

# 強制力の働く調和振動子が奏でる 光の回折的振る舞い

理化学研究所放射光科学研究センター

平岩 聡彦

2020.11.26

加速器セミナー@京大

# 自己紹介

- 京都大学原子核ハドロン研究室出身。
- 修士課程では、J-PARC E03実験（ $\Xi$ 原子からのX線測定実験）で用いるエアロゲルチェレンコフカウンターの開発を行った。
- 博士課程では、J-PARC E15実験（K中間子原子核探索実験）に参加し、主に円筒型ドリフトチェンバーを担当していた。また、J-PARCの初期の頃から現場で実験準備をしていて、ハドロン実験施設への初ビームにも立ち会うことが出来た。
- その後、阪大RCNPのLEPSグループに移り、ヘリウム4原子核からの $\phi$ 中間子光生成に関するデータ解析を行って、学位を取得。
- 阪大RCNPでのポスドクを経て、現在に至る。
- 担当は、ビームダイナミックスと加速器機器の精密アラインメント。

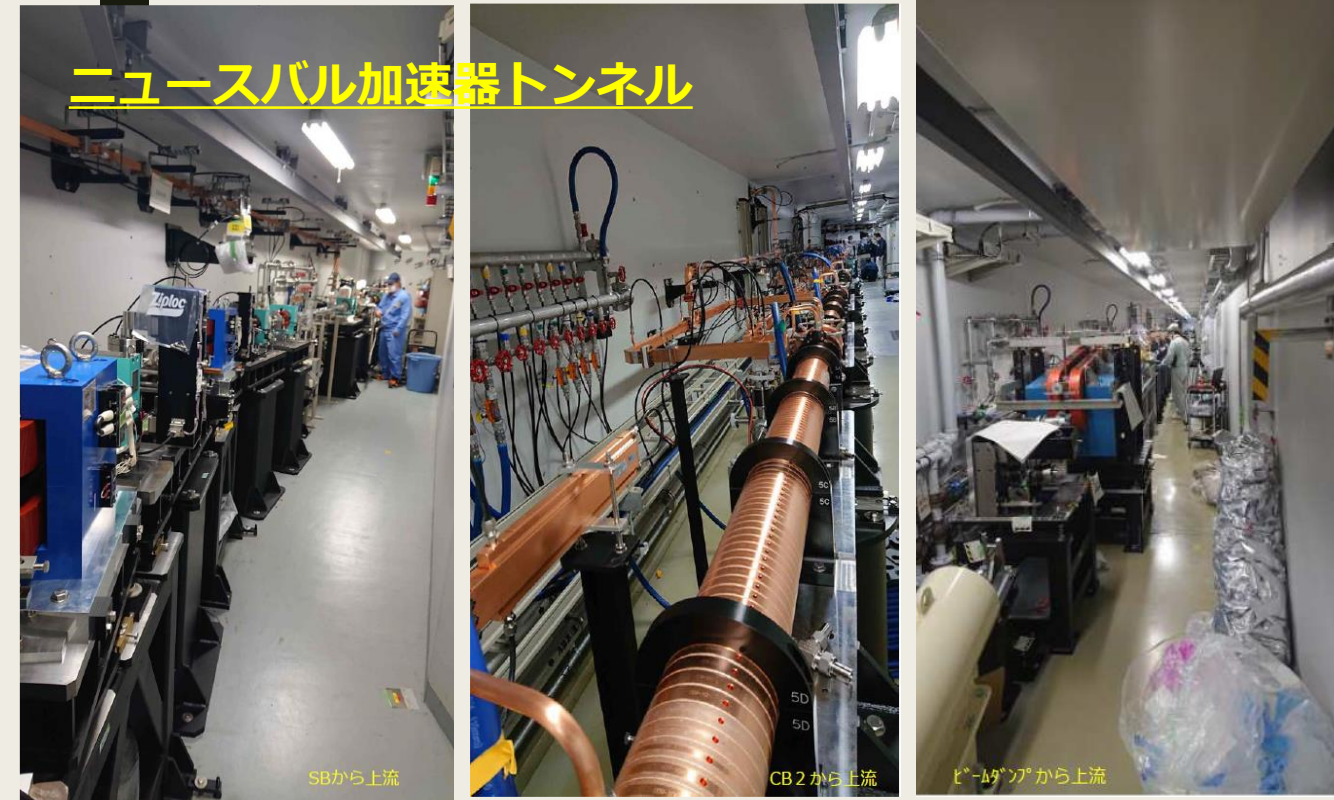
本セミナーでは、加速器分野に転身しての最初の仕事である次世代リング型光源加速器における安全なビームの廃棄方法を検討する中で“偶然に”発見することができた古典物理（力学と光学）にまつわる話をします。

# 最近のやっていること

- アライメント関係：
  - ニュースバル新入射器の建設
- ビーム物理関係：
  - SPring-8-IIIに向けたラティスの設計

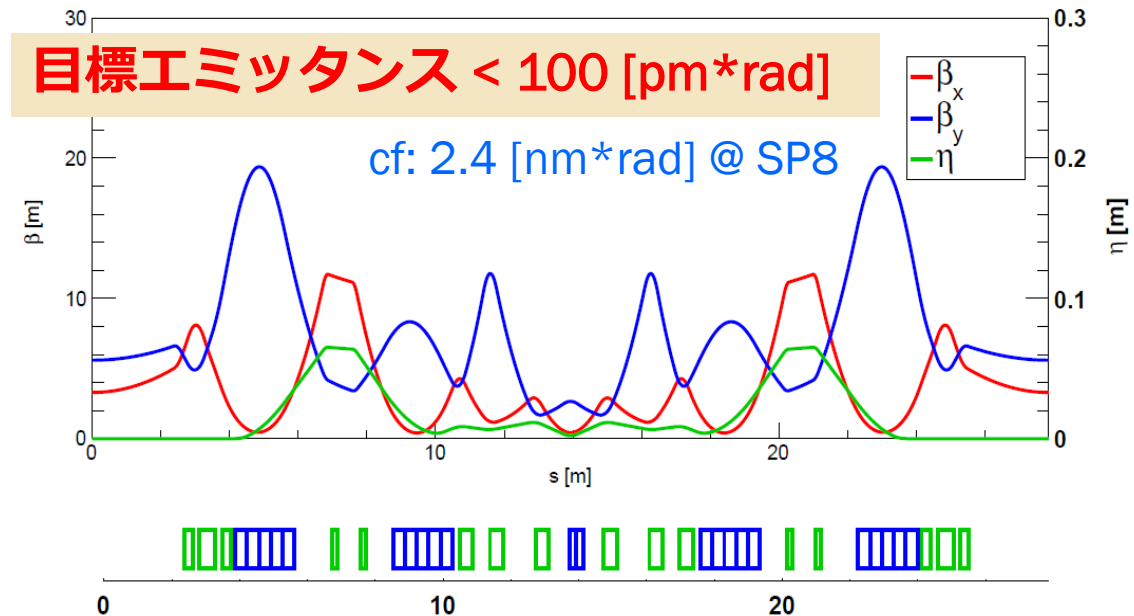


## ニュースバル加速器トンネル



目標エミッタンス < 100 [pm\*rad]

cf: 2.4 [nm\*rad] @ SP8



# 論文の紹介

DOI: [10.1103/PhysRevE.102.032211](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.032211)

- 本セミナーの内容は、Phys. Rev. Eに掲載されています。
- 気軽に読める内容なので、ぜひ読んでみて下さい。
- 物理学会誌にも近々記事が載る予定なので、こちらも併せて読んでみて下さい。

The screenshot shows the article page on the Physical Review E website. The header includes the journal name 'PHYSICAL REVIEW E' and its subtitle 'covering statistical, nonlinear, biological, and soft matter physics'. A navigation bar contains links for Highlights, Recent, Accepted, Collections, Authors, Referees, Search, Press, About, and Staff. The article title is 'Forced harmonic oscillator interpreted as diffraction of light' by Toshihiko Hiraiwa, Kouichi Soutome, and Hitoshi Tanaka, published in Phys. Rev. E 102, 032211 on September 10, 2020. The page features a '1' badge, social media sharing icons, and buttons for Article, References, No Citing Articles, PDF, HTML, and Export Citation. The abstract section is partially visible, starting with 'We investigate a simple forced harmonic oscillator with a natural frequency varying with time. It is shown that the time evolution of such a system can be written in a simplified form with Fresnel integrals, as long as the variation of the natural frequency is sufficiently slow compared to the time period of oscillation. Thanks to such a simple formulation, we found that a forced harmonic oscillator with a slowly varying natural frequency is essentially equivalent to diffraction of light.' A 'Check for updates' button is located at the bottom right of the page.

