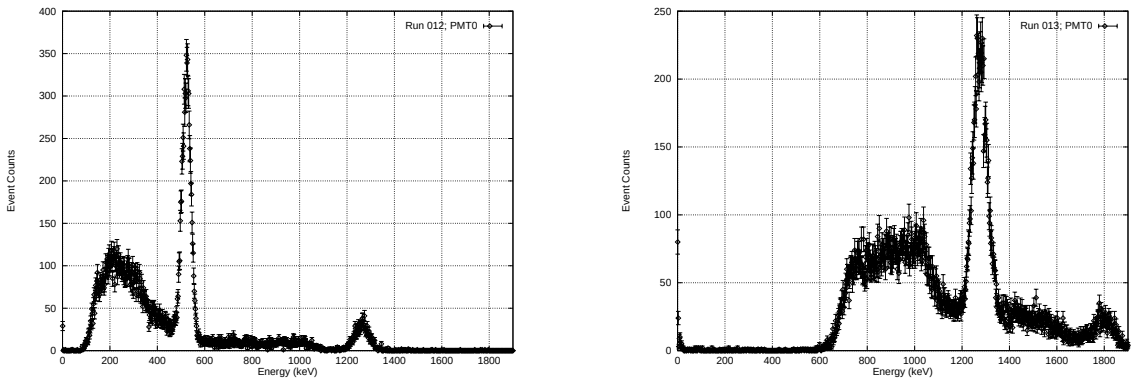
この測定をするにあたって、Geomerty は FIG. 4.7 である。また、Logic は FIG. 4.4 であるが、今回は PMT 0 の Coincidence も ON にする。

4.4.1 Discriminator Threshold of PMT 0

PMT 0 には 1275 keV の γ が来た時にだけ Signal を出すことが要求される。そのために PMT 0 の Discr. の Threshold を上げ、PMT 0 から大きな Signal が来た時にだけ Discr. が Signal を出すようにした。FIG. 4.10 は Discr. Threshold を 15 mV および 70 mV にした時の ADC Spectrum である。PMT 0 の Resolution は 511 keV で 7.524 % (See TABLE 4.2) であり、したがって 550 keV 付近までは 511 keV の γ をとらえている可能性があるが、FIG. 4.10(b) は、Threshold が 70 mV のときには 511 keV の γ ととらえていないことを示すものである。

4.4.2 Data and Analysis

PMT 0 の Discr. Threshold を 70 mV にした状態で、PMT 0, 1, 2 の Coincidence で Tigger をかけ Run 1, 2 と同様に Data Taking を行なった。その時の Count Rate は 0.5194 ± 0.0031 Hz であった。ま



(a) Discr. threshold level; 15 mV

(b) Discr. threshold level; 70 mV

FIGURE 4.10: ADC Spectrum of PMT 0. (a); With 15 mV of discriminator threshold level. (b); With 70 mV of discriminator threshold level. (b) shows that PMT 0 discriminator does not response to signal below 511 keV.

TABLE 4.5: Event rate of Run 3 with Cut.

Cut	Event/Trigger	Count Rate [Hz]
No Cut	1	0.5194
N Cut	0.1907	0.0990
W Cut	0.9124	0.4739

た、PMT 1, 2 の ADC Spectrum は FIG. 4.11 に示した。

これを見ると、511 keV を越えるような Event は Run 2 のときに比べて非常に少なくなっている。PMT 1, 2 の少なくとも一方が 511 keV を越えている Event の Rate は 0.0455 ± 0.0009 Hz であった。これは Run 2 のときの約 1/30 の Rate であり、Trigger 全体に対するこの Event の割合は約 9 % である。

Run 1, 2 と同様に、PMT 1, 2 の ADC Spectrum の Photoelectron Peak 付近のみの Event、およびそれ以下の Event の Rate を計算したのが TABLE 4.5 である。

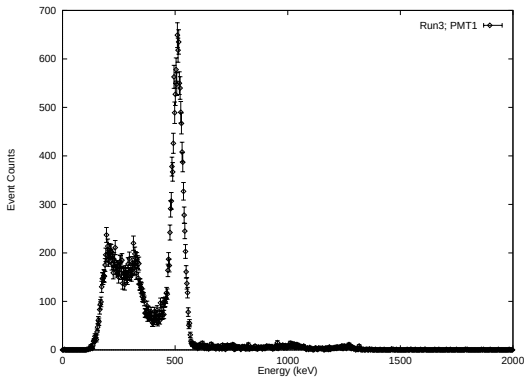
4.4.3 Consideration

ここで PMT 0 の ADC Spectrum を見てみた。それが FIG. 4.12 である。ここには Discr. Threshold で Cut したはずの Low Energy Event が見られる。ここではこの Spectrum について考える。

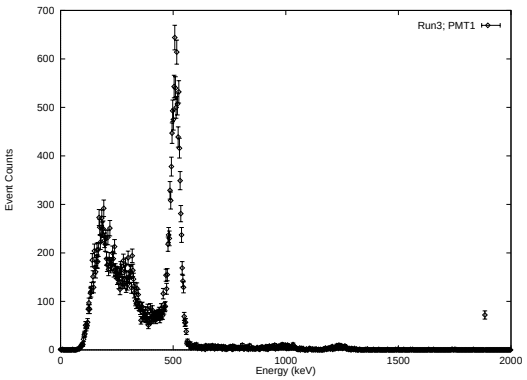
FIG. 4.12 で 600-700 keV 付近に見られる Edge は、Threshold Effect であると考えるのが妥当であろう。問題はその Edge よりも低い Energy の Event である。

これを理解するために、PMT 0 の Energy が 700 keV 以上で Cut した場合と 700 keV 以下で Cut した場合のそれぞれ場合の PMT 1 VS PMT 2 の Scatter Plot を取ってみた。FIG. 4.13 がそれであるが、これを見る限りでは 2 つの場合にそれほど違いはない。

PMT 0 は Discr. がかかった時点で Width 2.5 μsec の Signal を出し、PMT 1 と PMT 2 の Coincidence



(a) ADC spectrum of PMT 1



(b) ADC spectrum of PMT 2

FIGURE 4.11: ADC spectrums of PMT 1 and PMT 2 of Run 3. Compared with Run 2, this shows much less events over 511 keV.

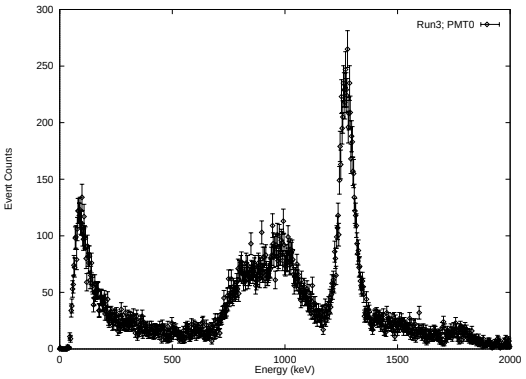
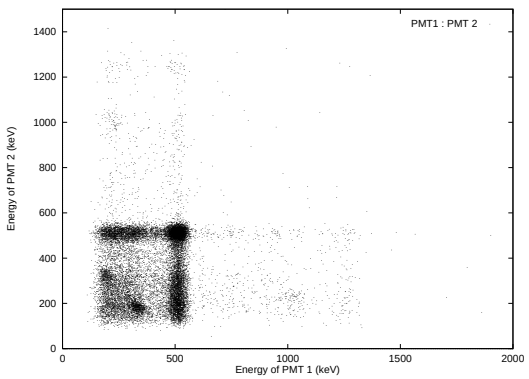
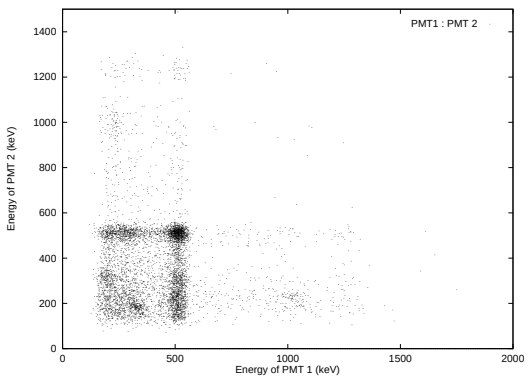


FIGURE 4.12: ADC spectrum of PMT 0 in Run 3



(a) With PMT 0 energy higher than 700 keV



(b) With PMT 0 energy lower than 700 keV

FIGURE 4.13: Scatter plots of PMT 1 vs PMT 2. (a); The energy of PMT 0 is required to be higher than 700 keV. (b); The energy of PMT 0 is required to be lower than 700 keV. These two pictures seem quite similar to each other.

と Coincidence を取っているので、ADC Gate が開く Timing は PMT 1 と PMT 2 の Coincidence が決めていると考えて良い。従って、PMT 0 の Signal が ADC Gate の Timing と合わなくなる可能性があり、ADC が PMT 0 の Signal すべてを積分していない、すなわち、PMT 0 の Signal が ADC Gate からはみ出すことにより ADC Spectrum が Low Enegy 側に Shift してしまうとも考えられるが、これは PMT 0 の Threshold Effect による Edge がはっきり見えていることから、そう考えるのは妥当ではなく、1275 keV の γ とはまったく関係のないものによると考えるのが妥当である。

他に考えられる Pulse Height の高い Background として考えられるのは Cosmic Ray と Room Background (主に壁からの ^{40}K の 1500 keV γ-Ray) がある。また、PMT 自身が出す Thermal Electron による Signal も考えられる。

Cosmic Ray は主に Muon であり、これが NaI 中を通過した時に NaI に残す Energy は、$(dE/dx)_{\min} = 1.305$ MeV/(g/cm^2) であり NaI の密度は $\rho = 3.67$ g/cm^3 であるので、約 10 MeV となる。この数値は大き過ぎるし、空から降ってくる Muon が PMT 0 の NaI を通り、かつ、PMT 1, 2 と Coincidence するのは非常に稀な Event であり、Event Rate の大きさを説明できない。

Roombackground については、PMT 全体を Lead Block で Shield しているので、それほど Rate は大きくはないと考えられるが、その Data を取っていないのではっきりしたことは言えない。

最後に PMT の Thermal Electron であるが、この Rate は PMT によって大きく異なるし、また PMT にかける High Voltage によっても異なり、ここで用いた PMT 0 のそのような特性は調べていないので、これが Low Energy ADC Spectrum の原因かどうかはっきりしたことは言えない。しかし、Thermal Electron の Signal は鋭く、High Voltage の値によっては高い Pulse Height となるので、ADC Spectrum は NaI による Signal に比べてかなり Low Energy 側になることは確かで、これは Low Energy ADC Spectrum の原因の有力な Candidate であることは確かである。

4.5 Conclusion

以上の測定から以下のように結論する。

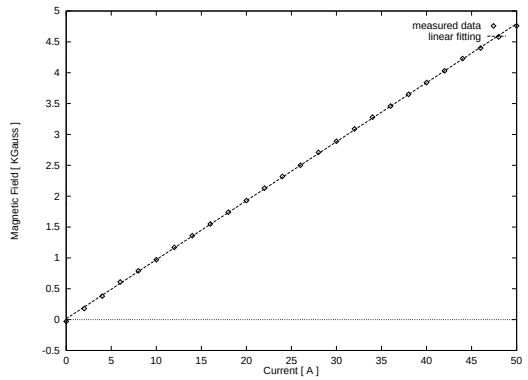
実際の Hyperfine Structure の測定では、できるだけ確実に 2γ-Decay のみをとらえたい。しかしながら、Microwave による 2γ-Decay Rate の変化は大きくはなく、統計のためにより多くの Event を取る必要もある。この 2 つの要求を満たすためには、Run 2 のような Set で行なうことが良いだろう。ただし、Run 2 のような Lead Block を実際におくことはできない (Cavity の中にはそのような導体は入れられない) ので、Source を直接は見ずに、かつより多くの 2γ-Decay を見られるような Shield の仕方をもう少し考える必要がある。

Chapter 5

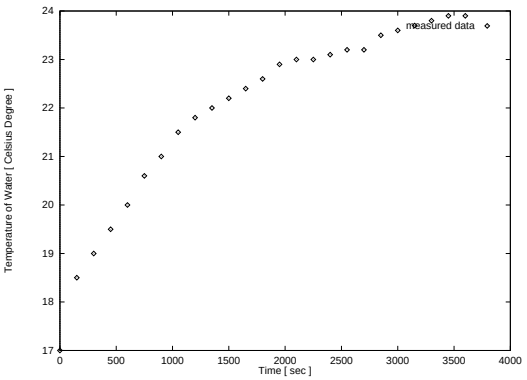
Static Magnetic Field

5.1 Current Dependence of Static Magnetic Field

Positronium に大きな静磁場をかけるため、物理学教室にある巨大電磁石を用いる。まずこの電磁石が我々の望む 8000 Gauss まで出力できるのか測定してみよう。測定によって得られた、電源からの電流と電磁石の中心で発生する磁場の相関を Fig 1(a) に示す。



(a) The correlation between current and magnetic field



(b) The temperature of water throughout electromagnet

Figure 5.1: The behavior of electromagnet

ここでは data の最小自乗法による fitting の関数も載せてある。その関数は

$$B \quad = \quad 0.09562\, I \; + \; 0.01419 \tag{5.1}$$

である。これを見れば明らかなように電流と静磁場は線形で単純な関係にある。今回は電源部の最大出力がこれ以上上がらないので、ここまでしか測定できなかったが、この延長でも十分線形であろうと予測される。ついでに書いておくが、電磁石はなにぶん大電流を必要とするので発熱をおこす。それを防ぐために常に冷やしておく必要があり、そのために水を通す管がついている。この管を通って出てきた水の温度変化を見てみよう。出力は我々の可能な最大、つまり電流 $I = 50$ A、電圧 $V = 30$ V で一定に保って 4000 秒測定した。この結果を Fig 1(b) に示す。これを見る限り、温度変化は時間とともに収束していくことが分かる。長時間起動しておくと、電流による発熱と水による放熱が平衡状態になっていく。しかし簡単に温度の平衡状態にはならず、少なくとも 1.5 時間を要するようである。磁場の発生そのものはこのような時間のかかる事はない。我々の望む 8000 Gauss にはどうやって到達したら良いであろうか。何通りか考えられるであろうが、すぐに思い付くのは次の 2 つであろう。

1. 既存の電源より大電流、大電圧を出力できる電源を手に入れ、そのまま使う。

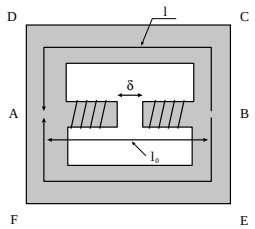


FIGURE 5.2: The schematic figure of electromagnet

2. 電磁石の鉄芯部分を改造する。

はじめのものは書くのは簡単だがそれは非常に危険なことである。物理的に危険な電源であるのは当然ながら、そんなにお金がかけられないという現状もある。これ 1 回限りのためにそんな電源は購入できないであろう。となると考慮すべきは後者の方になる。それを以下で述べることにする。

5.2 Theoretical Estimate for the Output above 5000 Gauss

現在物理学教室に存在する巨大電磁石の、鉄芯とコイルの概略図は FIG 5.2 である。この巨大電磁石の鉄芯部分に新たな鉄を追加し、隙間を狭くする。残念ながら、この電磁石の付録として付いてきた「ヒステリシス曲線」が見当たらないため、この鉄芯の比透磁率などが分かっていない。さらにコイルの形態も外側から見ることができないため、何回巻いてあるのかは知ることができない。従って追加する鉄は電磁石のそれと同質のものとする。また巻数は計算ではうまく消すことができる。

以上を踏まえた上で、簡単ながら理論的に考えていくことにする。まず鉄芯を追加しない状態での電磁石の、磁気回路としての性質を見る。FIG 5.2 を参照。AB 間、BCDA 間、BEFA 間のそれぞれの物理的な数値を次のようにする。

1. AB 間 鉄部分

$$\begin{aligned}
\text{断面積} &: S_0 = (7.5)^2\pi \text{ cm}^2 \\
\text{全長} &: l_0 - \delta = 47 - 10 = 37 \text{ cm} \\
\text{透磁率} &: \mu \\
\text{磁気抵抗} &: R_{0F} = \frac{l_0 - \delta}{\mu S_0} \\
\text{電流} &: I \quad , \quad \text{巻数} : \text{それぞれに}\frac{n}{2}\text{回}
\end{aligned}$$

2. AB 間 隙間部分

$$\begin{aligned}
\text{断面積} &: S_0 = (7.5)^2\pi \text{ cm}^2 \\
\text{全長} &: \delta = 10 \text{ cm} \\
\text{透磁率} &: \mu_0 \\
\text{磁気抵抗} &: R_0 = \frac{\delta}{\mu_0 S_0}
\end{aligned}$$

3. BCDA 間

$$\text{断面積} : S = 11 \times 18 = 198 \text{ cm}^2$$

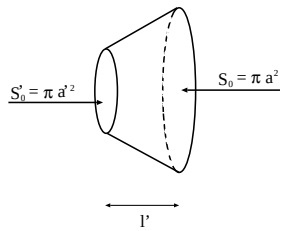


FIGURE 5.3: The additional part of electromagnet

$$\begin{aligned} \text{全長} &: l = 115\ \text{cm} \\ \text{透磁率} &: \mu \\ \text{磁気抵抗} &: R_1 = \frac{l}{\mu S} \end{aligned}$$

4. BEFA 間

$$\begin{aligned} \text{断面積} &: S = 11 \times 18 = 198\ \text{cm}^2 \\ \text{全長} &: l = 115\ \text{cm} \\ \text{透磁率} &: \mu \\ \text{磁気抵抗} &: R_1 = \frac{l}{\mu S} \end{aligned}$$

また AB 間、BCDA 間、BEFA 間の磁束をそれぞれ Φ_0、Φ_1、Φ_2 とする。この時、電気回路と同様にして磁気回路の法則は次のようになる。

$$\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2 = 2\Phi_1 \tag{5.2}$$

$$\frac{n}{2}I + \frac{n}{2}I = \Phi_0\big(R_0 + R_{0F}\big) + \Phi_1 R_1 \tag{5.3}$$

$$\frac{n}{2}I + \frac{n}{2}I = \Phi_0\big(R_0 + R_{0F}\big) + \Phi_2 R_2 \tag{5.4}$$

これより、隙間部分の磁束 Φ_0 とその磁束密度 B_0 は次のように求まる。

$$\Phi_0 = \frac{2nI}{2(R_0 + R_{0F}) + R_1} \quad , \quad B_0 = \frac{\Phi_0}{S_0} = \frac{2nI}{\{2(R_0 + R_{0F}) + R_1\}S_0} \tag{5.5}$$

次に鉄を追加して考えよう。追加部分を隙間に入れる。その鉄の形状は FIG 5.3 に載せる。この鉄の追加部分の磁気抵抗を R'_{0F} としよう。これは

$$R'_{0F} = \frac{l'}{\mu\pi a a'}$$

となる。またこれを挿入することにより、R_0 が

$$R_0 \longrightarrow R'_0 = \frac{\delta - 2l'}{\mu_0 S_0}$$

となる。これにより、隙間部分の磁束、磁束密度は次のように変化する。

$$\Phi'_0 = \frac{2nI}{2(R'_0 + 2R'_{0F} + R_{0F}) + R_1} \quad , \quad B'_0 = \frac{2nI}{\{2(R'_0 + 2R'_{0F} + R_{0F}) + R_1\}S'_0} \tag{5.6}$$

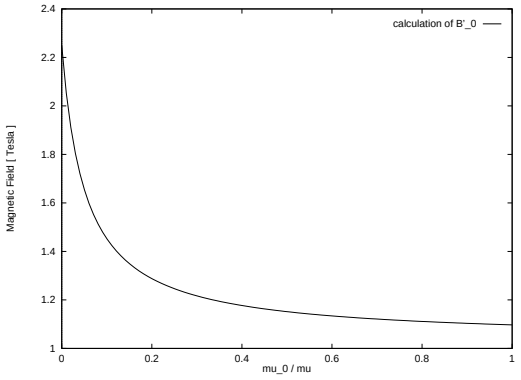


FIGURE 5.4: The μ_0/μ dependence of magnetic field

これより、実際に測定して得られた磁束密度 B_0 と、鉄の追加により変化した磁束密度 B_0' の関係が導かれる。

$$\frac{B_0'}{B_0} = \frac{\{2(R_0+R_{0F})+R_1\}S_0}{\{2(R_0'+2R_{0F}'+R_{0F})+R_1\}S_0'} \tag{5.7}$$

これを具体的に書き下してみる。整理した結果、

$$\frac{B_0'}{B_0} = S_0 a\Big\{2S\delta+\frac{\mu_0}{\mu}\big[2S(l_0-\delta)+S_0 l\big]\Big\} \tag{5.8}$$

$$\times\Big\{2S_0' Sa(\delta-2l')+\frac{\mu_0}{\mu}\big[2S_0' Sa(l_0-\delta)+4S_0 Sa' l'+S_0 S_0' a l\big]\Big\}^{-1} \tag{5.9}$$

となる。ここで、鉄の透磁率 μ がわからないので、μ が真空透磁率 μ_0 に比べて非常に大きいとする。つまり $\mu_0/\mu \ll 1$ とする。計算ではこの比透磁率を残したくないため、第 0 近似を行うと、

$$B_0' = \frac{S_0\delta}{S_0'(\delta-2l')}B_0 = \frac{a^2\delta}{a'^2(\delta-2l')}B_0 \tag{5.10}$$

となる。これより、$B_0 = 5000$ Gauss、$a' = 5.0$ cm、$l' = 2.5$ cm とすると

$$B_0' = 2.25 \ \text{Tesla}$$

となる。ちなみに、比透磁率の関数で生成磁場を計算すると、FIG 5.4 のようになる。つまり、実験に必要とされている磁場の大きさ 0.8 Tesla よりも十分大きくなることが分かる。

Chapter 6

Waveguide

Magnetron から Cavity へと Microwave を伝送する際に、導波管及び N 型同軸ケーブルを用いるため、導波管の性質を調べておく必要がある。ここでは、導波管の設計、Oscillator による導波管と同軸ケーブルの間の反射率測定の結果について述べる。

6.1 Design of Waveguide

我々の目的は Input 側の Magnetron に戻ってくる反射波をできるだけ抑えて、Microwave を Output の同軸ケーブルに送り出すことである。このため、導波管内においてある 1 つの電磁波のモードのみが存在するような条件のもとで設計を行なう。

今、Magnetron の周波数は固定されているため、導波管の遮断周波数が 2.45GHz より小さい必要がある。また、2 番目以降のモードがたたないことと合わせて、矩形導波管の断面の長い方の辺 a mm には

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_0}{2} < a < \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}} \\ \Longrightarrow \quad & 61.2 < a < 86.5 \end{aligned}$$

という条件が課される。ここで、λ_0 は管内波長である。この条件を満たし、典型的な矩形導波管と同じく辺の比を 1 : 2 としたものとして、我々の実験に用いるものは 72 mm × 36 mm とした。

また、Input-Output のコネクタ間隔については、互いの影響が無視できる程度に離すことを前提として、管内波長と同程度の 230mm とした。

以上のように設計したものを銅板を折り曲げて作るという方法で発注した。Fig. 6.1に完成図を示す。

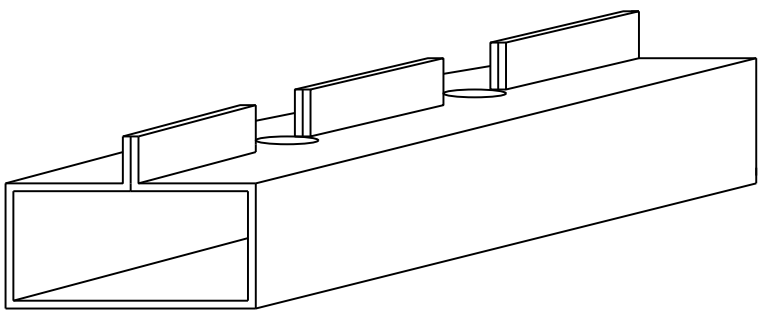


Figure 6.1: Waveguide

6.2 Measurement of Reflectance

前節のようにして設計された導波管を用いて反射率を測定する。測定のセットアップは次に示すようなものである。

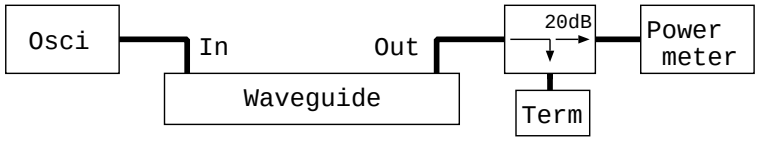


FIGURE 6.2: Setup of measurement of trancemitted wave

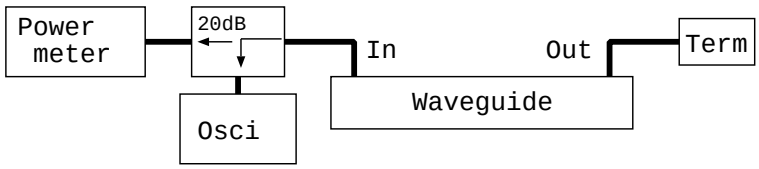


FIGURE 6.3: Setup of measurement of reflected wave

- Oscillator 2.45GHz の microwave を発振。
- Directional Coupler　20dB。
- Powermeter 1W 程度まで測定可能。

ここで、導波管から同軸ケーブルへと microwave を取り出すプローブとして次のようなものを用いた。

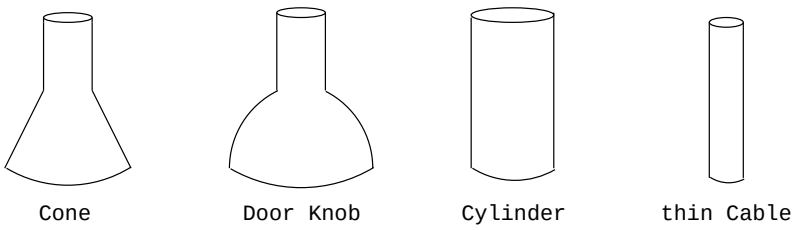
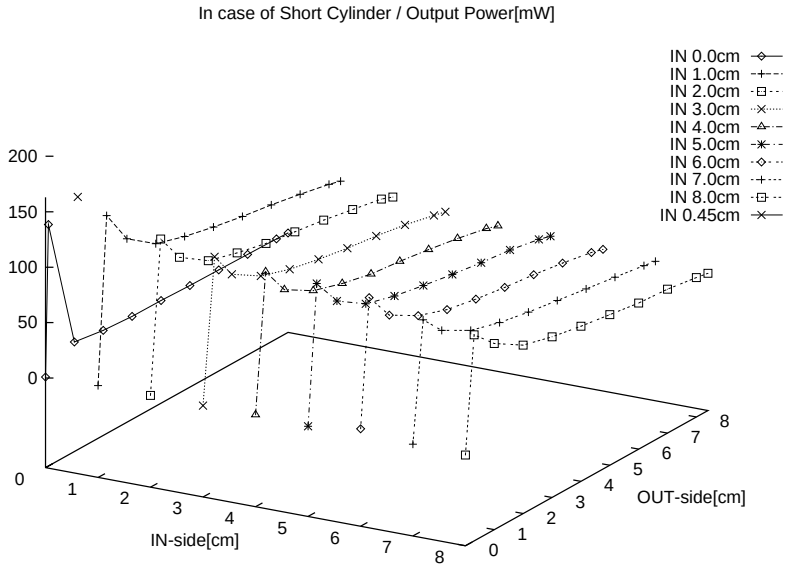
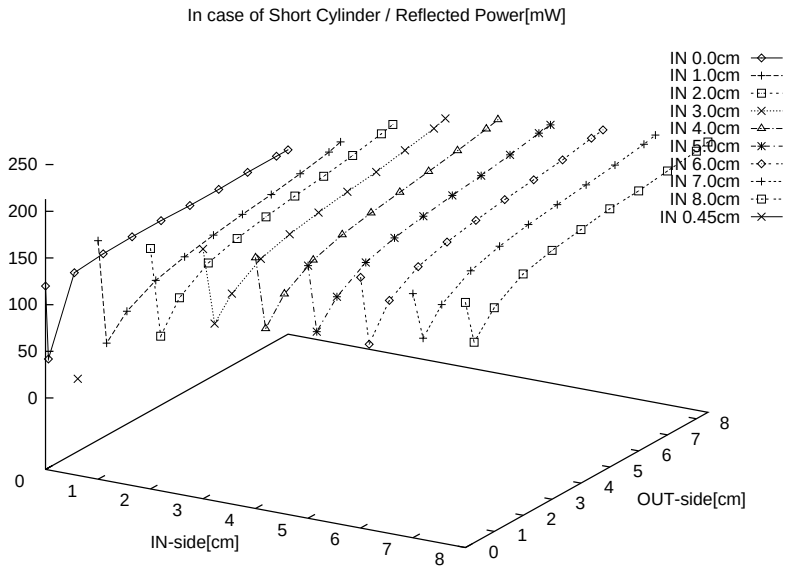


FIGURE 6.4: Probe

このようなセットアップで、Input 側と Output 側の壁を動かして、それぞれの場合における反射波と透過波の Power を測定した結果、どのプローブに対しても、両側の壁がコネクタから 1 cm 程度の時に最も透過波が強くなった。この測定結果を示すと次のようである。但し、入射波の Power は測定していないことを付け加えておく。