# Outline

- 円型加速器における電子ビームの運動
  - ベータートロン振動
  - チューン
  - Off-momentum粒子の運動（分散関数、クロマティシティ）
- 回折限界光源加速器における電子ビームの安全な廃棄方法について
  - 回折限界光源加速器とは？
  - キッカーシステムを用いた電子ビームの廃棄方法
- 強制振動と光の回折の類似性
  - 固有振動数が時間的にゆっくり変化する場合の強制振動
  - 光の回折との類似性
- まとめ

# 円型加速器における電子ビームの運動

# 水平（垂直）方向の運動

- リング中の各粒子は、**四極磁石が作るポテンシャルの中を振動**しながら周回している。
- 平衡軌道（単に閉軌道と言う。）からの変位 $x(s)$ は、**Hillの方程式**に従う：

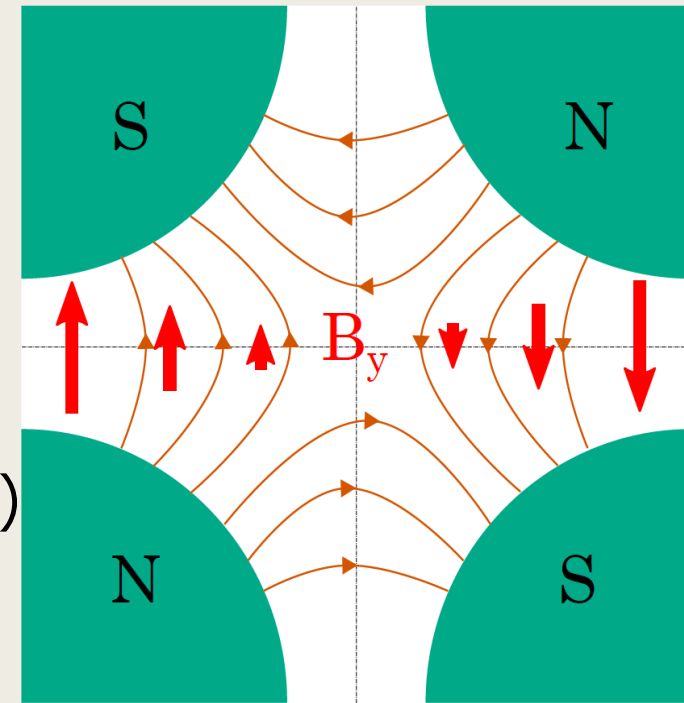
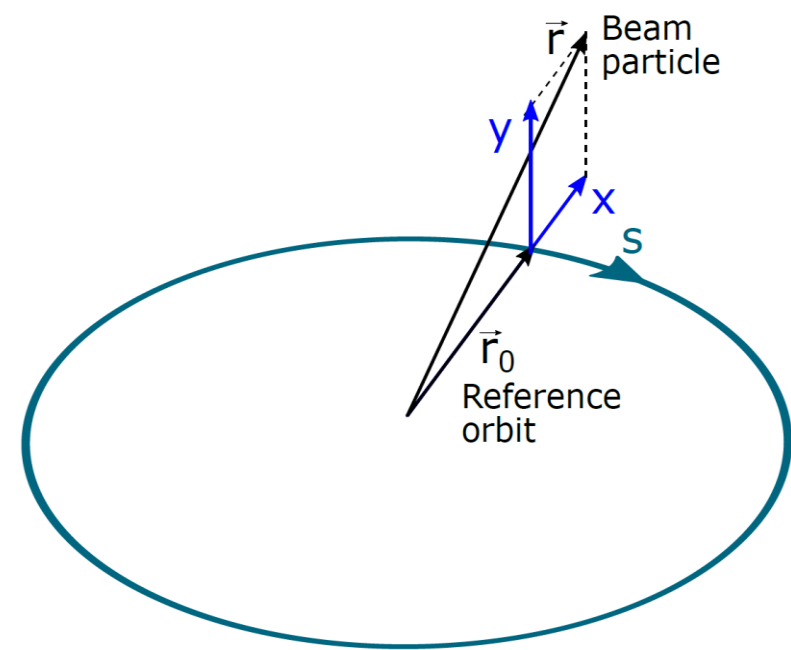
$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = 0, \quad K(s + C) = K(s)$$

(C: リングの周長)

- 振動のバネ定数 $K(s)$ は、四極磁石と偏向磁石（水平方向のみ）が置かれているところのみで有限の値を取る：

$$K(s) = \begin{cases} \frac{1}{[B\rho]} \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=y=0} & (s) \quad \text{(四極磁石の場合)} \\ & \text{強い収束 (発散) 効果} \\ \frac{1}{\rho^2(s)} & \text{(偏向磁石の場合、水平方向のみ)} \\ & \text{弱い収束効果} \end{cases}$$

( $[B\rho]$ : リングのMagnetic Rigidity)



# ベータートロン振動

- Hillの方程式の一般解は、エンベロープ関数 $\beta(s)$ を用いて、次のように書ける：

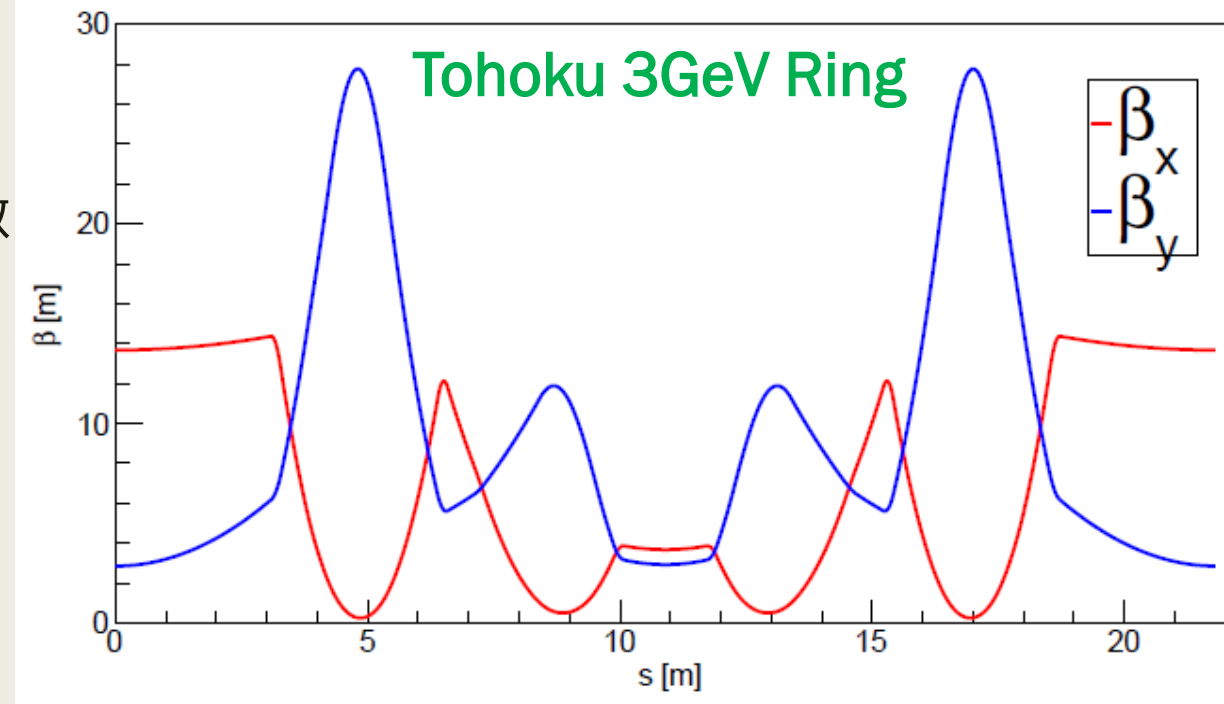
$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s)]$$

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{\beta(\tilde{s})} + \phi_0 \quad (A, \phi_0: \text{定数})$$

ただし、 $\beta(s+C) = \beta(s)$ である。

- 上式が示すように、リングを周回する電子は、 $A\sqrt{\beta(s)}$ を包絡線として振動している（ベータートロン振動、右上図：エンベロープ関数の例）。
- 位相を示す式および右上図より、位相の進みは一定ではないことが分かる。ただし、エンベロープ関数 $\beta(s)$ は周期関数なので、リング一周当りの位相の進みは一定となる。そこで、リング一周当りの位相の進みを $2\pi$ で割ったもの（つまりリング一周当りの振動回数）のことをベータートロンチューン（しばしば $\nu$ と表記する。）と呼ぶ：

$$\nu \equiv \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta(s)}$$





# Off-momentum軌道

- Off-momentum粒子 ( $\delta \equiv \delta p/p \neq 0$ ) が偏向磁石により曲げられる角度は、on-momentum粒子のとは異なる (右図)。
- $|\delta| \ll 1$  の場合、運動方程式は次のようになる：

$$x'' + \left[ \frac{1}{\rho^2(s)} + \frac{1}{[B\rho]} B^{(1)}(s) \right] x = \frac{1}{\rho(s)} \delta$$

Off-momentum粒子が  
余分に受ける力

(四極磁場 $B'$ にも $1 - \delta$ の因子が掛かるが、2次の微小量となるため無視している。)

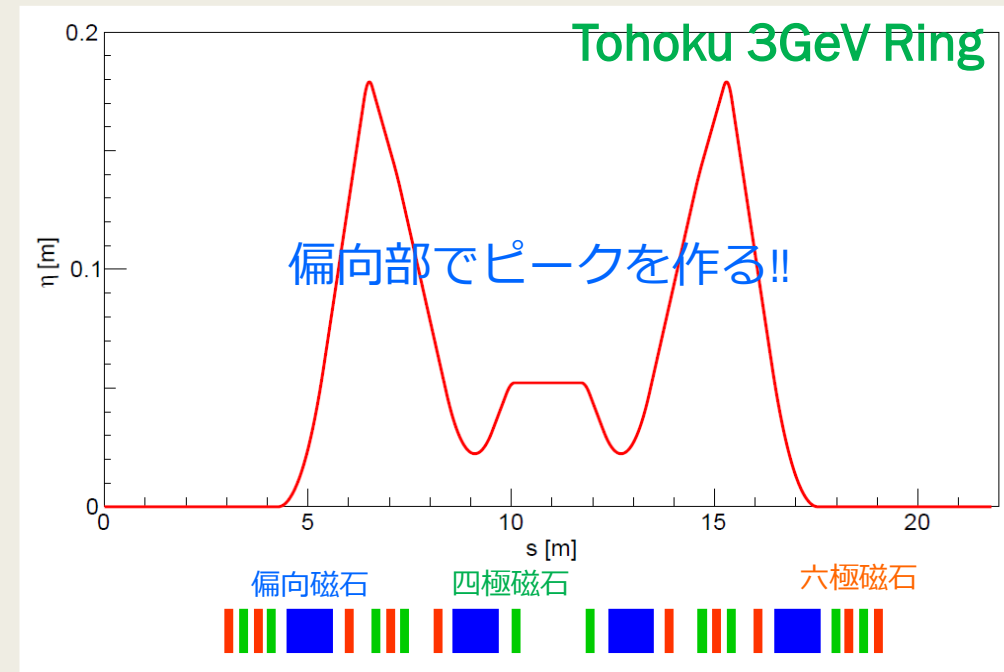
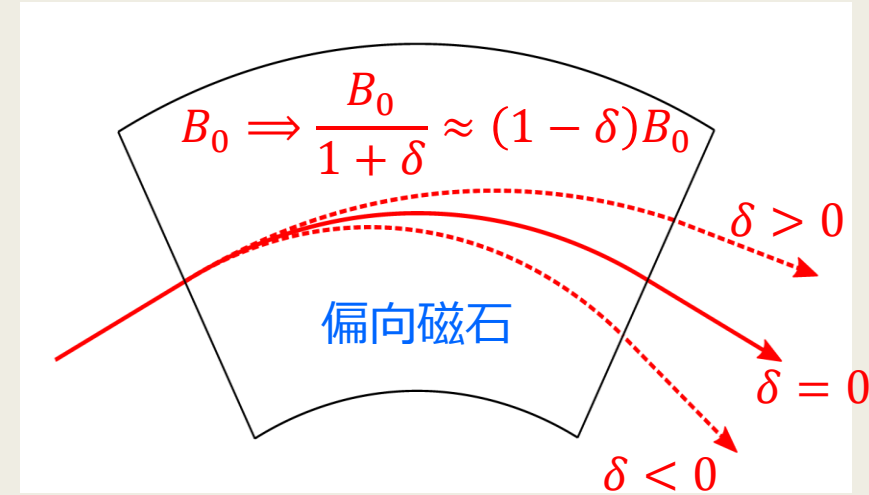
- 非斉次方程式の解 $x_{\delta \neq 0}$ は、斉次方程式の解 $x_{\delta = 0}$ に特解 $\Delta x$ を加えたものになる：

$$x_{\delta \neq 0}(s) = x_{\delta = 0}(s) + \Delta x(s)$$

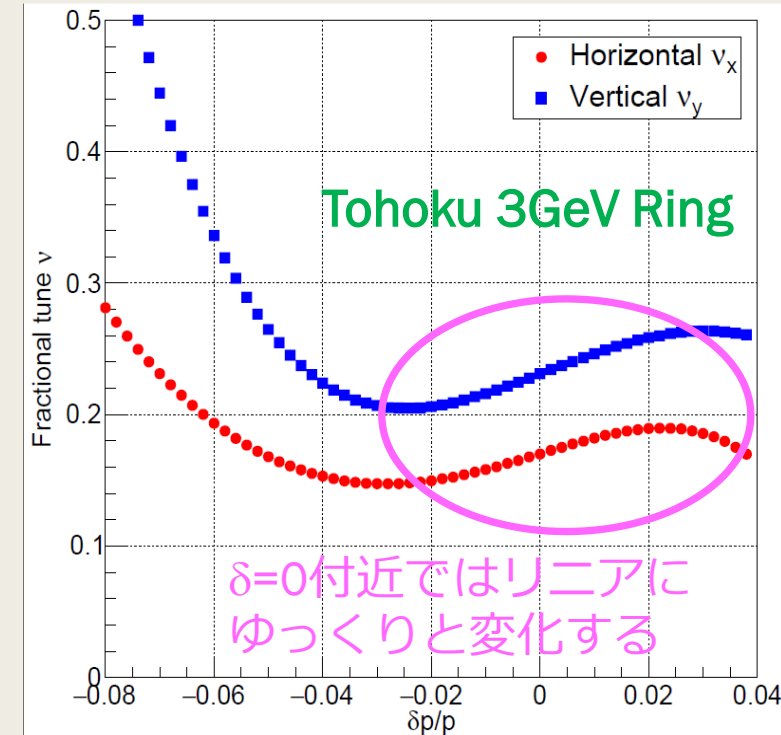
$\delta \neq 0$ によって引き起こされる軌道のズレ

$$\Delta x(s) \equiv \delta \times \eta(s)$$

- 上記の $\eta(s)$ のうち、 $\eta(s + C) = \eta(s)$ を満たすもの (つまり閉軌道になるもの) を分散関数 (Dispersion Function) と呼ぶ (右図)。
- Off-momentum粒子は、分散関数で表される軌道の周りをベータートロン振動している。



# クロマチシティ (色収差)



- $\delta \neq 0$ だと、四極磁石による収束力 $K(s)$ も変化する：

$$K(s) \Rightarrow \frac{K(s)}{1 + \delta} \approx (1 - \delta)K(s)$$

- これに伴い、ベータートロンチューンも変化する：

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \oint \Delta K(s)\beta(s)ds = -\frac{1}{4\pi} \oint K(s)\beta(s)ds \times \delta \equiv \xi \times \delta$$

- 運動量変化 $\delta$ に対するチューンの変化率 $\xi$ のことを **クロマチシティ (Chromaticity、色収差)** と言う (右図)。
- 偏向磁石と四極磁石のみで構成されるリングでは、クロマチシティは大きな負の値を取る。
- 通常は、分散部に六極磁石を置いてクロマチシティを補正 (つまりゼロに近づける) する：

水平方向

$$\xi_x = \frac{1}{4\pi} \oint [2b_2(s)\eta(s) - K(s)]\beta_x(s)ds = 0$$

六極磁石      四極磁石

$$b_2(s) \equiv \frac{1}{2! [B\rho]} \left. \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right|_{x=y=0} (s)$$

実際のリングでは、“Head-tail不安定性”を抑制するために、クロマチシティをわざかに正の値に設定しておく。

# ベータートロン振動 $\Leftrightarrow$ 単振動

- 規格化座標 $(X, P)$ の導入： 
$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}$$
 ただし、 $\alpha = -\beta'/2$ ,  $p_x = dx/ds$

- このとき、ベータートロン振動は次のように書ける：

$$\begin{cases} X(s) = A \cos[\varphi(s)] \\ P(s) = A \sin[\varphi(s)] \end{cases}$$

ベータートロン振動は、規格化座標系で見ると円運動になる。

- 規格化座標で記述したハミルトニアンに正準変換を施し、新しい独立変数として $\theta = s/(2\pi R)$  ( $R$ : リングの平均半径) を導入すると、新しいハミルトニアン $\tilde{H}$ および正準方程式は次のようになる：

$$\tilde{H}(\psi, J; \theta) = \nu J$$

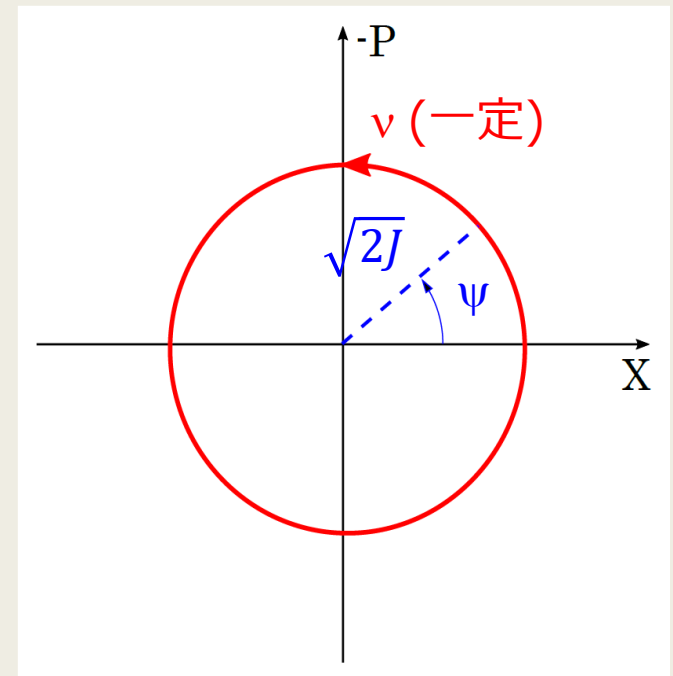
Action-Angle変数

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J} = \nu \\ \frac{dJ}{d\theta} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi} = 0 \end{cases}$$

- 元の変数との関係：

$$\begin{cases} X = \sqrt{2J} \cos \psi \\ P = -\sqrt{2J} \sin \psi \end{cases}$$

半径 $\sqrt{2J}$ 、一定角速度 $\nu$ の円運動と見なすことが出来る!!