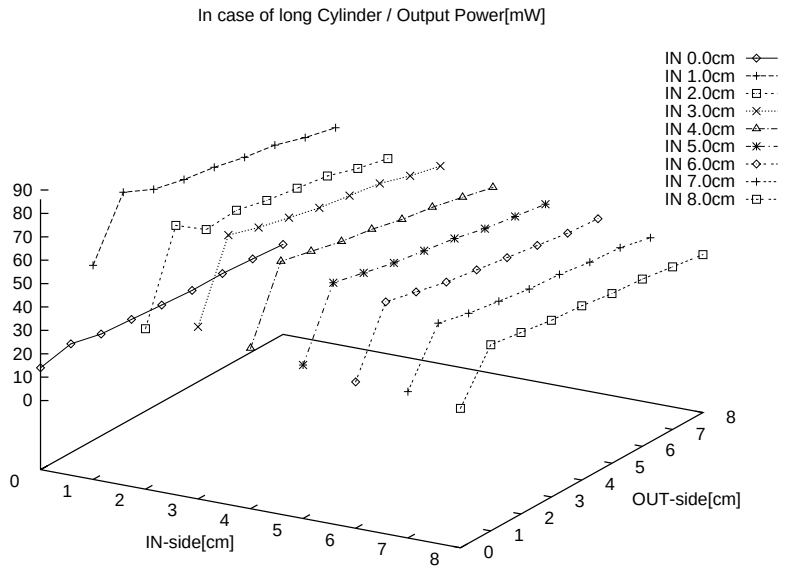


(a) Output

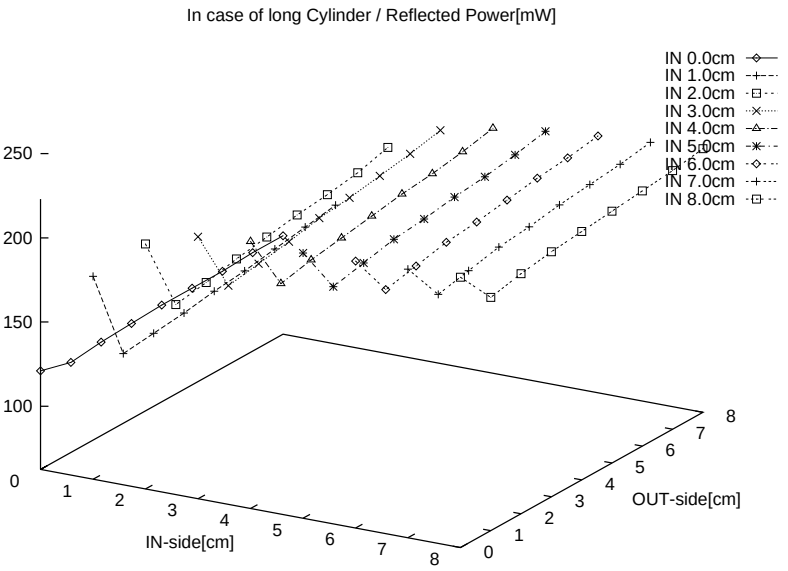


(b) Reflection

FIGURE 6.5: Short cylinder

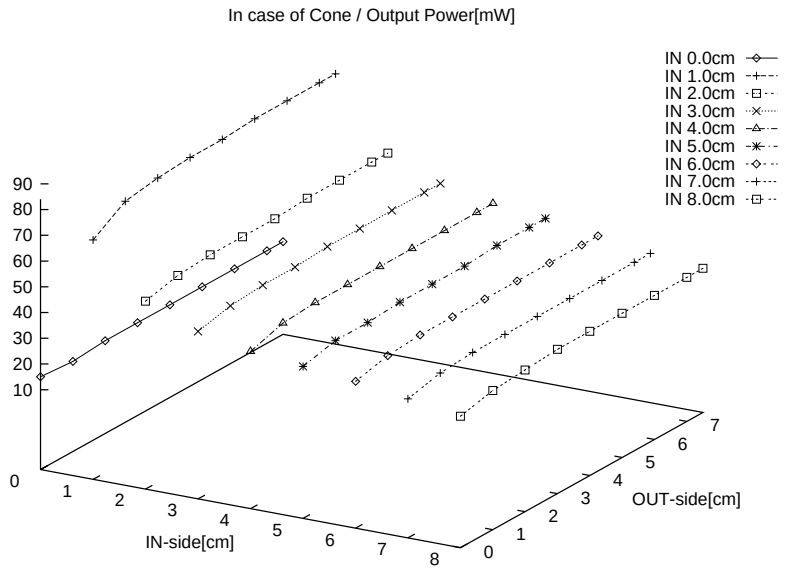


(a) Output

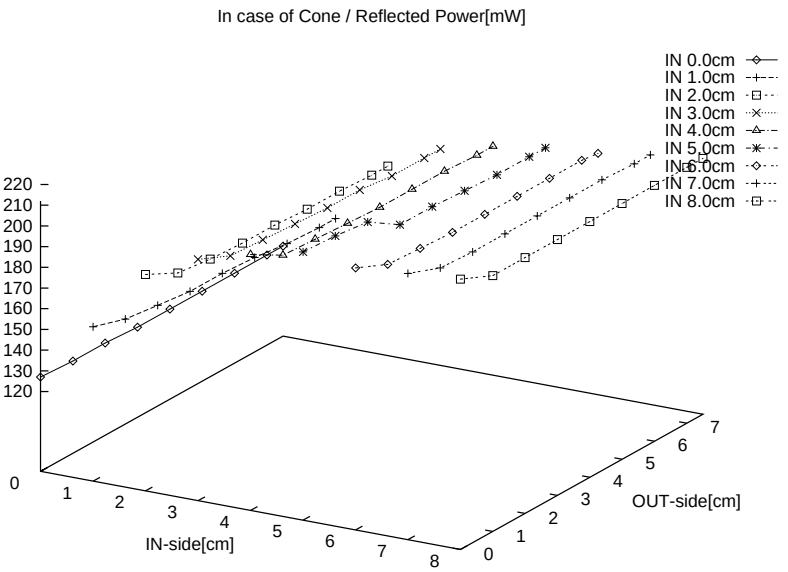


(b) Reflection

FIGURE 6.6: Long cylinder

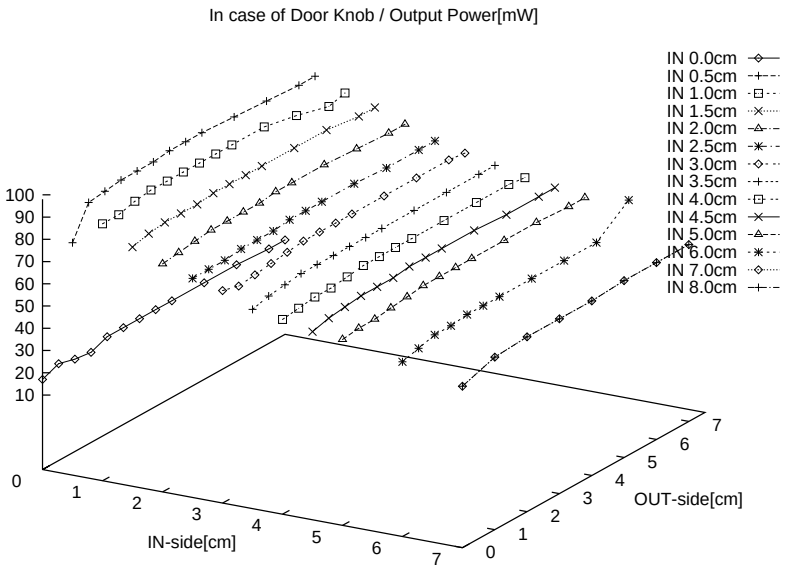


(a) Output

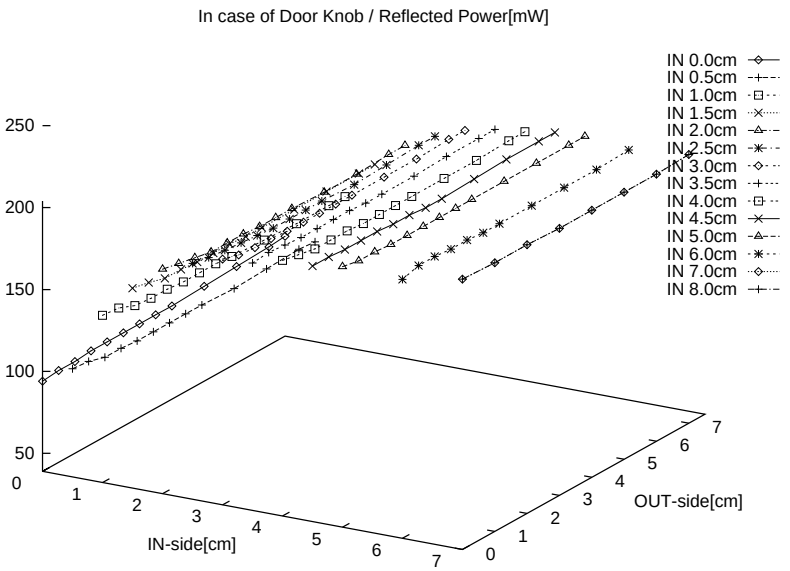


(b) Reflection

FIGURE 6.7: Cone

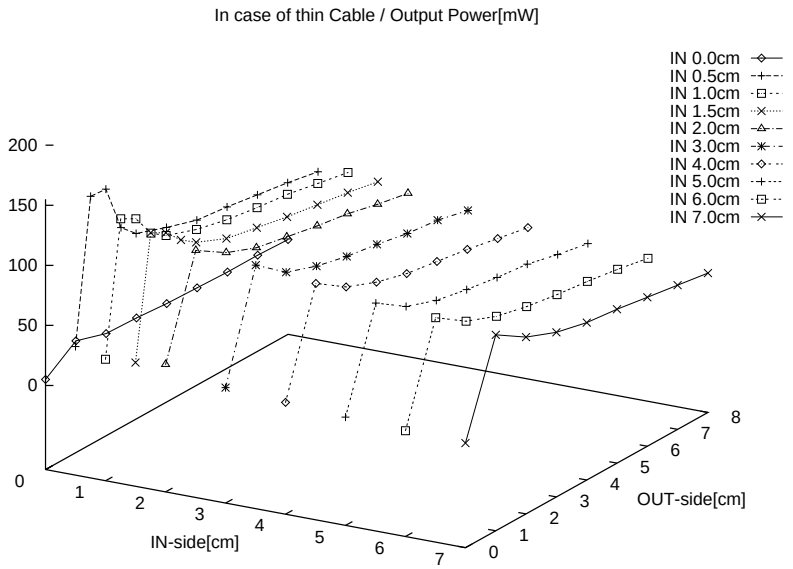


(a) Output

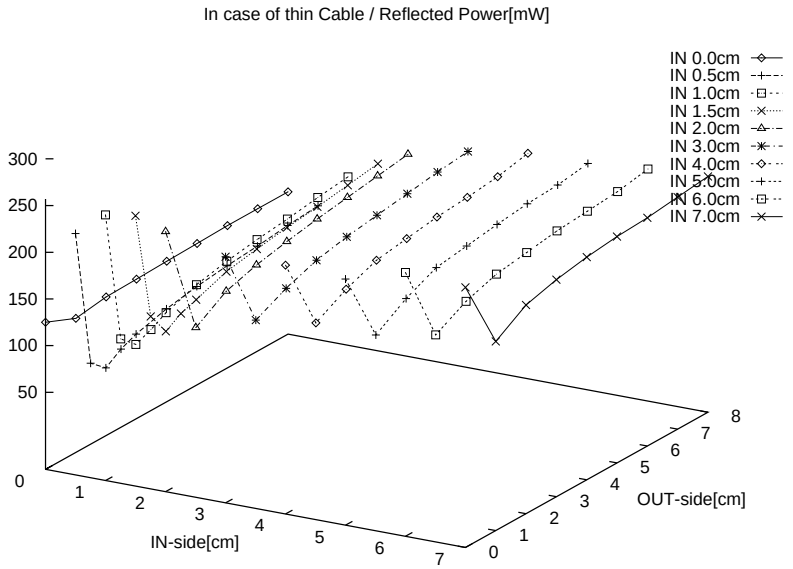


(b) Reflection

FIGURE 6.8: Door knob



(a) Output



(b) Reflection

FIGURE 6.9: Thin cable

Chapter 7

Measurement of SiC Dielectric Constant and $\tan\delta$

7.1 Purpose

Magnetron が発振する Microwave の Power は大体 500 W $\sim$ 1000 W になるため Cavity に流したときの反射波の Power はかなり大きなものになると予想される。そのため、余った Power をどこかで処理しなければならない。それがいわゆる Dummy Load である。

今回は Dummy Load を作るための予備的な実験として反射率計を作り、Dummy Load への詰め物になる SiC (Silicon Carbide) の ϵ と $\tan\delta$ を測定した。

7.2 Design of Reflectivity Meter

Design にあたっての、我々の反射率計に対する要求は以下のものであった。

1. 位相の変化が見やすいように詰められる SiC がなるべくいろいろな長さをとることができる。
2. 扱いやすいように、Coaxial Cable などと直接につなぐことができる。
3. 減衰が見えるように長めに SiC が詰められる。
4. 予算の都合上、部品点数はなるべく少なめにする。
5. TEM 以外の Mode がたたないような管の太さにする。(送電線として働くように)

3. のためには長い銅管を用意しないといけない。また 1. のためには銅管は短い方が扱いやすい。しかし、4. のため、銅管の数を余りふやすことはできない。よって今回は SiC をいっぱいに詰めた銅管を多数用意するのではなく 100 mm, 200 mm, 300 mm, 400 mm の 4 種類の銅管を用意し管内に詰める SiC の長さを変えていくことによって要求を実現した。

以上のことから、反射率計は Fig. 7.1 のような Design になった。

各部の説明

(1)N 型 Connector が入る。

(2) は Polyethylene で作る。

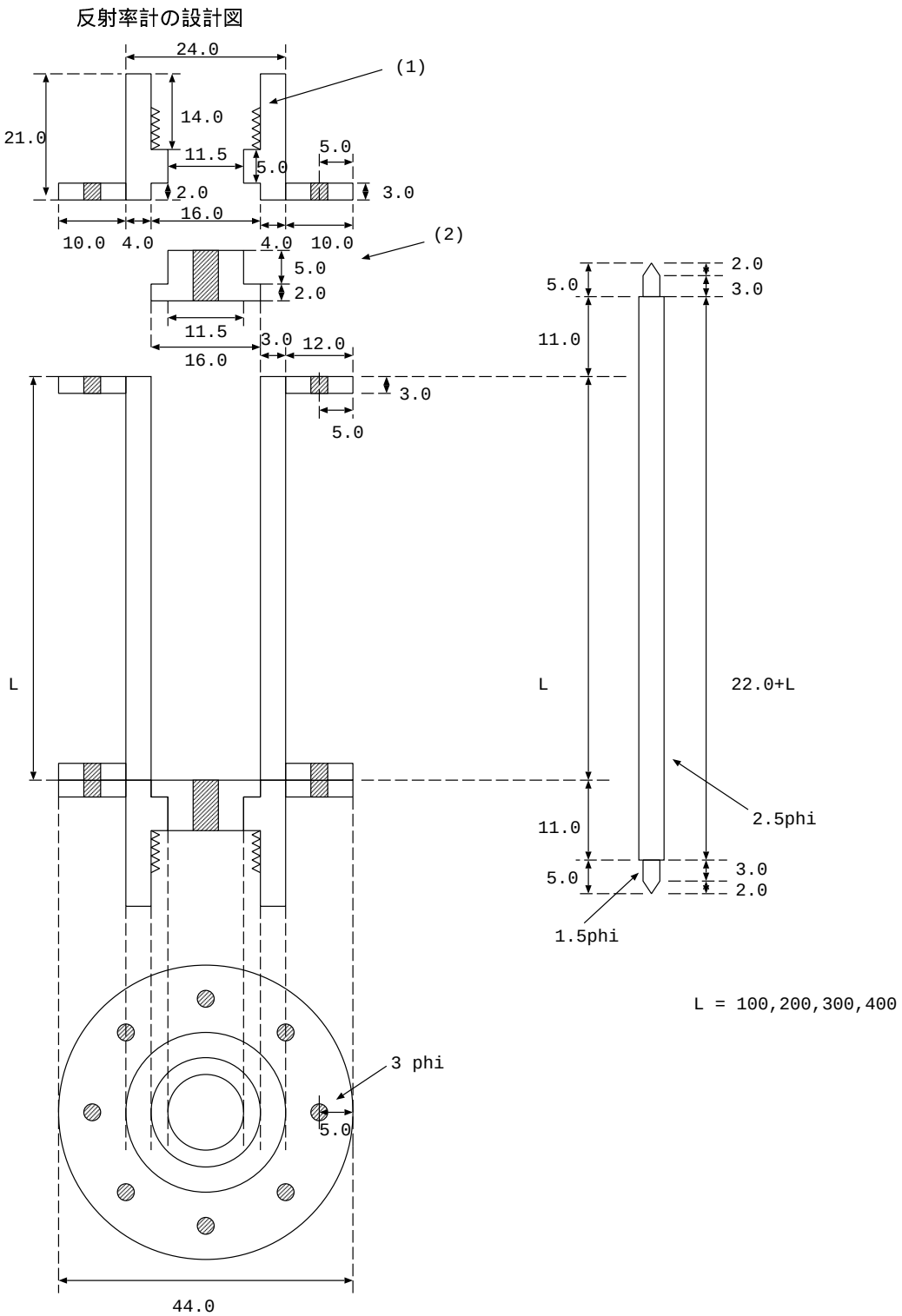


FIGURE 7.1: Design of reflectiviry meter

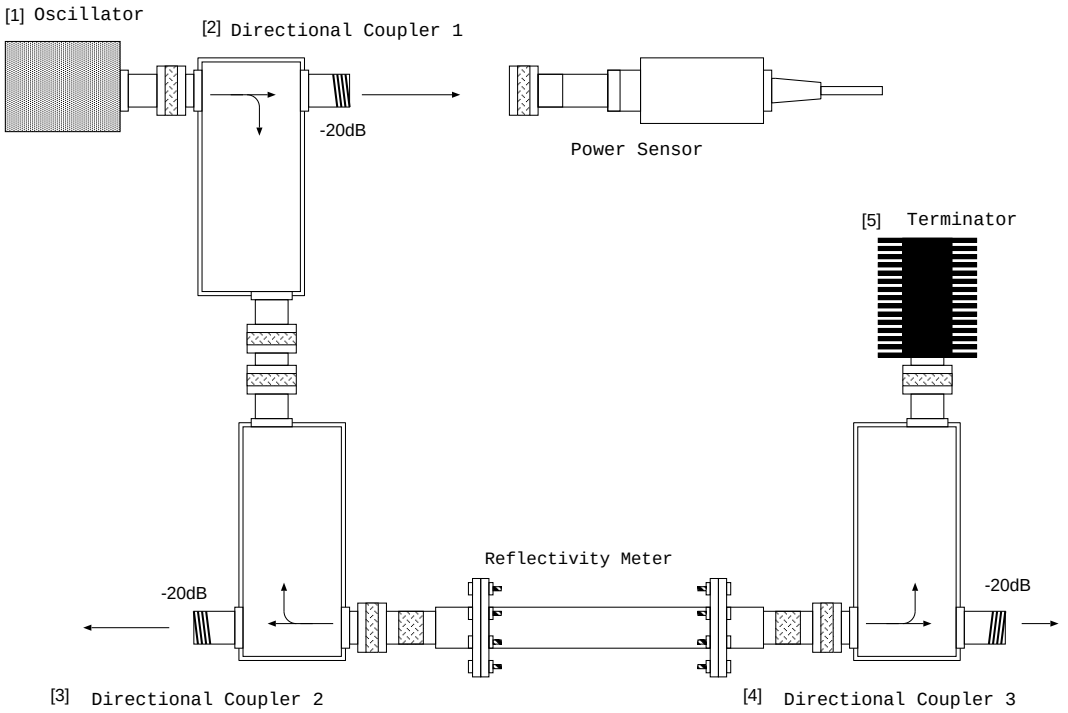


FIGURE 7.2: Setup

7.3 Experiment

7.3.1 Apparatus

測定に用いた Setup を、FIG. 7.2 に示す。
各部の説明

1. Oscillator (マキ電機)

   周波数 2.451 GHz, Power 250 mW ∼ 300 mW の Microwave を発振する。

   本番に近い形で実験をするには Magnetron を用いるべきなのであるが、Magnetron を使うと出力が大きすぎるため扱いづらい。そこで Magnetron と同じ 2.45 GHz の決まった周波数の Microwave を発振する Oscillator を用意した。発振される Power は Oscillator 内部の温度に依存するので Directional Coupler 1 で常に Monitor しておく必要がある。

2. Directional Coupler 1 (Hewlett Packard HP-779D)

   入力に対して '-20dB' の Connector からは入力の約 1/100 の Power を返し、'Output' の Connector からは入力から '-20dB' の Connector に出力した分を差し引いた Power を返す。('-20dB' の出力は厳密に 1/100 ではなく物によってかなり違いが見られるので、そのぶん 'Output' からの出力も違って来る。そのため、使う前に一つ一つについて校正をしないといけない。)
   '-20dB' を使って回路を流れている Microwave の Power を Monitor するのに用いる。D.C.1 では Input Power の Monitoring を行う。

3. Directional Coupler 2 (Hewlett Packard HP-779D)

D.C.2 では Reflected Power の Monitoring を行う。

4. Directional Coupler 3 (Hewlett Packard HP-779D)

   D.C.3 では Transmitted Power の Monitoring を行う。

5. Terminator(WEINSCHEL ENGINEERING, MODEL N1426, 50Watts)

   Coaxial Cable の Impedance に Match した抵抗が入っており、反射が起きないようになっている。Microwave からは無限に長い Coaxial Cable に見える。

6. Analogue Power Meter(Hewlett Packard, 8900C Peak Power Meter) , Power Sensor(HP 84811A)

7. Digital Power Meter(Hewlet Packard, E4418B EPM Series Power Meter) , Power Sensor(HP 8482H)

   6. 7. ともに、回路を流れている Microwave の Power の測定に使うのであるが、Digital Power Meter で入力、反射波、透過波、の測定をし Analogue Power Meter で入力に大きな変動がないことを確認するため常に Monitor し続けておく。(反射波が Oscillator まで戻っていって Oscillator の発振に影響を与える恐れもあるから。)

7.3.2 Correction of Output/Input Ratio and '-20dB'/Input Ratio of Directional Coupler

Purpose

われわれの持っている Directional Coupler はラベルには '-20dB' と書いてあっても実際に返す Power は各々で大きく異なる。ここでは、それぞれの Directional Coupler の特性を調べる。

Procedure

1. Degital Power Meter で Oscillator の出力を測定する。
2. Output と -20dB での出力を測定する。
3. Degital Power Meter で Oscillator の出力を測定する。
   (変動がないことを確認する。)

Data

1. 順方向から入射
   普通に、Input 側から Microwave を入射させた時は、以下のような結果になった (Initial は実際の測定に、 Final は Oscillator の出力に大きな変動が無いことを確認するために行った。2. 3. においても同様。) なお、単位は全て mW 。

		Input2	Output1	-20dB-2
D.C.1	Initial	258.9	249.3	2.87
	Final	258.8		
D.C.2	Initial	258.8	248.2	3.43
	Final	259.5		
D.C.3	Initial	259.5	250.2	2.49
	Final	259.6		

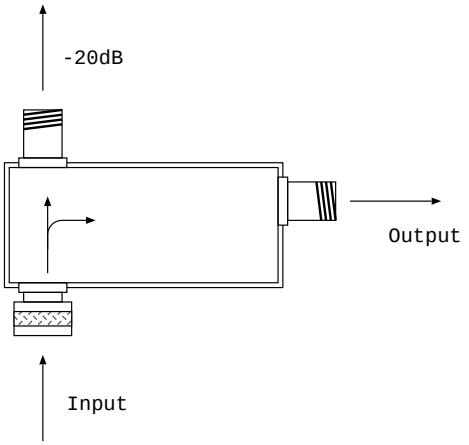


FIGURE 7.3: Input to normal direction

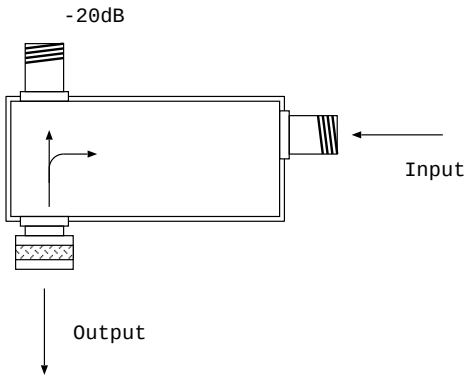


FIGURE 7.4: Input to reverse direction

2. 逆方向から入射

		Input	Output
D.C.1	Initial	259.6	251.2
	Final	259.8	
D.C.2	Initial	259.8	251.2
	Final	259.9	

3. D.C.1 の Output と D.C.2 の Output を Coupling させて入射

(a) D.C.1 から入射する場合

	Input1	Output2	-20dB-1
Initial	260.0	238.8	2.86
Final	259.7		

(b) D.C.2 から入射する場合

	Input2	Output1	-20dB-2
Initial	259.7	237.6	3.41
Final	259.6		

Results

この結果から、D.C.1 の -20dB の読みとり値を P_1、D.C.2 の -20dB の読みとり値を P_2、D.C.3 の -20dB の読みとり値を P_3、実際の反射率計への Input Power を P_{in}、Reflected Power を P_r、Transmitted Power を P_t、とすると P_1, P_2, P_3 と P_{in}, P_r, P_t の関係は以下のようになる。

$$P_{in} = P_1 \times \frac{238.8}{2.86} = 83.50 \times P_1 \tag{7.1}$$

$$P_r = P_2 \times \frac{259.7}{3.41} = 76.16 \times P_2 \tag{7.2}$$

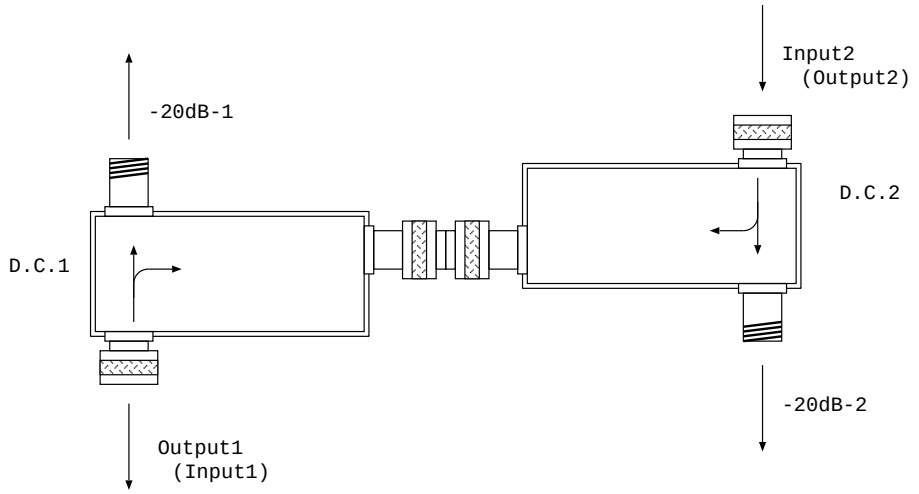


FIGURE 7.5: Input to coupled directional coupler

$$P_t \quad = \quad P_3 \times \frac{259.5}{2.49} = 104.22 \times P_3 \tag{7.3}$$

7.3.3 Procedure to measure ϵ and $\tan\delta$ of SiC

実験は、以下の手順で行った。

1. 銅管に SiC をいっぱいに詰める
2. Degital Power Meter の Zeroing (ゼロ点校正) をする。(このとき、Power Sensor はどこにもつながないでおく。) Power Meter のゼロ点はずれやすいので測定のたびに校正をしておく方がよい。
3. P_1 を Degital Power Meter で測定。
4. P_1 を Analogue Power Meter で測定。(Monitoring 用として常に測定し続ける)。
5. P_2 を Degital Power Meter で測定。
6. P_3 を Degital Power Meter で測定。
7. P_1 を Degital Power Meter で測定。(2. での測定と大きなずれが無いことを確認するため。)
8. 銅管の中の SiC を 5 mm 削って、SiC がなくなるまで 2. から 7. を繰り返す。

ちなみに、各段階で測定の行われない Connector (たとえば 3. では Directional Coupler 2, 3 の '-20dB' にあたる) は Termination しておかないといけない。

7.3.4 Summary of Data

以上の手順から、200 mm, 400 mm の反射率計についてそれぞれ FIG. 7.6, 7.7, 7.8, 7.9 のような Data が得られた。(400 mm の場合は、減衰が十分に見られる場所のみを測定した。)
なお、図中の Reflected, Transmitted はそれぞれ $P_{\rm in}$ について $P_r/P_{\rm in}$, $P_t/P_{\rm in}$ のように規格化してある。
管の長さが 200mm の場合も、400mm の場合もともに SiC 側から入射した方が減衰が大きいこと、ま

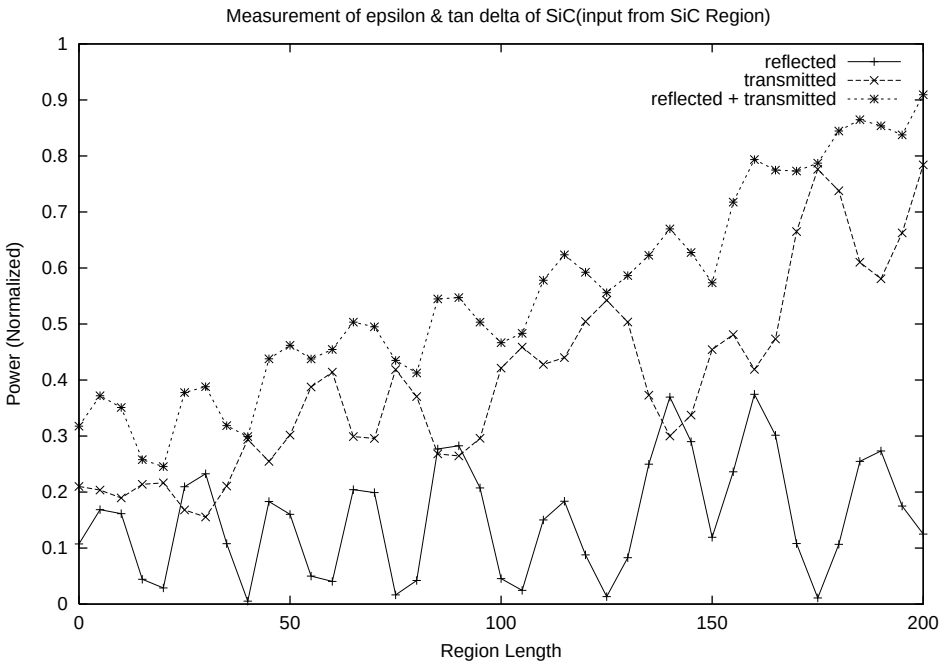


FIGURE 7.6: Input to SiC-side of 200 mm reflectivity meter

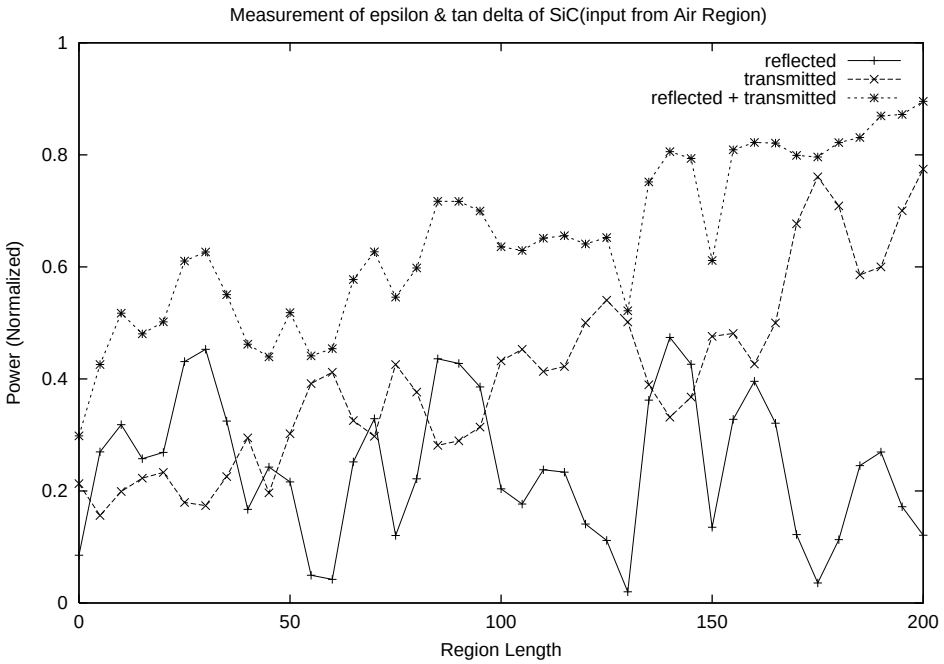


FIGURE 7.7: Input to Air-side of 200 mm reflectivity meter

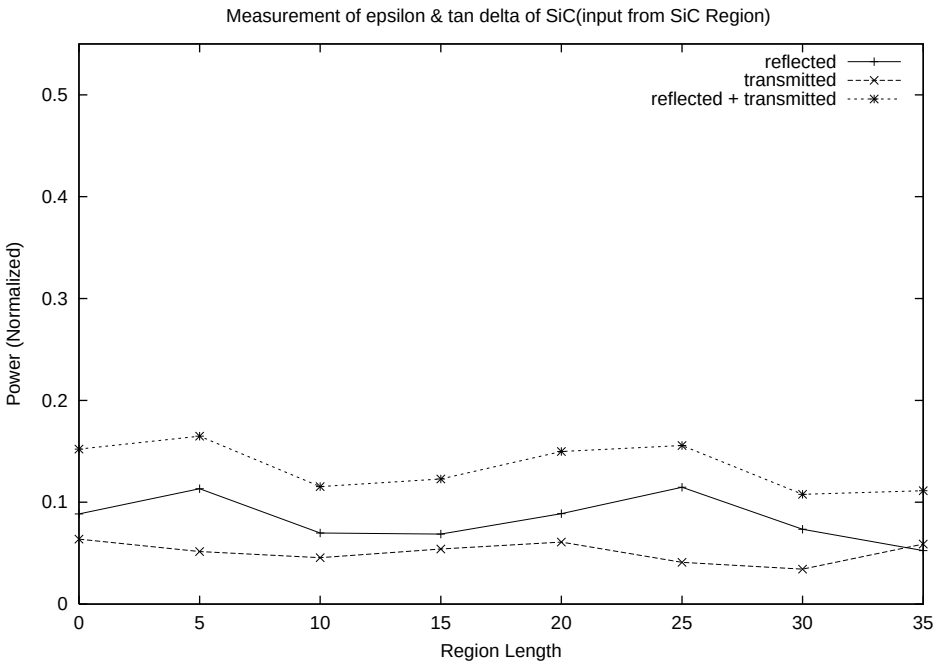


FIGURE 7.8: Input to SiC-side of 400 mm reflectivity meter

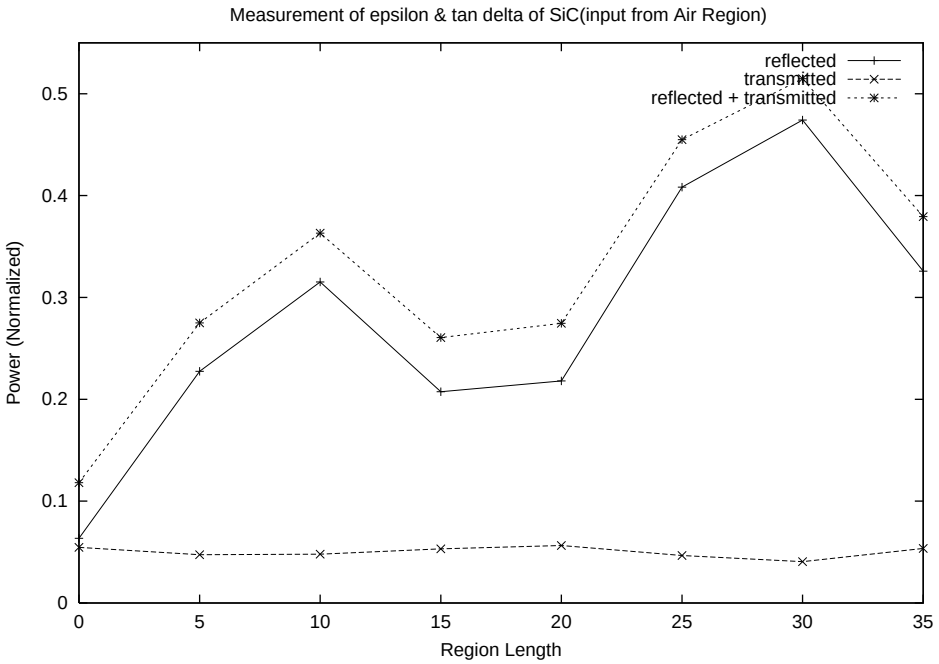


FIGURE 7.9: Input to Air-side of 400 mm reflectivity meter

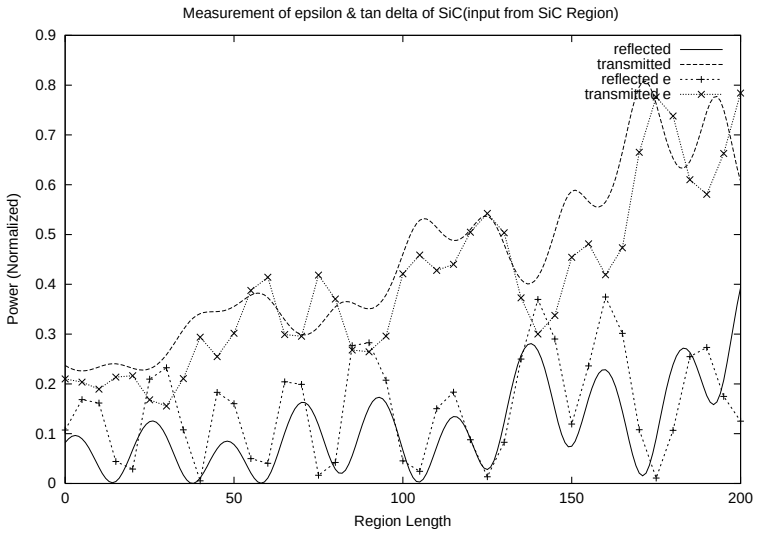


FIGURE 7.10: Input to SiC-side of 200 mm reflectivity meter , with result of analysis

た、SiC のほうが Air よりも減衰率が大きいことから管内の反射のほとんどは、SiC / Air の境界で起きていることが分かる。というのも、反射のほとんどが PE / SiC, PE / Air の境界で起きているとしたら 400mm での Data では SiC や Air の領域を通過することでの減衰がもっと小さいものとみなせるため P_r がもっと Bottom Up されていてももおかしくない。このことは、Air よりも減衰率の大きい SiC の Data に顕著に現れている。また Air の場合はそうでもないが、 400 mm までくると SiC の場合には、反射波と、透過波の間にやや位相のずれが見られる。

7.3.5 Analysis of Data

以上の Data から、SiC の ϵ と $\tan\delta$ を求める。
基本的な方針は、χ_r^2, χ_t^2 がもっとも小さくなるような Parameter Set を見つけることであるが、今回は Fit したい式が複雑なので計算機に各 Parameter についての $\chi_r^2 + \chi_t^2$ を計算させて、それが最も小さくなるような Parameter を選ぶ。解析に用いた式は Appendix F を参照。

7.3.6 Results and Discussion

解析の結果、得られた Parameter から計算された値と、実験によって得られた Data は各々以下のようになる。(R_c は Connector での反射率。)

1. 200 mm の反射率計で、SiC 側から入射した場合

a	R_c	ϵ	$\tan\delta$	χ_r^2	χ_t^2	χ_{total}^2
-1.85 ± 0.02	0.16 ± 0.015	7.48 ± 0.007	0.0407 ± 0.0004	300615.8	67624.4	19060.5

この場合は、parameter をまず目測で目星をつけてから、$a = -2.0 \sim 2.0$, $R_c = 0.1 \sim 0.3$, $\epsilon = 6.0 \sim 8.0$, $\tan\delta = 0.035 \sim 0.045$ の範囲を Scan し、そこから徐々に範囲をしぼっていった。(FIG. 7.10, 7.11 参照)

2. 400 mm の反射率計で、SiC 側から入射した場合

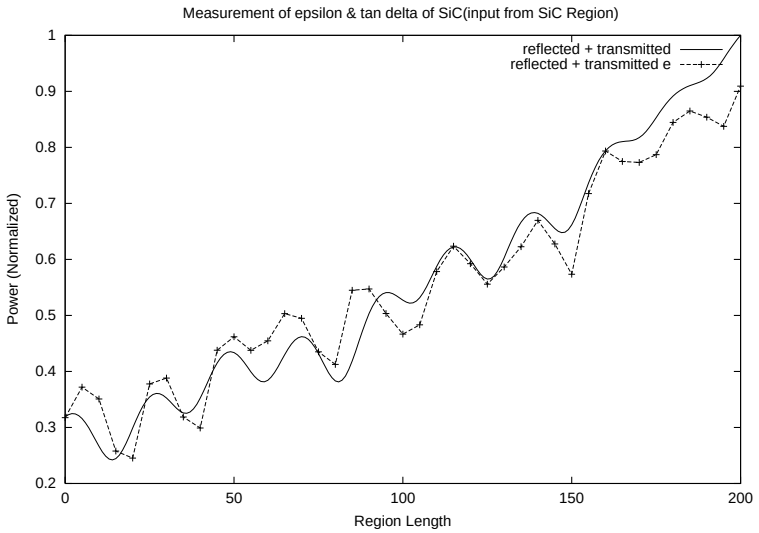


FIGURE 7.11: Input to SiC-side of 200 mm reflectivity meter , with result of analysis

a	R_c	ϵ	$\tan\delta$	χ_r^2	χ_t^2	χ_{total}^2
0.1 ± 0.07	0.289 ± 0.002	7.2 ± 0.015	0.0497 ± 0.0009	1561.1	876.7	960.2