# 回折限界光源加速器における電子ビーム の安全な廃棄方法について

# 回折限界光源リングとは？

- 光ビームの輝度 (Brilliance) :

$$B = \frac{F}{4\pi^2 \Sigma_x \Sigma'_x \Sigma_y \Sigma'_y}$$

- 光ビームは固有のエミッタンス (位相空間面積) を持っていて、それ以上は小さく絞ることは出来ない。  
→ 回折限界 :

$$\varepsilon_{ph} = \frac{\lambda}{4\pi}$$

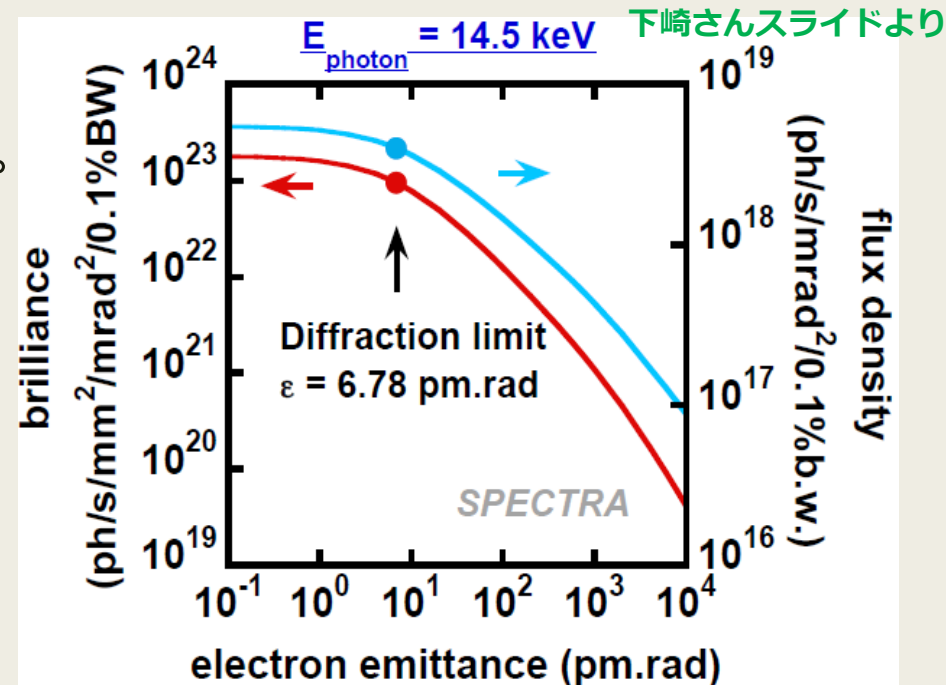
- 電子ビームのエミッタンスを回折限界と同程度まで下げると、輝度・フラックス密度は飽和する (右図)。
- ← このように、輝度が飽和するまで電子ビームのエミッタンスを小さくしたリング型光源加速器を「回折限界光源リング」と言う。

$F$ : 単位時間、単位立体角、0.1%バンド幅当りの光束

$\Sigma^2 = \sigma_e^2 + \sigma_{ph}^2$ : 実空間での光ビームの実効サイズ

$\Sigma'^2 = \sigma_e'^2 + \sigma_{ph}'^2$ : 運動量空間での光ビームの実効サイズ

$\Sigma\Sigma'$ : 光ビームの実効エミッタンス



輝度とフラックス密度の  
エミッタンス依存性

$E_{\text{electron}} = 8 \text{ GeV}$

$\beta_x = \beta_y = 0.65 \text{ m}, D = 0$

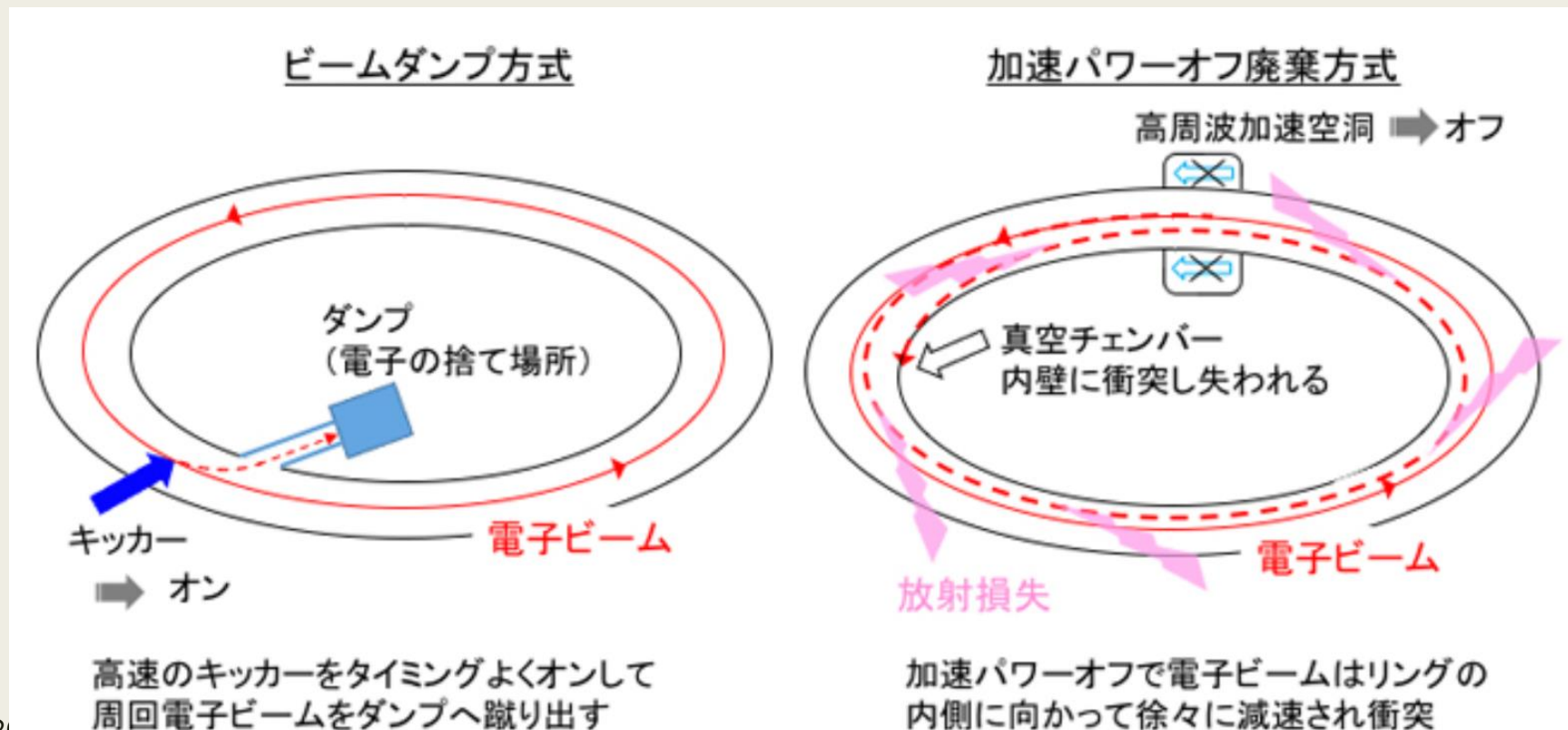
@ SP8 standard ID発光点

$\lambda_u = 32 \text{ mm}, L = 4.5 \text{ m}, K_{\text{max}} = 2.5$

# 電子蓄積リングにおけるビームの廃棄方法

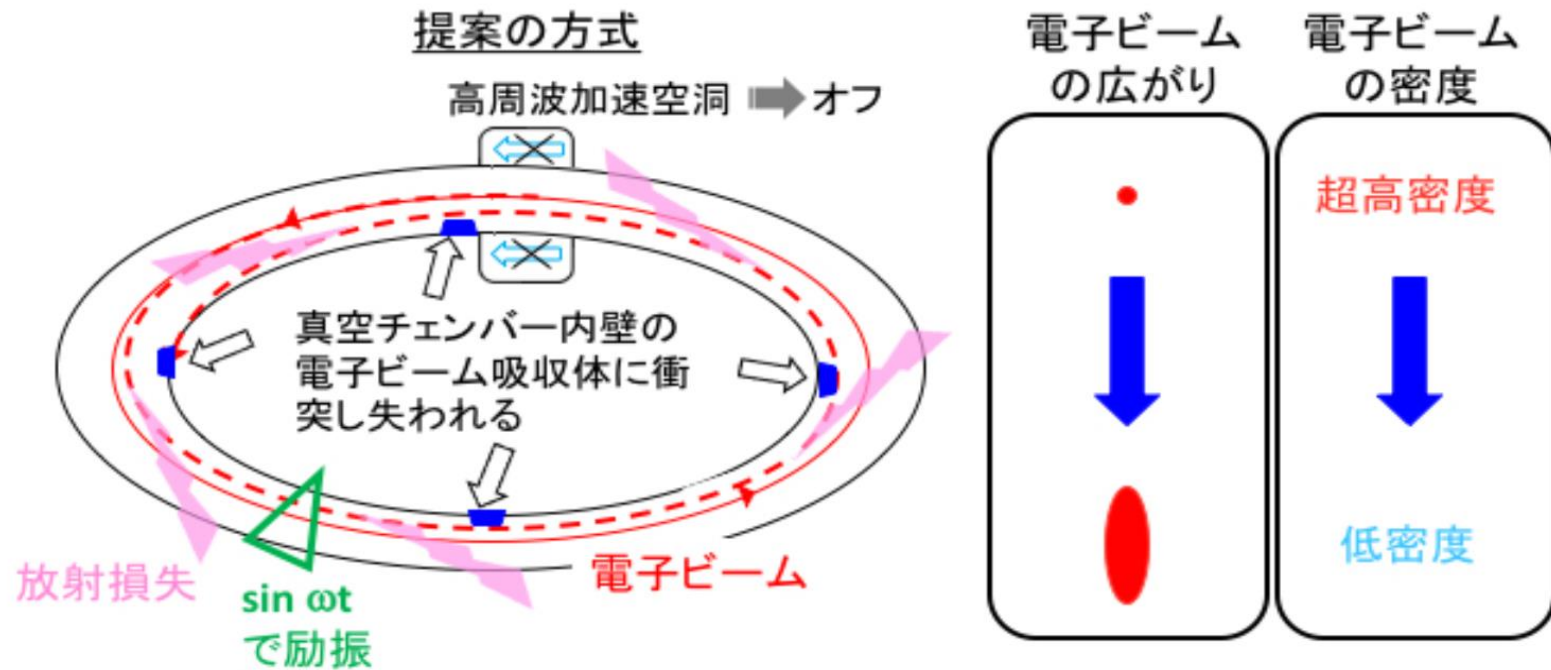
- 二つの方法：「**ビームダンプ方式**」と「**加速パワーオフ廃棄方式**」
- → 前者は、ビームダンプや高速キッカー電磁石を用意する必要がある。
- → 後者は、加速パワーを遮断するだけで電子ビームを素早く廃棄できる。一方で、電子ビームの衝突により真空チェンバーが損傷する恐れ※がある。