この場合も同様な Scan の仕方をした。(FIG. 7.12, 7.13 参照)

ここで、χ_r^2 の値がとても大きいのは、Power Meter の測定誤差を小さく見積もりすぎたためである。($< 10^{-}$W) さらに、詰められた SiC の長さについても誤差を考えたらより正確な Fit が出来たであろうと思われる。

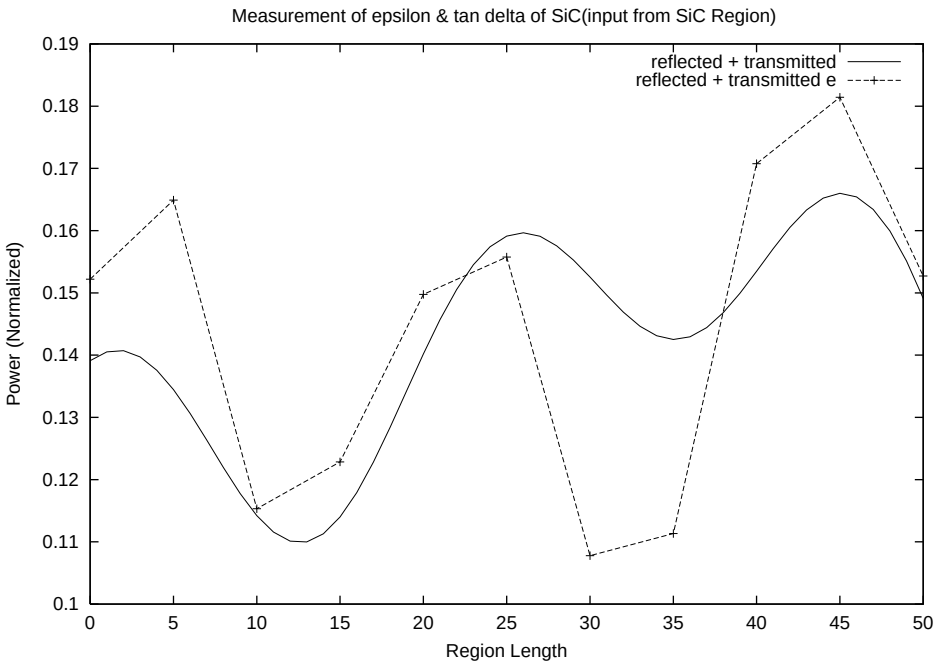


FIGURE 7.12: Input to SiC-side of 400 mm reflectivity meter , with result of analysis

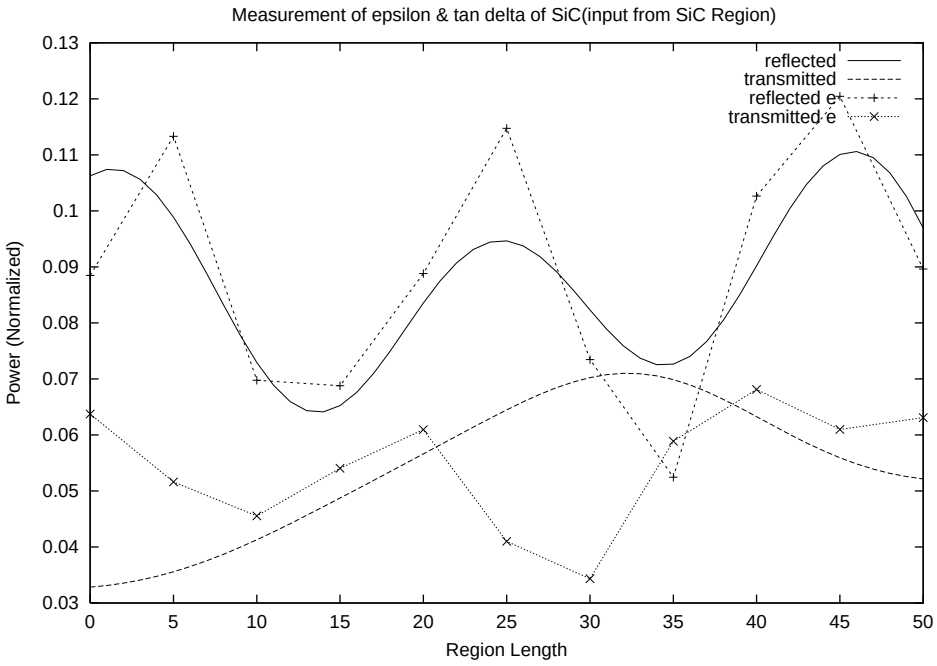


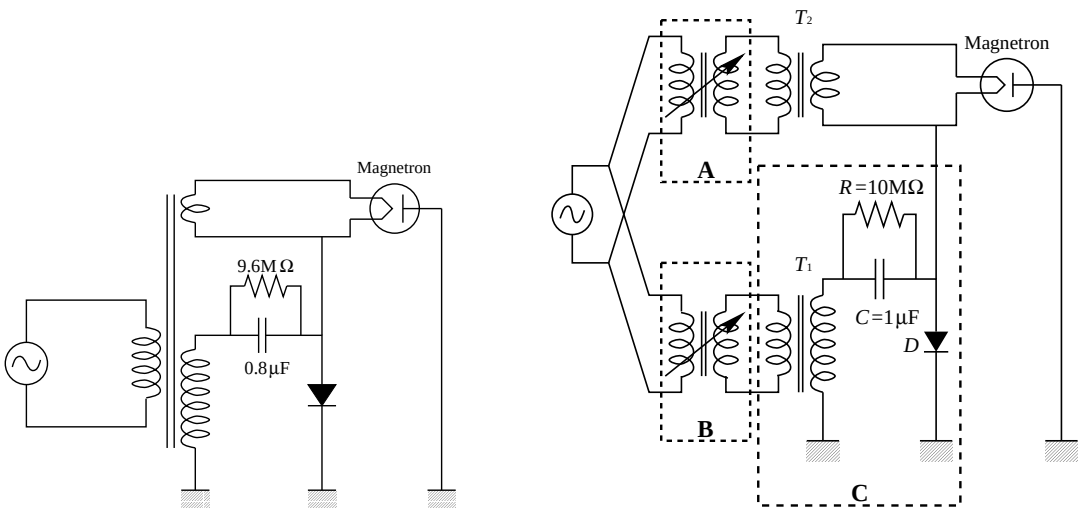
FIGURE 7.13: Input to SiC-side of 400 mm reflectivity meter , with result of analysis

Chapter 8

Magnetron Oscillator in AC Mode

我々は Microwave Source として電子レンジの Magnetron を用いることにした。Magnetron 発振原理は Appendix G を参照して頂きたい。電子レンジの Magnetron は周波数 2.45 GHz の Microwave を発振するように作られている。また、家庭用の電子レンジでは High Voltage の整流方法が半波整流であるため、Microwave は 60 Hz で AC 的にしか発振しない。実際の我々の実験では Microwave 出力は DC 的 (CW Mode) であって欲しいので、High Voltage 電源に手を加え、DC 発振するようにすることにした。

8.1 Circuit for AC mode



(a) Circuit used in a microwave oven.

(b) Modified circuit for our experiment.

FIGURE 8.1: High voltage power supply circuits for AC mode. The circuit (a) is used in a microwave oven, and we have modified it to the circuit (b) for our experiment.

家庭用電子レンジで使用されている High Voltage 電源部の回路は FIG. 8.1(a) の通りである。我々はこの回路を実験で使いやすい FIG. 8.1(b) のように改造した。

この FIG. 8.1 の回路で、下部の回路は Magnetron に AC 的に高電圧を与えるためのもので、上部の回路は Magnetron の Cathode を Heat-Up し熱電子を放出させるためのものである。T_1 は高圧トランスで、これは電子レンジについていたトランスをそのまま用いた。この基本的な特性については Section 8.2 で述べる。また、トランス T_2 の Input 側はほとんど GND Level であるのに対し、Output 側は 5 kV 程度の高電圧になるため、T_2 は耐圧 5 kV の絶縁トランスを用いている。これは Input に対し 1/10 の Output を与えるトランスである。

破線で囲んだ A, B の可変トランスはそれぞれ Cathode Heat-up Current および High Voltage を Control するためのものである。

D は整流用 Diode で D の上を Negative Voltage に保つためにある。この Diode も高電圧がかかるため、高圧 Diode である。そのうえで Capacitor C は倍圧コンデンサで、トランスと Diode のみの回路よりも 2 倍の Negative Voltage を作るものである。これは定性的に次のように説明できる。

1. トランスの上が Positive Voltage V のときには D は ON になり、C では V だけ電圧が降下していなければならない。
2. この状態からトランスの上が Negative になり始めると、D は OFF になり C に充電されている電荷はそのままに保たれる。
3. トランスが Negative Voltage $-V$ のとき C の電圧降下分の V と合わせて、Diode の上の電圧は $-2V$ になる。

Capacitor C と Parallel についている Resistor R は Capacitor 放電用である。Capacitor の耐圧は 2.9 kV であり、この抵抗も高電圧用の抵抗である。この放電の時定数 τ は $\tau = RC = 10$ sec である。電源動作時には Capacitor には 2-3 kV 程度充電され、電源を切ってから数十秒は Diode の上は高電圧に保たれるので、注意を要する。

8.2 Properties of High Voltage Transformer

回路の設計をする上で必要となる高圧トランスの自己インダクタンスおよび相互インダクタンスの測定を行なった。測定で使った回路は Fig. 8.2 である。

この回路で r_1, r_2 はそれぞれ L_1, L_2 の内部抵抗であり、M はトランスの相互インダクタンスである。この測定では、Output 側は Open にして、電源の周波数を $f = 60$ Hz で固定し、いくつかの R の値に対して電圧 $V_{\rm in}$, V_R, V_L の絶対値を測定した。

$$t_R = \frac{V_R}{V_{\rm in}}$$
$$t_L = \frac{V_L}{V_{\rm in}}$$

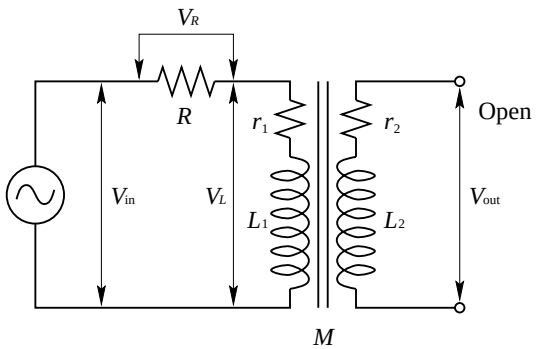


Figure 8.2: Circuit that we used for the measurement of self- and mutual inductance of high voltage transformer. Here, r_1 and r_2 are internal resistance of L_1 and L_2, respectively.

TABLE 8.1: Table of result for inductance measurement, in which input side was low voltage side of transformer and output one was high voltage side.

R (Ω)	$L_{\rm low}$ (mH)	$r_{\rm low}$ (Ω)	M (H)
5.1	78	7.89	1.53
10	79	6.82	1.54
15	76	5.64	1.47
20	78	4.71	1.50
24	80	5.05	1.54
30	78	4.46	1.50
39	75	3.58	1.43
51	75	3.37	1.43

TABLE 8.2: Table of result for inductance measurement, in which input side was high voltage side of transformer and output one was low voltage side.

R (kΩ)	$L_{\rm high}$ (H)	$r_{\rm high}$ (Ω)	M (H)
3	22.3	801	1.0
5.1	22.0	630	0.98
6.8	22.0	637	0.99
8.2	22.1	514	0.99
10	22.0	652	0.99
51	21.5	379	0.96

$$k = \frac{V_{\rm out}}{V_{\rm in}}$$

とすると、$\omega = 2\pi f$ として、この回路の方程式を解くことにより L_1 および r_1 は

$$L_1 = \frac{R}{\omega}\sqrt{\frac{4{t_R}^2 - (1 + {t_R}^2 - {t_L}^2)^2}{4{t_R}^2}}$$
$$r_1 = \frac{1 - {t_R}^2 - {t_L}^2}{2{t_R}^2}R$$

で与えられる。また M は

$$M = k\sqrt{\left(\frac{r_1}{\omega}\right)^2 + {L_1}^2}$$

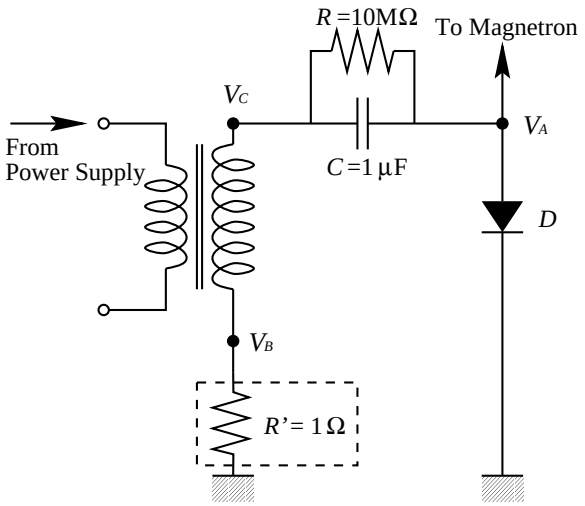
となる。

高圧トランスの低電圧側、高電圧側のそれぞれを Input 側にした時の測定結果を TABLE 8.1、TABLE 8.2 に示した。ただし、それぞれについての k の値は各抵抗については測定せず、$R = 0$ である時の 1 回のみ測定した。その値は、低電圧側を Input、高電圧側を Output にした場合 $k_{\rm low} = 19.0$ であり、高電圧側を Input、低電圧側を Output にした場合 $k_{\rm high} = 0.0446$ であった。この表から高圧トランスのインダクタンスは

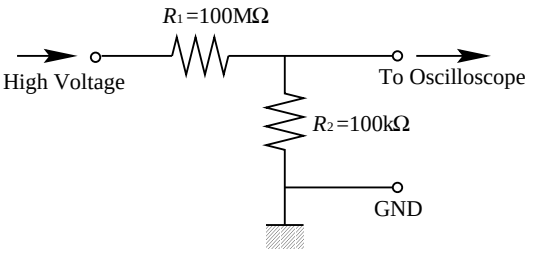
$$\begin{aligned} \text{Self-Inductance of Low Voltage Side;} \quad & L_{\rm low} \simeq 78 \text{ mH} \\ \text{Self-Inductance of High Voltage Side;} \quad & L_{\rm low} \simeq 22 \text{ H} \\ \text{Mutual Inductance of the Transformer;} \quad & M \sim 1 \text{ H} \end{aligned}$$

であることがわかる。

また、この M は $M \simeq \sqrt{L_{\rm low}L_{\rm high}}$ という関係を用いると $M \simeq 1.3$ H という値が得られ、上の結果とだいたい一致している。トランスの内部抵抗の値が R の値によって異なることは、Coil が Intrinsic に



(a) Circuit



(b) Probe to measure high voltage.

FIGURE 8.3: Circuit for the measurement of its electrical properties. The resistor $R' = 1\ \Omega$ is placed to measure the current flowing between cathode and anode of magnetron.

Capacitance を持っていることに起因すると考えられる。テスターで測定した DC 的なトランス内部抵抗は $r_{\rm low} = 0.4\ \Omega$, $r_{\rm high} = 147\ \Omega$ であった。

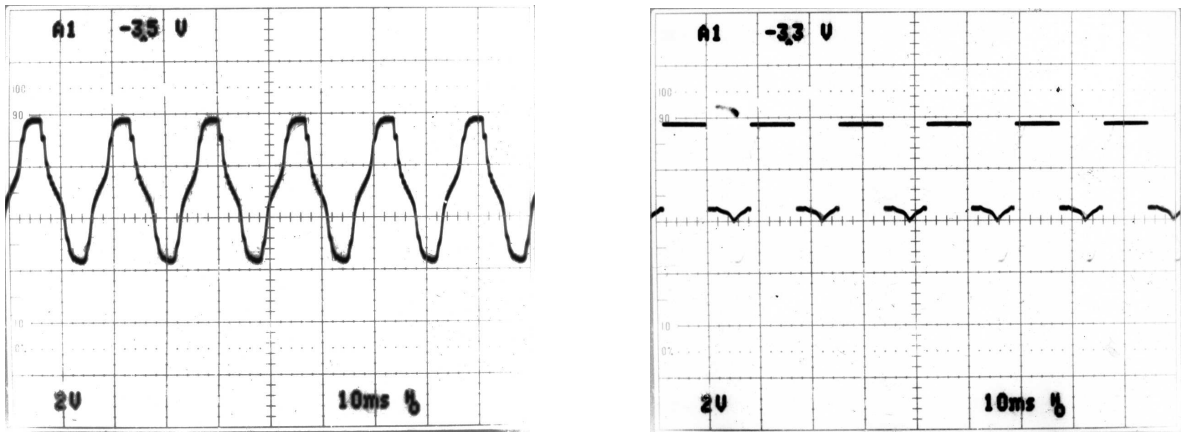
ちなみに、我々は 1 kHz Inductance Meter でも自己インダクタンスを測定したのだが、その値は $L_{\rm low} = 46$ mH, $L_{\rm high} = 20$ H であり、上の結果はこれともほぼ一致している。

8.3 Properties of Magnetron Circuit

Magnetron に High Voltage をかけるための回路の特性を調べるために、FIG. 8.1(b) の破線 C 内の部分を FIG. 8.3(a) のようにして、電圧 V_A, V_B を Oscilloscope で測定した。トランスと GND の間に置かれた 1 Ω の抵抗 R' は Magnetron の Cathode-Anode 間に流れる電流を Monitor するためのものである。また、High Voltage は直接 Oscilloscope では見ることができないので、FIG. 8.3(b) のような Probe を作って 1/1000 の電圧を測定した。

High Voltage; V_A

FIG. 8.4(a) は V_a を Oscilloscope で見た時の写真である。これは Magnetron が発振しない状態で測定



(a) V_A without magnetron oscillating.

(b) V_A with magnetron oscillating.

FIGURE 8.4: Oscilloscope picture of the high voltage V_A without the magnetron oscillating, (a), and with magnetron oscillating, (b) These are 1/1000 scale of their original voltage.

した。また、高圧トランスの Input は 100 V AC である。この写真の GND は上から 2 マスのところである。このとき V_a は 5.8 kV になった。

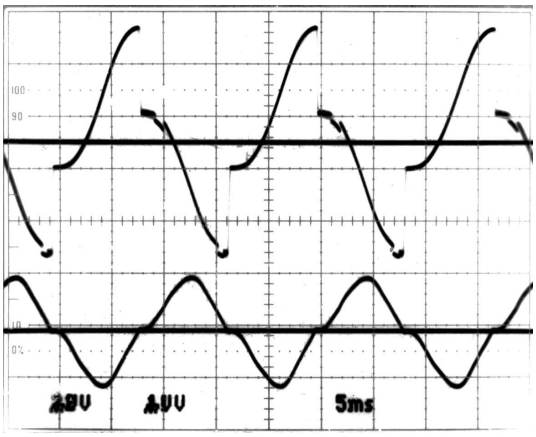
次に Magnetron が発振している状態で V_a を測定すると FIG. 8.4(b) のようになった。この GND も上から 2 マスのところである。この写真を見ると、Magnetron が発振している時には Cathode は -3.2 kV 程度でほぼ一定値をとり、発振していない時には Cathode はほぼ GND Level になっている。この波形について、特に Magnetron が発振しなくなると瞬時に Cathode 電圧が GND Level に落ちることについては、何故このようになるのかよくわからない。これを理解しようとトランスの電圧 (FIG. 8.3 の電圧 V_C) を測定したのが FIG. 8.5(a) であるが、これもよくわからない。我々の推察では、Magnetron は発振しているときは Diode 的になり、すなわちある一定値以上の電圧をかけても Cathode-Anode 間の電圧は上がらず、電流が大きく流れるようになっているのではないか、と考えている。このことは Chapter 9 でより考察を進めることにして、ここではこれ以上深くは考えない。

Cathode-Anode Current; $I = V_B/R'$

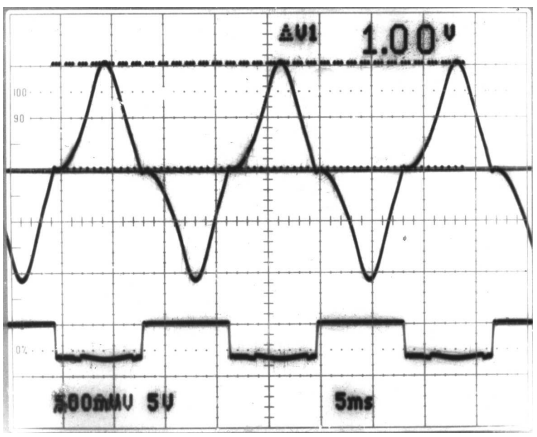
FIG. 8.5(b) は Magnetron が発振している状態で回路にどれだけの電流が流れているかを調べるために、FIG. 8.3 の R' の電圧 V_B を測定した Oscilloscope の写真である。この写真で上の波形が V_B (GND Level はその真中の水平線)、下の波形は同時に V_A を測定したものである。$R' = 1\ \Omega$ であることから、回路には約 1 A の電流が交流で流れていることを表している。GND より低い電位の時には Diode が ON になり Capacitor を充電し、高い電位の時には Magnetron の Cathode-Anode 間に電流が流れていると考えられる。しかし、このことについてより確証を得るために、Diode と GND の間に抵抗を置き、そこを流れる電流を測定すべきであった。

8.4 Magnetron Oscillation in AC mode

Magnetron が発振することが分かったので、次に Magnetron から出力された Microwave をアンテナで受信した。アンテナの様子は FIG. 8.6 に示されている。アンテナは N 型コネクタに銅のワイヤーループ



(a) V_C with magnetron oscillating.



(b) V_B with magnetron oscillating.

FIGURE 8.5: Oscilloscope picture of the transformer voltage V_C, (a), the voltage V_B that is corresponding to the current flowing between the cathode and anode of magnetron, (b). These voltage are measured with the magnetron oscillating. The upper wave of (a) is 1/1000 scale of their original voltage.

をつけたものである。この形状のアンテナは Microwave の磁場成分を主に受信し、電場成分は受信しにくい。これを電子レンジの側面にあけた穴から入れて、電子レンジの中の Microwave を受信するようになっている。Microwave は安全のため電子レンジの中に発生するようにした。

受信した Microwave は N 型の同軸ケーブルで Crystal Detector へ導き、その信号を Oscilloscope で測定した。Crystal Detector は Microwave を半波整流するものである。このときの Oscilloscope の写真が FIG. 8.7 である。これにより確かに Magnetron から Microwave が発振していることが分かる。

この Microwave の周波数を測定することでより確実に Microwave を受信していることを確認できるが、これは Chapter 9 で述べる。

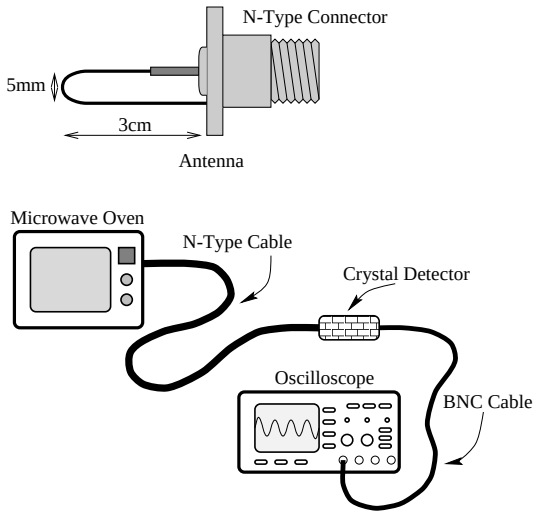


FIGURE 8.6: Microwave reciever. The antenna is made of a N-type connector and copper wire, and is inserted into the microwave oven from a hole on the wall of the oven.

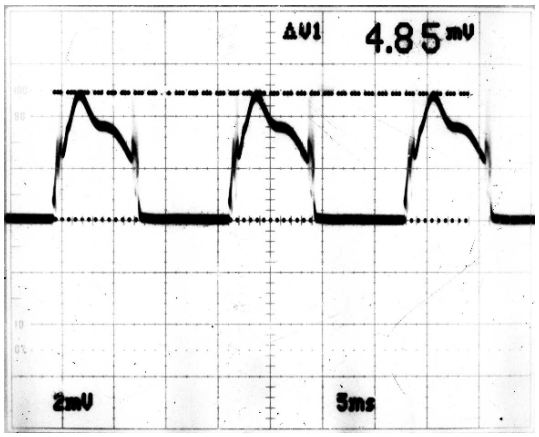


FIGURE 8.7: Oscilloscope picture of microwave detected with a crystal detector.

Chapter 9

Magnetron Oscillator in DC Mode

我々は電子レンジで使われている High Voltage Circuit をもとに、Magnetron を DC mode (CW mode) で発振するための回路を製作した。この章ではその回路およびそれを用いて Magnetron を DC で発振した時の特性について述べる。

9.1 Circuit for DC mode

DC の High Voltage を作る回路を Fig. 9.1 に示した。この回路は AC mode での Fig. 8.1(b) の破線枠 C 内の回路に相当する部分である。この回路は Cockcroft-Walton 型加速器で使われている高電圧発生装置の回路の 1 段目と同じである。50 μF の Capacitor C_2 および Diode D_2 は AC 的な電圧 (Fig. 8.4(a) 参照) を平滑化するためのものであり、この Capacitance は次のように決めた。

AC mode の回路には約 1 A の電流が流れることが分かっている。また Magnetron は Cathode 電圧が 4 kV 程度あれば発振することも分かっている。そこで、High Voltage を DC 的にしたときの電圧の変動を 300 V 程度にして、電圧が Magnetron が発振するための Threshold を下回らないようにすることを考える。この回路は 60 Hz の周波数で動作しているので、1 周期あたりの Capacitor C_2 の電荷量変化 ΔQ は約 1/60 C である。以上より C_2 は

$$C_2 = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{1/60}{300}\ \mathrm{F} \approx 50\ \mu\mathrm{F}$$

となる。この Capacitor には C_1 の 2 倍の高電圧がかかるため、耐圧も 2 倍なければならない。我々は耐圧 5 kV のものを C_2 として用いた。Diode D_2 は D_1 と同じものを用いた。また、この Capacitor を放電するための抵抗が R_2 であるが、Capasitor には 5-6 kV の高電圧で充電されていて、さらにその Capacitance が非常に大きいため、抵抗値の小さい抵抗で放電するとそこで大電力を消費し、危険である。また、大きな抵抗を用いると放電に時間がかかり、長時間にわたって Capacitor が高電圧に保持されるため、これも

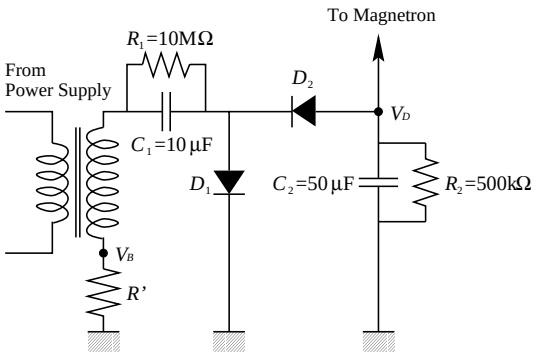


Figure 9.1: High voltage power supply circuit for DC mode. The difference between the circuit for AC mode and this is that capacitor of large capacitance ($C_2 = 50\ \mu$F) and diode are added to smoothen the wave of AC mode.

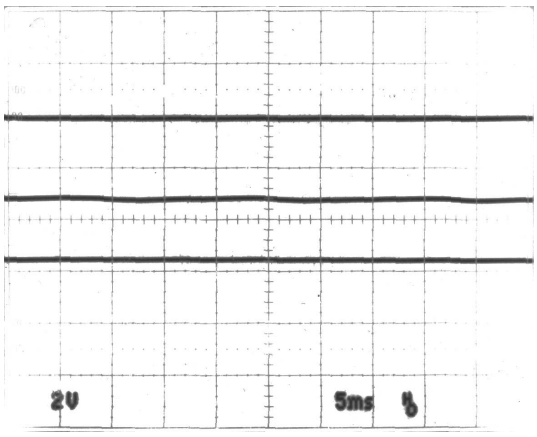


FIGURE 9.2: Oscilloscope picture of high voltage V_D for DC mode. The top line of the three shows GND level. The bottom one is the high voltage V_D without magnetron oscillating, and the middle one is that with magnetron oscillating. This shows that the high voltage become almost completely DC by additive capacitor C_2.

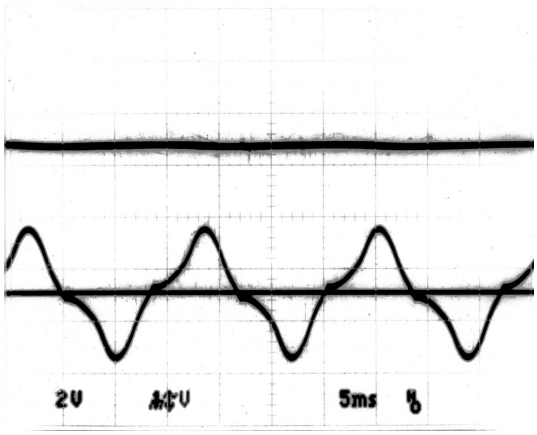


FIGURE 9.3: Oscilloscope picture of the voltage V_B that is correspond to the current flowing around the circuit. The lower wave shows V_B, but is observed in the AC mode of oscilloscope.

危険である。それらの妥協点として、我々は $R_2 = 500\ \mathrm{k}\Omega$ を選んだ。これを用いると、放電の時定数は 25 sec であり、数分で Capacitor の電圧は低くなる。ただし、5-6 kV から放電を始めたとすると、最初の 10 秒くらいは R_2 で 50 W 程度の電力消費があるため、ここで用いた R_2 は耐圧 10 kV、最大消費電力 50 W の特別な抵抗を用いた。

この回路を用いたときの High Voltage の Oscilloscope の写真は FIG. 9.2 に示した。この写真の上の線は GND Level を、下の線は Magnetron が発振していない状態での High Voltage V_D を、真中の線は 発振している状態での V_D を表している。また AC のときと同様に、ここに示されている Voltage は実際の 1/1000 である。

これにより、ほとんど完全に DC High Voltage になっていることがわかる。

9.2 Magnetron Oscillating in DC Mode

Magnetron が発振している状態での High Voltage V_D は FIG. 9.2 の真中の線である。これは AC Mode のときと同様 3.2 kV 程度で一定である。このことから Magnetron は回路的には Threshold Voltage が 3.2 kV 程度の Diode として働いているようである。あとにも述べるが、Magnetron は Cathode の電圧が 3.2 kV を越えないと発振しない。このことからも、この推論は正しそうである。

FIG. 9.3 は Magnetron が発振している時の電圧 V_B を測定した Oscilloscope の写真である。波形自体は AC Mode の時のそれと変わりはないが、しかしながらこの写真は Oscilloscope の AC Mode で観測したものであり、この波形に DC がのっているかも知れない。DC Mode で観測すべきだった。

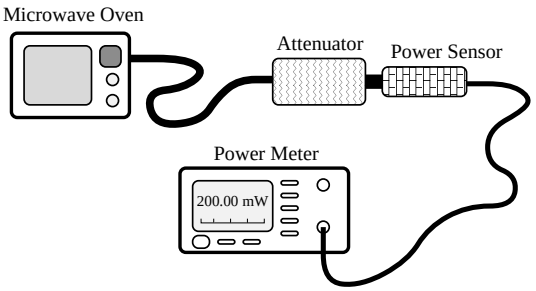


FIGURE 9.4: Set-up for output power measurement. Microwave Power is detected by a power sensor, and the signal from the power sensor is carried to the power meter.

9.3 Output Power of Magnetron

Magnetron を DC Mode (CW Mode) で発振することに成功したので、以下 Magnetron の特性について調べた結果をまとめておく。まず FIG. 8.1(b) の破線枠 B 内の Slide-Up Transformer を用いて調べた Magnetron の High Voltage に対する Output Power の依存性について述べ、そのあと FIG. 8.1(b) の破線枠 A 内の Slide-Up Transformer を用いて調べた Cathode Heat-Up Current に対する Output Power の依存性について述べる。

Output Power は FIG. 9.4 のようにして行なった。Magnetron からの直接の Power を測定するのではなく、Microwave を一度電子レンジに入れ、アンテナでその Power の一部を取り出し、それを測定した。それでも取り出される Microwave の Power が大きく、Power Sensor を壊す可能性があったため、その前に Attenuator で Power を減らしてから測定した。

Microwave は Power Sensor で検知され、Power Meter にその大きさが表示されるようになっている。

9.3.1 Correlation between High Voltage and Output Power

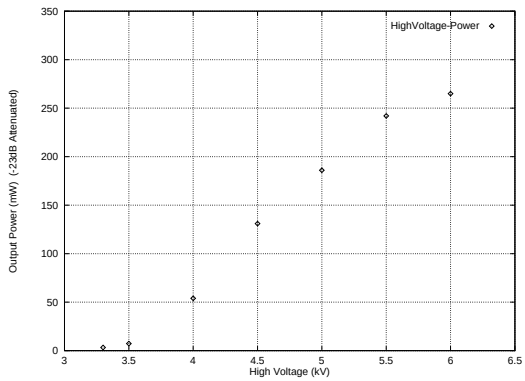
FIG. 8.1(b) の破線枠 B 内の Slide-Up Transformer の変圧比を変化させると、それにともない High Voltage が変化する。High Voltage は Magnetron が発振を始めると、High Voltage の値に依らず、約 3.2 kV で一定になってしまうので、High Voltage は発振していない状態で測定し、その後 Cathode を Heat-Up して Magnetron を発振させ、Power Meter で Output Power を測定することにした。Cathode Heat-Up Current は、発振するまでは流し、発振したら OFF にした。この測定での Attenuator は -23 dB である。すなわち 1/200 に落した Power を測定した。

また、同様に High Voltage の値に対する Current V_B/R' ($R' = 1\ \Omega$) も測定した。

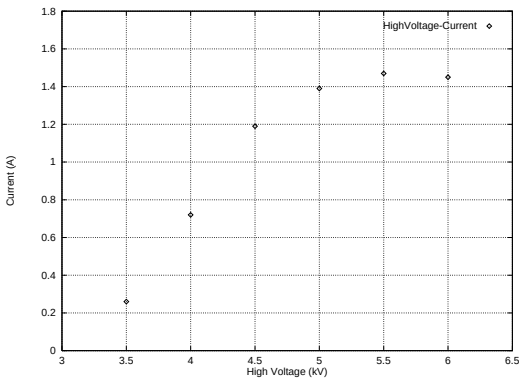
それらの結果は FIG. 9.5 に示した。これを見ると、電圧を上げると Output Power、Current ともに増加し、その挙動も良く似ている。発振していない状態での Current を測定していないので確実なことは言えないが、電圧を上げることにより Cathode からより多くの熱電子が引き出され、それらが Current の増加を引き起こしていると考えられる。さらに、この電子の増加分だけ発振の強度も増加し、 Output Power が増加すると考えられる。

また、電圧を上げていくと、3.2 kV のときに発振し始め、そのあとは電圧を変えても、発振している状態での High Voltage の値は変化せず、3.2 kV であった。このことは Magnetron の 発振の Threshold が 3.2 kV であり、また発振のための条件が $V_D = 3.2$ kV であると考えられる。そして、発振を続けるために Cathode-Anode 間に電流が流れ、$V_D = 3.2$ kV を保っているのだと考えられる。

アンテナから取り出される Microwave Power は 0.7-50 W 程度である。一般的な電子レンジは High



(a) Correlation between high voltage and output power.



(b) Correlation between high voltage and current.

FIGURE 9.5: (a); The correlation between high voltage V_D and magnetron output power. The power is attenuated with attenuators of -20 dB and -3 dB, that is, -23 dB attenuated. (b); The correlation between high voltage and current flowing along the circuit. This is calcurated from the voltage V_B and $R' = 1\ \Omega$.

Voltage が 5 kV 程度で出力 500 W 程度なので、これが DC Mode であることを考慮に入れ 5 kV で出力 1000 W としても、このアンテナからは約 1/20 程度の Microwave を取り出せていることになる。

9.3.2 Correlation between Heat-Up Current and Output Power

次に Cathode の Heat-Up Current を変化させた時の Magnetron Output の変化を測定した。これは FIG. 8.1(b) の破線枠 A 内の Slide-Up Transformer の変圧比を変化させることで行なった。Cathode Heat-Up Current を Monitor することは、高電位の部分なので危険であり容易にはできないので、Cathode Heat-Up 用の電圧がほとんど電流量を決めるとして、その電圧で Monitor することにした。

この測定での Attenuator は -26 dB である。すなわち 1/400 に減衰した Power を測定した。また、High Voltege は 5.62 kV で一定にしておいた。

この時得られた結果は FIG. 9.6 である。

当初の予想では、Cathode の温度が高ければ高いほど熱電子が励起されやすく、したがって Output Power は上がるだろうと思っていたが、これによると、Output Power はほとんど Cathode Heat-Up Current にはよらない、すなわち Cathode の温度が上がっても Output Power はほぼ一定であるという結論である。

9.4 Output Frequency of Magnetron

Microwave Frequency を測定するために、我々は Frequency Counter のキットを購入し、それを製作した。Frequency Counter は Prescaler と Counter 本体とからなり、Frequency が 10 MHz 以上の時には Prescaler を通し、1/1024 倍に落してから Counter 本体に入力する構造になっている (FIG. 9.7)。電子レンジで使われる Magnetron は 2.45 GHz の Microwave を発振するので、測定には Prescaler が必要である。

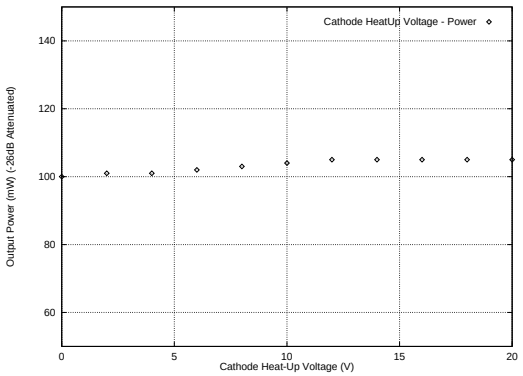


FIGURE 9.6: Correlation between the cathode heat-up current and output power. We can not measure the current easily because cathode is kept high voltage, so we regarded the voltage that cause the heat-up current as corresponding observable to tha current. The output power is attenuated by -26 dB, or $1/400$ time as much as its origin.

また、Input Voltage が大き過ぎると壊れるので、今までと同じように Attenuator で減衰させてから Counter に入力した。

この結果は FIG. 9.8 に示した。

これにより、Output Frequency は High Voltage には依らずほぼ一定値を取っていることが分かる。これは Magnetron の発振原理から考えると、やはり Oscilloscope で見られたように、Magnetron が発振している時には Magnetron は Threshold 3.2 kV の Diode として働き、それ以上には電圧が上がらないことを示唆している。なぜなら High Voltage の値が変化すれば Magnetron の共鳴条件が変わり、発振周波数が変化する、もしくは発振しなくなるということが起こるからである。

また、この周波数は 2.45 GHz に近いものであり、このことからも確かに Magnetron が発振していることが確認できる。

付け加えておくべきことは、低出力、すなわち Threshold ぎりぎりの低い電圧 (3.3 kV 程度) のときに最も Output Frequency が安定化し、周波数の揺らぎは 0.0001 GHz 程度であるが、出力が大きくなるほど (電圧が高くなるほど) 不安定になり、0.02 GHz 程度揺らぐようになる。しかしながら、我々の実際の実験を考える上では、できる限り大きな Power が必要なので (そうでないと Positronium を遷移させられない)、Frequency のある程度の揺らぎは統計でごまかすのがよいだろう。

9.5 Summary of Magnetron Oscillation

以上より Magnetron の発振についての特性は以下のようにまとめられる。

1. Magnetron 発振の Threshold は 3.2 kV である。
2. High Voltage を大きくすると Output Power は大きくなる。これは、High Voltage を大きくすると Cathode から引き抜かれる熱電子が多くなるためと考えられる。
3. Output Power は Cathode Heat-Up Current したがって Cathode の温度にはほとんど依存せず、いったん発振を始めると Cathode を Heat-Up してもしなくても、Power はあまり変化しない。

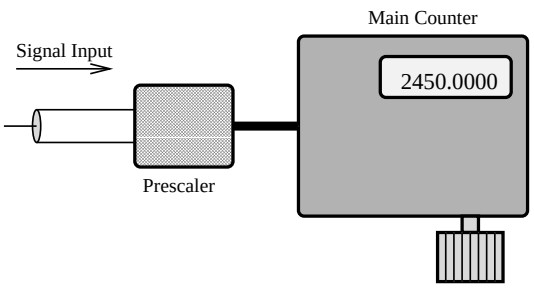


FIGURE 9.7: Frequency counter. The frequency counter that we made is consist of a main counter and a prescaler. When measuring a larger frequency than 10 MHz, we have to input the signal through the prescaler to avoid miscounting.

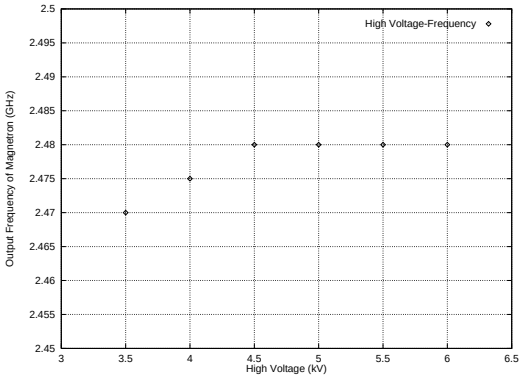


FIGURE 9.8: The high voltage dependnce of the output frequency of magnetron. this shows that the output frequency is almost independent of the high voltage, that means, according to the principle of magnetron oscillator, high voltage with magnetron oscillating is constant with the respect to the high voltage without oscillating.

4. Output Frequency は High Voltage によらず、ほとんど一定である。しかし、その揺らぎは High Voltage が大きいほど、つまり Output Power が大きいほど、大きい。

5. Magnetron は回路的には Threshold 3.2 kV の Diode として働くようである。

また、今のところ考えられる Magnetron DC 発振についての問題点は以下の通りである。

- DC Mode で発振するようにしたため、高圧トランスには AC Mode の時よりも大きな電流が流れるようになり、そのためトランスでの発熱が大きくなった。高圧側の Coil は細い導線でできたいるため、それが発熱のために焼き切れる可能性がある。実際に高圧トランスを 1 つ壊してしまった。冷却を効率良く行なえるようにするか、または内部抵抗の小さいトランスに交換するかのどちらかの対策を打たなければならないだろう。

Chapter 10

Lastly . . .

10.1 Acknowlegdement

Microwave の基礎的なことなどが全く分からなかった我々に、導波管などの設計など、高周波電磁気学にまつわる助言をして頂いた、京都大学化学研究所原子核科学の加速器研究グループ 岩下 芳久 さんに感謝致します。

担当教官である 笹尾登 さん、野村正 さんには本当にお世話になりました。1998 年度 P2 Neutrino 班の目まぐるしい進展をよそに地道に実験、考察していた我々を最後まで忍耐強く相手して下さりました。実験測定装置を KEK からわざわざ持って来て頂いた笹尾さん。98 年度から助手として初めて面倒を見てくれることになった野村さん。ありがとうございました。

理論部門の担当教官である 畑浩之 さんにも大変お世話になりました。普段の理論ゼミでは我々の容赦ない質問にも快く答えて下さりました。また実験の基礎的な理論部分を共に考え、適切な助言を頂きました。

10.2 Special Thanks to . . .

1998 年度 P1 の作業の傍ら、我々 1998 年度 P2 の最終段階を見守り、夜 11 時と 3 時になれば必ずと言って良いほど「お腹すいた、何か買いに行こうよ」と誘いに来てくれたり、肩揉んだり、Judy & Mary を歌いながら Superstring Theory と格闘していた、京都大学素粒子論研究室所属の 1999 年度 M1 大学院生、寺口俊介 君に感謝致します。

10.3 Sentiment

- 2 週間で解析をしてレポートを仕上げるのはチョー大変だと思いました。でも夜中のコンビニ通いは息抜きとしては最高でなかなか楽しかったです。実験は予備実験しかできなかったけど、1999 年の P2 の人たちが続きをやってくれると信じています。
- 3 月までの昼は実験、夜は理論計算という生活から解放されたかと思ったら 4 月からは休日返上で京都と大阪を往復する状態。でも忙しいなかで様々な装置と御対面、格闘し、悩ましてくれた事が今までにない良い経験となった。人間関係も学ぶ良い機会だったと思う。
- Microwave の取り扱いがとても大変でした。いつも、頭の中で考えていた事と違う結果が出て、なかなか楽しませてもらえました。今日が一番しんどかった。
- みんなには迷惑のかけっぱなしでした。ほんとにごめんなさい。ただ、ここにいて、参考になること、見習うべきことはほんとに数多く、得た物の多かった 1 年だったと思います。もっと頑張らねば。

Bibliography

[1] F.Bloch, A.Siegert: Phys. Rev. **57**, *522* (1940)

[2] A.Ore, J.L.Powell: Phys. Rev. **75**, *1696* (1949)

[3] Robert Karplus, Norman M.Kroll: Phys. Rev. **77**, *536* (1950)

[4] Willis E.Lamb, Jr., Robert C.Retherford: Phys. Rev. **79**, *549* (1950)

[5] E.E.Salpeter, H.A.Bethe: Phys. Rev. **84**, *1232* (1951)

[6] Robert Karplus, Abraham Klein: Phys. Rev. **87**, *848* (1952)

[7] Edward S.Dayhoff, Sol Triebwasser, Willis E.Lamb, Jr.: Phys. Rev. **89**, *106* (1953)

[8] Martin Deutsch: Prog. Nucl. Phys. **3**, *131* (1953)

[9] Sol Triebwasser, Edward S.Dayhoff, Willis E.Lamb, Jr.: Phys. Rev. **89**, *98* (1953)

[10] E.E.Salpeter: Phys. Rev. **89**, *92* (1953)

[11] Robert Beringer, Mark A.Heald: Phys. Rev. **95**, *1474* (1954)

[12] Otto Halpern: Phys. Rev. **94**, *904* (1954)

[13] V.W.Hughes, S.Marder, C.S.Wu: Phys. Rev. **98**, *1840* (1955)

[14] J.P.Wittke, R.H.Dicke: Phys. Rev. **103**, *620* (1956)

[15] V.W.Hughes, S.Marder, C.S.Wu: Phys. Rev. **106**, *934* (1957)

[16] E.D.Theriot, Jr., R.H.Beers, V.W.Hughes, K.O.Zieck: Phys. Rev. **A2**, *707* (1970)

[17] Thomas Fulton, David A.Owen, Wayne W.Repko: Phys. Rev. **A4**, *1802* (1971)

[18] R.Barbieri, P.Christillin: Phys. Rev. **A8**, *2266* (1973)

[19] Michael A.Stroscio: Phys. Rep. **22**, *215* (1975)

[20] E.R.Carlson, V.W.Hughes, I.Lindgren: Phys. Rev. **A15**, *241* (1977)

[21] P.O.Egan, V.W.Hughes, M.H.Yam: Phys. Rev. **A15**, *251* (1977)

[22] G.Peter Lepage: Phys. Rev. **A16**, *863* (1977)

[23] Arthur Rich: Rev. Mod. Phys. **53**, *127* (1981)

[24] M.H.Ritter, P.O.Egan, V.W.Hughes, K.A.Woodle: Phys. Rev. **A30**, *1331* (1981)

[25] Particle Data Group ed: *The European Physical Journal* , **C3** (Springer, 1998)

[26] George L.Ragan ed: *Microwave Transmission Circuits*, Massachusetts Institute of Technology Radiation Laboratory Series **9** (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Tronto, London, 1948)

[27] Sammel Silver ed: *Microwave Antenna Theory and Design*, Massachusetts Institute of Technology Radiation Laboratory Series **12** (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Tronto, London, 1949)

[28] S.N.Von Voorhis ed: *Microwave Receivers*, Massachusetts Institute of Technology Radiarion Laboratory Series **23** (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Tronto, London, 1948)

[29] T.D.Lee: *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Contemporary Concepts in Physics **Vol.1** (Harwood Academic Publishers, 1981)

[30] Robert E.Collin: *Foundations for Microwave Engineering* 2nd ed. (McGraw-Hill, Inc., New York, 1992)

[31] W.Greiner, J.Reinhardt: *Quantum Electrodynamics* 2nd ed. (Springer, Berlin, 1994)

[32] Michael E.Peskin, Danniel V.Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, 1995)

[33] V.D.Barger, M.G.Olsson:『電磁気学 –新しい視点にたって– 』(培風館, 東京, 1995)

[34] 西島和彦:『相対論的量子力学』, 新物理学シリーズ **13** (培風館, 東京, 1973)

[35] 中西襄:『場の量子論』, 新物理学シリーズ **19** (培風館, 東京, 1975)

[36] 九後汰一郎:『ゲージ場の量子論』, 新物理学シリーズ **23,24** (培風館, 東京, 1989)

[37] I.J.R.Aitchson, A.J.G.Hey:『ゲージ理論入門』(講談社サイエンティフィク, 東京, 1992)

[38] 猪木慶治, 川合光:『量子力学』(講談社サイエンティフィク, 東京, 1994)

[39] J.J.Sakurai:『現代の量子力学』(吉岡書店, 京都, 1989)

[40] J.D.Jackson:『ジャクソン電磁気学』(吉岡書店, 京都, 1994)

[41] 後藤憲一, 山崎修一郎:『詳解 電磁気学演習』(共立出版, 東京, 1970)

[42] 阿部英太郎:『マイクロ波技術』, 物理工学実験 **11** (東京大学出版会, 東京, 1979)

[43] 『トランジスタ技術 SPECIAL 』, **Vol.1, Vol,40** (CQ 出版会, 東京, 1987)

[44] トランジスタ技術編集部:『電子回路部品活用ハンドブック』(CQ 出版会, 東京, 1985)

[45] G.R.Jessop, [関根慶太郎 訳]:『VHF UHF MANUAL』 4th ed. (CQ 出版会, 東京)

[46] P2_97 Positronium 班:『Positronium の寿命の測定』(*unpublished*)

Appendix A

Positronium Hyperfine Structure

Positronium は電子・陽電子の束縛状態である。これを自由場の理論で表現するのは至難の業である。Positronium は基本的には相互作用を無限に行うことで束縛状態を形成しているが、それらをまとめて伝播関数として表現し、これを様々な手段で書き下す方法がある。ここでは Positronium Ground States でのエネルギー準位差、すなわち Hyperfine Structure を理論的に導出する。

なお、ここでの理論展開は W.Greiner & J.Reinhardt *Quantum Electrodynamics* を基にしている。

A.1 The Bethe-Salpeter Equation

ここでは場の理論形式を使わず、相対論的量子力学、特に Feynman による Propagator 方式を用いる。従って表現される式は全て波動関数と伝播関数である。

2 粒子系の波動関数を考察する前に、1 粒子系の波動関数を次式で表現しよう。

$$\psi(x_2) \quad = \quad -\int d\sigma(x_1) S_F(x_2, x_1) \gamma^\mu n_\mu(x_1) \psi(x_1) \tag{A.1}$$

ここで $\psi(x_1)$ は粒子を表す 4 成分 spinor であり、$\sigma(x_1)$ は時空点 x_1 を含んだ 4 次元内の超曲面、$n_\mu(x_1)$ はその超曲面の 4 次元法線単位ベクトルとする。また $S_F(x_2, x_1)$ は fermion の自由伝播関数

$$S_F(x_2, x_1) \quad = \quad i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \, \mathrm{e}^{ip(x_2 - x_1)} \tag{A.2}$$

と定義する。

この形式を用いて、2 粒子系を記述する波動関数を表そう。粒子 a、粒子 b の複合状態を表す波動関数を $\psi_{ab}(x_1, x_2)$ とおく。この時この波動関数は 4 成分 spinor を持つ 2 粒子を表すので、$4 \times 4 = 16$ 成分を持つことになる。表式 (A.1) を 2 粒子系の波動関数に拡張すると

$$\psi_{ab}(x_3, x_4) \quad = \quad \int d\sigma(x_1) d\sigma(x_2) S^{ab}(x_3, x_4; x_1, x_2) \not{n}(x_1) \not{n}(x_2) \psi_{ab}(x_1, x_2) \tag{A.3}$$

となる。

もしもこの 2 つの粒子が相互作用していなければ、波動関数と伝播関数は非常に簡単な表現で表すことができる。

$$\psi^0_{ab}(x_1, x_2) \quad = \quad \psi_a(x_1) \psi_b(x_2) \tag{A.4}$$

$$S^0_F(x_3, x_4; x_1, x_2) \quad = \quad S^a_F(x_3, x_1) S^b_F(x_4, x_2) \tag{A.5}$$

このいたって簡単な表現では相互作用している複合粒子系は表すことは不可能であるが、摂動として伝播関数を補正する。つまり 2 粒子間で光子の交換を行う補正をすると、表式 (A.5) は次のようになる。

$$\begin{aligned} S^{ab}(x_3, x_4; x_1, x_2) \quad = \quad & S^a_F(x_3, x_1) S^b_F(x_4, x_2) \\ & + \int d^4x_5 d^4x_6 S^a_F(x_3, x_5) S^b_F(x_4, x_6) \\ & \qquad \times \left[(-ie_a) \gamma^a_\mu D^{\mu\nu}_F(x_5, x_6) (-ie_b) \gamma^b_\nu \right] S^a_F(x_5, x_1) S^b_F(x_6, x_2) \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{A.6}$$

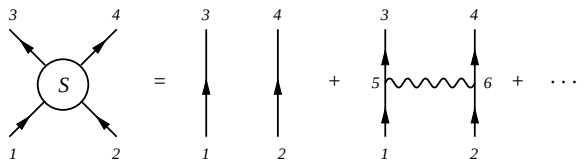


FIGURE A.1: The definition of 2-fermions propagator

これをわかりやすく Feynman Diagram で表すと Figure A.1 のようになる。

ここで e_i は粒子 i の電荷、$D_F^{\mu\nu}(x_5, x_6)$ は光子の伝播関数である。γ^a は粒子 a の spinor にのみかかる行列である。

この摂動による相互作用伝播関数をひとまとめにして Interaction Kernel K という関数を次式で定義する。つまり表式 (A.6) の書き換えとして K を定義する。

$$\begin{aligned} S^{ab}(x_3, x_4; x_1, x_2) &= S_F^a(x_3, x_1) S_F^b(x_4, x_2) \\ &\quad + \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 S_F^a(x_3, x_5) S_F^b(x_4, x_6) \\ &\qquad \times K^{ab}(x_5, x_6; x_7, x_8) S_F^a(x_7, x_1) S_F^b(x_8, x_2) \end{aligned} \tag{A.7}$$

この伝播関数を表す Feynman Diagram は Figure A.2 である。

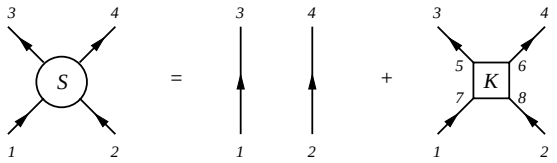


FIGURE A.2: The definition of kernel K^{ab}

この Interaction Kernel K^{ab} を表現すれば厳密な 2 粒子系の波動関数が求められるが、実際にはそれはとても複雑で解くことはできそうにもない。摂動論による最初の order の Interaction Kernel は、表式 (A.6) に出てきたように

$$K_0^{ab}(x_5, x_6; x_7, x_8) = (-ie_a)\gamma_\mu^a D_F^{\mu\nu}(x_5, x_6)(-ie_b)\gamma_\nu^b \delta^4(x_5 - x_7)\delta^4(x_6 - x_8) \tag{A.8}$$

とすればよい。

厳密な Interaction Kernel K^{ab} は任意の order の Kernel K_n^{ab} を無限に足し合わせることににによって得られる。しかし実際にはこれは大変な難問である。そこで Kernel を、可約な関数 (Kernel を表す相互作用が分離可能なもの) と既約な関数に分ける。特に既約な Kernel (Irreducible Kernel) を $\overline{K}$ で表すと、表式 (A.7) は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} S^{ab}(x_3, x_4; x_1, x_2) &= S_F^a(x_3, x_1) S_F^b(x_4, x_2) \\ &\quad + \int d^4x_5 d^4x_6 d^4x_7 d^4x_8 S_F^a(x_3, x_5) S_F^b(x_4, x_6) \\ &\qquad \times \overline{K}^{ab}(x_5, x_6; x_7, x_8) S^{ab}(x_7, x_8; x_1, x_2) \end{aligned} \tag{A.9}$$

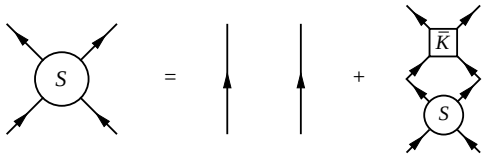


FIGURE A.3: The diagram of propagator S using itself and irreducible kernel $\overline{K}$

この方程式は積分方程式の形をしているので、左辺を右辺に代入していくことによって Irreducible Kernel のみで伝播関数を表現できることになる。しかしこれでも無限にある Irreducible Kernel を無限にかけ合わせる必要がある。実際に計算をする際には Irreducible Kernel を最低次の K_0^{ab} で置き換えれば、これを無限にかけ合わせることでかなりの近似計算ができる。

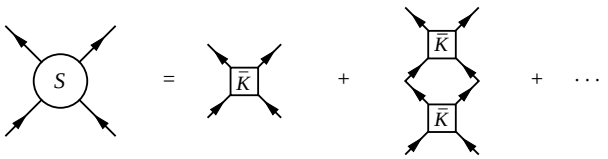


FIGURE A.4: The diagram of S only with irreducible kernel $\overline{K}$

さて表式 (A.9) を表式 (A.3) に代入して、2 粒子系の波動関数を Irreducible Kernel を用いて表そう。

$$\begin{aligned}\psi_{ab}(x_3,x_4) &= \int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2)S_F^a(x_3,x_1)S_F^b(x_4,x_2)\not{n}(x_1)\not{n}(x_2)\psi_{ab}(x_1,x_2)\\ &\quad+\int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2)\int d^4x_5d^4x_6d^4x_7d^4x_8S_F^a(x_3,x_5)S_F^b(x_4,x_6)\\ &\quad\times\overline{K}^{ab}(x_5,x_6;x_7,x_8)S^{ab}(x_7,x_8;x_1,x_2)\psi_{ab}(x_1,x_2) \qquad \text{(A.10)}\end{aligned}$$

最初の項を $\phi_{ab}(x_3,x_4)$ と表記し、もう一度表式 (A.3) を代入することによって、最終的には次の形になる。

$$\begin{aligned}\psi_{ab}(x_1,x_2) &= \phi_{ab}(x_1,x_2)\\ &\quad+\int d^4x_3d^4x_4d^4x_5d^4x_6S_F^a(x_1,x_5)S_F^b(x_2,x_6)\overline{K}^{ab}(x_5,x_6;x_3,x_4)\psi_{ab}(x_3,x_4) \qquad \text{(A.11)}\end{aligned}$$

この方程式を *Bethe-Salpeter Equation* と呼ぶ。$\phi_{ab}(x_1,x_2)$ はこれまでの導出方法からわかるように相互作用をしていない波動関数を表す。したがって束縛状態にある複合粒子を表す波動関数には寄与しない。従って束縛状態の波動関数は表式 (A.11) から初項を省いた形となる。

A.2 The Bethe-Salpeter Equation for Positronium

では先程の *Bethe-Salpeter Equation* を電子陽電子束縛状態の Positronium に適用しよう。
電子についての波動関数は先程と同じく

$$\psi_\mu(x) = -\int d\sigma(x')S_{F\mu\nu'}(x,x')\not{n}_{\nu'\nu}(x')\psi_\nu(x') \qquad \text{(A.12)}$$

とする。下付きの添字は spinor の足である。陽電子については電子の反粒子であることを用いて

$$\overline{\psi}_\sigma(x) = \int d\sigma(x')\overline{\psi}_\tau(x')\not{n}_{\tau\tau'}(x')S_{F\tau'\sigma}(x',x) \qquad \text{(A.13)}$$

とする。ここで電子と陽電子との添字の順番、変数の順番に注意しよう。

複合系の波動関数も同様にして

$$\psi_{\mu\sigma}(x_3,x_4) = \int d\sigma(x_1)d\sigma(x_2)S_{\mu\sigma\nu\tau}(x_3,x_4;x_1,x_2)\not{n}_{\nu\nu'}(x_1)\not{n}_{\tau'\tau}(x_2)\psi_{\nu'\tau'}(x_1,x_2) \tag{A.14}$$

と書くことができる。相互作用を表す $S_{\mu\sigma\nu\tau}$ を Interaction Kernel K を用いて書き直す。

$$\begin{aligned} S_{\mu\sigma\nu\tau}(x_3,x_4;x_1,x_2) &= -S_{F\,\mu\nu}(x_3,x_1)S_{F\,\tau\sigma}(x_2,x_4) \\ &\quad + \int d^4x_5d^4x_6d^4x_7d^4x_8 S_{F\,\mu\mu'}(x_3,x_5)S_{F\,\sigma'\sigma}(x_6,x_4) \\ &\quad \times K_{\mu'\sigma'\nu'\tau'}(x_5,x_6;x_7,x_8)\Big[- S_{F\,\nu'\nu}(x_7,x_1)S_{F\,\tau\tau'}(x_2,x_8)\Big] \end{aligned} \tag{A.15}$$

さらに既約な Kernel $\overline{K}$ を用いると

$$\begin{aligned} S_{\mu\sigma\nu\tau}(x_3,x_4;x_5,x_6) &= -S_{F\,\mu\mu'}(x_3,x_1)S_{F\,\tau\sigma}(x_2,x_4) \\ &\quad + \int d^4x_5d^4x_6d^4x_7d^4x_8 S_{F\,\mu\mu'}(x_3,x_5)S_{F\,\sigma'\sigma}(x_6,x_4) \\ &\quad \times \overline{K}_{\mu'\sigma'\nu'\tau'}(x_5,x_6;x_7,x_8)S_{\nu'\tau'\nu\tau}(x_7,x_8;x_1,x_2) \end{aligned} \tag{A.16}$$

となる。これを表式 (A.14) に代入して整理することにより、複合系の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \psi_{\mu\sigma}(x_1,x_2) &= \phi_{\mu\sigma}(x_1,x_2) \\ &\quad + \int d^4x_3d^4x_4d^4x_5d^4x_6 S_{F\,\mu\mu'}(x_1,x_5)S_{F\,\sigma'\sigma}(x_6,x_2) \\ &\quad \times \overline{K}_{\mu'\sigma'\nu'\tau'}(x_5,x_6;x_3,x_4)\psi_{\nu'\tau'}(x_3,x_4) \end{aligned} \tag{A.17}$$

束縛状態を記述するときは、導出からも明らかなように初項の $\phi_{\mu\sigma}(x_1,x_2)$ は省かれる。

電子、陽電子の自由伝播関数 S_F は

$$(\ i\partial\!\!\!/_1 - m\ )_{\mu\nu}\, S_{F\,\nu\mu'}(x_1,x_5) = i\delta^4(x_1-x_5)\delta_{\mu\mu'} \tag{A.18}$$

$$(\ i\partial\!\!\!/_2 + m\ )_{\tau\sigma}\, S_{F\,\sigma'\tau}(x_6,x_2) = -i\delta^4(x_2-x_6)\delta_{\sigma\sigma'} \tag{A.19}$$

である。これを使って表式 (A.17) に演算子として $(i\partial\!\!\!/_1 - m)(i\partial\!\!\!/_2 + m)$ を作用させると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} &(\ i\partial\!\!\!/_1 - m\ )_{\mu\mu'}\,(\ i\partial\!\!\!/_2 + m\ )_{\sigma'\sigma}\,\psi_{\mu'\sigma'}(x_1,x_2) \\ &\quad = \int d^4x_3d^4x_4d^4x_5d^4x_6 (i\partial\!\!\!/_1 - m)_{\mu\mu'} S_{F\,\mu'\alpha}(x_1,x_5) \\ &\qquad \times (i\partial\!\!\!/_2 + m)_{\sigma'\sigma} S_{F\,\beta\sigma'}(x_6,x_2)\overline{K}_{\alpha\beta\nu'\tau'}(x_5,x_6;x_3,x_4)\psi_{\nu'\tau'}(x_3,x_4) \\ &\quad = \int d^4x_3d^4x_4d^4x_5d^4x_6 \delta^4(x_1-x_5)\delta_{\mu\alpha} \\ &\qquad \times \delta^4(x_2-x_6)\delta_{\sigma\beta}\overline{K}_{\alpha\beta\nu'\tau'}(x_5,x_6;x_3,x_4)\psi_{\nu'\tau'}(x_3,x_4) \\ &\quad = \int d^4x_3d^4x_4 \overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(x_1,x_2;x_3x_4)\psi_{\nu\tau}(x_3,x_4) \end{aligned} \tag{A.20}$$

ではこれを Fourier 変換して、momentum 表示を行う。波動関数の Fourier 変換を

$$\chi_{\mu\sigma}(p_1,p_2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2\ \mathrm{e}^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\psi_{\mu\sigma}(x_1,x_2) \tag{A.21}$$

同様に Interaction Kernel $\overline{K}$ の変換を

$$\begin{aligned}
&\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(p_1,p_2;p_3,p_4) \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4\ \mathrm{e}^{i(p_1x_1+p_2x_2-p_3x_3-p_4x_4)}\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(x_1,x_2;x_3,x_4) \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}$$

とする。これらは 1 変数関数の Fourier 変換

$$\chi(p) \ = \ \int d^4x\ \mathrm{e}^{ipx}\psi(x) \ \ , \ \ \psi(x) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ \mathrm{e}^{-ipx}\chi(p)$$

の多変数関数への拡張である。この定義に従って表式 (A.20) に左から $\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2\mathrm{e}^{i(p_1x_1+p_2x_2)}$ を作用させる。部分積分により

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2\left[(-i\not\partial_1-m)_{\mu\mu'}(-i\not\partial_2+m)_{\sigma'\sigma}\ \mathrm{e}^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\right]\psi_{\mu'\sigma'}(x_1,x_2) \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4d^4x_3'd^4x_4'\delta^4(x_3'-x_3)\delta^4(x_4'-x_4)\ \mathrm{e}^{i(p_1x_1+p_2x_2)} \\
&\qquad\qquad \times\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(x_1,x_2;x_3,x_4)\psi_{\nu\tau}(x_3',x_4') \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}$$

となる。ここで Dirac Delta function

$$\delta^4(x_3'-x_3) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_1'\ \mathrm{e}^{ip_1'(x_3'-x_3)} \ \ , \ \ \delta^4(x_4'-x_4) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2'\ \mathrm{e}^{ip_2'(x_4'-x_4)}$$

を代入して整理する。

$$\begin{aligned}
\text{(左辺)} \ &= \ \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x_1d^4x_2(\not p_1-m)_{\mu\mu'}(\not p_2+m)_{\sigma'\sigma}\ \mathrm{e}^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\psi_{\mu'\sigma'}(x_1,x_2) \\
&= \ (\not p_1-m)_{\mu\mu'}\,(\not p_2+m)_{\sigma'\sigma}\,\chi_{\mu'\sigma'}(p_1,p_2) \qquad \text{(A.24)} \\
\text{(右辺)} \ &= \ \frac{1}{(2\pi)^{12}}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4d^4x_3'd^4x_4'd^4p_1'd^4p_2'\ \mathrm{e}^{ip_1'(x_3'-x_3)}\ \mathrm{e}^{ip_2'(x_4'-x_4)}\ \mathrm{e}^{i(p_1x_1+p_2x_2)} \\
&\qquad\qquad \times\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(x_1,x_2;x_3,x_4)\psi_{\nu\tau}(x_3',x_4') \\
&= \ \int d^4p_1'd^4p_2'\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(p_1,p_2;p_1',p_2')\chi_{\nu\tau}(p_1',p_2') \qquad \text{(A.25)}
\end{aligned}$$

さらに $P=p_1+p_2$、$p=\frac{1}{2}(p_1-p_2)$ とし、相互作用の前後での運動量保存を前面に出して $\overline{K}(p_1,p_2;p_1',p_2')=\delta^4(P-P')\overline{K}(p,p';P)$ とする。これにより、表式 (A.23) は

$$\begin{aligned}
&\left(\ \frac{1}{2}\not P+\not p-m\ \right)_{\mu\mu'}\left(\ \frac{1}{2}\not P-\not p+m\ \right)_{\sigma'\sigma}\chi_{\mu'\sigma'}(p,P) \\
&\quad = \ \int d^4p'd^4P'\left|\ \frac{\partial(p_1,p_2)}{\partial(p',P')}\ \right|\delta^4(P-P')\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(p,p';P)\chi_{\nu\tau}(p',P') \\
&\quad = \ \int d^4p'\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(p,p';P)\chi_{\nu\tau}(p',P) \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}$$

となる。

A.3 Nonretarded Approximation

では具体的に Positronium を形成するための最低次の Irreducible Kernel を記述しよう。この Irreducible Kernel を momentum 表示すると

$$\overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(p,p';P) \ = \ \frac{-e^2}{(2\pi)^4}\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}D_{F\,\alpha\beta}(p-p')+\frac{e^2}{(2\pi)^4}\gamma^\alpha_{\mu\sigma}\gamma^\beta_{\tau\nu}D_{F\,\alpha\beta}(P) \qquad \text{(A.27)}$$

となる。第一項は Coulomb Interaction、第二項は Virtual Annihilation を表す。

Positronium の重心系の運動量を既知として $K=(K_0,0)$ と表し $(K_0=E)$、波動関数を改めて

$$\chi_{\mu\sigma}(p,P) \quad = \quad \delta^4(P-K)\chi_{\mu\sigma}(p) \tag{A.28}$$