※ 特に、回折限界光源リングのような高密度ビームを扱う場合は注意が必要。



# 回折限界リングにおける新たなビーム廃棄手法

- 「加速パワーオフ廃棄方式」は、そのままでは回折限界リングに適用できない。
- → リングの一ヶ所に摂動器（ストリップラインキッカー）を設置し、電子ビームを廃棄する際は、摂動器でビームサイズを広げてから廃棄する。
- → 更に、電子ビームが衝突する分散ピーク部には、電子ビーム吸収体（アブソーバー）を仕込んでおき、真空チェンバーを保護する。



加速パワーオフで摂動器で電子ビーム固定周波数で蹴る。同時に、電子ビームはリングの内側に向かって徐々に減速され、十分空間的に広がった電子ビームは設置された電子ビーム吸収体に分散して衝突

- ✓ 加速パワーオフからビームが吸収体に衝突するまでの間に、いかに効率的にビームを広げられるかがこのシステム設計の肝となる。
- ✓ ただし、放射損失によるビームエネルギー減少で、ベータトロンチューンは時々刻々と変化していく。
- ✓ → このとき、摂動器の最適な周波数はどうなる？

# 固有振動数が時間的にゆっくり変化する 場合の強制振動



# 固有振動数がゆっくり変化する場合の強制振動

- 系の固有振動数がゆっくりと変化する場合、外力の振動数に対して、系がどのように応答するのかを考えてみる。

- 解くべき運動方程式：

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = F(t) \quad \cdots(1)$$

- 固有振動数 $\omega(t)$ は、加速器の例に倣って、ゆっくりとリニアに変化するものとする：

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_1 t = 2\pi(\nu_0 + \nu_1 t) \quad \cdots(2)$$

$$\epsilon \equiv \sqrt{\omega_1 / \omega_0^2} \ll 1 \quad (\omega_1 > 0 \text{を仮定}) \quad \cdots(3)$$

- 外力 $F(t)$ についても、加速器の例に倣い、ある時間窓 $\Delta$ の間だけ系に与えられるものとする：

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ F_0 \cos(\omega_f t + \phi_0) & (0 \leq t \leq \Delta) \\ 0 & (t > \Delta) \end{cases} \quad \cdots(4)$$

# グリーン関数を用いた解法

- 式(1)のような非斉次微分方程式は、グリーン関数法を用いて解くことができる。

- グリーン関数法：

線形作用素  $\hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2(t)$  を定義して

$$\hat{L}G(t, t') = \delta(t - t') \quad \cdots \cdots (5)$$

を満たす関数  $G(t, t')$  (グリーン関数と言う) が見つければ、非斉次方程式の特解は

$$x(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, t') F(t') dt' \quad \cdots \cdots (6)$$

で求められる。なお、一般解は、この特解と対応する斉次方程式 ( $\hat{L}x = 0$ ) の一般解を足し合わせたものになる。

- 式(1)の運動方程式のグリーン関数は、以下のようになる (詳しい導出は原著論文を参照のこと)：

$$G(t, t') = \frac{-i}{2\sqrt{\omega(t)\omega(t')}} \exp \left[ i \int_{t'}^t \omega(\tau) d\tau \right] + \text{c. c.} \quad \cdots \cdots (7)$$

# 運動方程式の特解

- 式(7)のグリーン関数を用いれば、運動方程式の特解は次のようになる：

$$x(t) = \frac{iF_0}{4\omega_0} e^{-i\varphi(t)} \times h(t; \omega_f) + \text{c. c.}, \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau \quad \dots (8)$$

周波数変調しながら進行していく波

- 関数 $h(t; \omega_f)$ は「エンベロープ関数」で、外力の振動数 $\omega_f$ を与えた時の振動振幅の時間発展を記述する：

$$h(t; \omega_f) = A(t) \times \tilde{h}(\omega_f) \quad \dots (9)$$

- 関数 $A(t)$ は「減衰因子 (Damping factor)」で、以下で与えられる：

$$A(t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1 t}} \quad \dots (10)$$

注：減衰因子は、自由空間を周波数変調しながら進行する波に固有のものであり、外力の有無に関係なく存在する。（ランダウ＝リフシッツ「力学」§49）

- 関数 $\tilde{h}(\omega_f)$ は「**応答関数 (Response function)**」であり、外力の振動数 $\omega_f$ に対する系の応答を表す：

$$\tilde{h}(\omega_f) = \int_0^{\Delta} A(\tau) e^{i\varphi(\tau)} f(\tau; \omega_f) d\tau \quad \cdots \cdots (11)$$

ただし、 $f(t; \omega_f)$ は $F(t) = (F_0/2)f(t; \omega_f)$ で定義される関数である。

- 応答関数 $\tilde{h}(\omega_f)$ は、“ある近似”をすると、更にシンプルな形で書ける。→ 次ページ

# 被積分関数中の減衰因子は $A(\tau) \sim 1$ と近似できる

- 減衰因子：

$$A(t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1 t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon \sqrt{\omega_1 t}}}$$

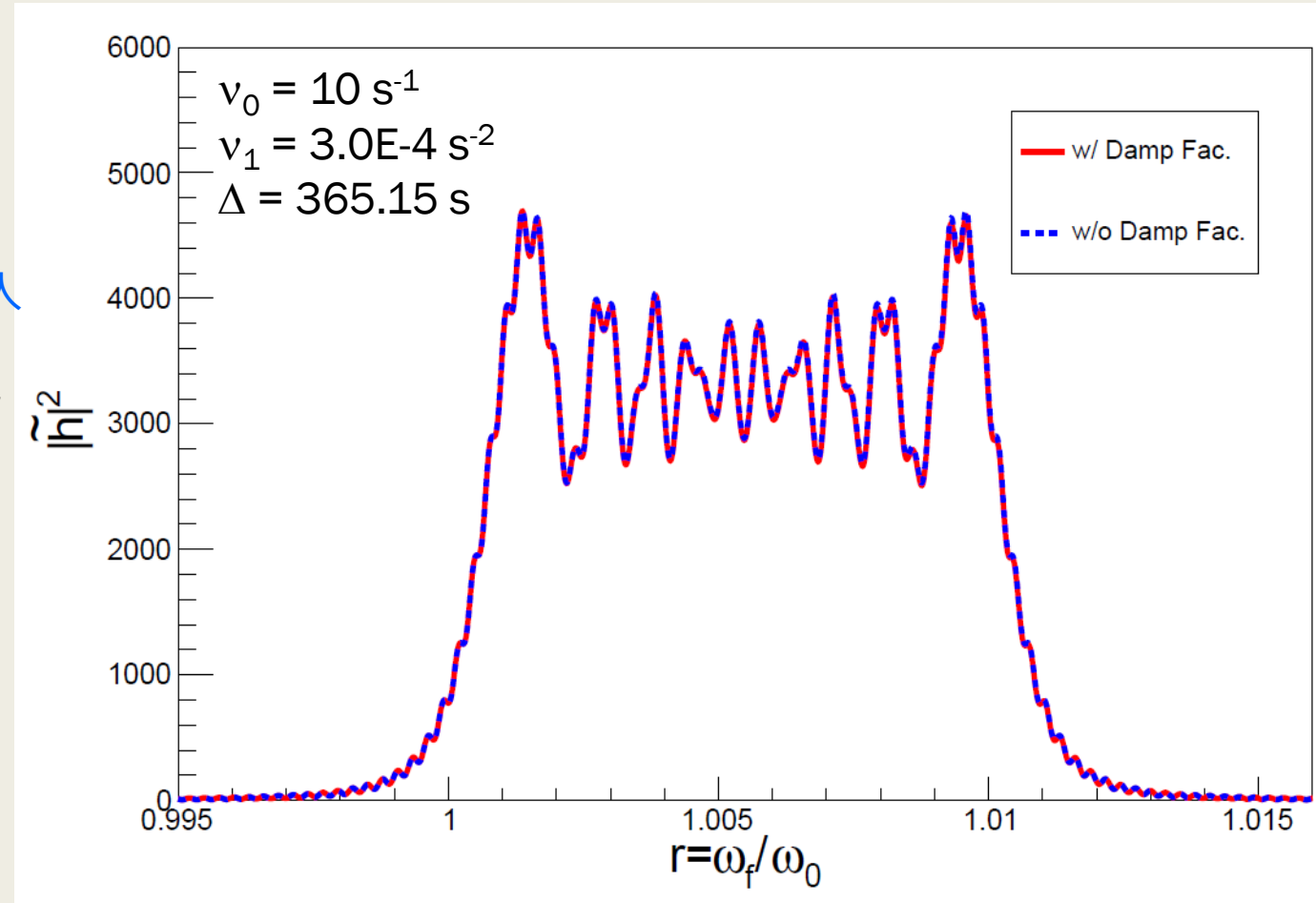
- 応答関数： 新たな変数 $r \equiv \omega_f / \omega_0$ を導入

$$\tilde{h}(r) = \int_0^{\Delta} A(\tau) \exp \left[ i \left\{ \omega_0 (1 - r) \tau + \frac{\omega_1}{2} \tau^2 \right\} \right] d\tau \quad \text{[1]}$$

指数関数の肩に $\tau^2$ の項がある。

→  $\tau$ の小さな所 ( $\tau \lesssim 1/\sqrt{\omega_1}$ ) しか積分に寄与しない!!