としよう。さらに $p'=p+k$ と置き換え、$\int d^4p$ を先程の *Behte-Slapter Equation in Momentum Space* に作用させると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\not{K}+\not{p}-m\right)_{\mu\mu'}\left(\frac{1}{2}\not{K}-\not{p}+m\right)_{\sigma\sigma'}\chi_{\mu'\sigma'}(p) \\
&\quad = \quad \int d^4k\ \overline{K}_{\mu\sigma\nu\tau}(p,p+k;K)\chi_{\nu\tau}(p+k) \\
&\quad = \quad \frac{-e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\ \Big[\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}D_{F\,\alpha\beta}(-k)-\gamma^\alpha_{\mu\sigma}\gamma^\beta_{\tau\nu}D_{F\,\alpha\beta}(K)\Big]\chi_{\nu\tau}(p+k)
\end{aligned} \tag{A.29}$$

となる。

ここでの目標は、非相対論的極限での考察をするために必要なため、この表式 (A.29) を 3 次元表現で書き表すことである。

ではこの表式 (A.29) の両辺に $\gamma^0_{\rho\mu}\gamma^0_{\sigma\lambda}$ をかけよう。この時、

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) \quad &= \quad \gamma^0_{\rho\mu}\left(\frac{1}{2}\not{K}+\not{p}-m\right)_{\mu\mu'}\left(\frac{1}{2}\not{K}-\not{p}+m\right)_{\sigma'\sigma}\gamma^0_{\sigma\lambda}\ \chi_{\mu'\sigma'}(p) \\
&= \quad \left[\frac{1}{2}K_0-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m+p_0\right]_{\rho\mu'}\left[\frac{1}{2}K_0+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m-p_0\right]_{\sigma'\lambda}\chi_{\mu'\sigma'}(p)
\end{aligned} \tag{A.30}$$

となる。但し

$$\alpha^i \quad = \quad \gamma^0\gamma^i \quad , \quad \beta \quad = \quad \gamma^0$$

としている。電子・陽電子の Hamiltonian をそれぞれ $H_{\rm ele}$、$H_{\rm posi}$ とすると

$$H_{\rm ele}(\boldsymbol{p}) \quad = \quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m \tag{A.31}$$

$$H_{\rm posi}(\boldsymbol{p}) \quad = \quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m \tag{A.32}$$

であるから結局

$$(\text{左辺}) \quad = \quad \left[\frac{1}{2}E-H_{\rm ele}(\boldsymbol{p})+p_0\right]_{\rho\mu'}\left[\frac{1}{2}E-H_{\rm posi}(-\boldsymbol{p})-p_0\right]_{\sigma'\lambda}\chi_{\mu'\sigma'}(p) \tag{A.33}$$

となる。表記を簡単にするため、

$$\tilde{F}_{\rho\lambda\mu'\sigma'}(p) \quad \equiv \quad \left[\frac{1}{2}E-H_{\rm ele}(\boldsymbol{p})+p_0\right]_{\rho\mu'}\left[\frac{1}{2}E-H_{\rm posi}(-\boldsymbol{p})-p_0\right]_{\sigma'\lambda}$$

を導入しておく。

また右辺は、

$$(\text{右辺}) \quad = \quad \frac{-e^2}{(2\pi)^4}\gamma^0_{\rho\mu}\gamma^0_{\sigma\lambda}\int d^4k\Big[\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}D_{F\,\alpha\beta}(-k)-\gamma^\alpha_{\mu\sigma}\gamma^\beta_{\tau\nu}D_{F\,\alpha\beta}(K)\Big]\chi_{\nu\tau}(p+k) \tag{A.34}$$

である。

ここで *Nonretarded Approximation* を導入する。これは 4-momentum k を $k=(k_0,\boldsymbol{k})\to(0,\boldsymbol{k})$ とするものであり、非相対論的極限をとることに対応する。これにあわせて波動関数を

$$\phi_{ab}(\boldsymbol{p}) \quad = \quad \int dp_0\ \chi_{ab}(p)$$

と変換する。これにより、

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) \quad &= \quad \frac{-e^2}{2\pi}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ \gamma^0_{\rho\mu}\gamma^0_{\sigma\lambda}\Big[\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}D_{F\,\alpha\beta}(0,-\boldsymbol{k})-\gamma^\alpha_{\mu\sigma}\gamma^\beta_{\tau\nu}D_{F\,\alpha\beta}(K)\Big]\phi_{\nu\tau}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\\ &\equiv \quad \mathit{\Gamma}_{\rho\lambda}(\boldsymbol{p})\end{aligned} \tag{A.35}$$

となる。最後の式は簡単に表示するために導入している。これらの表式をまとめて書くと、*Bethe-Salpeter Equation in Momentum Space* は

$$\tilde{F}_{\rho\lambda\mu'\sigma'}(p)\chi_{\mu'\sigma'}(p) \quad = \quad \mathit{\Gamma}_{\rho\lambda}(\boldsymbol{p}) \tag{A.36}$$

と表せることになる。

ここでかなり技巧的だが、Projection Operator $\hat{\mathit{\Lambda}}_\pm(\boldsymbol{p})$ を導入する。それは

$$\hat{\mathit{\Lambda}}_\pm(\boldsymbol{p}) \quad \equiv \quad \frac{\omega(\boldsymbol{p})\pm H(\boldsymbol{p})}{2\omega(\boldsymbol{p})}$$

と定義される。ここで $\omega(\boldsymbol{p})$ は Hamiltonian $H(\boldsymbol{p})$ の固有値である。さらに、

$$\hat{\mathit{\Lambda}}(\boldsymbol{p}) \quad \equiv \quad \hat{\mathit{\Lambda}}^{\rm ele}_+(\boldsymbol{p})\hat{\mathit{\Lambda}}^{\rm posi}_+(-\boldsymbol{p})-\hat{\mathit{\Lambda}}^{\rm ele}_-(\boldsymbol{p})\hat{\mathit{\Lambda}}^{\rm posi}_-(-\boldsymbol{p})$$

を導入する。Projection Operator を表式 (A.36) に作用させることによって、長い変形の後、

$$\Big(E\mathbf{1}_{\rho\lambda}\mathbf{1}_{\mu'\sigma'}-H^{\rm ele}_{\rho\mu'}(\boldsymbol{p})-H^{\rm posi}_{\sigma'\lambda}(-\boldsymbol{p})\Big)\ \phi_{\mu'\sigma'}(\boldsymbol{p}) \quad = \quad -2\pi i\Big(\hat{\mathit{\Lambda}}(\boldsymbol{p})\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{p})\Big)_{\rho\lambda} \tag{A.37}$$

となる。

ここで座標表示にしよう。そのために Forier 変換を行う。

$$\phi_{ab}(\boldsymbol{r}) \quad = \quad \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ {\rm e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\phi_{ab}(\boldsymbol{p})$$

波動関数の負エネルギー成分を無視するため、$\hat{\mathit{\Lambda}}(\boldsymbol{p})\to\mathbf{1}$ とする。これにより表式 (A.37) は以下のようになる。

$$\begin{aligned}&\Big[E\mathbf{1}_{\rho\lambda}\mathbf{1}_{\mu'\sigma'}-H^{\rm ele}_{\rho\mu'}(\boldsymbol{p})-H^{\rm posi}_{\sigma'\lambda}(-\boldsymbol{p})\Big]\phi_{\mu'\sigma'}(\boldsymbol{r})\\ &\quad = \quad ie^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ {\rm e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ \gamma^0_{\rho\mu}\gamma^0_{\sigma\lambda}\Big[\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}D_{F\,\alpha\beta}(0,-\boldsymbol{k})-\gamma^\alpha_{\mu\sigma}\gamma^\beta_{\tau\nu}D_{F\,\alpha\beta}(K)\Big]\ \phi_{\nu\tau}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\\ &\quad = \quad ie^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ {\rm e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\gamma^0_{\rho\mu}\gamma^0_{\sigma\lambda}\Big[\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}D_{F\,\alpha\beta}(0,-\boldsymbol{k})-\gamma^\alpha_{\mu\sigma}\gamma^\beta_{\tau\nu}D_{F\,\alpha\beta}(K)\Big]\ \phi_{\nu\tau}(\boldsymbol{r})\\ &\quad \equiv \quad \Big(U_1(\boldsymbol{r})+U_2(\boldsymbol{r})\Big)_{\rho\lambda\nu\tau}\phi_{\nu\tau}(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{A.38}$$

$U_1(\boldsymbol{r})$ は Coulomb Interaction によるものであり、$U_2(\boldsymbol{r})$ は Virtual Annihilation によるものである。

ではまず $U_1(\boldsymbol{r})$ について考察しよう。伝播関数 D_F であるが、Feynman gauge を採用して、

$$\gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma}D_{F\,\alpha\beta}(0,-\boldsymbol{k}) \quad = \quad \frac{-i}{-|\boldsymbol{k}|^2}g_{\alpha\beta}\ \gamma^\alpha_{\mu\nu}\gamma^\beta_{\tau\sigma} \tag{A.39}$$

とする。$k_0 = 0$ であるのでこれに追加をして

$$\gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\gamma^{\beta}_{\tau\sigma}D_{F\,\alpha\beta}(0,-\boldsymbol{k}) \;=\; \frac{i}{|\boldsymbol{k}|^2}\Big(g_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\gamma^{\beta}_{\tau\sigma} + \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}(\gamma^0_{\mu\nu}k_0)(\gamma^0_{\tau\sigma}k_0)\Big)$$

としてよい。また Momentum Conservation より $\gamma^0 k_0 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}$ となるのでさらに変形できて、

$$\begin{aligned}\gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\gamma^{\beta}_{\tau\sigma}D_{F\,\alpha\beta}(0,-\boldsymbol{k}) &= \frac{i}{|\boldsymbol{k}|^2}\left[\gamma^0_{\mu\nu}\gamma^0_{\tau\sigma} - \boldsymbol{\gamma}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma}_{\tau\sigma} + \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k})_{\mu\nu}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k})_{\tau\sigma}\right] \\ &= \frac{i}{|\boldsymbol{k}|^2}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k})_{\mu\nu}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k})_{\tau\sigma} - \boldsymbol{\gamma}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma}_{\tau\sigma}\right] + \frac{i}{|\boldsymbol{k}|^2}\gamma^0_{\mu\nu}\gamma^0_{\tau\sigma} \qquad (A.40)\end{aligned}$$

これを用いることにより $U_1(\boldsymbol{r})$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}U_{1\,\rho\lambda\nu\tau}(\boldsymbol{r}) &= -e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\left(\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k})_{\rho\nu}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k})_{\tau\lambda}}{|\boldsymbol{k}|^2} - \boldsymbol{\alpha}_{\rho\nu}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\tau\lambda}\right) + \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\mathbf{1}_{\rho\nu}\mathbf{1}_{\tau\lambda}\right] \\ &= -\frac{e^2}{4\pi r}\left[\mathbf{1}_{\rho\nu}\mathbf{1}_{\tau\lambda} - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\rho\nu}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\tau\lambda} + \frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})_{\rho\nu}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})_{\tau\lambda}}{r^2}\right)\right] \qquad (A.41)\end{aligned}$$

これは Breit Interaction と呼ばれている。

同様にして $U_2(\boldsymbol{r})$ は以下のようになる。

$$U_{2\,\rho\lambda\nu\tau}(\boldsymbol{r}) \;=\; \frac{e^2}{K^2}\Big[\beta_{\rho\lambda}\beta_{\tau\nu} + (\beta\boldsymbol{\alpha})_{\rho\lambda}\cdot(\beta\boldsymbol{\alpha})_{\tau\nu}\Big]\delta^3(\boldsymbol{r}) \qquad (A.42)$$

この $U_2(\boldsymbol{r})$ は spinor の結合が $U_1(\boldsymbol{r})$ とは異なるので難解である。よって次ではとりあえず $U_1(\boldsymbol{r})$ についてのみ考察し、$U_2(\boldsymbol{r})$ については最終的な結果のみ示すにとどめる。

A.4 Nonrelativistic Reduction

4 成分を持つ Dirac 方程式の非相対論的極限では、2 成分の Pauli 方程式に帰着することができる。ここでは粒子・反粒子系を表現する 16 成分の Bethe-Salpeter Equation を、Foldy-Wouthuysen による方法で簡単にしていこう。

まず、3 次元表現での Bethe-Salpeter Equation の Hamiltonian を次の形で表現しよう。

$$H \;=\; \beta^{(1)}m_1 - \beta^{(2)}m_2 + (\mathcal{EE}) + (\mathcal{EO}) + (\mathcal{OE}) + (\mathcal{OO}) \qquad (A.43)$$

ここで $\mathcal{E}$、$\mathcal{O}$ はそれぞれ Even Operator、Odd Operator と呼ばれる表現である。$\mathcal{E}$ は Dirac Spinor の上下 2 成分が混合しない演算子の総称であり、β、$\mathbf{1}$ などがこれにあたる。一方、$\mathcal{O}$ は混合する演算子の総称であり、$\boldsymbol{\alpha}$、γ などがこれにあたる。また

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \;=\; \boldsymbol{\alpha}\otimes\mathbf{1} \;\;,\;\; \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \;=\; \mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\alpha}$$

と定義する。ここで、Hamiltonian から Odd Operator を消し去る正準変換 (Foldy-Wouthuysen 正準変換) を行うと、

$$\begin{aligned}H' &= {U_F}^{-1}HU_F \\ &= \beta^{(1)}m_1 - \beta^{(2)}m_2 + (\mathcal{EE}) + \frac{\beta^{(1)}}{2m_1}(\mathcal{OE})^2 - \frac{\beta^{(2)}}{2m_2}(\mathcal{EO})^2 \\ &\quad -\frac{\beta^{(1)}}{8{m_1}^3}(\mathcal{OE})^4 + \frac{\beta^{(2)}}{8{m_2}^3}(\mathcal{EO})^4 + \frac{1}{8{m_1}^2}\Big[[(\mathcal{OE}),(\mathcal{EE})],(\mathcal{OE})\Big] + \frac{1}{8{m_2}^2}\Big[[(\mathcal{EO}),(\mathcal{EE})],(\mathcal{EO})\Big] \\ &\quad -\frac{\beta^{(1)}\beta^{(2)}}{4m_1m_2}\Big\{\{(\mathcal{OE}),(\mathcal{OO})\},(\mathcal{EO})\Big\} + \frac{\beta^{(1)}-\beta^{(2)}}{4(m_1+m_2)}(\mathcal{OO})^2 + \cdots \qquad (A.44)\end{aligned}$$

となる。これを具体的な演算子で書き換えよう。

今、3 次元表現の Bethe-Salpeter Equation は次の形で与えられる。

$$\left\{E - H^{\rm ele}(-i\nabla) - H^{\rm posi}(i\nabla)\right\}_{\rho\lambda\nu\tau}\phi_{\nu\tau}(\boldsymbol{r}) \quad = \quad U_{1\,\rho\lambda\nu\tau}(\boldsymbol{r})\phi_{\nu\tau}(\boldsymbol{r}) \tag{A.45}$$

ここで $U_1(\boldsymbol{r})$、$H^{\rm ele}$、$H^{\rm posi}$ はそれぞれ Breit Interaction、電子の Hamiltonian、陽電子の Hamiltonian であり、以下の形で表される。なお、Virtual Annihilation Term $U_2(\boldsymbol{r})$ は複雑であるのでここでは触れず、最後に結果だけ示す。

$$\begin{aligned}
U_{1\,\rho\lambda\nu\tau}(\boldsymbol{r}) &= -\alpha\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2r}\Big(\boldsymbol{\alpha}_{\rho\nu}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\tau\lambda} + \frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})_{\rho\nu}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})_{\tau\lambda}}{r^2}\Big)\right] && \text{(A.46)}\\
H^{\rm ele}_{\rho\nu}(\boldsymbol{p}) &= (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})_{\rho\nu} + \beta_{\rho\nu}m && \text{(A.47)}\\
H^{\rm posi}_{\tau\lambda}(\boldsymbol{p}) &= (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})_{\tau\lambda} - \beta_{\tau\lambda}m && \text{(A.48)}
\end{aligned}$$

但し $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ とする。これは微細構造定数と呼ばれる。これを書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
H_{\rho\lambda\nu\tau}\phi_{\nu\tau}(\boldsymbol{r}) &= \Big\{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})_{\rho\nu} - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})_{\tau\lambda} + \beta_{\rho\nu}m - \beta_{\tau\lambda}m\\
&\qquad - \frac{\alpha}{r}\big[\mathbf{1} - \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\alpha}_{\rho\nu}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\tau\lambda} + \frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})_{\rho\nu}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})_{\tau\lambda}}{r^2}\Big)\big]\Big\}\phi_{\nu\tau}(\boldsymbol{r})\\
&= E\phi_{\rho\lambda}(\boldsymbol{r}) && \text{(A.49)}
\end{aligned}$$

この時 Hamiltonian の中にある様々なタイプの even operator、odd operator は次のように当てはめる事ができる。

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}\mathcal{E}) &= -\frac{\alpha}{r}\,\mathbf{1}\\
(\mathcal{E}\mathcal{O}) &= -(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})_{\tau\lambda}\\
(\mathcal{O}\mathcal{E}) &= +(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})_{\rho\nu}\\
(\mathcal{O}\mathcal{O}) &= +\frac{\alpha}{2r}\left[\boldsymbol{\alpha}_{\rho\nu}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\tau\lambda} + \frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})_{\rho\nu}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})_{\tau\lambda}}{r^2}\right]
\end{aligned}$$

ここで $\beta_{\rho\nu}\to\mathbf{1}_{2\times2}$、$\beta_{\tau\lambda}\to\mathbf{1}_{2\times2}$、$\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\sigma}$ とすることにより、波動関数は 2 成分を持った Pauli Spinor となる。従って表式 (A.49) は一般化された Pauli 方程式として、

$$\begin{aligned}
H^{\rm Pauli}\psi(\boldsymbol{r}) &= E\psi(\boldsymbol{r}) && \text{(A.50)}\\
H^{\rm Pauli} &\equiv H_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 && \text{(A.51)}
\end{aligned}$$

が得られる。但し

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} - \frac{\alpha}{r}\\
V_1 &= -\frac{1}{4m^3}\boldsymbol{p}^4\\
V_2 &= -\frac{\alpha}{2m^2}\left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r} + \boldsymbol{r}\cdot\big(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{p}\big)\boldsymbol{p}\right] + \frac{\pi\alpha}{m^2}\delta^3(\boldsymbol{r})\\
V_3 &= \frac{3\alpha}{4m^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{p}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\rm ele)} + \boldsymbol{\sigma}^{(\rm posi)}\right)\\
V_4 &= -\frac{\alpha}{4m^2}\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(\rm ele)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(\rm posi)}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}^{(\rm ele)}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}^{(\rm posi)}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\Big(\boldsymbol{\sigma}^{(\rm ele)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(\rm posi)}\Big)\delta^3(\boldsymbol{r})\right]
\end{aligned}$$

である。V_i ($i = 1, 2, \cdots, 4$) は H_0 の摂動として与えられる。

さらに電子・陽電子の Virtual Annihilation Term $U_2(\boldsymbol{r})$ も考慮に入れたときに追加される摂動 V_5 は

$$V_5 = \frac{\pi\alpha}{2m^2}\big(3+\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{ele})}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{posi})}\big)\delta^3(\boldsymbol{r})$$

で与えられる。

基底状態における H_0 の固有値 $\langle H_0\rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle H_0\rangle &= \int \psi(\boldsymbol{r})^\dagger H_0\psi(\boldsymbol{r})\ d^3r \\ &= -\frac{1}{4}m\alpha^2 \end{aligned} \tag{A.52}$$

で与えられる。ここでは Bohr 半径を a_0 とした電子密度を

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi(2a_0)^3}$$

としている。また V_i によるエネルギー固有値のずれを ΔE とすると、p-Ps における ΔE_S は

$$\begin{aligned}\Delta E_S &= \langle(V_1+V_2+V_3+V_4+V_5)\rangle_S \\ &= -\frac{1}{64}m\alpha^4+0+0-\frac{1}{4}m\alpha^4+0\end{aligned} \tag{A.53}$$

であり、o-Ps における ΔE_T は

$$\begin{aligned}\Delta E_T &= \langle(V_1+V_2+V_3+V_4+V_5)\rangle_T \\ &= -\frac{1}{64}m\alpha^4+0+0+\frac{1}{12}m\alpha^4+\frac{1}{4}m\alpha^4\end{aligned} \tag{A.54}$$

となる。これにより、$\mathcal{O}(\alpha^4)$ でのエネルギー固有値のずれ、すなわち Hyperfine Structure ΔW は

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta E_T-\Delta E_S \\ &= \frac{1}{4}m\alpha^4\left(\frac{7}{3}\right)\end{aligned} \tag{A.55}$$

となる。Karplus - Klein (1952) によるとこれより高い $\mathcal{O}(\alpha^5)$ の精度での理論計算が導かれる。これによると、摂動による固有値のずれは

$$\Delta E = \frac{2\pi\alpha}{m^2}|\psi(0)|^2\left\{\frac{1}{3}\left\langle\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{ele})}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{posi})}\right\rangle\left[1-\frac{\alpha}{2\pi}\right]+\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{S}^2\rangle\left[1-(\frac{26}{9}+2\ln 2)\frac{\alpha}{\pi}\right]\right\} \tag{A.56}$$

となる。これによる Hyperfine Structure は

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta E_T-\Delta E_S \\ &= \frac{1}{4}m\alpha^4\left\{\frac{7}{3}-(\frac{32}{9}+2\ln 2)\frac{\alpha}{\pi}\right\}\end{aligned} \tag{A.57}$$

となる。

Appendix B

The Annihilation Rate of Positronium

我々が行う実験では磁場による Positronium の遷移を扱うことになる。この時の遷移の割合など、重要なところでは Positronium の寿命 (もしくは崩壊確率) が常に現れてくる。ここではその Positronium Annihilation Rate を理論的に導くのを目的とする。なお、このテーマはほとんど全て P2_97 Positronium 班の卒業研究「Positronium の寿命の測定」で述べられているものである。

B.1 Selection Rule

荷電共役演算子 $\mathcal{C}$ の、電子場 $\psi(x)$、光子場 $A_\mu(x)$ への作用を次式で定義する。

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = i\gamma_2\overline{\psi}^T(x) \tag{B.1}$$

$$\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = -A_\mu(x) \tag{B.2}$$

この定義により QED のラグランジアン $\mathcal{L}$ は $\mathcal{C}$ 不変となる。光子、電子、陽電子の生成演算子 $a^\dagger_\mu(\boldsymbol{p})$、$b^\dagger(\boldsymbol{p},s)$、$d^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ に対する作用に書き換えると次のようになる。

$$\mathcal{C}a^\dagger_\mu(\boldsymbol{p})\mathcal{C}^{-1} = -a^\dagger_\mu(\boldsymbol{p}) \tag{B.3}$$

$$\mathcal{C}b^\dagger(\boldsymbol{p},s)\mathcal{C}^{-1} = d^\dagger(\boldsymbol{p},s) \tag{B.4}$$

$$\mathcal{C}d^\dagger(\boldsymbol{p},s)\mathcal{C}^{-1} = b^\dagger(\boldsymbol{p},s) \tag{B.5}$$

まず n 個の光子がある状態に対して $\mathcal{C}$ の固有値を求めよう。この状態は

$$\mid n\gamma \rangle = a^\dagger_{\mu_1}(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger_{\mu_2}(\boldsymbol{p}_2)\cdots a^\dagger_{\mu_n}(\boldsymbol{p}_n)\mid 0 \rangle \tag{B.6}$$

と書けるので、

$$\mathcal{C} \mid n\gamma \rangle = (-1)^n \mid n\gamma \rangle \tag{B.7}$$

となる。

次に、全軌道角運動量 L, M 全 Spin S, S_z の状態を持つ Ps を考えると、非相対論的極限における 2 つの完全系 (角運動量固有状態と運動量固有状態の完全系) を使って

$$\begin{aligned}\mid LM, SS_z; \mathrm{Ps} \rangle = \sum \mid \boldsymbol{p}_1, s_{1z}; \boldsymbol{p}_2, s_{2z} \rangle\langle \boldsymbol{p}_1, s_{1z}; \boldsymbol{p}_2, s_{2z} \mid L_1, M_1, s_{1z}; L_2, M_2, s_{2z} \rangle \\ \times\langle L_1, M_1, s_{1z}; L_2, M_2, s_{2z} \mid LM, (L_1L_2), SS_z; \mathrm{Ps} \rangle\end{aligned} \tag{B.8}$$

と書ける。ここで

$$\mid \boldsymbol{p}_1, s_{1z}; \boldsymbol{p}_2, s_{2z} \rangle = b^\dagger(\boldsymbol{p}_1, s_1)d^\dagger(\boldsymbol{p}_2, s_2)\mid 0 \rangle \tag{B.9}$$

としている。また Summation については $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, s_{1z}, s_{2z}, L_1, L_2, M_1, M_2$ についての和を表している。この表式に荷電共役演算子 $\mathcal{C}$ を作用させると

$$\mathcal{C} \mid LM, SS_z; \mathrm{Ps} \rangle = \sum \mathcal{C} \mid \boldsymbol{p}_1, s_{1z}; \boldsymbol{p}_2, s_{2z} \rangle\langle \boldsymbol{p}_1, s_{1z}; \boldsymbol{p}_2, s_{2z} \mid L_1, M_1, s_{1z}; L_2, M_2, s_{2z} \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&\times\langle\ L_1, M_1, s_{1z}; L_2, M_2, s_{2z} \mid LM, (L_1L_2), SS_z; \mathrm{Ps}\ \rangle \\
= &\sum(-1)|\ \boldsymbol{p}_2, s_{2z}; \boldsymbol{p}_1, s_{1z}\ \rangle\langle\ \boldsymbol{p}_1, s_{1z}; \boldsymbol{p}_2, s_{2z} \mid L_1, M_1, s_{1z}; L_2, M_2, s_{2z}\ \rangle \\
&\times\langle\ L_1, M_1, s_{1z}; L_2, M_2, s_{2z} \mid LM, (L_1L_2), SS_z; \mathrm{Ps}\ \rangle \\
= &\sum(-1)|\ \boldsymbol{p}_1, s_{1z}; \boldsymbol{p}_2, s_{2z}\ \rangle\langle\ \boldsymbol{p}_2, s_{2z}; \boldsymbol{p}_1, s_{1z} \mid L_2, M_2, s_{2z}; L_1, M_1, s_{1z}\ \rangle \\
&\times\langle\ L_2, M_2, s_{2z}; L_1, M_1, s_{1z} \mid LM, (L_2L_1), SS_z; \mathrm{Ps}\ \rangle \\
= &\sum(-1)^{L-L_1-L_2+S}|\ \boldsymbol{p}_1, s_{1z}; \boldsymbol{p}_2, s_{2z}\ \rangle\langle\ \boldsymbol{p}_1, s_{1z}; \boldsymbol{p}_2, s_{2z} \mid L_1, M_1, s_{1z}; L_2, M_2, s_{2z}\ \rangle \\
&\times\langle\ L_1, M_1, s_{1z}; L_2, M_2, s_{2z} \mid LM, (L_1L_2), SS_z; \mathrm{Ps}\ \rangle \qquad \text{(B.10)}
\end{aligned}
$$

となる。ここでの変形は、和をとる文字の交換と、Clebsch-Goldan 係数の性質

$$
\langle\ J_2J_{2z}; J_1J_{1z} \mid JJ_z(J_2J_1)\ \rangle \quad = \quad (-1)^{J-J_1-J_2}\langle\ J_1J_{1z}; J_2J_{2z} \mid JJ_z(J_1J_2)\ \rangle \qquad \text{(B.11)}
$$

を用いている。よって $L=0$ のとき（ $L_1=L_2$ しか和に効いてこない ）$(-1)^{L-L_1-L_2+S}=(-1)^S$ となり和に無関係になるので、

$$
\mathcal{C}\mid L=0M=0, SS_z; \mathrm{Ps}\ \rangle \quad = \quad (-1)^S|\ L=0M=0, SS_z; \mathrm{Ps}\ \rangle \qquad \text{(B.12)}
$$

となる。

以上より、$L=0, S=0$ の Singlet-Ps は奇数個の光子には崩壊できず、$L=0, S=1$ の Triplet-Ps は偶数個の光子には崩壊できないことがわかる。

実際の主な崩壊モードは

$$
\begin{aligned}
\text{singlet-Ps} &\rightarrow 2\gamma \\
\text{triplet-Ps} &\rightarrow 3\gamma
\end{aligned}
$$

である。

B.2 The Annihilation Rate of Singlet-Ps

特に断らない限り自然単位系 $(\hbar=c=1)$ を使う。

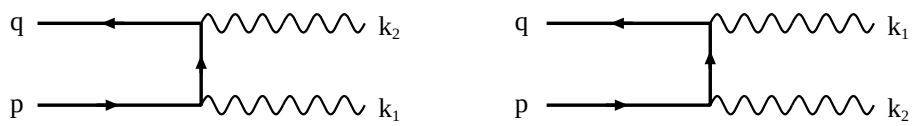


FIGURE B.1: Feynman diagram of 2 γ decay

Figure B.1 の不変散乱振幅を $\mathcal{M}$ とする。このときこの不変散乱振幅は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \quad = \quad & \overline{v}_{(\boldsymbol{q},s_q)}e\gamma^\nu\varepsilon^*_{\nu(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)}\frac{\not{p}-\not{k}_1+m}{(p-k_1)^2-m^2}\varepsilon^*_{\mu(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)}e\gamma^\mu u_{(\boldsymbol{p},s_p)} \\
& +\overline{v}_{(\boldsymbol{q},s_q)}e\gamma^\nu\varepsilon^*_{\nu(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)}\frac{\not{p}-\not{k}_2+m}{(p-k_2)^2-m^2}\varepsilon^*_{\mu(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)}e\gamma^\mu u_{(\boldsymbol{p},s_p)} \qquad \text{(B.13)}
\end{aligned}
$$

で与えられる。

散乱断面積を求め、そこから崩壊確率を導くためには $\mathcal{M}^2$ を計算する必要があるが、始状態については電子・陽電子の Spin については平均化し、終状態の光子については和をとった $\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum \mathcal{M}^*\mathcal{M}$ を求めればよい。(ここで本当は束縛状態についての計算なので散乱問題としては解けないのだが、束縛状態を波動関数と自由場の演算子で表すため、結局同じ扱いとなる。また Ensamble として全て同じ Spin 状態の Ps を用意することはできず、それを考慮して計算したものと単に平均化したものは同じ結果を出す。)
光子についての Spin 和は

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma_1} \varepsilon^*_{\mu(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)}\varepsilon_{\nu(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)} &= -g_{\mu\nu} \\ \sum_{\sigma_2} \varepsilon^*_{\mu(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)}\varepsilon_{\nu(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)} &= -g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

であり、電子・陽電子の Spin 和については以下の完全系を用いる。

$$\begin{aligned}\sum_{s_p} u_{(\boldsymbol{p},s_p)}\overline{u}_{(\boldsymbol{p},s_p)} &= (\not{p} + m) \\ \sum_{s_q} v_{(\boldsymbol{q},s_q)}\overline{v}_{(\boldsymbol{q},s_q)} &= (\not{q} - m)\end{aligned}$$

これらを用いることにより

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4\left\{\left(\frac{p\cdot k_2}{p\cdot k_1}+\frac{p\cdot k_1}{p\cdot k_2}\right)+\left(\frac{2m^2}{p\cdot k_1}+\frac{2m^2}{p\cdot k_2}\right)-\left(\frac{m^2}{p\cdot k_1}+\frac{m^2}{p\cdot k_2}\right)^2\right\} \tag{B.14}$$

となる。微分断面積 $d\sigma$ は

$$d\sigma = \prod_{i=1}^{2}\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i}\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\sqrt{(p\cdot q)^2-m^4}}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p-q) \tag{B.15}$$

と与えられるので、$k_i = (\omega_i, \boldsymbol{k}_i)\ (i=1,2)$ と表すことにすると、散乱断面積 σ は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \int d\sigma \\ &= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2}\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\sqrt{(p\cdot q)^2-m^4}}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p-q) \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2\int d^3k_1 d^3k_2\,\frac{\delta^4(k_1+k_2-p-q)}{\omega_1\omega_2\sqrt{(p\cdot q)^2-m^4}} \\ &\qquad\times\left\{\left(\frac{p\cdot k_2}{p\cdot k_1}+\frac{p\cdot k_1}{p\cdot k_2}\right)+\left(\frac{2m^2}{p\cdot k_1}+\frac{2m^2}{p\cdot k_2}\right)-\left(\frac{m^2}{p\cdot k_1}+\frac{m^2}{p\cdot k_2}\right)^2\right\}\end{aligned} \tag{B.16}$$

α は微細構造定数である。ここで電子が静止している系 (実験室系) で考えると、$p=(m,0)$、$q=(m\gamma,\boldsymbol{q})$ となるので、

$$p\cdot k_1 = m\omega_1 \quad , \quad p\cdot q = m^2\gamma$$

となる。これより散乱断面積は

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}\alpha^2\int d\omega_1 d\Omega\ {\omega_1}^2\frac{\delta(\omega_1+\omega_2-m-m\gamma)}{\omega_1\omega_2 m^2\beta\gamma} \\ &\qquad\times\left\{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)+2m\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)-\left(\frac{m}{\omega_1}+\frac{m}{\omega_2}\right)^2\right\}\end{aligned} \tag{B.17}$$

となる。ここで δ^3 の計算を行うと、$\omega_2 = |\boldsymbol{q} - \boldsymbol{k}_1|$ となる。また β は $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{q}/m\gamma$ で定まるベクトルの絶対値である。

さらに陽電子も非相対論的極限 ($\gamma \simeq 1$) で扱うことができるから容易に

$$\sigma \quad = \quad \frac{\pi {r_0}^2}{\beta}$$

を得る。但し上の式では k_i の置換の数 2! を考慮して 2 で割っており、$r_0 = e^2/(4\pi m)$ は古典電子半径とした。

さらに、崩壊確率 (Annihilation Rate) λ_p は媒質中で陽電子と 1^1S_0 束縛状態 (p-Ps) を形成することができる電子密度 ρ を用いて

$$\lambda_p \quad = \quad \sigma\beta\rho \quad = \quad \pi {r_0}^2 \rho \tag{B.18}$$

と書ける。理想的に Ps が真空中に一個だけある場合を想定して、電子密度 ρ を $\rho = |\psi_1(0)|^2$ (ψ_1 は Ps の $^1S_0$ 状態の波動関数) をとると、a_0 を Bohr 半径として、

$$|\psi_1(0)|^2 \quad = \quad \frac{1}{\pi(2a_0)^3}$$

となる。従って崩壊確率 λ_p は

$$\begin{aligned} \lambda_p \quad &= \quad \frac{\pi {r_0}^2}{\beta} \frac{\beta}{\pi(2a_0)^3} \\ &= \quad \frac{\alpha^4 c}{2a_0} \quad = \quad \frac{1}{2}\alpha^5 \frac{mc^2}{\hbar} \\ &= \quad 0.805 \times 10^{10} \ \ \mathrm{sec}^{-1} \end{aligned} \tag{B.19}$$

となる。

B.3 The Annihilation Rate of Triplet-Ps

先程に引き続き自然単位系を使用する。

Triplet-Ps の不変散乱振幅は Figure B.2 に与えられたとおり 6 通りある。不変散乱振幅を $\mathcal{M}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \quad = \quad & e^3 \overline{v}_{(\boldsymbol{p}_2,s_2)} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_3,\sigma_3)} \frac{\not{k}_3 - \not{p}_2 + m}{(k_3 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)} \frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 + m}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)} u_{(\boldsymbol{p}_1,s_1)} \\ & + e^3 \overline{v}_{(\boldsymbol{p}_2,s_2)} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)} \frac{\not{k}_2 - \not{p}_2 + m}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_3,\sigma_3)} \frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 + m}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)} u_{(\boldsymbol{p}_1,s_1)} \\ & + e^3 \overline{v}_{(\boldsymbol{p}_2,s_2)} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)} \frac{\not{k}_1 - \not{p}_2 + m}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_3,\sigma_3)} \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)} u_{(\boldsymbol{p}_1,s_1)} \\ & + e^3 \overline{v}_{(\boldsymbol{p}_2,s_2)} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)} \frac{\not{k}_1 - \not{p}_2 + m}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)} \frac{\not{p}_1 - \not{k}_3 + m}{(p_1 - k_3)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_3,\sigma_3)} u_{(\boldsymbol{p}_1,s_1)} \\ & + e^3 \overline{v}_{(\boldsymbol{p}_2,s_2)} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)} \frac{\not{k}_2 - \not{p}_2 + m}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)} \frac{\not{p}_1 - \not{k}_3 + m}{(p_1 - k_3)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_3,\sigma_3)} u_{(\boldsymbol{p}_1,s_1)} \\ & + e^3 \overline{v}_{(\boldsymbol{p}_2,s_2)} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_3,\sigma_3)} \frac{\not{k}_1 - \not{p}_2 + m}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)} \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}^*_{(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)} u_{(\boldsymbol{p}_1,s_1)} \end{aligned} \tag{B.20}$$

となる。前のセクションと同様にして始状態の Spin については平均化し、終状態については和をとることで $\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum \mathcal{M}^*\mathcal{M}$ を計算し、微分断面積

$$d\sigma \quad = \quad \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{{(2\pi)}^3 2\omega_i} \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4}} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 - p_1 - p_2) \tag{B.21}$$

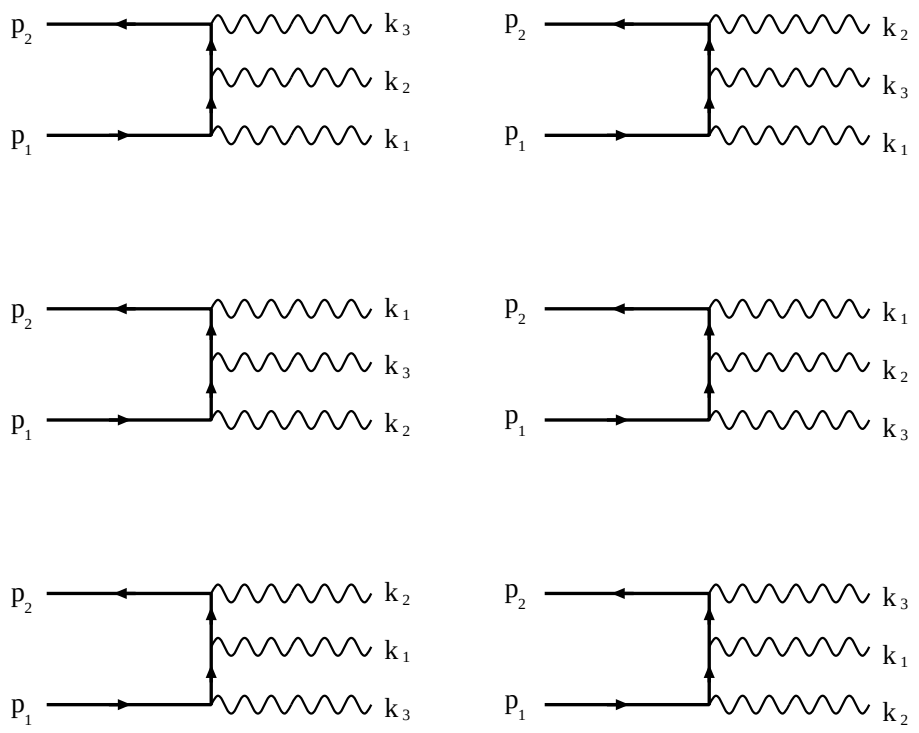


FIGURE B.2: Feynman diagram of 3 γ decay

を求めたい。電子・陽電子がともに静止している系 (実験室系) では

$$p_1 \cdot k_i \;=\; m\omega_i \quad , \quad p_1 \cdot p_2 \;=\; m^2$$

のように簡単にすることができるので

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \;=\; \left(\frac{4e^3}{m\omega_1\omega_2\omega_3}\right)^2 \sum_{i=1}^{3} {\omega_i}^2 (m-\omega_i)^2 \tag{B.22}$$

となる。ここで関係式として

$$\frac{d\Omega_2}{4\pi} \;=\; \frac{m(m-\omega_1)}{\omega_1\omega_2}\frac{d\omega_2}{\omega_2}$$

を用いて散乱断面積を計算すると

$$\begin{aligned}\sigma \;&=\; \frac{8\alpha {r_0}^2}{\beta}\int_0^m d\omega_1 \int_{m-\omega_1}^{m} d\omega_2 \sum_{(ijk):\mathrm{cyclic}(123)} \left(\frac{m-\omega_i}{\omega_j\omega_k}\right)^2 \\ &=\; \frac{8\alpha {r_0}^2}{\beta}(\pi^2-9)\end{aligned} \tag{B.23}$$

が得られる。また o-Ps には 3 つの状態が存在するのでこの散乱断面積は $\sigma \to \frac{1}{3}\sigma$ と置き換えられる。

最後に k_i の置換の数 3! を考慮して上式を 6 で割ると

$$\sigma \;=\; \frac{4}{9}\frac{\alpha {r_0}^2}{\beta}(\pi^2-9) \tag{B.24}$$

となる。

この時の崩壊確率 λ_o は媒質中で陽電子と ${}^3S_1$ 束縛状態 (o-Ps) を形成することができる電子密度 ρ を用いて

$$\lambda_o = \frac{4}{9}\alpha(\pi^2-9){r_0}^2\rho \tag{B.25}$$

と書くことができる。前のセクションでの表式 (B.18) と表式 (B.25) より、

$$\begin{aligned}\lambda_o &= 4\alpha\left(\frac{\pi^2-9}{9\pi}\right)\lambda_p = 2\alpha^6\frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{\pi^2-9}{9\pi}\right)\\ &= 0.723\times10^7 \ \ \mathrm{sec}^{-1}\end{aligned} \tag{B.26}$$

が最終的に求められる。

Appendix C

Theory of Experiment

ここでは実際に Positronium Hyperfine Structure を測定するために必要と思われる理論を展開する。主に使われる理論は非相対論的量子力学であるが、粒子の崩壊についても考慮に入れた摂動計算を行う必要がある。最終的には測定と直接関わってくる Resonance Line Shape (共鳴曲線) を導出する。

C.1 Spin Eigenstates of Positronium

Positronium (Ps) は電子・陽電子の束縛状態であるが、電子・陽電子の Spin を考慮すると、Ground State には Spin-Triplet と Spin-Singlet の固有状態が考えられる。それらをまとめて

$$| S, m \rangle \tag{C.1}$$

と表す。ここで Spin-Triplet は $S = 1, m = \pm 1, 0$、Spin-Singlet は $S = 0, m = 0$ である。

Hamiltonian を H_0 とすると

$$H_0 | 0, 0 \rangle = W_0 | 0, 0 \rangle \tag{C.2}$$

$$H_0 | 1, m \rangle = W_1 | 1, m \rangle \tag{C.3}$$

とする ($m = \pm 1, 0$)。この差 $\Delta W = W_1 - W_0$ を、Hyperfine Structure と言う。$\Delta W = 2\pi\hbar\Delta\nu$ としてこの $\Delta\nu$ を理論計算する。 先に扱った量子電磁力学によればこの値は

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \frac{1}{4}\alpha^4 mc^2 \left[\frac{7}{3} - \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{32}{9} + 2\ln 2\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right] \\ &= 2.03381 \times 10^2 \ \text{GHz} \end{aligned} \tag{C.4}$$

となる。過去の論文によると、さらに高次の摂動計算を行うことで

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \frac{1}{4}\alpha^4 mc^2 \left[\frac{7}{3} - \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{32}{9} + 2\ln 2\right) + \frac{5}{6}\alpha^2 \ln \alpha^{-1} - 0.64\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3) \right] \\ &= 2.033958 \times 10^2 \ \text{GHz} \end{aligned}$$

となることがわかっている。

C.2 Eigenstates on Static Magnetic Field

静磁場 $\boldsymbol{B}_0 = \hat{z} B_0$ が存在する時の Hamiltonian $\mathcal{H}_0$ は

$$\mathcal{H}_0 = H_0 - \boldsymbol{\mu}_+ \cdot \boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{\mu}_- \cdot \boldsymbol{B}_0 \tag{C.5}$$

となる。但し

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_+ &= g\mu_{e^+}\boldsymbol{S}_+ = g'\mu_B \boldsymbol{S}_+ = \frac{1}{2} g'\mu_B \boldsymbol{\sigma}_+ \\ \boldsymbol{\mu}_- &= g\mu_{e^-}\boldsymbol{S}_- = -g'\mu_B \boldsymbol{S}_- = -\frac{1}{2} g'\mu_B \boldsymbol{\sigma}_- \\ g' &= g\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328\,(\frac{\alpha}{\pi})^2 \right) = 2\,(\,1.0011596\,) \end{aligned}$$

である。ここで μ_B は Bohr 磁子と呼ばれる量であり、$\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列である。$x = 2g'\mu_B B_0/\Delta W$ を導入すると Hamiltonian は次の様に表される。

$$\mathcal{H}_0 \quad = \quad H_0 + \frac{1}{4}\Delta W x \left({\sigma_z}^- - {\sigma_z}^+\right) \tag{C.6}$$

この時、

$$\mathcal{H}_0 |\ \psi_{S,m}\ \rangle \quad = \quad E_{S,m} |\ \psi_{S,m}\ \rangle$$

を満たすエネルギー固有状態とその固有値である $|\ \psi_{S,m}\ \rangle$ と $E_{S,m}$ を求めると、以下のようになる。

$$|\ \psi_{1,\pm 1}\ \rangle \quad = \quad |\ 1, \pm 1\ \rangle \ , \quad E_{1,\pm 1} \quad = \quad W_1 \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned} |\ \psi_{1,0}\ \rangle \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \{|\ 0,0\ \rangle + y |\ 1,0\ \rangle\} \\ E_{1,0} \quad &= \quad \frac{1}{2}\left\{(W_1 + W_0) + \Delta W \sqrt{1+x^2}\right\} \quad \equiv E_+ \end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned} |\ \psi_{0,0}\ \rangle \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \{|\ 0,0\ \rangle - z |\ 1,0\ \rangle\} \\ E_{0,0} \quad &= \quad \frac{1}{2}\left\{(W_1 + W_0) - \Delta W \sqrt{1+x^2}\right\} \quad \equiv E_- \end{aligned} \tag{C.9}$$

ただしここで

$$\begin{aligned} y \quad &= \quad \frac{1}{x}\left\{\sqrt{1+x^2} + 1\right\} \\ z \quad &= \quad \frac{1}{x}\left\{\sqrt{1+x^2} - 1\right\} \end{aligned}$$

である。

$S = 1$ での $m = 0$ 状態と $m = \pm 1$ 状態のエネルギー差 $\Delta E = E_+ - W_1$ は次の様になる。

$$\begin{aligned} \Delta E \quad \equiv \quad 2\pi\hbar f_{01} \quad &= \quad \frac{1}{2}\left\{\ (W_1 + W_0) + \Delta W \sqrt{1+x^2} - 2W_1\ \right\} \\ &= \quad \frac{1}{2}\Delta W \left\{\sqrt{1+x^2} - 1\right\} \end{aligned} \tag{C.10}$$

よって、f_{01} と x がわかれば、ΔW、つまり *Hyperfine Structure* がわかることになる。

C.3 The Annihilation Rate on Static Magnetic Field

崩壊過程においては Selection Rule によって光子の生成が異なる。p-Ps ($S = 0$) は 2γ 崩壊、o-Ps ($S = 1$) は 3γ 崩壊である。p-Ps から 2γ への崩壊確率 (Annihilation Rate) を λ_p として表す。先のセクションでの表式 (B.19) より、

$$\begin{aligned} \lambda_p \quad &= \quad \frac{1}{2}\alpha^5 \frac{mc^2}{\hbar} \\ &= \quad 0.805 \times 10^{10}\ \mathrm{sec}^{-1} \end{aligned} \tag{C.11}$$

となる。同様にして o-Ps から 3γ への崩壊確率は 表式 (B.26) より、

$$\begin{aligned} \lambda_o \quad &= \quad 2\alpha^6 \frac{mc^2}{\hbar}\left(\ \frac{\pi^2 - 9}{9\pi}\ \right) \\ &= \quad 0.723 \times 10^7\ \mathrm{sec}^{-1} \end{aligned} \tag{C.12}$$

である。

静磁場がかかっている時の Annihilation Rate $\lambda_{S,m}$ は、表式 (C.7) (C.8) (C.9) より、次の様になる。

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,1} &= \lambda_{1,-1} = \lambda_o \\
\lambda_{1,0} &= \frac{1}{1+y^2}\lambda_p + \frac{y^2}{1+y^2}\lambda_o \equiv \lambda_{10,2} + \lambda_{10,3} \\
\lambda_{0,0} &= \frac{1}{1+z^2}\lambda_p + \frac{z^2}{1+z^2}\lambda_o \equiv \lambda_{00,2} + \lambda_{00,3}
\end{aligned} \tag{C.13}$$

よって、$|\ \psi_{1,0}\ \rangle$ からの崩壊過程で、3γ が 2γ に比べて十分少なくするには

$$\frac{\lambda_{10,3}}{\lambda_{10,2}} \ll 1$$

とすればよい。また $|\ \psi_{0,0}\ \rangle$ からの 3γ も十分少なくしたいので

$$\frac{\lambda_{00,3}}{\lambda_{00,2}} \ll 1$$

とすればよい。この 2 つの条件を考察しよう。すると結局 $|\ \psi_{1,0}\ \rangle$ の条件と $|\ \psi_{0,0}\ \rangle$ の条件は同じものであり、

$$2\sqrt{1+x^2} \ll \left|\ \frac{\lambda_p}{\lambda_o}x^2 - (\ x^2+2\ )\ \right|$$

となることがわかる。これを整理すると

$$B_0 \gg \frac{\sqrt{\lambda_p\lambda_o}}{\lambda_p - \lambda_o}\frac{\Delta W}{g'\mu_B} = 0.21825\ \text{Tesla} \tag{C.14}$$

となる。実験ではこれを考慮して 0.8 Tesla の磁場が出る Magnetron を使用するので、この条件を満足している。またこの時、表式 (C.10) は

$$\Delta E \simeq \frac{1}{4}\Delta W x^2 \tag{C.15}$$

となる。

しかしこの静磁場の導入だけでは、$|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle$ からの 3γ 崩壊には何も作用させることができない。これを取り除くために $|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle$ を Microwave によって $|\ \psi_{1,0}\ \rangle$ や $|\ \psi_{0,0}\ \rangle$ に遷移させ、3γ 崩壊の過程を減少させよう。

C.4 States Translation by Microwave

Microwave による磁場を $\boldsymbol{B_1} = \hat{x}B_1\cos\omega t$ とおく時の Hamiltonian $\mathcal{H}(t)$ を次の様に表記する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t) &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'(t) \\
\mathcal{H}'(t) &= -\boldsymbol{\mu}_+ \cdot \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{\mu}_- \cdot \boldsymbol{B}_1 = \frac{1}{2}g'\mu_B B_1 \cos\omega t\left({\sigma_x}^- - {\sigma_x}^+\right)
\end{aligned} \tag{C.16}$$

この時の状態を Schrödinger 表示であることを示す添字 S を付けて $|\ \psi(t)\ \rangle_S$ と表し、Schrödinger 方程式に従うとすると、

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\ \psi(t)\ \rangle_S = \mathcal{H}(t)|\ \psi(t)\ \rangle_S \tag{C.17}$$

となる。

相互作用表示を次の式で導入する。

$$| \psi_{S,m}(t) \rangle_S = \exp(\frac{\mathcal{H}_0}{i\hbar}t)| \psi_{S,m}(t) \rangle_I \tag{C.18}$$

これより

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}| \psi(t) \rangle_I &= \mathcal{H}_I{}'(t)| \psi(t) \rangle_I \\ \mathcal{H}_I{}'(t) &= \exp(-\frac{\mathcal{H}_0}{i\hbar}t)\ \mathcal{H}'(t)\ \exp(\frac{\mathcal{H}_0}{i\hbar}t) \end{aligned} \tag{C.19}$$

と表すことができる。

$| \psi(t) \rangle_I$ を $| \psi_{S,m} \rangle$ の線型結合で表す。

$$| \psi(t) \rangle_I = \sum_{S,m} C_{S,m}(t)| \psi_{S,m} \rangle$$

これを表式 (C.19) に代入し、左から $\langle \psi_{L,n} |$ をかけてやると次の微分方程式を得る。

$$i\hbar\frac{d}{dt}C_{L,n}(t) = \sum_{S,m} C_{S,m}(t)\ \exp(\frac{E_{S,m}-E_{L,n}}{i\hbar}t)\ \langle \psi_{L,n} |\mathcal{H}'(t)| \psi_{S,m} \rangle$$

ここまでは遷移のことだけを考えてきた。実際には崩壊が起こるので、崩壊過程をこの微分方程式に付け加えよう。

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}C_{L,n}(t) &= -i\hbar\ (\frac{1}{2}\lambda_{L,n})C_{L,n}(t) \\ &\quad + \sum_{S,m} C_{S,m}(t)\ \exp(\frac{E_{S,m}-E_{L,n}}{i\hbar}t)\ \langle \psi_{L,n} |\mathcal{H}'(t)| \psi_{S,m} \rangle \end{aligned} \tag{C.20}$$

ではこの微分方程式に必要な行列要素 $\langle \psi_{L,n} |\mathcal{H}'(t)| \psi_{S,m} \rangle$ を計算してみよう。

表式 (C.7) (C.8) (C.9) より、以下が計算できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(t)| \psi_{0,0} \rangle &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}g'\mu_B B_1 \cos\omega t\ \left({\sigma_x}^- - {\sigma_x}^+\right)\Big\{| 0,0 \rangle - z| 1,0 \rangle\Big\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}g'\mu_B B_1 \cos\omega t\Big\{| 1,-1 \rangle - | 1,1 \rangle\Big\} \\ \mathcal{H}'(t)| \psi_{1,0} \rangle &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}g'\mu_B B_1 \cos\omega t\ \left({\sigma_x}^- - {\sigma_x}^+\right)\Big\{| 0,0 \rangle + y| 1,0 \rangle\Big\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}g'\mu_B B_1 \cos\omega t\Big\{| 1,-1 \rangle - | 1,1 \rangle\Big\} \\ \mathcal{H}'(t)| \psi_{1,1} \rangle &= \frac{1}{2}g'\mu_B B_1 \cos\omega t\ \left({\sigma_x}^- - {\sigma_x}^+\right)| 1,1 \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}g'\mu_B B_1 \cos\omega t| 0,0 \rangle \\ \mathcal{H}'(t)| \psi_{1,-1} \rangle &= \frac{1}{2}g'\mu_B B_1 \cos\omega t\ \left({\sigma_x}^- - {\sigma_x}^+\right)| 1,-1 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}g'\mu_B B_1 \cos\omega t| 0,0 \rangle \end{aligned}$$

以上より、行列要素 $\langle \psi_{L,n} |\mathcal{H}'(t)| \psi_{S,m} \rangle$ は次の様になる。

$$\langle \psi_{1,0} |\mathcal{H}'(t)| \psi_{1,\pm 1} \rangle = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}g'\mu_B B_1 \cos\omega t \tag{C.21}$$

$$\langle\ \psi_{0,0}\ |\mathcal{H}'(t)|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle \;=\; \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}g'\mu_B B_1\cos\omega t \tag{C.22}$$

$$\langle\ \psi_{1,1}\ |\mathcal{H}'(t)|\ \psi_{1,-1}\ \rangle \;=\; \langle\ \psi_{1,0}\ |\mathcal{H}'(t)|\ \psi_{0,0}\ \rangle \;=\; 0 \tag{C.23}$$

$$\langle\ \psi_{S,m}\ |\mathcal{H}'(t)|\ \psi_{S,m}\ \rangle \;=\; 0 \tag{C.24}$$

表式 (C.20) より全ての時間変化を記述する。

$$\frac{d}{dt}C_{0,0}(t) \;=\; -\frac{1}{2}\lambda_{0,0}C_{0,0}(t) - \alpha(z,t)C_{1,1}(t) + \alpha(z,t)C_{1,-1}(t) \tag{C.25}$$

$$\frac{d}{dt}C_{1,0}(t) \;=\; -\frac{1}{2}\lambda_{1,0}C_{1,0}(t) - \beta(y,t)C_{1,1}(t) + \beta(y,t)C_{1,-1}(t) \tag{C.26}$$

$$\frac{d}{dt}C_{1,1}(t) \;=\; -\frac{1}{2}\lambda_{o}C_{1,1}(t) + \alpha^*(z,t)C_{0,0}(t) + \beta^*(y,t)C_{1,0}(t) \tag{C.27}$$

$$\frac{d}{dt}C_{1,-1}(t) \;=\; -\frac{1}{2}\lambda_{o}C_{1,-1}(t) - \alpha^*(z,t)C_{0,0}(t) - \beta^*(y,t)C_{1,0}(t) \tag{C.28}$$

但しここで $\alpha(z,t)$、 $\beta(y,t)$ は以下の式で与えられる。

$$\alpha(z,t) \;=\; \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+z^2}}g'\mu_B B_1\cos\omega t\exp(\frac{W_1-E_-}{i\hbar}t)$$

$$\beta(y,t) \;=\; \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+y^2}}g'\mu_B B_1\cos\omega t\exp(\frac{W_1-E_+}{i\hbar}t)$$

さてここで実際に摂動計算を行うためにいくつかの近似を行う。
まず $|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle$ から $|\ \psi_{1,0}\ \rangle$ もしくは $|\ \psi_{0,0}\ \rangle$ へのそれぞれの遷移に対する考察を行う。

$$X \;=\; \frac{|\langle\ \psi_{1,0}\ |\mathcal{H}'(t)|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle|}{E_+ - W_1}$$

$$Y \;=\; \frac{|\langle\ \psi_{0,0}\ |\mathcal{H}'(t)|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle|}{W_1 - E_-}$$

とおく。これらはそれぞれ $|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle \to |\ \psi_{1,0}\ \rangle$ と $|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle \to |\ \psi_{0,0}\ \rangle$ の摂動による遷移振幅とみなすことができる。Microwave による摂動ではどちらがより大きく遷移するか調べようというのである。

$$\begin{aligned}\frac{X}{Y} \;&=\; \frac{W_1-E_-}{E_+-W_1}\frac{|\langle\ \psi_{1,0}\ |\mathcal{H}'(t)|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle|}{|\langle\ \psi_{0,0}\ |\mathcal{H}'(t)|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle|}\\ &=\; \frac{g'\mu_B B_0 y}{g'\mu_B B_0 z}\ \frac{g'\mu_B B_1\cos\omega t}{\sqrt{2}\sqrt{1+y^2}}\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+z^2}}{g'\mu_B B_1\cos\omega t}\\ &=\; \frac{y}{z}\ \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+y^2}}\\ &=\; \frac{1}{x}\left[\sqrt{1+x^2}+1\right] \;=\; y\end{aligned}$$

よって $B_0 = 0.8$ Tesla のとき

$$\frac{X}{Y} \;=\; y \;\simeq\; 9.176$$

となる。従って $|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle \to |\ \psi_{1,0}\ \rangle$ の遷移振幅が $X \simeq 10^{-1}$ のとき $|\ \psi_{1,\pm1}\ \rangle \to |\ \psi_{0,0}\ \rangle$ の遷移振幅は $Y \simeq 10^{-2}$ となり、後者が前者に比べて十分小さく、無視することが可能となる。また逆に $Y \simeq 10^{-1}$ としたときは $X \simeq 10^{0}$ となる。この状況はもはや摂動とは呼べない。

以上より Microwave による摂動の条件として、$X \ll 1$ が採用され、これによる近似として $|\ \psi_{0,0}\ \rangle$ への遷移は無視され、Microwave の磁場の大きさ B_1 に上限が与えられる。

次に表式中の三角関数を指数関数の形に直すことにより、摂動による共鳴項と非共鳴項があらわされるがそのうち非共鳴項を除く。これにより

$$\begin{aligned}\beta(y,t) &= \frac{1}{i\hbar}V\ \mathrm{e}^{i(\omega_{01}-\omega)t} \\ V &= \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+y^2}}g'\mu_B B_1 \\ \hbar\omega_{01} &= E_+ - W_1\end{aligned}$$

と簡略化する。

以上 2 つの近似により、微分方程式 (C.25) (C.26) (C.27) (C.28) は以下のようになる。

$$\frac{d}{dt}C_{0,0}(t) = -\frac{1}{2}C_{0,0}(t) \tag{C.29}$$

$$\frac{d}{dt}C_{1,0}(t) = -\frac{1}{2}C_{1,0}(t) - \frac{V}{i\hbar}\ \mathrm{e}^{i(\omega_{01}-\omega)t}\left\{C_{1,1}(t) - C_{1,-1}(t)\right\} \tag{C.30}$$

$$\frac{d}{dt}C_{1,1}(t) = -\frac{1}{2}\lambda_o C_{1,1}(t) - \frac{V}{i\hbar}\ \mathrm{e}^{i(\omega_{01}-\omega)t}\ C_{1,0}(t) \tag{C.31}$$

$$\frac{d}{dt}C_{1,1}(t) = -\frac{1}{2}\lambda_o C_{1,-1}(t) + \frac{V}{i\hbar}\ \mathrm{e}^{-i(\omega_{01}-\omega)t}\ C_{1,0}(t) \tag{C.32}$$

これを解くとこのようになる。ただし $\omega_{01}-\omega = \Delta\omega$ と書き直しておく。

$$C_{0,0}(t) = A_0\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda_{0,0}t} \tag{C.33}$$

$$C_{1,0}(t) = \frac{i\hbar}{2V}\left\{\delta_1 A_1\ \mathrm{e}^{-(\delta_1+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\ \ \mathrm{e}^{i\Delta\omega t} + \delta_2 A_2\ \mathrm{e}^{-(\delta_2+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\ \mathrm{e}^{i\Delta\omega t}\right\} \tag{C.34}$$

$$C_{1,1}(t) = A_3\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda_o t} + \frac{1}{2}\left\{A_1\ \mathrm{e}^{-(\delta_1+\frac{1}{2}\lambda_o)t} + A_2\ \mathrm{e}^{-(\delta_2+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\right\} \tag{C.35}$$

$$C_{1,-1}(t) = A_3\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda_o t} - \frac{1}{2}\left\{A_1\ \mathrm{e}^{-(\delta_1+\frac{1}{2}\lambda_o)t} + A_2\ \mathrm{e}^{-(\delta_2+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\right\} \tag{C.36}$$

各係数 $A_i\ (i=0,1,2,3)$ は初期条件に依存するもので、時間に依存しない定数である。また δ_1、δ_2 は以下で与えられている。

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\lambda_{1,0}-\lambda_o) + i\Delta\omega + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\lambda_{1,0}-\lambda_o)+i\Delta\omega\right]^2 - 8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2}\right\} \tag{C.37}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\lambda_{1,0}-\lambda_o) + i\Delta\omega - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\lambda_{1,0}-\lambda_o)+i\Delta\omega\right]^2 - 8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2}\right\} \tag{C.38}$$

また B_1 の上限を求めておこう。非共鳴項を除いた形で遷移振幅 X をあらわす。

$$X = \frac{1}{g'\mu_B B_0 z}\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+y^2}}g'\mu_B B_1\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}}{2}$$

この式により B_1 を B_0 と $|X|$ であらわすと

$$B_1 = 2z\sqrt{2}\sqrt{1+y^2}B_0|X|$$

となる。これより、$|X| \simeq 10^{-2}$ のときは

$$B_1 \simeq 200\ \text{Gauss} \tag{C.39}$$

となる。

C.5 Resonance Line Shape

それでは初期条件を決定することにより、それぞれの Ps がどういった確率で 2γ に崩壊するのかを調べてみよう。

1. $t=0$ で $|\ \psi_{0,0}\ \rangle$ 状態にある時

$$A_0 \ = \ 1\ ,\ A_1 \ = \ A_2 \ = \ A_3 \ = \ 0$$

よって $|\ \psi_{0,0}\ \rangle \to 2\gamma$ となる確率 $P_{0,0}$ は

$$\begin{aligned} P_{0,0} &= \int_0^\infty \lambda_{00,2}|C_{0,0}(t)|^2 dt \\ &= \frac{\lambda_{00,2}}{\lambda_{0,0}} \end{aligned} \tag{C.40}$$

2. $t=0$ で $|\ \psi_{1,0}\ \rangle$ 状態にある時

$$\begin{aligned} A_0 \ = \ 0\ ,\ \frac{i\hbar}{2V}\Big\{\delta_1 A_1 + \delta_2 A_2\Big\} \ &= \ 1 \\ A_3 \pm \frac{1}{2}\left\{A_1 + A_2\right\} \ &= \ 0 \end{aligned}$$

従って

$$C_{1,0}(t) \ = \ \frac{1}{\delta_1 - \delta_2}\left\{\delta_1\ \mathrm{e}^{-(\delta_1+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\ \mathrm{e}^{i\Delta\omega t} - \delta_2\ \mathrm{e}^{-(\delta_2+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\ \mathrm{e}^{i\Delta\omega t}\right\}$$

となる。これより $|\ \psi_{1,0}\ \rangle \to 2\gamma$ となる確率 $P_{1,0}$ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{1,0} &= \int_0^\infty \lambda_{10,2}|C_{1,0}(t)|^2 dt \\ &= \frac{\lambda_{10,2}}{|\delta_1 - \delta_2|^2}\left[\frac{|\delta_1|^2}{\delta_1 + {\delta_1}^* + \lambda_o}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{|\delta_2|^2}{\delta_2 + {\delta_2}^* + \lambda_o} - \frac{{\delta_1}^*\delta_2}{{\delta_1}^* + \delta_2 + \lambda_o} - \frac{\delta_1{\delta_2}^*}{\delta_1 + {\delta_2}^* + \lambda_o}\right] \end{aligned} \tag{C.41}$$

3. $t=0$ で $|\ \psi_{1,1}\ \rangle$ 状態にある時

$$C_{1,0}(t) \ = \ \frac{i\hbar}{2V}\ \frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}\left\{-\mathrm{e}^{-(\delta_1+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\ \mathrm{e}^{i\Delta\omega t} + \mathrm{e}^{-(\delta_2+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\ \mathrm{e}^{i\Delta\omega t}\right\}$$

これより、$|\ \psi_{1,1}\ \rangle \to |\ \psi_{1,0}\ \rangle \to 2\gamma$ となる確率 $P_{1,1}$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_{1,1} &= \int_0^\infty \lambda_{10,2}|C_{1,0}(t)|^2 dt \\ &= \lambda_{10,2}\left|\frac{\hbar}{2V}\right|^2 \left|\frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}\right|^2 \left[\frac{1}{\delta_1 + {\delta_1}^* + \lambda_o}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{\delta_2 + {\delta_2}^* + \lambda_o} - \frac{1}{{\delta_1}^* + \delta_2 + \lambda_o} - \frac{1}{\delta_1 + {\delta_2}^* + \lambda_o}\right] \end{aligned} \tag{C.42}$$

4. $t=0$ で $|\ \psi_{1,-1}\ \rangle$ 状態にある時

$$C_{1,0}(t) \ = \ \frac{i\hbar}{2V}\ \frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}\left\{\mathrm{e}^{-(\delta_1+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\ \mathrm{e}^{i\Delta\omega t} - \mathrm{e}^{-(\delta_2+\frac{1}{2}\lambda_o)t}\ \mathrm{e}^{i\Delta\omega t}\right\}$$

これより、$|\,\psi_{1,-1}\,\rangle \to |\,\psi_{1,0}\,\rangle \to 2\gamma$ となる確率 $P_{1,-1}$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_{1,-1} &= \int_0^\infty \lambda_{10,2}|C_{1,0}(t)|^2 dt \\ &= \lambda_{10,2}\left|\frac{\hbar}{2V}\right|^2 \left|\frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1-\delta_2}\right|^2 \left[\frac{1}{\delta_1+{\delta_1}^*+\lambda_o}\right. \\ &\qquad \left. +\frac{1}{\delta_2+{\delta_2}^*+\lambda_o}-\frac{1}{{\delta_1}^*+\delta_2+\lambda_o}-\frac{1}{\delta_1+{\delta_2}^*+\lambda_o}\right] \end{aligned} \tag{C.43}$$

物理的な考察からも明らかなように、$P_{1,1}$ と $P_{1,-1}$ は同じ値を取る事がわかる。

では Microwave 導入による 2γ 崩壊の個数変化を考えよう。まず線源から放出された陽電子が $t=0$ で電子との束縛状態、つまり Positronium になったとする。そのときの各 Ps の状態は $|\,\psi_{S,m}\,\rangle$ で与えられたが、その状態の Ps 粒子数を $N_{S,m}$ とおく。Microwave を加えることなしに時間が十分経ったとき、2γ に崩壊した Ps の個数は

$$\frac{\lambda_{00,2}}{\lambda_{0,0}}N_{0,0}+\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}}N_{1,0}$$

である。一方、Microwave を加えて十分時間を経過させたとき、2γ に崩壊した Ps の個数は

$$P_{0,0}N_{0,0}+P_{1,0}N_{1,0}+P_{1,1}N_{1,1}+P_{1,-1}N_{1,-1}$$

で与えられる。よって Microwave 導入によって 2γ に崩壊した Ps の個数変化 ΔN は

$$\begin{aligned} \Delta N &= \left\{P_{0,0}N_{0,0}+P_{1,0}N_{1,0}+P_{1,1}N_{1,1}+P_{1,-1}N_{1,-1}\right\}-\left\{\frac{\lambda_{00,2}}{\lambda_{0,0}}N_{0,0}+\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}}N_{1,0}\right\} \\ &= P_{1,1}N_{1,1}+P_{1,-1}N_{1,-1}+\left\{P_{1,0}-\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}}\right\}N_{1,0} \end{aligned} \tag{C.44}$$

となる。表式 (C.40) より、$N_{0,0}$ の項はなくなる。

$t=0$ での全 Ps 数が $N_{all}\equiv N_{0,0}+N_{1,0}+N_{1,1}+N_{1,-1}$ であるので、これを規格とした「 Positronium の 2γ 崩壊の個数変化 」P_T は

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{\Delta N}{N_{all}} \\ &= \frac{P_{1,1}N_{1,1}+P_{1,-1}N_{1,-1}+\left(P_{1,0}-\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}}\right)N_{1,0}}{N_{0,0}+N_{1,0}+N_{1,1}+N_{1,-1}} \end{aligned} \tag{C.45}$$