- 右図：減衰因子有り/無しでの応答関数の比較



# Simplified form of response function $\tilde{h}$

- 応答関数 $\tilde{h}(r)$ は、被積分関数の中の減衰因子を $A(\tau) \sim 1$ とすることで、シンプルな形で書くことができる：

$$\tilde{h}(r) \simeq \int_0^\Delta \exp \left[ i \left\{ \omega_0 (1-r) \tau + \frac{\omega_1}{2} \tau^2 \right\} \right] d\tau$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\nu_1}} \exp \left( -i \left[ \frac{\pi \{ \nu_0 (1-r) \}^2}{\nu_1} + \right] \right) \times [ \{ C(u_2) - C(u_1) \} + i \{ S(u_2) - S(u_1) \} ]$$

“フレネル積分”

ただし、

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\sqrt{2}\nu_0(1-r)}{\sqrt{\nu_1}} \\ u_2 = u_1 + \sqrt{2\nu_1}\Delta \end{cases}$$

.....(12)

.....(13)

である。

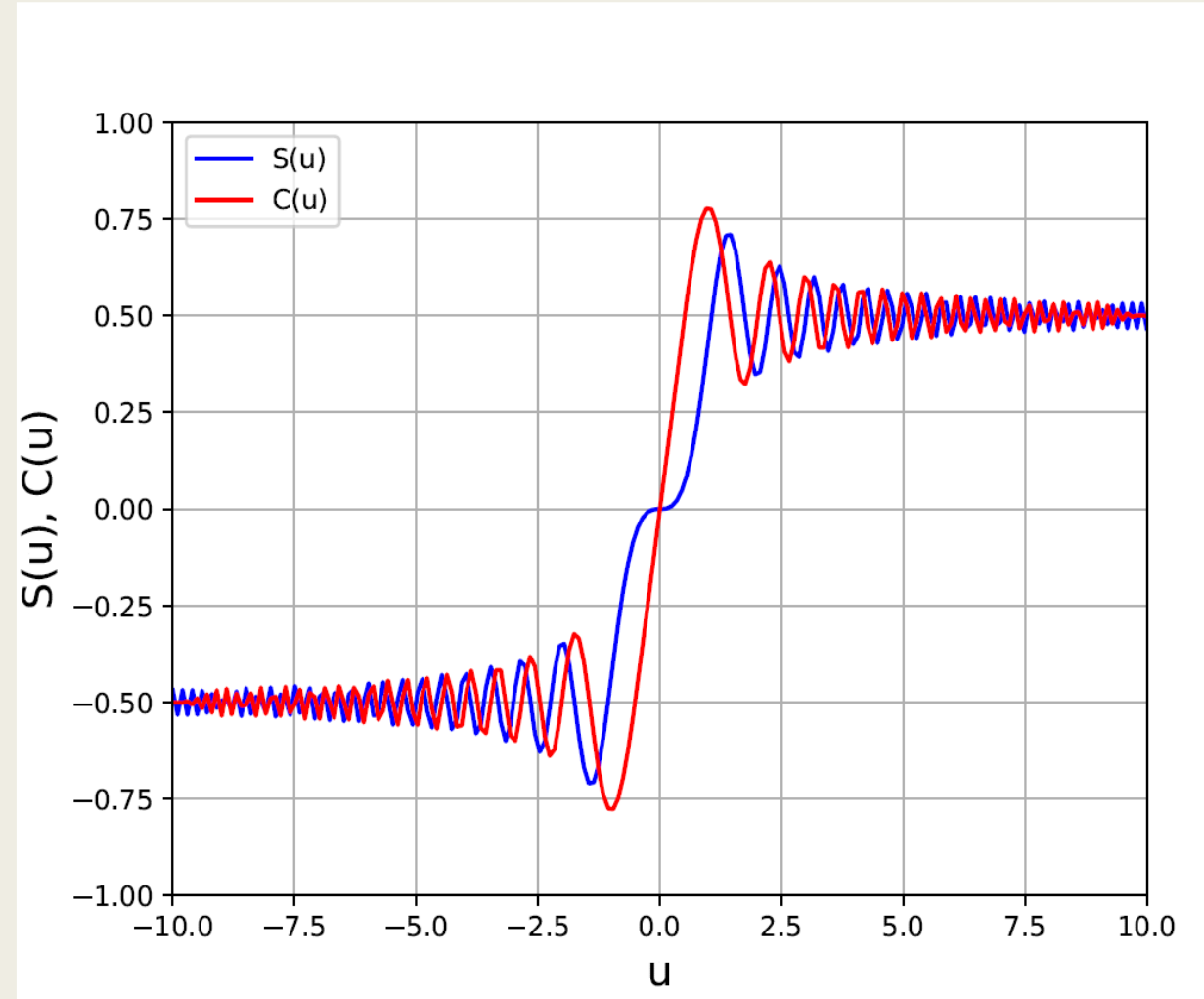
# フレネル積分

- 光の回折現象を扱う際に度々登場し、次のように定義される：

$$\left\{ \begin{array}{l} C(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv \\ S(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) dv \end{array} \right. \dots (14)$$

- 定義より、以下のことが分かる：

$$\left\{ \begin{array}{l} C(0) = S(0) = 0 \\ C(\pm\infty) = S(\pm\infty) = \pm\frac{1}{2} \end{array} \right. \dots (15)$$



# 強制振動と光の回折の類似性

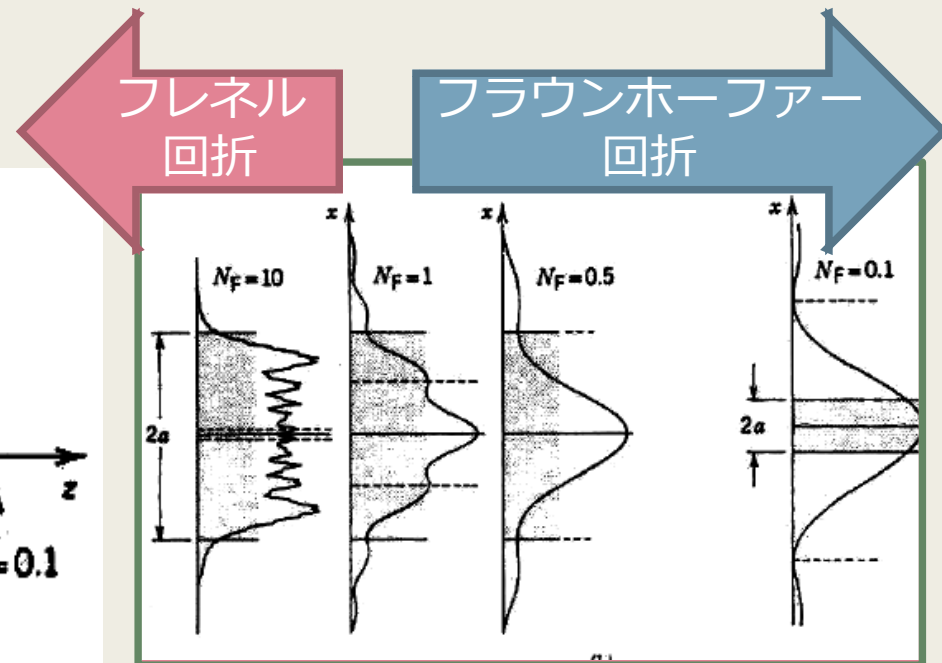
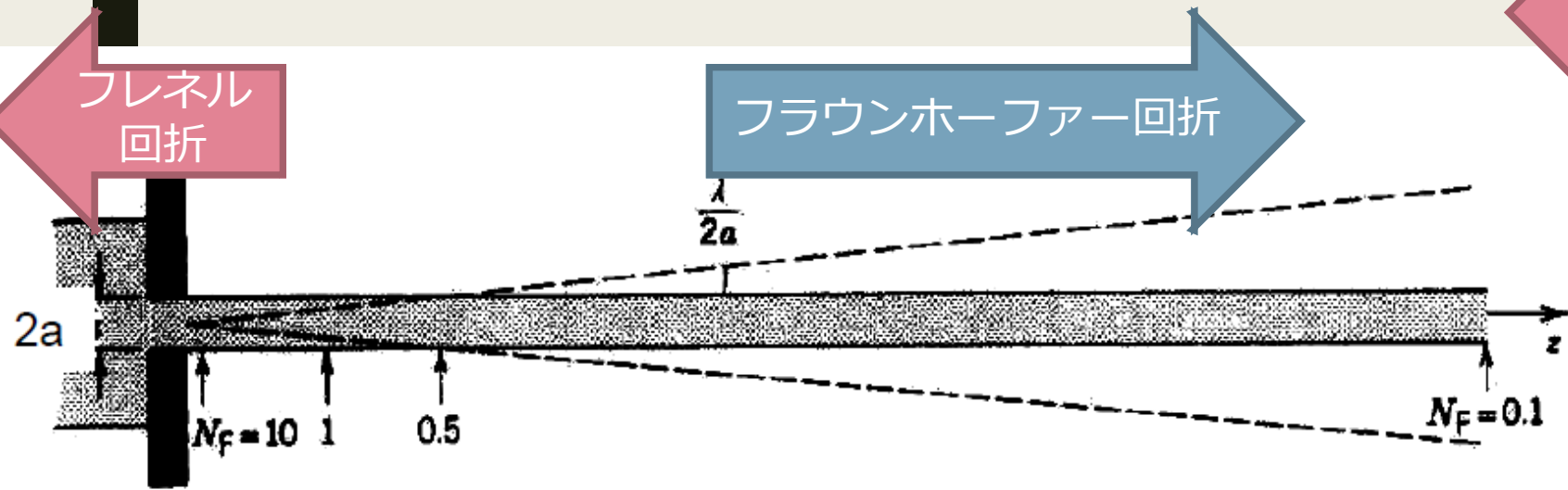




# フレネル数とは？

- 波の回折において、**回折の程度を表す無次元量**であり、右のように定義される：
- 単スリットによる光の回折では、スクリーン上での光の強度パターンを特徴付ける量としてしばしば用いられる（下図）。
- $N_F \ll 1$ の場合の単スリット回折を「**フラウンホーファー回折**」と言い、 $N_F \geq 1$ の場合は「**フレネル回折**」と言う。
- $\tilde{h}_E$ における被積分関数の**位相部分の二次の項**と関連した量である。

$$N_F \equiv \frac{a^2}{\lambda r_0} \dots (18)$$



# 強制振動と単スリット回折を結ぶ関係式

- 応答関数 $\tilde{h}$ とそれに対応する関数 $\tilde{h}_E$ の被積分関数の位相部分を比較することで、2つの現象を結ぶ関係式が得られる：