となる。これが実験の測定に直接かかる *Resonance Line Shape* である。

各 $|\,\psi_{S,m}\,\rangle$ 状態に何個の Ps が生成されたかは知る由もないので、特に変な外的要因がない限り、次の近似を行ってもよいであろう。

$$N_{0,0} = N_{1,0} = N_{1,1} = N_{1,-1} \equiv N$$

よって表式 (C.45) は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{1}{4N}\left[\,2P_{1,1}+(P_{1,0}-\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}})\,\right]N \\ &= \frac{1}{4}\left\{2\;P_{1,1}+(P_{1,0}-\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}})\;\right\} \end{aligned} \tag{C.46}$$

式が非常に長いので省略記号をいろいろ導入する。

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda &= \lambda_{1,0} - \lambda_o \\
\Delta L &= \lambda_{1,0} + \lambda_o \\
\sqrt{\ } &= \sqrt{a+ib} \\
&= \sqrt{[\frac{1}{2}(\lambda_{1,0}-\lambda_o)+i\Delta\omega]^2 - 8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2}
\end{aligned}$$

これより以下のように多少簡単になる。

$$\begin{aligned}
2P_{1,1}+P_{1,0}-\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}} &= 4\lambda_{10,2}\frac{1}{\Delta L^2 - 4(\mathrm{Re}\sqrt{\ })^2}\frac{1}{\Delta L^2 + 4(\mathrm{Im}\sqrt{\ })^2} \\
&\quad \times\Bigg\{\Delta L^2\lambda_{1,0} + \Delta L(\frac{1}{4}\Delta\lambda^2 + \Delta\omega^2 + 8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2) \\
&\qquad -\left[\Delta L\left((\mathrm{Re}\sqrt{\ })^2 - (\mathrm{Im}\sqrt{\ })^2\right) + 4\Delta\omega(\mathrm{Re}\sqrt{\ })(\mathrm{Im}\sqrt{\ })\right]\Bigg\} \\
&\quad -\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}} \qquad \text{(C.47)}
\end{aligned}$$

$\sqrt{\ } = \sqrt{a+ib}$ としておくと

$$(\mathrm{Re}\sqrt{\ })(\mathrm{Im}\sqrt{\ }) = \frac{1}{2}\Delta\lambda\ \Delta\omega = \frac{1}{2}b \qquad \text{(C.48)}$$

$$(\mathrm{Re}\sqrt{\ })^2 - (\mathrm{Im}\sqrt{\ })^2 = \frac{1}{4}\Delta\lambda^2\Delta\omega^2 - 8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2 = a \qquad \text{(C.49)}$$

こうすることにより、以下のように変形できる。

$$\Delta L^2 - 4(\mathrm{Re}\sqrt{\ })^2 = \Delta L - 2a - 2|\sqrt{\ }|^2 \qquad \text{(C.50)}$$

$$\Delta L^2 + 4(\mathrm{Im}\sqrt{\ })^2 = \Delta L - 2a + 2|\sqrt{\ }|^2 \qquad \text{(C.51)}$$

従って表式 (C.47) は

$$2P_{1,1}+P_{1,0}-\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}} = 4\lambda_{10,2}\frac{\Delta L^2\lambda_{1,0} + 2\Delta L(\Delta\omega^2 + 8|\frac{V}{\hbar}|^2) + 2\Delta L\Delta\omega^2}{(\Delta L^2 - 2a)^2 - 4|\sqrt{\ }|^4} - \frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}} \qquad \text{(C.52)}$$

となる。この分母はそれぞれ

$$\begin{aligned}
(\Delta L^2 - 2a)^2 &= \Delta L^4 + 4\left[\frac{1}{4}\Delta\lambda^2 - \Delta\omega^2\right]^2 + 4\Big(8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2\Big)^2 - 64\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2\Big(\frac{1}{4}\Delta\lambda^2 - \Delta\omega^2\Big) \\
|\sqrt{\ }|^4 &= \left[\left(\frac{1}{4}\Delta\lambda^2 + \Delta\omega^2\right)^2 + \Big(8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2\Big)^2 - 16\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2\Big(\frac{1}{4}\Delta\lambda^2 - \Delta\omega^2\Big)\right]
\end{aligned}$$

となるので

$$(\Delta L^2 - 2a)^2 - 4|\sqrt{\ }|^4 = \Delta L^4 + 4\Delta\lambda^2\Delta\omega^2$$

と非常に簡略化できる。この簡略化された表式を使うと結局

$$2P_{1,1}+P_{1,0}-\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}} = 4\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}}\frac{1}{\Delta L^4 + 4\Delta\lambda^2\Delta\omega^2}$$

$$\times\left[\Delta L^2{\lambda_{1,0}}^2+2\Delta L\lambda_{1,0}(\Delta\omega^2+8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2)\right.$$
$$\left.+2\Delta\lambda\lambda_{1,0}\Delta\omega^2-\Delta L^4-4\Delta\lambda^2\Delta\omega^2\right] \tag{C.53}$$

となる。ここまでは厳密な表式である。

さてここで近似を行おう。ΔL、$\Delta\lambda$ の定義より

$$\Delta L \simeq \Delta\lambda \simeq \lambda_{1,0} \simeq 10\lambda_o$$

であるので、$\lambda_{1,0}, \Delta\lambda \to \Delta L$ として

$$2P_{1,1}+P_{1,0}-\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}} = 2\frac{1}{\frac{1}{4}\Delta L^2+\Delta\omega^2}\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}}\left[\Delta\omega^2+8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2\right]$$

となる。またここで $\Delta\omega^2$ は $8\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2$ に比べて十分小さく、無視できるとして

$$\frac{8}{\lambda_{1,0}} \simeq \frac{1}{\lambda_o}$$

とすることができる。これらを行うことによって最終的に

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{1}{4}\left\{2P_{1,1}+P_{1,0}-\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_{1,0}}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{4}\Delta L^2+\Delta\omega^2}\left|\frac{V}{\hbar}\right|^2\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_o} \end{aligned} \tag{C.54}$$

を得ることができる。また x が小さいとして

$$V = \frac{x}{4\sqrt{2}}g'\mu_B B_1 \tag{C.55}$$

とする。

この表式を parameter x, f, f_{01}, B_1 を用いた形に書き直すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{1}{2}\frac{x^2}{32h^2}\frac{(g'\mu_B B_1)^2}{(f-f_{01})^2+\frac{1}{4}\gamma^2}\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_o} \\ \gamma &= \frac{1}{2\pi}\left[\left(2-\frac{x^2}{4-x^2}\right)\lambda_o+\frac{x^2}{4-x^2}\lambda_p\right] \end{aligned}$$

実際には Magnetron の周波数である f を変動させることは容易ではなく、静磁場が parameter となっている f_{01} を変動させる方がはるかに容易である。よって静磁場が parameter として扱いやすい形に書き換えると

$$P_T = A\frac{{B_1}^2}{(B_0-B_{0r})^2+\frac{1}{4}\Gamma^2} \tag{C.56}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2}{256h^2}\frac{(g'\mu_B B_{0r})^2}{{f_{01}}^2}\frac{\lambda_{10,2}}{\lambda_o} \\ \Gamma &= \frac{B_{0r}\gamma}{2f_{01}} = \frac{B_{0r}}{4\pi f_{01}}\left[\left(2-\frac{x^2}{4-x^2}\right)\lambda_o+\frac{x^2}{4-x^2}\lambda_p\right] \\ B_{0r} &= \frac{h}{g'\mu_B}\sqrt{\Delta\nu f_{01}} \\ h &= 2\pi\hbar \end{aligned}$$

である。

表式 (C.56) は Lorentzian と呼ばれる形式をしており、fwhm ΔB_0 は

$$\Delta B_0 \quad = \quad \frac{\gamma B_{0r}}{2f_{01}}$$

である。また

$$\begin{aligned} \frac{\Delta B_0}{B_{0r}} &= \frac{\Gamma}{B_{0r}} \\ &= \frac{1}{4\pi f_{01}} \left\{ \left(2 - \frac{x^2}{4-x^2} \right) \lambda_o + \frac{x^2}{4-x^2} \lambda_p \right\} \end{aligned}$$

となっている。

以上、表式 (C.56) で表示される Lorentzian の理論曲線と、実験による 2γ Coincidence のイベント数の静磁場による変化を比べることで Positronium Hyperfine Structure を測定することができる。

Appendix D

Transmission Lines and Waveguides

D.1 Classification of Wave Solutions

In this section, we will consider the distribution of the electromagnetic field in transmission lines and waveguides. The transmission lines and waveguides analyzed in this section are all characterized by having axial uniformity. Their cross-sectional shape and electrical properties do not vary along the axis, which is chosen as the z axis.

First, the Maxwell's equations are

$$\nabla \cdot D = \rho \ , \tag{D.1a}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \ , \tag{D.1b}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \ , \tag{D.1c}$$

$$\nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \ . \tag{D.1d}$$

Since sources of current and charge are not considered, and it is assumed that the time-dependence of the field is $e^{i\omega t}$, Eq.(D.1b) and (D.1d) can be rewritten as

$$\nabla \times E = -i\mu\omega H \ , \tag{D.2a}$$

$$\nabla \times H = i\epsilon\omega E \ . \tag{D.2b}$$

Here we have used the relations $D = \epsilon E$ and $B = \mu H$. Using Eq.(D.1a), (D.1c) and identity

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla\nabla \cdot A - \nabla^2 A \ , \tag{D.3}$$

we can derive the equation for E and H

$$\nabla^2 E + k_0^2 E = 0 \ , \tag{D.4a}$$

$$\nabla^2 H + k_0^2 H = 0 \ . \tag{D.4b}$$

Those are called the Helmholtz equations. In the above expressions, $k_0^2 = \mu\epsilon\omega^2$. Since these equations are separable, it is possible to find solutions of the form $f(z)g(x, y)$. The z dependence can be assumed to be $e^{\mp ikz}$. We will consider only the waves which propagate in the positive z direction and the z dependence is assumed to be the form of e^{-ikz}. Then the Helmholtz equations will be in the form

$${\nabla_t}^2 E + (k_0^2 - k^2)E = 0 \ , \tag{D.5a}$$

$${\nabla_t}^2 H + (k_0^2 - k^2)H = 0 \ . \tag{D.5b}$$

Here note that because of the assumed z dependence e^{-ikz}, $\nabla_z = -ik\hat{z}$ and then

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_z = \nabla_t - ik\hat{z} \ , \tag{D.6}$$

where $\hat{z}$ is the unit vector along the z axis and ∇_t is the transverse part of the gradient operator. Let

$$E = e_t e^{-ikz} + e_z e^{-ikz} , \tag{D.7a}$$

$$H = h_t e^{-ikz} + h_z e^{-ikz} , \tag{D.7b}$$

where $e_t,\ e_z,\ h_t,\ h_z$ are all the functions of $x,\ y$, and e_t, h_t are the transverse vector fields and e_z, h_z are the vector field along the z axis. With these expressions, Eq.(D.1a), (D.1c), (D.2a) and (D.2b) can be reduced to

$$\nabla_t \times e_t = -i\mu\omega h_z , \tag{D.8a}$$

$$\hat{z} \times (\nabla_t e_z + ike_t) = i\mu\omega h_t , \tag{D.8b}$$

$$\nabla_t \times h_t = i\epsilon\omega e_z , \tag{D.8c}$$

$$\hat{z} \times (\nabla_t h_z + ikh_t) = -i\epsilon e_t , \tag{D.8d}$$

$$\nabla_t \cdot h_t = ikh_z , \tag{D.8e}$$

$$\nabla_t \cdot e_t = ike_z . \tag{D.8f}$$

For a large variety of transmission lines and waveguides of practical interest, it turns out that all the boundary conditions can be satisfied by fields that do not have all components present. Specifically, for transmission lines, the solution of interest is a TEM (trensverse electromagnetic) wave with transverse components only, whereas for waveguides, solutions of TE (transverse electric) and TM (transverse magnetic) waves are possible. Because of widespread occurrence of such field solutions, the following classification of solutions is of particular interest.

1. Transverse electromagnetic (TEM) waves. For TEM waves, $E_z = H_z = 0$. The electric field may be found from the transverse gradient of a scalar function $\Phi(x, y)$, which is a function of the transverse coordinates only and is a solution of the two-dimensional Laplace equation.

2. Transverse electric (TE), or H, modes. These solutions have $E_z = 0$, but $H_z \neq 0$. All the field components may be derived from the axial component H_z of magnetic field.

3. Transverse magnetic (TM), or E, modes. These solutions have $H_z = 0$, but $E_z \neq 0$. The field components may be derived from E_z.

In some cases it will be found that a TE or TM mode by itself will not satisfy all the boundary conditions. However, in such cases linear conbinations of TE and TM modes may be used, since such linear combinations always provides a complete and general solution.

The appropriate equations to be solved to obtain TEM, TE, or TM modes will be derived below by placing E_z and H_z, E_z, or H_z, respectively, equal to zero in the reduced Maxwell's equations (D.8a) – (D.8f).

D.1.1 TEM Waves

For TEM waves $e_z = h_z = 0$, so Eqs.(D.8) reduce to

$$\nabla_t \times e_t = 0 , \tag{D.9a}$$

$$k\hat{z} \times e_t = \mu\omega h_t , \tag{D.9b}$$

$$\nabla_t \times h_t = 0 , \tag{D.9c}$$

$$k\hat{z} \times h_t = -\epsilon e_t \ , \tag{D.9d}$$

$$\nabla_t \cdot h_t = 0 \ , \tag{D.9e}$$

$$\nabla_t \cdot e_t = 0 \ . \tag{D.9f}$$

Eq.(D.9a) is just the condition that permits e_t to be expressed as the gradient of a scalar potential. Hence let

$$e_t = -\nabla_t \Phi(x, y) \ . \tag{D.10}$$

Using Eq.(D.9f), we can show that $\Phi(x, y)$ is a solution of the two-dimensional Laplace equation,

$${\nabla_t}^2 \Phi(x, y) = 0 \ . \tag{D.11}$$

The electric field is then given by

$$E(x, y, z) = E_t(x, y, z) = -\nabla_t \Phi(x, y) e^{-ikz} \ . \tag{D.12}$$

But this field must also be a solution of the Helmholtz equation

$$\nabla^2 E_t + k_0^2 E_t = 0 \ . \tag{D.13}$$

Since $\nabla = \nabla_t - ik\hat{z}$ and then $\nabla^2 = {\nabla_t}^2 - k^2$, combining Eq.(D.12) with Eq.(D.13), we can derive

$$\nabla_t [{\nabla_t}^2 \Phi + (k_0^2 - k^2)\Phi] = 0 \ . \tag{D.14}$$

This shows that $k = \pm k_0$ for TEM waves because of Eq.(D.11). The magnetic field may be found from Eq.(D.9b), thus

$$\pm \frac{\mu\omega}{k_0} h_t = \hat{z} \times e_t = \pm Z_0 h_t \ , \tag{D.15}$$

where Z_0 is the wave impedance discussed below. In this expression, the positive sign corresponds to the wave which propagates in the $+z$ direction, and the negative sign to the wave propagates in the $-z$ direction. Since $k_0^2 = \mu\epsilon\omega^2$,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ , \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \ , \tag{D.16}$$

where Y_0 is called as admittance corresponding to Z_0.

For TEM waves, the impedance Z_0 is defined by

$$Z_0 = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} \ . \tag{D.17}$$

Hence for the waves which propagate in the $+z$ direction

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = Z_0 \ , \tag{D.18}$$

whereas for the waves which propagate in the $-z$ direction

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = -Z_0 \ . \tag{D.19}$$

In summary, for TEM waves, first find a scalar potential Φ which is a solution of two-dimensional Laplace equation

$${\nabla_t}^2 \Phi(x, y) = 0 \tag{D.20}$$

and satisfies the proper boundary conditions. The fields are then given by

$$E = E_t = e_t e^{\mp ik_0 z} = -\nabla_t \Phi e^{\mp ik_0 z} \ , \tag{D.21a}$$

$$H = H_t = h_t e^{\mp ik_0 z} = \pm Y_0 \hat{z} \times e_t e^{\mp ik_0 z} \ , \tag{D.21b}$$

where $e^{-ik_0 z}$ represents a wave propagating in the $+z$ direction and $e^{+ik_0 z}$ a wave propagating in the $-z$ direction.

D.1.2 TE Waves

For transverse electric (TE) waves, setting $e_z = 0$ in the Eqs.(D.8), we can obtain

$$\nabla_t \times e_t = -i\mu\omega h_z \ , \tag{D.22a}$$

$$k\hat{z} \times e_t = \mu\omega h_t \ , \tag{D.22b}$$

$$\nabla_t \times h_t = 0 \ , \tag{D.22c}$$

$$\hat{z} \times \nabla_t h_z + ik\hat{z} \times h_t = -i\epsilon e_t \ , \tag{D.22d}$$

$$\nabla_t \cdot h_t = ikh_z \ , \tag{D.22e}$$

$$\nabla_t \cdot e_t = 0 \ . \tag{D.22f}$$

The magnetic field H satisfies the Helmholtz equation

$$\nabla^2 H + k_0^2 H = 0 \ . \tag{D.23}$$

Separating the above into transverse and axial parts and replacing ∇^2 by ${\nabla_t}^2 - k^2$ yeild

$${\nabla_t}^2 h_z + \gamma^2 h_z = 0 \ , \tag{D.24a}$$

$${\nabla_t}^2 h_t + \gamma^2 h_t = 0 \ . \tag{D.24b}$$

where $\gamma = k_0^2 - k^2$. The transverse curl of Eq.(D.22c) gives

$$\nabla_t \times (\nabla_t \times h_t) = \nabla_t \nabla_t \cdot h_t - {\nabla_t}^2 h_t = 0 \ . \tag{D.25}$$

Using Eq.(D.22e) and Eq.(D.24b), we can derive the equation

$$h_t = -\frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t h_z \ . \tag{D.26}$$

To find e_t in terms of h_t, we take the vector product of Eq.(D.22b) with $\hat{z}$ to obtain

$$k\hat{z} \times (\hat{z} \times e_t) = k[(\hat{z} \cdot e_t)\hat{z} - (\hat{z} \cdot \hat{z})e_t] = -ke_t = \mu\omega \hat{z} \times h_t \ , \tag{D.27}$$

or

$$e_t = -\frac{\mu\omega}{k} \hat{z} \times h_t = -\frac{k_0}{k} Z_0 \hat{z} \times h_t \ . \tag{D.28}$$

The factor $\dfrac{k_0}{k} Z_0$ has the dimensions of an impedance, and is called the wave impedance of TE, or H, modes. It will be designated by the symbol Z_h, so that

$$Z_h = \frac{k_0}{k} Z_0 \ . \tag{D.29}$$

The remaining equations in the set Eqs.(D.22) do not yield any new result; so the solution for TE waves may be summarized as follows:

$$\nabla_t^2 h_z + \gamma^2 h_z = 0 \ , \tag{D.30a}$$

$$h_t = -\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t h_z \ , \tag{D.30b}$$

$$e_t = -Z_h \hat{z} \times h_t \ , \tag{D.30c}$$

where

$$\gamma^2 = k_0^2 - k^2 \quad \text{and} \quad Z_h = \frac{k_0}{k} Z_0 \ . \tag{D.31}$$

D.1.3 TM Waves

For transverse magnetic (TM) waves, setting $h_z = 0$ in the Eqs.(D.8), we can obtain

$$\nabla_t \times e_t = 0 \ , \tag{D.32a}$$

$$\hat{z} \times \nabla_t e_z + ik\hat{z} \times e_t = i\mu\omega h_t \ , \tag{D.32b}$$

$$\nabla_t \times h_t = i\epsilon\omega e_z \ , \tag{D.32c}$$

$$k\hat{z} \times h_t = -\epsilon e_t \ , \tag{D.32d}$$

$$\nabla_t \cdot h_t = 0 \ , \tag{D.32e}$$

$$\nabla_t \cdot e_t = ike_z \ . \tag{D.32f}$$

The TM modes may be considered as the dual of the TE modes in that the roles of electric and magnetic fields are interchanged. We can obtain the set of equations simillar to Eqs.(D.30) in the same way that we derived Eqs.(D.30). And the equations for the TM waves are

$$\nabla_t^2 e_z + \gamma^2 e_z = 0 \ , \tag{D.33a}$$

$$e_t = -\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t e_z \ , \tag{D.33b}$$

$$h_t = -Y_e \hat{z} \times e_t \ , \tag{D.33c}$$

where

$$\gamma^2 = k_0^2 - k^2 \quad \text{and} \quad Y_e = \frac{1}{Z_e} = \frac{k_0}{k} Y_0 \ . \tag{D.34}$$

The factor Y_0 has the dimensions of an admittance, and is called the wave admittance of TM waves. The dual nature of TE nad TM waves is exhibited by the relation

$$Z_h Z_e = Z_0 \ . \tag{D.35}$$

D.2 Coaxial Line

In this section, we discuss the fields in a transmission line, especially in a coaxial line. A transmission line consists of two or more parallel conductors. Initially, it will be assumed that the conductors are perfectly conducting and that the medium surrounding the conductors is perfect dielectric, which permittivity and permeability are ϵ and μ respectively. The effect of small losses will be considerd later.

A coaxial line has the cross section illustrated in FIG. D.1, which consists of two cylindrical conductors. These conductors have the same axis. The radius of the inner conductor is a and that of the outer one is b.

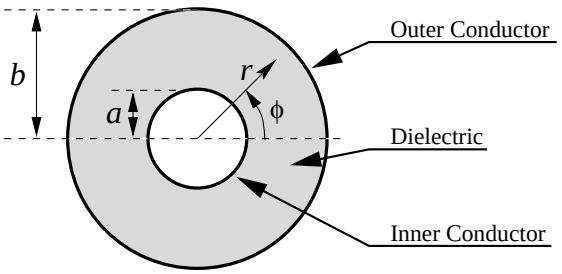


FIGURE D.1: Cross section of coaxial line.

For transmission lines, the wave of most interest is the TEM wave, but there also exist TE and TM waves, so we will analyze the latter two waves in the coaxial line here in addition to the former. However, deeper discussions are given for TE_{01} and TM_{01} modes because of their importance.

D.2.1 TEM Wave in Coaxial Line

First we should find a solution of 2-dimensional Laplace equation

$$\nabla_t{}^2 \Phi = 0 \ . \tag{D.36}$$

In cylindrical coordinates r, φ, z, above expression is written as

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \ . \tag{D.37}$$

The potential function Φ is independent of the angular coordinate φ since the cross sectional shape of the coaxial line does not depend on φ. So the 2-dimensional Laplace equation becomes

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = 0 \ . \tag{D.38}$$

Integrate this equation twice gives

$$\Phi = C_1 \log r + C_2 \ . \tag{D.39}$$

Since the boundary conditions are $\Phi = V_0$ at $r = a$ and $\Phi = 0$ at $r = b$, imposing these conditions gives

$$C_1 = \frac{V_0}{\log(a/b)} \ , \tag{D.40a}$$

$$C_2 = -\frac{V_0 \log b}{\log(a/b)} \ , \tag{D.40b}$$

and then

$$\Phi = V_0 \frac{\log(r/b)}{\log(a/b)} \ . \tag{D.41}$$

The electric and magnetic fields of a TEM mode propagating in the $+z$ direction are given by Eqs.(D.21) and are

$$E = -\hat{z}\frac{\partial \Phi}{\partial r} e^{-ik_0 z} = \hat{r}\frac{V_0}{r\log(b/a)} e^{-ik_0 z} \ , \tag{D.42a}$$

$$H = Y_0 \hat{z} \times E = \hat{\varphi}\frac{Y_0 V_0}{r\log(b/a)} e^{-ik_0 z} \ , \tag{D.42b}$$

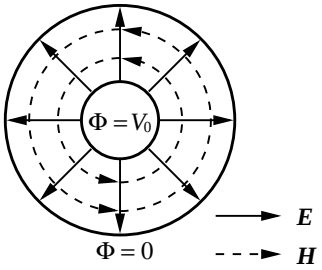


FIGURE D.2: The electric and magnetic fields of TEM wave in coaxial line

where Y_0 is the admittance of the dielectric between the two conductors and is equal to $\sqrt{\epsilon/\mu}$. The electric and magnetic fields are both illustrated in FIG. D.2. The potential between the two conductors is obviously V_0; so the voltage wave V associated with the electric field is

$$V = V_0 e^{-ik_0 z} \ . \tag{D.43}$$

The current density J on the inner conductor is

$$J = \hat{n} \times H = \hat{r} \times H = \hat{z} \frac{Y_0 V_0}{a \log(b/a)} e^{-ik_0 z} \ , \tag{D.44}$$

and the total current I_0, apart from the factor $e^{-ik_0 z}$, is

$$I_0 = \frac{Y_0 V_0}{a \log(b/a)} \int_0^{2\pi} a \, d\varphi = \frac{2\pi Y_0 V_0}{\log(b/a)} \ . \tag{D.45}$$

The current wave I associated with the magnetic field is therefore

$$I = I_0 e^{-ik_0 z} \ . \tag{D.46}$$

The characteristic impedance Z_c of a 2-conductor transmission line is defined by

$$Z_c = \frac{V_0}{I_0} \ , \tag{D.47}$$

and in the case of coaxial line

$$Z_c = \frac{Z_0}{2\pi} \log \frac{b}{a} \ , \tag{D.48}$$

where

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ . \tag{D.49}$$

D.2.2 TE Waves in Coaxial Line

For TE waves, the equations to be solved are Eqs.(D.30). It will be useful to replace h_z by a scalar function ψ, which can be used not only for TE modes, but also for TM modes. Then Eqs.(D.30) can be rewritten as

$$\nabla_t{}^2 \psi + \gamma^2 \psi = 0 \ , \tag{D.50a}$$

$$h_t = -\frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t \psi \ , \tag{D.50b}$$

$$e_t = -\frac{ikZ_h}{\gamma^2} \hat{z} \times \nabla_t \psi \ . \tag{D.50c}$$

The boundary condition to be imposed is

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} = 0 \quad \text{on the surface of the conductors,} \tag{D.51}$$

where $\hat{n}$ is the unit vector perpendicular to the surface of the conductor. For the coaxial line we are now discussing, taking cylindrical coordinates, this boundary condition become below;

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{at} \quad r = a,\ b\ . \tag{D.52}$$

Now remainding promlem is to have the solution of Eq.(D.50a) which satisfies the boundary condition (D.52). In cylindrical coordinates, Eq.(D.50a) is

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 \psi = 0\ . \tag{D.53}$$

we separate ψ into r-dependent and φ-dependent parts so that

$$\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)\ , \tag{D.54}$$

then Eq.(D.53) becomes

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} + \gamma^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}\ . \tag{D.55}$$

Setting this equation to be m^2, we can derive the equations for R and Φ.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\gamma^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0\ , \tag{D.56a}$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi\ . \tag{D.56b}$$

First, We can easily solve Eq.(D.56b) and the solutions for Φ are

$$\Phi_m(\varphi) = C_{m1} e^{im\varphi} + C_{m2} e^{-im\varphi}\ , \tag{D.57}$$

where C_{m1} and C_{m2} are constants. Since Φ must have the same value at $\varphi = 0$ and $\varphi = 2\pi$, m must be integers; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. However we should take only zero and positive m because negative m are already included in Eq.(D.57) for positive m. For simplicity, we shall take only $e^{im\varphi}$. Next, we will solve Eq.(D.56a). Replacing r by x/γ, we can rewrite Eq.(D.56a) as

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0\ . \tag{D.58}$$

This is Bessel's differential equation, and the solution can be expressed with the linear combination of Bessel function $J_m(x)$ and Neumann function $Y_m(x)$, such as

$$R_m(x) = A_m J_m(x) + B_m Y_m(x)\ , \tag{D.59}$$

where A_m and B_m are constants. From above all, we can derive the mth solution for Eq.(D.53);

$$\psi_m(r, \varphi) = [A_m J_m(\gamma r) + B_m Y_m(\gamma r)] e^{im\varphi}\ . \tag{D.60}$$

Imposing the boundary condition that $\dfrac{\partial \psi_m}{\partial r} = 0$ at $r = a$, we can have

$$R_m(x) = H_m \left[\frac{J_m(x)}{J'_m(\gamma a)} - \frac{Y_m(x)}{Y'_m(\gamma a)}\right]\ , \tag{D.61}$$

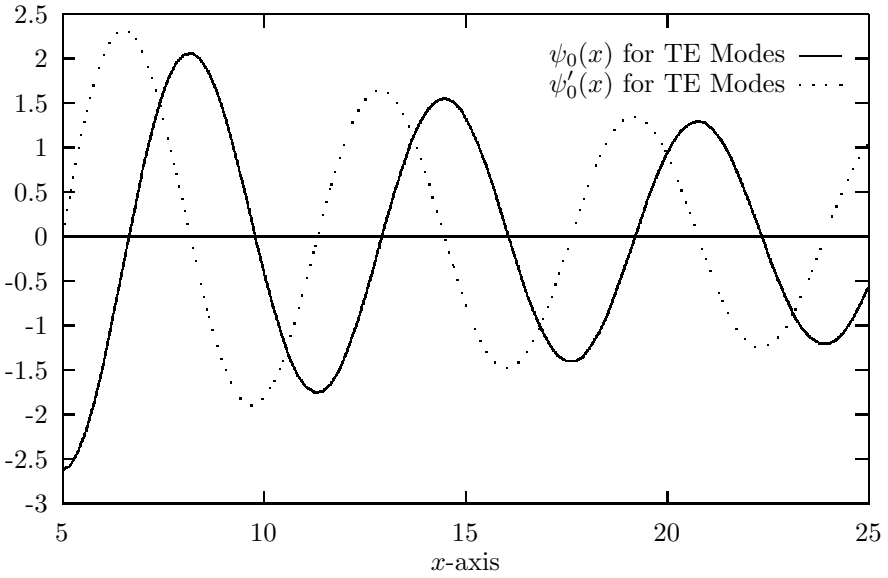


FIGURE D.3: Graphs of $\psi_0(x)$ and $\psi_0'(x)$ for TE waves. Here γr and γa are set to be x and 5, respectively.

where $'$ means $\dfrac{d}{dr}$ and H_m is the amplitude of magnetic field. More because of the boundary condition at $r = b$, if nth zero point of $R'_m(x)$ is $\beta'_{mn}(\gamma a)$, γb should be equal to $\beta'_{mn}(\gamma a)$. Here $\beta'_{mn}(\gamma a)$ should be, of course, a function of γa. This is that γ can not be chosen arbitrarily, but should be decied so that γ satisfies the equation $\gamma b = \beta'_{mn}(\gamma a)$. Denoting γ decided in such way as k'_{mn}, we could derive the (m, n)th solution for TE waves,

$$\psi_{mn}(r, \varphi) = H_{mn} \left[\frac{J_m(k'_{mn} r)}{J'_m(k'_{mn} a)} - \frac{Y_m(k'_{mn} r)}{Y'_m(k'_{mn} a)} \right] e^{im\varphi} \ . \tag{D.62}$$

The other field components, e_t and h_t, can be derived from Eqs.(D.50).

There appears the most remarkable property of TE waves; there exists a cutoff freqency. There is the relation among k_0, k and k'_{mn}, that is

$$(k'_{mn})^2 = k_0^2 - k^2 \ . \tag{D.63}$$

Here k should be a pure real number, otherwise the wave can not propagate or decays with the distance from the point at which it is excited. From this, since $k_0^2 = \mu\epsilon\omega^2$, the cutoff frequency ω_{mn} of the (m, n)-mode can be calculated;

$$\begin{aligned} & k^2 = k_0^2 - (k'_{mn})^2 > 0 \ , \\ \Longrightarrow \quad & \omega_{mn} > \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} k'_{mn} \ . \end{aligned} \tag{D.64}$$

Since he lowest order wave is TE_{01} mode, when the frequency ω is less then ω_{01}, the TE mode can not be excited in the coaxial line.

$\mathbf{TE}_{01}$ Mode

Here we will analize the details of TE_{01} wave. The solution for this wave is

$$\psi_{01}(r, \varphi) = H_{01} \Psi_{\mathrm{TE}_{01}}(r) \ , \tag{D.65}$$

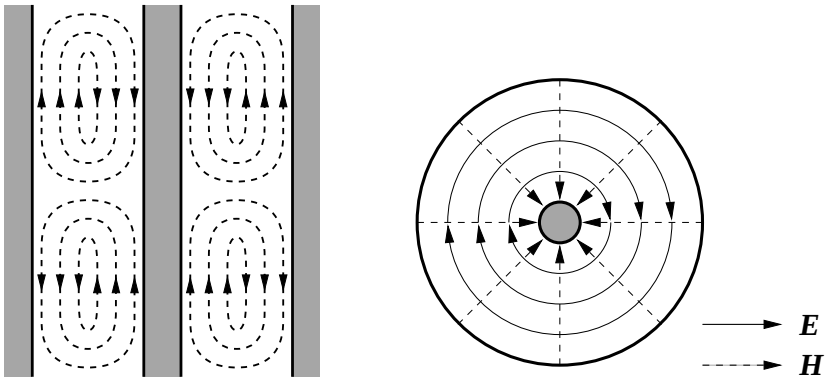


FIGURE D.4: Electric and magnetic field of TE_{01} mode in coaxial line.

where

$$\Psi_{\mathrm{TE}_{01}}(r) = \frac{J_0(k'_{01}r)}{J'_0(k'_{01}a)} - \frac{Y_0(k'_{01}r)}{Y'_0(k'_{01}a)} \ . \tag{D.66}$$

In cylindrical coordinates,

$$\nabla_t = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \ , \tag{D.67}$$

so, from Eqs.(D.50),

$$h_t = -\hat{r}\frac{ikH_{01}}{k_{01}}\Psi'_{\mathrm{TE}_{01}}(r) \ , \tag{D.68a}$$

$$e_t = -\hat{\varphi}\frac{ikZ_hH_{01}}{k_{01}}\Psi'_{\mathrm{TE}_{01}}(r) \ . \tag{D.68b}$$

Since the z dependence is e^{-ikz}, when we take the phase factor of h_z as $\cos kz$, that of h_t and e_t are both $-\sin kz$. So we can derive the distribution of electromagnetic field of TE_{01} mode in coaxial line;

$$h_z = \hat{z}H_{01}\Psi_{\mathrm{TE}_{01}}(r)\cos kz \ , \tag{D.69a}$$

$$h_t = -\hat{r}\frac{ikH_{01}}{k_{01}}\Psi'_{\mathrm{TE}_{01}}(r)\sin kz \ , \tag{D.69b}$$

$$e_t = -\hat{\varphi}\frac{ikZ_hH_{01}}{k_{01}}\Psi'_{\mathrm{TE}_{01}}(r)\sin kz \ . \tag{D.69c}$$

The graphs of $\psi_0(x)$ and $\psi'_0(x)$ for this mode are illustrated in FIG. D.3, in which it is set that $x = \gamma r$ and $\gamma a = 5$. From this graph, we can roughly illustrate the field distribution, and this is in FIG. D.4.

D.2.3 TM Waves in Coaxial Line

For TM waves, the equations to be solved are Eqs.(D.33);

$$\nabla_t^2 e_z + \gamma^2 e_z = 0 \ , \tag{D.70a}$$

$$e_t = -\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t e_z \ , \tag{D.70b}$$

$$h_t = Y_e\hat{z}\times e_t \ . \tag{D.70c}$$

The general solution for e_z is the same as that for h_z of TE modes, so we can use Eq.(D.60) for e_z. But the boundary condition may be change;

$$\psi_m(r) = 0 \quad \text{at} \quad r = a,\ b \ . \tag{D.71}$$

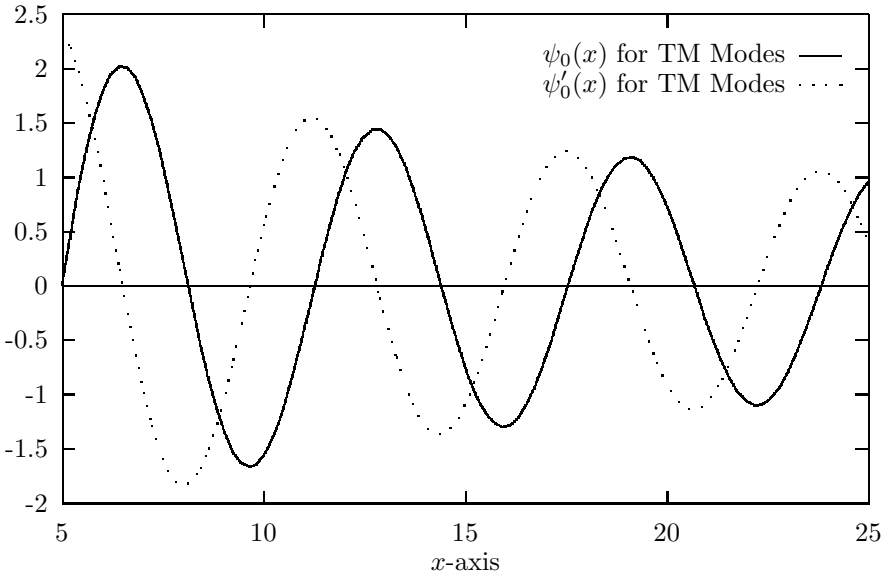


FIGURE D.5: Graphs of $\psi_0(x)$ and $\psi_0'(x)$ for TM waves. Here γr and γa are set to be x and 5, respectively.

First, since $\psi_m(a) = 0$, we can have

$$R_m(x) = E_m \left[\frac{J_m(x)}{J_m(\gamma a)} - \frac{Y_m(x)}{Y_m(\gamma a)} \right] , \tag{D.72}$$

where E_m is the amplitude of electric field. More because of the boundary condition at $r = b$, if nth zero point of R_m is $\beta_{mn}(\gamma a)$, γb shoud be equal to $\beta_{mn}(\gamma a)$. Being similar to the case of TE modes, this is that γ can not be chosen arbitrarily, but should be decided so that γ satisfies the equation $\gamma b = \beta_{mn}(\gamma a)$. Denoting such γ as k_{mn}, we could derive the (m, n)th solution for TM waves,

$$\psi_{mn}(r, \varphi) = E_{mn} \left[\frac{J_m(k_{mn} r)}{J_m(k_{mn} a)} - \frac{Y_m(k_{mn} r)}{Y_m(k_{mn} a)} \right] e^{im\varphi} . \tag{D.73}$$

The other field components, h_t and e_t, can be derived from Eqs.(D.70).

Similar to the case of TE waves, there exists a cutoff frequency. The cutoff frequency can be calcurated in the same way we derived that for TE waves;

$$\omega_{mn} > \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} k_{mn} . \tag{D.74}$$

Since the lowest order wave is TM_{01} mode, the wave that have less frequency than ω_{01} can not be excited in the coaxial line.

TM_{01} Mode

Here we will analyze the details of TM_{01} wave. The solution for this wave is

$$\psi_{01}(r, \varphi) = E_{01} \Psi_{\mathrm{TM}_{01}}(r) , \tag{D.75}$$

where

$$\Psi_{\mathrm{TM}_{01}}(r) = \frac{J_0(k_{01} r)}{J_0(k_{01} a)} - \frac{Y_0(k_{01} r)}{Y_0(k_{01} a)} . \tag{D.76}$$

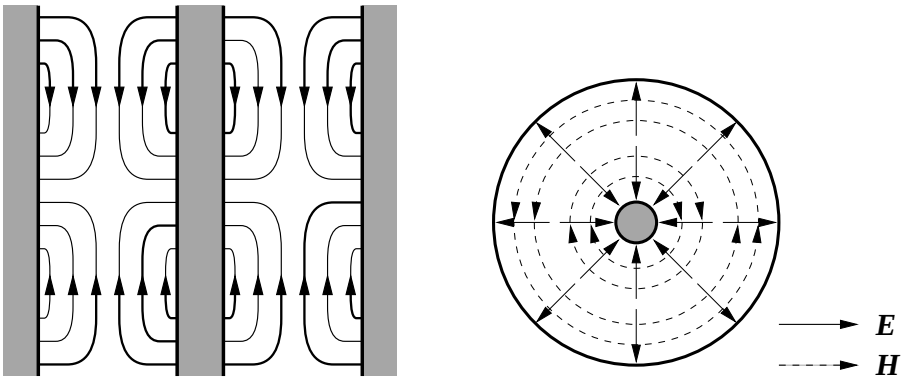


FIGURE D.6: Electric and magnetic field of TM_{01} mode in coaxial line.

The other field components are as below;

$$e_t = -\hat{r}\frac{ikE_{01}}{k_{01}}\Psi'_{\mathrm{TM}_{01}}(r) \ , \tag{D.77a}$$

$$h_t = \hat{\varphi}\frac{ikY_eE_{01}}{k_{01}}\Psi'_{\mathrm{TM}_{01}}(r) \ . \tag{D.77b}$$

Since the z dependence is e^{-ikz}, when we take the phase factor of e_z as $\cos kz$, that of e_t and h_t are $-\sin kz$ and $\sin kz$, respectively. So we can derive the distribution of electromagnetic field of TE_{01} mode in coaxial line;

$$e_z = \hat{z}E_{01}\Psi_{\mathrm{TM}_{01}}(r)\cos kz \ , \tag{D.78a}$$

$$h_t = -\hat{r}\frac{ikE_{01}}{k_{01}}\Psi'_{\mathrm{TM}_{01}}(r)\sin kz \ , \tag{D.78b}$$

$$e_t = \hat{\varphi}\frac{ikY_eE_{01}}{k_{01}}\Psi'_{\mathrm{TM}_{01}}(r)\sin kz \ . \tag{D.78c}$$

The graphs of $\psi_0(x)$ and $\psi'_0(x)$ for this mode are illustrated in FIG. D.5, in which it is set that $x = \gamma r$ and $\gamma a = 5$. From this graph, we can roughly illustrate the field distribution, and this is in FIG. D.6.

D.3 Rectangular Waveguide

Hollow-pipe waveguides do not support a TEM wave. In hollow-pipe waveguides the waves are of the TE and TM variety. The waveguide with a rectangular cross section in the most widely used one. The rectangular waveguide with a cross section as illustrated in FIG. D.7 is an example of a waveguiding device that will not support a TEM wave. Conseqently, it turns out that unique voltage and current waves do not exist, and analysis of the waveguide properties has to be carried out as a field problem rather than as a distributed-parameter-circuit problem.

The equations for TE waves and TM waves are Eqs.(D.30) and Eqs.(D.33), respectively. For rectangular waveguide, it is much easier than for coaxial line to soluve those equations, because we can take rectangular coordinates in this case, and more, because the boundary conditions to be imposed are much simple.

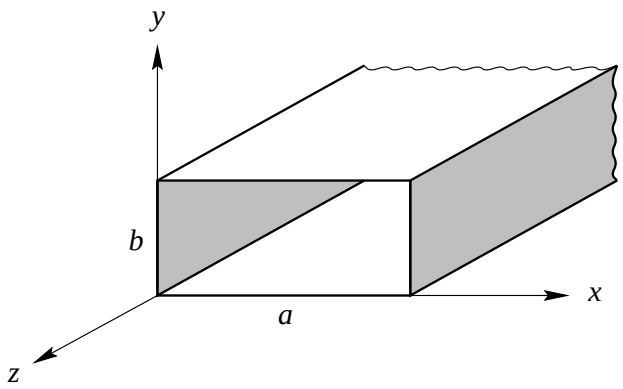


FIGURE D.7: Cross sectional shape of rectangular waveguide

D.3.1 TE Waves in Rectangular Waveguide

For TE waves in rectangular waveguide, the equations to be soluved are Eqs.(D.30), same as in coaxial line;

$$\nabla_t^2 h_z + \gamma^2 h_z = 0 \ , \tag{D.79a}$$

$$h_t = -\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t h_z \ , \tag{D.79b}$$

$$e_t = -Z_h \hat{z} \times h_t \ , \tag{D.79c}$$

where

$$\gamma^2 = k_0^2 - k^2 \quad \text{and} \quad Z_h = \frac{k_0}{k} Z_0 \ . \tag{D.80}$$

Taking rectangular coordinates, we can easily derive the solution for h_z;

$$h_z = (A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x)(B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y) \ . \tag{D.81}$$

where k_x and k_y must satisfy the relation

$$\gamma^2 - k_x^2 - k_y^2 = 0 \ . \tag{D.82}$$

The boundary conditions to be imposed are

$$\frac{\partial h_z}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0,\ a \ , \tag{D.83a}$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0,\ b \ . \tag{D.83b}$$

These conditions show that

$$A_2 = 0 \quad \text{and} \quad B_2 = 0 \ , \tag{D.84}$$

and

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \ , \tag{D.85a}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \ . \tag{D.85b}$$

where m and n are non-negative integers. Above all, we have the solution for a TE mode;

$$h_z = H_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \ , \tag{D.86}$$

this is called as TE_{mn} mode. The other field components are as followings;

$$\begin{aligned} h_t &= \hat{x}\frac{im\pi k_{mn} H_{mn}}{a\gamma_{mn}^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \\ &\quad + \hat{y}\frac{in\pi k_{mn} H_{mn}}{b\gamma_{mn}^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \tag{D.87a}$$

$$\begin{aligned} e_t &= \hat{x}\frac{in\pi k_{mn} Z_{h,mn} H_{mn}}{b\gamma_{mn}^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \\ &\quad - \hat{y}\frac{im\pi k_{mn} Z_{h,mn} H_{mn}}{a\gamma_{mn}^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \ . \end{aligned} \tag{D.87b}$$

Substituting Eqs.(D.85) into the relation Eq.(D.82), we have

$$k_{mn}^2 = k_0^2 - \frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2} \ , \tag{D.88}$$

this shows that, similar to the case of coaxial line, there exists a cutoff frequency. The cutoff frequency $\omega_{c,mn}$ for mn-th mode is

$$\omega_{c,mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{D.89}$$

If $a > b$, the lowest mode is TE_{01}. Further more, we can define a cutoff wavelength $\lambda_{c,mn}$ corresponding to $\omega_{c,mn}$;

$$\lambda_{c,mn} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}\omega_{c,mn}} = \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}} \ , \tag{D.90}$$

The exsitence of cutoff frequency and corresponding cutoff wavelength means that not all waves but waves that have larger frequency, or less wavelength, than the cutoff does propagate in a waveguide, and the other waves exponentially vanish with the distance from the point waves are excited. The wavelength of mn-th mode in a waveguide can be written as following, using $lambda_{c,mn}$ and $\lambda_0 = 2\pi/k_0$,

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{k_{mn}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \lambda_0^2/\lambda_{c,mn}^2}} \ , \tag{D.91}$$

this shows that wavelength in a waveguide is longer than that in free space.

Finally we give the phase and group velocity of the mn-th wave. The phase velocity $v_{p,mn}$ of mn-th mode is given by

$$v_{p,mn} = \frac{\lambda_{mn}}{\lambda_0} c \ , \tag{D.92}$$

where c is the light velocity in the medium that fill inside the waveguide, so $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. This $v_{p,mn}$ may be derived from $v_p = \omega/k_{mn}$. The group velocity $v_{g,mn}$ of the mn-th mode is

$$v_{g,mn} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{mn}} c \ . \tag{D.93}$$

This is given by $v_g = d\omega/dk_{mn} = (dk_{mn}/d\omega)^{-1}$.

D.3.2 TM Waves in Rectangular Waveguide

For TM waves, the equations to be solved are Eqs.(D.33);

$$\nabla_t^2 e_z + \gamma^2 e_z = 0 \ , \tag{D.94a}$$

$$e_t = -\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t e_z \ , \tag{D.94b}$$

$$h_t = -Y_e \hat{z} \times e_t \ , \tag{D.94c}$$

where

$$\gamma^2 = k_0^2 - k^2 \quad \text{and} \quad Y_e = \frac{1}{Z_e} = \frac{k_0}{k} Y_0 \ . \tag{D.95}$$

Imposing the boundary conditions for e_z, those are

$$e_z = 0 \quad \text{at} \quad x = 0,\ a \ , \tag{D.96a}$$

$$e_z = 0 \quad \text{at} \quad y = 0,\ b \ , \tag{D.96b}$$

we can find the solution for TM waves;

$$e_z = E_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \ . \tag{D.97}$$

This is called as TM_{mn} mode. The other field components are as followings;

$$\begin{aligned} e_t &= -\hat{x}\frac{im\pi k_{mn} E_{mn}}{a\gamma_{mn}^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \\ &\quad -\hat{y}\frac{in\pi k_{mn} E_{mn}}{b\gamma_{mn}^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \tag{D.98a}$$

$$\begin{aligned} e_t &= -\hat{x}\frac{in\pi k_{mn} Y_{e,mn} E_{mn}}{b\gamma_{mn}^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \\ &\quad +\hat{y}\frac{im\pi k_{mn} Y_{e,mn} E_{mn}}{a\gamma_{mn}^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \ . \end{aligned} \tag{D.98b}$$

Simillar to TE waves, there exists cutoff frequency, and the relation among k, k_0, m and n is the same as that for TE modes. Also are cutoff frequency, cutoff wavelength and wavelength in a waveguide for TM modes the same as those for TE modes.

Appendix E

Transmission Line with Small Loss

Practical transmission lines always have some loss caused by the finite conductivity of the conductors and also loss that may be present in the dielectric material surrounding the conductors. Consider first the case when the conductors are surrounded by a dielectric with permittivity $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ but the conductors are still considered to be perfect. The presence of a lossy dielectric does not affect the solution for the scalar potential Φ. Consequently, the field solution is formally the same as for the ideal line, except that k_0 and Y_0 are replaced by $k = k_0(\epsilon'_r - j\epsilon''_r)^{1/2}$ and $Y = Y_0(\epsilon'_r - j\epsilon''_r)^{1/2}$, where the dielectric constant $\epsilon_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r = \epsilon/\epsilon_0$. For small losses such that $\epsilon''_r \ll \epsilon''_r$, the propagation constant is

$$jk \quad = \quad \alpha + \beta \quad = \quad j(\epsilon'_r)^{1/2} k_0 \Big(1 - j\frac{\epsilon''_r}{\epsilon'_r}\Big)^{1/2} \quad \sim \quad j(\epsilon'_r)^{1/2} k_0 + \frac{\epsilon''_r k_0}{2(\epsilon'_r)^{1/2}} \tag{E.1}$$

Thus

$$\alpha \quad = \quad \frac{\epsilon''_r k_0}{2(\epsilon'_r)^{1/2}} \tag{E.2}$$

$$\beta \quad = \quad (\epsilon'_r)^{1/2} k_0 \tag{E.3}$$

where α is the attenuation constant and β is the phase constant. The wave consequently attenuates according to $e^{-\alpha z}$ as it propagates in the $+Z$ direction.

It will be instructive to derive the above expression for α by means of a perturbation method that is widely used in the evaluation of the attenuation, or damping, factor for a low-loss physical system. This method is based on the assumption that the introduction of a small loss does not substantially perturb the field from its loss-free value. The known field distribution for the loss-free case is then used to evaluate the loss in the system, and from this the attenuation constant can be calculated. In the present case, if $\epsilon''_r = 0$, the loss-free solution is

$$\boldsymbol{E} \quad = \quad -\nabla_t \Phi e^{-jkz} \qquad \boldsymbol{H} \quad = \quad Y\hat{z} \times \boldsymbol{E} \tag{E.4}$$

where $k = (\epsilon'_r)^{1/2} k_0$ and $Y = (\epsilon'_r)^{1/2} Y_0$. When ϵ''_r is small but not zero, the imaginary part of ϵ, that is, ϵ'', is equivalent to a conductivity

$$\sigma \quad = \quad \omega\epsilon'' \quad = \quad \omega\epsilon_0\epsilon''_r \; . \tag{E.5}$$

A conductivity σ results in a shunt current $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ between the two onductors. The power loss per unit length of line is

$$P_l \quad = \quad \frac{1}{2\sigma}\int_S \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}^* dS \quad = \quad \frac{\omega\epsilon''}{2}\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* dS \tag{E.6}$$

where the integration is over the cross section of the line, and the loss-free solution for $\boldsymbol{E}$ is used to carry out the evaluation of P_l. Since loss is present, the power propagated along the line must decrease according to a factor $e^{-2\alpha z}$. The rate of decrease of power propagated along the line equals the power loss. If the power at $z = 0$ is P_0, then at z it is $P = P_0 e^{-2\alpha z}$. Consequently,

$$-\frac{\partial P}{\partial z} \quad = \quad P_l \quad = \quad 2\alpha P_0 e^{-2\alpha z} \quad = \quad 2\alpha P \tag{E.7}$$

which states that the power loss at any plane z is directly proportional to the total power P present at this plane. The power propagated along the line is given by

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_S \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\hat{z}\;dS \\ &= \frac{Y}{2}\mathrm{Re}\int_S \boldsymbol{E}\times(\hat{z}\times\boldsymbol{E}^*)\cdot\hat{z}\;dS \;=\; \frac{Y}{2}\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* dS\;. \end{aligned} \tag{E.8}$$

Hence the attenuation α is given by

$$\alpha \;=\; \frac{P_l}{2P} \;=\; \frac{\sigma}{2Y} \;=\; \frac{\omega\epsilon''}{2Y_0(\epsilon_r')^{1/2}} \;=\; k_0\frac{\epsilon_r''}{2(\epsilon_r')^{1/2}} \tag{E.9}$$

which is the same as the expression (E.2). For this example the perturbation method does not offer any advantage. However, often the field solution for the lossy case is very difficult to find, in which case the perturbation method is extremely useful and simple to carry out by comparsion with other methods. The case of transmission lines with conductors having finite conductivity is an important example of this, and is discussed below.

If the conductors of a transmission line have a finite conductivity, they exhibit a surface impedance

$$Z_m \;=\; \frac{1+j}{\sigma\delta_s} \tag{E.10}$$

where $\delta_s = (2/\omega\mu\sigma)^{1/2}$ is the skin depth. At the surface the electric field must have a tangential component equal to $Z_m\boldsymbol{J}_s$, where $\boldsymbol{J}_s$ is the surface current density. Therefore it is apparent that an axial component of electric field must be present, and consequently the field is no longer that of a TEM wave. The axial component of electric field gives rise to a component of the Poynting vector directed into the conductor, and this accounts for the power loss in the conductor. Generally, it is very difficult to find the exact solution for the fields when the conductors have finite conductivity. However, since $|Z_m|$ is very small compared with Z_0, the axial component of electriv field is also very small relative to the transverse components. Thus the field is very nearly that of the TEM mode in the loss-free case. The perturbation method outlined earlier may be used to evaluate the attenuation caused by finite conductivity.

The current density $\boldsymbol{J}_s$ is taken equal to $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$, where $\boldsymbol{n}$ is the unit outward normal to the conductor surface and $\boldsymbol{H}$ is the *loss-free* magnetic field. The power loss in the surface impedance per unit length of line is

$$\begin{aligned} P_l &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\;Z_m\oint_{S_1+S_2}\boldsymbol{J}_s\cdot\boldsymbol{J}_s^*\;dl \\ &= \frac{R_m}{2}\oint_{S_1+S_2}\big(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\big)\cdot\big(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^*\big)\;dl \\ &= \frac{R_m}{2}\oint_{S_1+S_2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*\;dl \end{aligned} \tag{E.11}$$

where $R_m = 1/\sigma\delta_s$ is the high-frequency surface resistance, and

$$\begin{aligned} \big(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\big)\cdot\big(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^*\big) &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}\times\big(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^*\big) \\ &= \boldsymbol{n}\cdot\big[(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*)\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{H}^*\big] \;=\; \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^* \end{aligned} \tag{E.12}$$

since $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}=0$ for the infinite-cinductivity case. The integration is taken around the periphery S_1+S_2 of the two conductors. The attenuation constant arising from conductor loss is thus

$$\alpha \;=\; \frac{P_l}{2P} \;=\; \frac{R_m\oint_{S_1+S_2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*dl}{2Z\int\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*dS} \tag{E.13}$$

where the power propagated along the line is given by

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\cdot\hat{z}\;dS \quad = \quad \frac{1}{2}Z\int \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^* dS \tag{E.14}$$

and Z is the intrinsic impedance of the medium; that is, $Z=(\mu/\epsilon)^{1/2}$.

When both dielectric and conductor losses are present, the attenuation constant is the sum of the attenuation constants arising from each cause, provided both attenuation constants are small.

Appendix F

S-Matrix of Reflector

反射率計の反射率および透過率を求めるにあたって、次のような S 行列を導入する。

$$\begin{pmatrix} a_1^- \\ a_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^+ \\ a_2^+ \end{pmatrix}$$

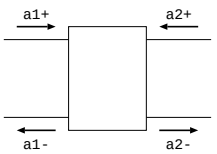


FIGURE F.1: S-Matrix

ここで、 $a_1^{\pm}$ 等は振幅であり、両端の特性インピーダンスを Z_0 として、

$$a_i^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} V_{i\pm} = \sqrt{Z_0} I_{i\pm} \quad (i = 1, 2) \tag{F.1}$$

と書ける。また、Maxwell.eq より $\rho_{12} = \rho_{21}$ である。さらに、S 行列を適用する部位で loss がなければ、エネルギー保存より S 行列は Unitary である。この行列を用いて、反射率計が理想的であった場合の反射率を求めよう。

反射率計は、両端にコネクタが付いており、本体内部は空気層と SiC 層に分かれている。まず、Input 側のコネクタの S 行列を

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

とすると、Output 側のコネクタの S 行列は

$$\begin{pmatrix} \rho_{22} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{11} \end{pmatrix}$$

となる。次に、本体の長さを L 、物質 n $(n = 1, 2)$ での microwave の波数を k_n 、減衰定数を α_n とすると、そこでの S 行列はそれぞれ

$$e^{-\alpha_1 x} e^{ik_1 x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e^{-\alpha_2 (L-x)} e^{ik_2 (L-x)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。また、 2 種類の物質間の S 行列を ρ'_{ij} とする。

以上にあげた行列の合成行列を求めれば、それが反射率計の S 行列となる。但し、ここで注意を要するのは、行列計算が普通の行列の積のようにはできないことである。 2 つの S 行列 A_{ij} , B_{lm} の合成行列の

計算結果を示すと

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{1 - A_{22}B_{11}} \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11}(A_{12}^2 - A_{11}A_{22}) & A_{12}B_{12} \\ A_{12}B_{12} & B_{22} + A_{22}(B_{12}^2 - B_{11}B_{22}) \end{pmatrix} \quad \text{(F.2)}$$

のようになる。ここで、後の計算を簡単にするために、Input 側のコネクタの S 行列を A_{ij} 、それ以外の４つの S 行列の合成行列を B_{lm} とする。以下、$\alpha_1 x \to \alpha_1$、$\alpha_2(L-x) \to \alpha_2$、$k_1 x \to k_1$、$k_2(L-x) \to k_2$ と略記する。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad \text{(F.3)}$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \rho_{22}\rho'_{11}e^{-2\alpha_2}e^{2ik_2}}$$
$$\times \begin{pmatrix} e^{-2\alpha_1}e^{2ik_1}(\rho'_{11} + \rho_{22}e^{-2\alpha_2}e^{2ik_2}) & \rho'_{12}\rho_{12}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}e^{i(k_1+k_2)} \\ \rho'_{12}\rho_{12}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}e^{i(k_1+k_2)} & \rho_{11} - \rho'_{11}e^{-2\alpha_2}e^{2ik_2}(\rho_{12}^2 - \rho_{11}\rho_{22}) \end{pmatrix} \quad \text{(F.4)}$$

このようにおくと、Eq.(F.2) で与えられている A_{ij}、B_{lm} の積が反射率計の S 行列 r_{ij} となる。今は $a_2^+ = 0$ であるから、Power の反射率と透過率はそれぞれ

$$R = |r_{11}|^2 = \frac{|A_{11}|^2 + |B_{11}|^2 - A_{22}B_{11} - A_{22}^* B_{11}^*}{1 + |A_{11}|^2|B_{11}|^2 - A_{22}B_{11} - A_{22}^* B_{11}^*}$$
$$T = |r_{12}|^2 = \frac{(1 - |A_{11}|^2)|B_{12}|^2}{1 + |A_{11}|^2|B_{11}|^2 - A_{22}B_{11} - A_{22}^* B_{11}^*}$$

となる。但し、ρ_{ij}、ρ'_{ij} の Unitary 条件を用いた。さらに、$|A_{ij}|^2$、$|B_{lm}|^2$ 、$A_{22}B_{11} + A_{22}^* B_{11}^*$ の式を代入することで、最終的な反射率と透過率の式を得る。

Appendix G

Principle of Magnetron Oscillator

G.1 Floquet's Theorem

In an infinite periodec structure, the field of Bloch wave repeats at every terminal plane except for a propagation factor $e^{-\gamma d}$, where d is the length of an unit cell. Since the choice of location of a terminal plane within an unit cell is arbitrary, we see that the field at any point in an unit cell will take on exactly the same value at a similar point in any other unit cell except for a propagation factor $e^{-\gamma d}$ from one cell to the next. Thus, if the field in the unit cell between $0 \geq z \geq d$ is $f(x, y, z)$, the field in the unit cell in the region $d \geq z \geq 2d$ must be

$$e^{-\gamma d} f(x, y, z - d) \ .$$

Consequently, the field in a periodic structure is described by a solution of the form

$$f(x, y, z) = e^{-\gamma z} f_p(x, y, z) \ , \tag{G.1}$$

where $f_p(x, y, z)$ is a periodic function of z with period d; for example,

$$f_p(x, y, z + nd) = f_p(x, y, z) \ .$$

The possibility of expressing the field in a periodic structure in the form given by Eq.(G.1) is often referred to as Floquet's theorem. From Eq.(G.1) we can see that the field at $z + d$ is related to the field at z as follows:

$$\begin{aligned} f(x, y, z + d) &= e^{-\gamma(z+d)} f_p(x, y, z + d) \\ &= e^{-\gamma(z+d)} f_p(x, y, z) \\ &= e^{-\gamma d} f(x, y, z) \ , \end{aligned}$$

which has the correct repetitive properties of a Bloch wave.

Any periodic function such as $f_p(x, y, z)$ can be expanded into an infinite Fourier series;

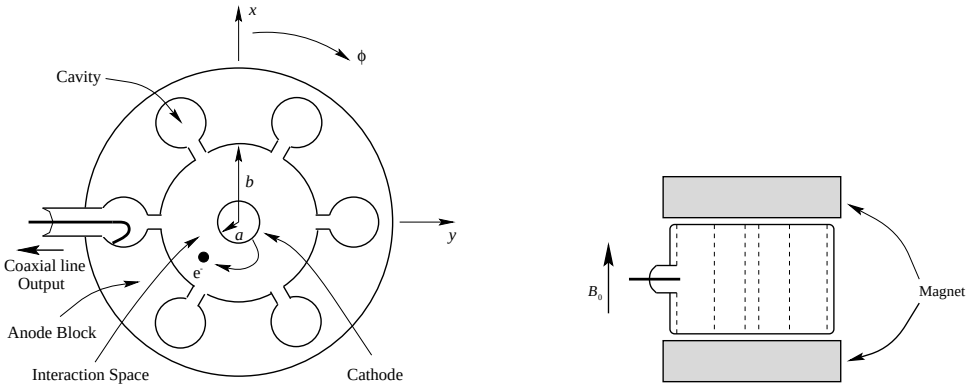
$$f_p(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{p,n}(x, y) e^{-2\pi i n z/d} \ , \tag{G.2}$$

where $f_{p,n}(x, y)$ is a function of x and y. Multiplying both side by $e^{2\pi i m z/d}$ and integrating over a unit cell, i.e., from 0 to d, we may have an expression;

$$f_{p,m}(x, y) = \frac{1}{d} \int_0^d dz \ f_p(x, y, z) e^{2\pi i m z/d} \tag{G.3}$$

because of the complete orthogonality of exponential functions; i.e.,

$$\int_0^d dz \ e^{-2\pi i (n-m) z/d} = d\delta_{mn} \ .$$



(a) Cross sectional shape of magnetron.

(b) Seen from the side of magnetron.

FIGURE G.1: A multicavity magnetron. A magnetron is consist of cathode, anode, coaxial line output and several cavities. permanent magnet is used to produce a strong magnetic field normal to the cross section.

The field in a periodic structure can be represented as

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{p,n}(x,y)e^{-i\beta z - 2\pi i n z/d} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{p,n}(x,y)e^{-i\beta_n z} \ , \end{aligned} \tag{G.4}$$

where $\gamma = i\beta$ and $\beta_n = \beta + 2n\pi/d$. Each term of this expansion is called as a spatial harmonic and has a propagation phase constant β_n. The corresponding phase velocity of n-th spatial harmonic is

$$v_{p,n} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta + 2n\pi/d} \ , \tag{G.5}$$

where we have supposed the time-dependence of the field is $e^{i\omega t}$. The group velocity of the n-th harmonic is

$$v_{g,n} = \frac{d\omega}{d\beta_n} = \left(\frac{d\beta_n}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = v_g \tag{G.6}$$

and is the same for all harmonics.

G.2 Magnetron Oscillator

This section is devoted to a qualitative description of the magnetron oscillator. The basic structute of a magnetron is a number of resonator arranged in a cylindrical pattern around a cylindrical cathode, as shown in FIG. G.1. A permanent magnet is used to produce a strong magnetic field normal to the cross section. The cathode is kept at a high negative voltage $-V_c$ and the anode at GND level. Electrons emitted from the cathode are accelerated toward the anode block, but the presence of the magnetic field B_0 produce a Lorentz force $-ev_rB$ in the azimuthal direction which causes the electron trajectory to be deflected in the same direction.

If the cathode radius is a and the anode radius is b, the potential at any radius r is

$$V(r) = -V_a \frac{\log(r/b)}{\log(a/b)} \ , \tag{G.7}$$

where we neglected the small perturbation of the field caused by the non-ideal cylindrical configuration of of the anode. The velocity of an electron at this radius is given by

$$v(r) = [-2\eta V(r)]^{\frac{1}{2}} \ , \tag{G.8}$$

where $\eta = e/m_e$. The electron can execute circular motion at the radius r around the cathode if the outward centrifugal force $m_e v^2/r$ and the radial electric field force $-eE_r = -eV_a/[r\log(a/b)]$ are exactly balanced by the inward magnetic force $ev(r)B_0$. For circular motion at radius r, we therefore have

$$\frac{m_e v^2}{r} - \frac{eV_a}{r\log(a/b)} = evB_0 \ , \tag{G.9}$$

or since $v = \omega_e r$, where ω_e is the electron's angular velocity,

$$\omega_e^2 - \eta B_0 \omega_e - \frac{\eta V_a}{r^2 \log(a/b)} = 0 \ . \tag{G.10}$$

For later reference, we solve Eq.(G.10) for the cahode-anode accelerating voltage V_a;

$$V_a = \left(\omega_e r^2 \log\frac{a}{b}\right)\left(\frac{\omega_e}{\eta} - B_0\right) \ . \tag{G.11}$$

This value of V_a will permit an electron to execute circular motion at a radius r and with an angular frequency ω_e under the magnetic field B_0.

If now there exists an ac electromagnetic field that propagates in the azimuthal direction with a phase velocity equal to the electron velocity $\omega_e r$, strong interaction between the field and the circulating electron cloud can take place.

The multicavity magnetron has a periodic structure in the azimuthal, or ϕ, direction. If there are N cavities, the period in ϕ is $2\pi/N$. According to Floquet's theorem, each field component can be expanded in the following form;

$$\psi(r,\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\phi - 2\pi i n\phi/p}\psi_n(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(r) e^{-i\beta\phi - 2\pi n N\phi} \ , \tag{G.12}$$

where the period $p = 2\pi/N$ and

$$\psi_n(r) = \frac{N}{2\pi}\int_0^{2\pi/N} d\phi \ \psi(r,\phi) e^{2i\pi n\phi/p} \ . \tag{G.13}$$

But since the structure closes on itself,

$$\psi(r, 2\pi) = \psi(r, 0) \ . \tag{G.14}$$

The only possible values of β that will make $2\pi\beta$ equal to a multiple of 2π are

$$\beta_m = m, \quad \text{where} \quad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \cdots \ . \tag{G.15}$$

With the value of β specified, a corresponding frequency ω can be specified, say ω_m, which is the resonant frequency for the m-th mode. Thus a typical field component will have the form

$$\psi_m(r,\phi)e^{i\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(r) e^{-i(m+nN)\phi + i\omega_m t} \tag{G.16}$$

The phase velocity in the azimuthal direction ϕ for the n-th spatial harmonic of the m-th resonant mode is

$$v_{p,mn} = \frac{\omega_m r}{m + nN} \tag{G.17}$$

at the radius r; that is, angular phase velocity is $\omega_m/(m + nN)$.

The usual mode employed in a magnetron oscillator is the π-mode, that is, the phase change between adjacent cavities is π radian. Each cavity with its input gap acts as a short-circuited transmission line of a quarter wavelength long, and hence has a maximum electric across the gap. For the π-mode the field is oppositely directed at adjacent cavities, and $\beta_m\phi = m\phi$ must be equal to π for a change in ϕ equal to one period $2\pi/N$. Hence $m = N/2$, and the phase velocity for the n-th spatial haemonic becomes

$$v_{p,nN/2} = \frac{2\omega_{N/2} r}{N(1 + 2n)} \ . \tag{G.18}$$

In order to obtain interaction between the electron cloud and one of the spatial harmonics at a particular radius r, we must choose V_a so that

$$\omega_e r = v(r) = v_{p,nN/2} \ , \quad \text{or} \quad \omega_e = \frac{2\omega_{N/2}}{N(1 + 2n)} \ . \tag{G.19}$$

The required voltage V_a to obtain syncronism between the electron cloud and the ac field may be found from Eq.(G.11). If we choose a value of r midway between the cathode and anode, thet is, $r = (a+b)/2$, and note that in typical magnetrons $b - a$ is not so large that $\log(b/a) \approx 2(b - a)/(a + b)$, we obtain

$$V_a = \frac{\omega_m}{m + nN} \frac{b^2 - a^2}{2} \left(B_0 - \frac{\omega_m}{\eta(m + nN)} \right) \tag{G.20}$$

in general, and

$$V_a = \frac{2\omega_{N/2}}{N(1 + 2n)} \frac{b^2 - a^2}{2} \left(B_0 - \frac{2\omega_{N/2}}{\eta N(1 + 2n)} \right) \tag{G.21}$$

for the π-mode, where $m = N/2$.

From a physical viewpoint the syncronism between the electron cloud and the n-th spatial harmonic of the ac field implies that those electrons located in the field where E_ϕ acts to slow down the electrons will give up their energy to the field. As the electrons slow down, they move radially outward and eventually are intercepted by the anode. Electrons that are accelerated by the ac field move in toward the cathode until they get into a proper phase relationship such as to give up their energy to the field. When the latter happens, they begin to slow down and spiral out toward the anode. Thus the only electrons that are lost from the interaction space are those that have given up a net amount of their energy to the ac field.