## 強制振動

$$\Phi(\hat{t}) = 2\pi\nu_0\Delta(1-r)\hat{t} + 2\pi\nu_1\Delta^2\frac{\hat{t}^2}{2} - \phi_0, \quad \hat{t} \equiv \frac{\tau}{\Delta} \text{ (無次元)} \quad \dots\dots(19)$$

## 単スリット回折

$$\Phi_E(\hat{\xi}) = -4\pi N_F\frac{x}{a}\hat{\xi} + 8\pi N_F\frac{\hat{\xi}^2}{2} + \pi N_F\left(\frac{x}{a}\right)^2, \quad \hat{\xi} \equiv \frac{\xi}{2a} \text{ (無次元)} \quad \dots\dots(20)$$

- 関係式：

$$\nu_0\Delta(r-1) \Leftrightarrow 2N_F\frac{x}{a} \quad \dots\dots(21)$$

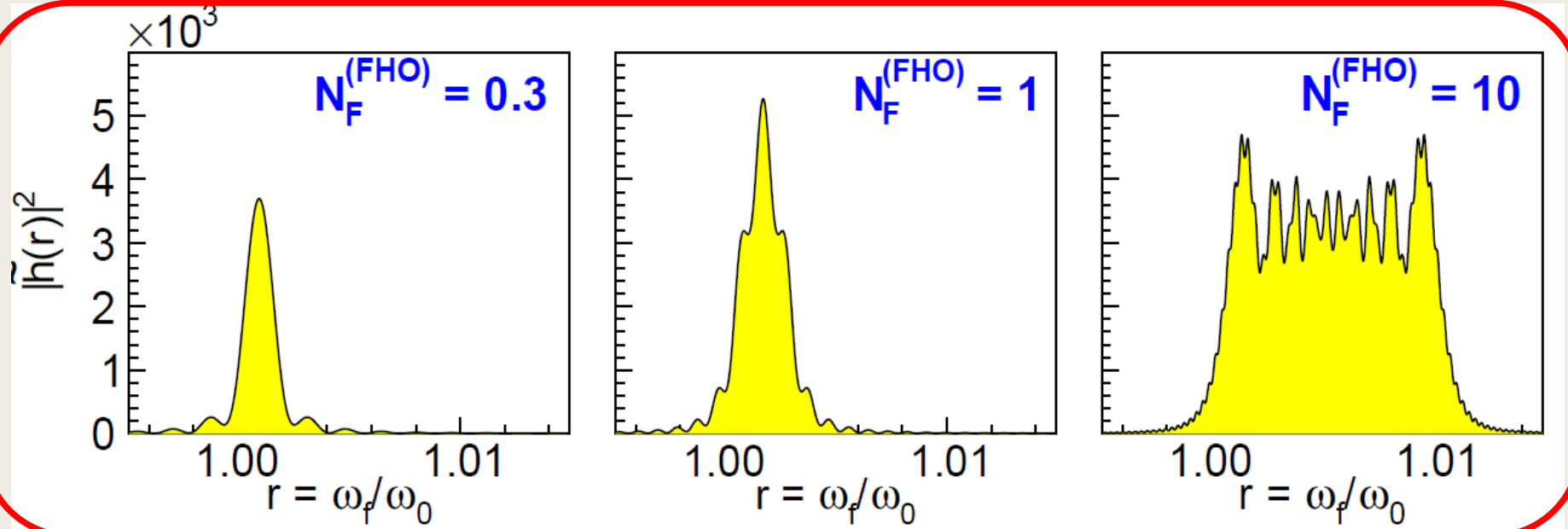
$$\nu_1\Delta^2 \Leftrightarrow 4N_F \quad \dots\dots(22)$$

- 関係式(21)より、強制振動の場合もフレネル数に対応する無次元量 $N_F^{(FHO)}$ が定義できる：

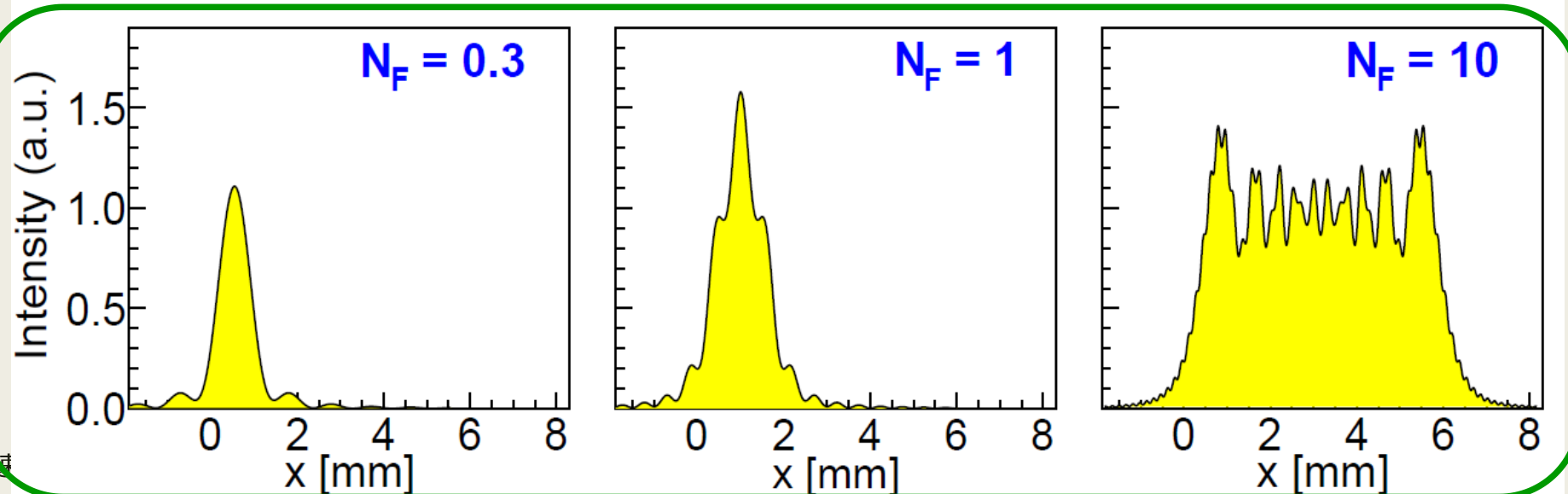
$$N_F^{(FHO)} \equiv \frac{\nu_1\Delta^2}{4} \quad \dots\dots(23)$$

# $N_F^{(FHO)}$ に対する応答関数 $\tilde{h}$ の振る舞い

強制振動



単スリット  
回折



# 強制振動と単スリット回折の対応関係

■ 関係式(21)より：

$$\frac{4N_F}{2a} x \Leftrightarrow \frac{4N_F^{(FHO)}}{\omega_1 \Delta} (\omega_f - \omega_0) \quad \dots (24)$$

単スリット回折	強制振動
スリットサイズ $2a$	固有振動数の変化量 $\omega_1 \Delta$
スリット開口部の位置座標 $\xi$	固有振動数 $\omega(t)$
スクリーン上での座標 $x$	強制力の振動数 $\omega_f$
二次波光路長の二次関数的変化	振動子と強制力との間の位相の滑り
フレネル数 $N_F = a^2 / (\lambda r_0)$	無次元量 $N_F^{(FHO)} = \nu_1 \Delta^2 / 4$

# 類似性を用いて共鳴周波数の範囲を求めてみる

- 単スリットによる光の回折の場合、回折ピークの幅 $2\delta x$ はフラウンホーファー回折 ( $N_F \ll 1$ ) とフレネル回折 ( $N_F \geq 1$ ) で異なる：

## フラウンホーファー回折

$$2\delta x \approx \frac{\lambda r_0}{2a}$$

スリット開口部の両端からの二次波が弱め合うという条件から求まる。

## フレネル回折

$$2\delta x \approx 2a$$

矩形のパターンは、スリット開口部の形そのものを表している。 ……(25)

- 強制振動の場合、共鳴周波数の幅 $2\delta\omega_f$ は、関係式(21)および(22)を使えば、容易に求めることができる：

## フラウンホーファー領域

$$2\delta\omega_f \approx \frac{2\pi}{\Delta}$$

## フレネル領域

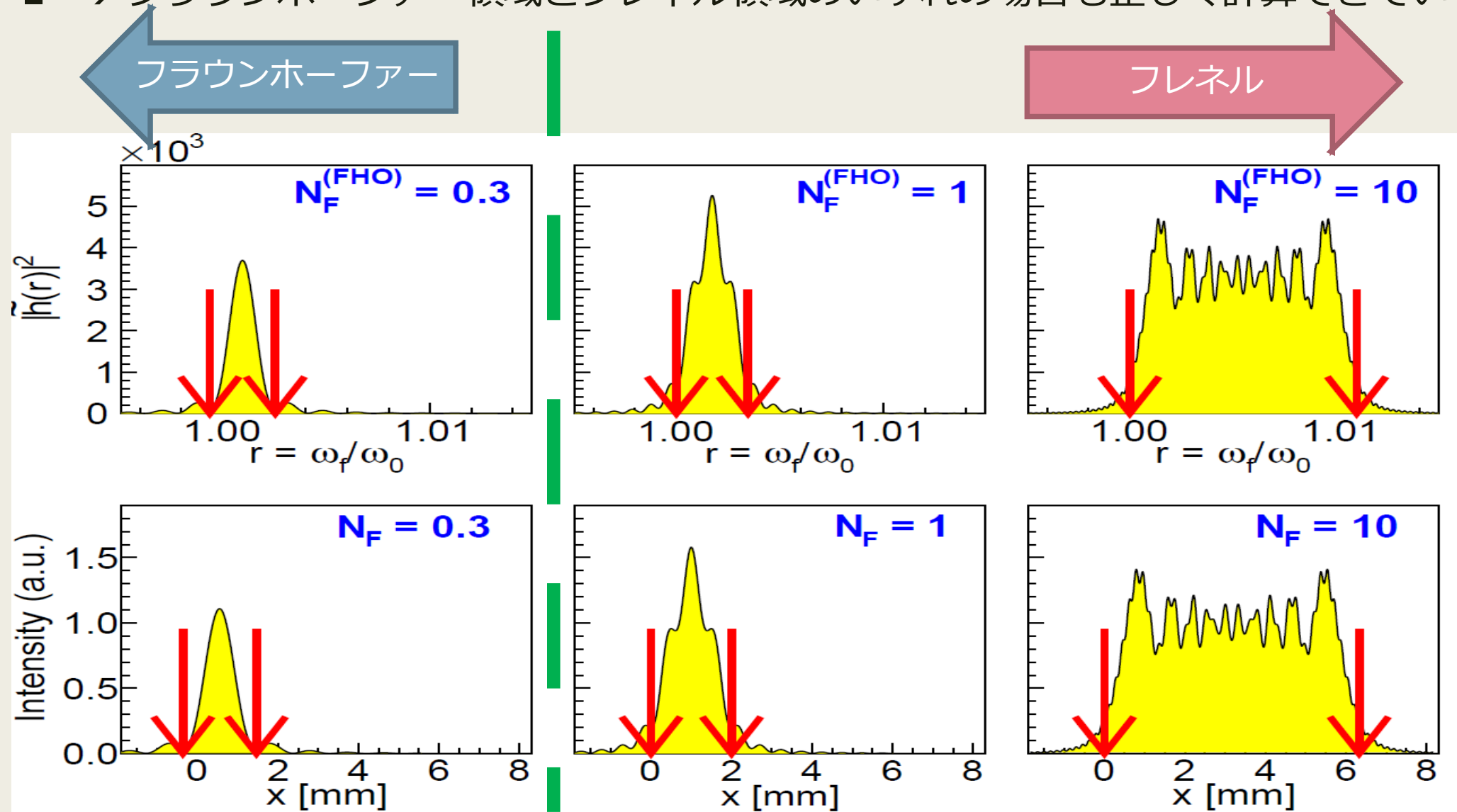
$$2\delta\omega_f = 2\pi\nu_1\Delta$$

……(26)

共鳴周波数の中心値は、単スリット回折との類推から明らか。

# 共鳴周波数の範囲

- 赤の矢印は、式(24)により計算された共鳴周波数の範囲を表している。
- → フラウンホーファー領域とフレネル領域のいずれの場合も正しく計算できている。



# 類似性の動力学への応用

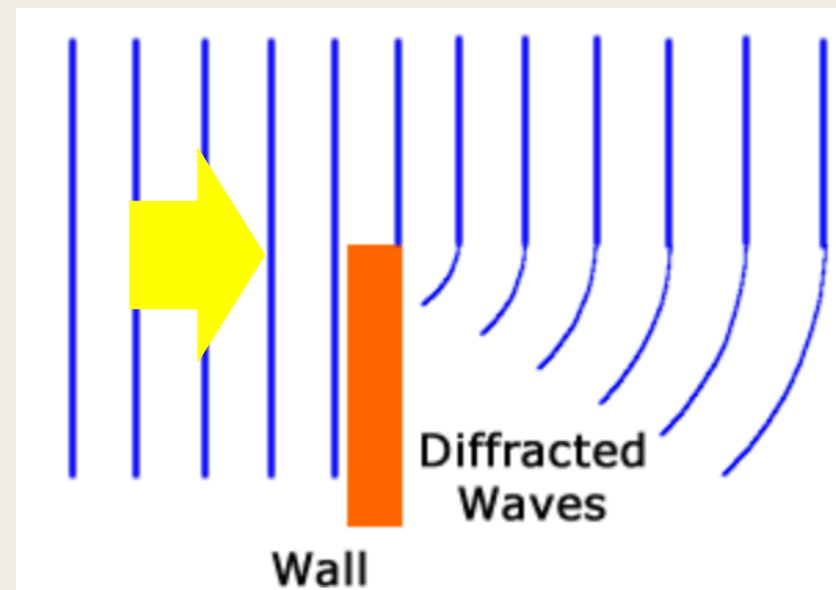
- 時刻  $t = 0$  で共鳴条件が満たされている強制力を断続的に受けた場合の系の時間発展について考えてみる。
- このとき、運動方程式の解は、式(12)の  $\tilde{h}$  で、 $r = 1, \Delta \rightarrow t$  とすることで得られる：

$$\tilde{h}(t) = \frac{e^{-i\phi_0}}{\sqrt{2\nu_1}} \int_0^{\sqrt{2\nu_1 t}} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau$$

← 振動振幅の時間発展を表している

$$= \frac{e^{-i\phi_0}}{\sqrt{2\nu_1}} \left[ C\left(\sqrt{2\nu_1 t}\right) + iS\left(\sqrt{2\nu_1 t}\right) \right] \quad \dots\dots(26)$$

- これを光の回折現象に置き換えてみると、単スリット回折でスリットの片側半分を取り除いた ( $2a \rightarrow \infty$ ) ことに相当する (右図)。  
→ “ナイフエッジ回折”

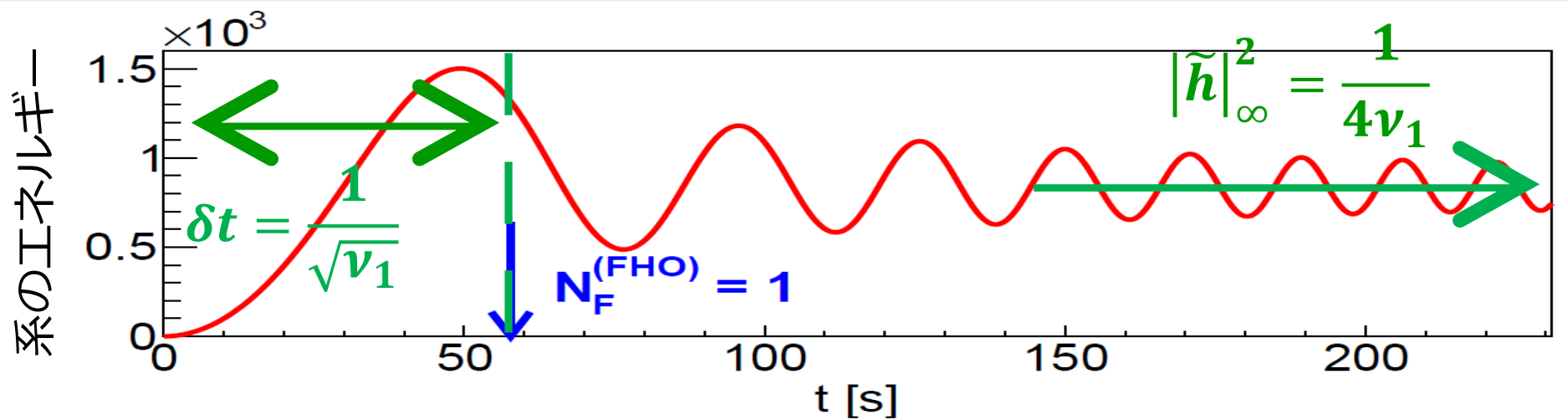




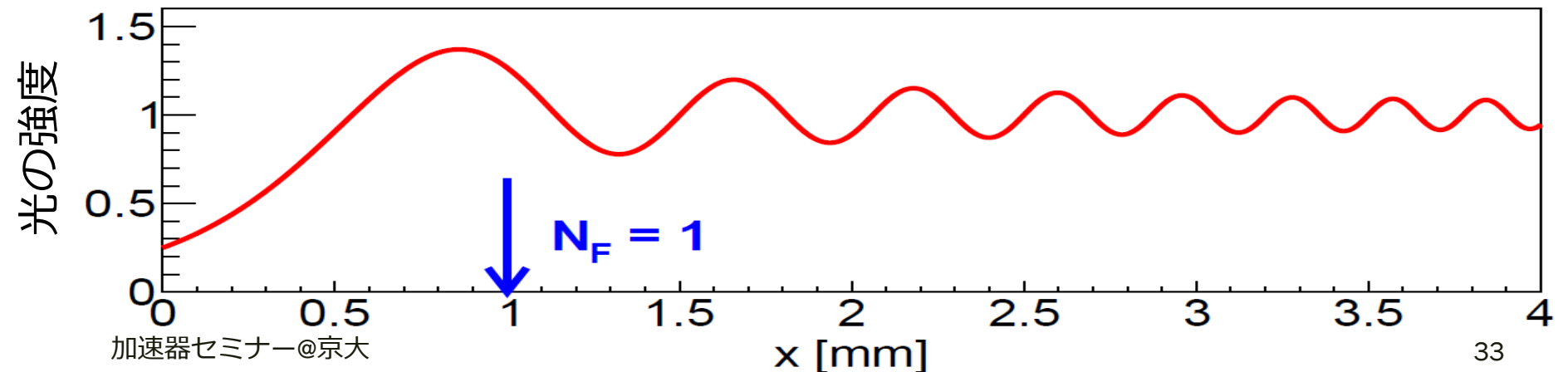
# 系のエネルギー（振幅の2乗）の時間発展

- 系のエネルギーの時間発展は、ナイフエッジ回折における光の強度パターンのように振る舞う。
- エネルギーの立ち上がり幅 $\delta t$ および漸近値 $|\tilde{h}|_\infty^2$ は、光の回折との類似性から、求めることができる。（詳しい導出は、原著論文を参照のこと）

強制振動

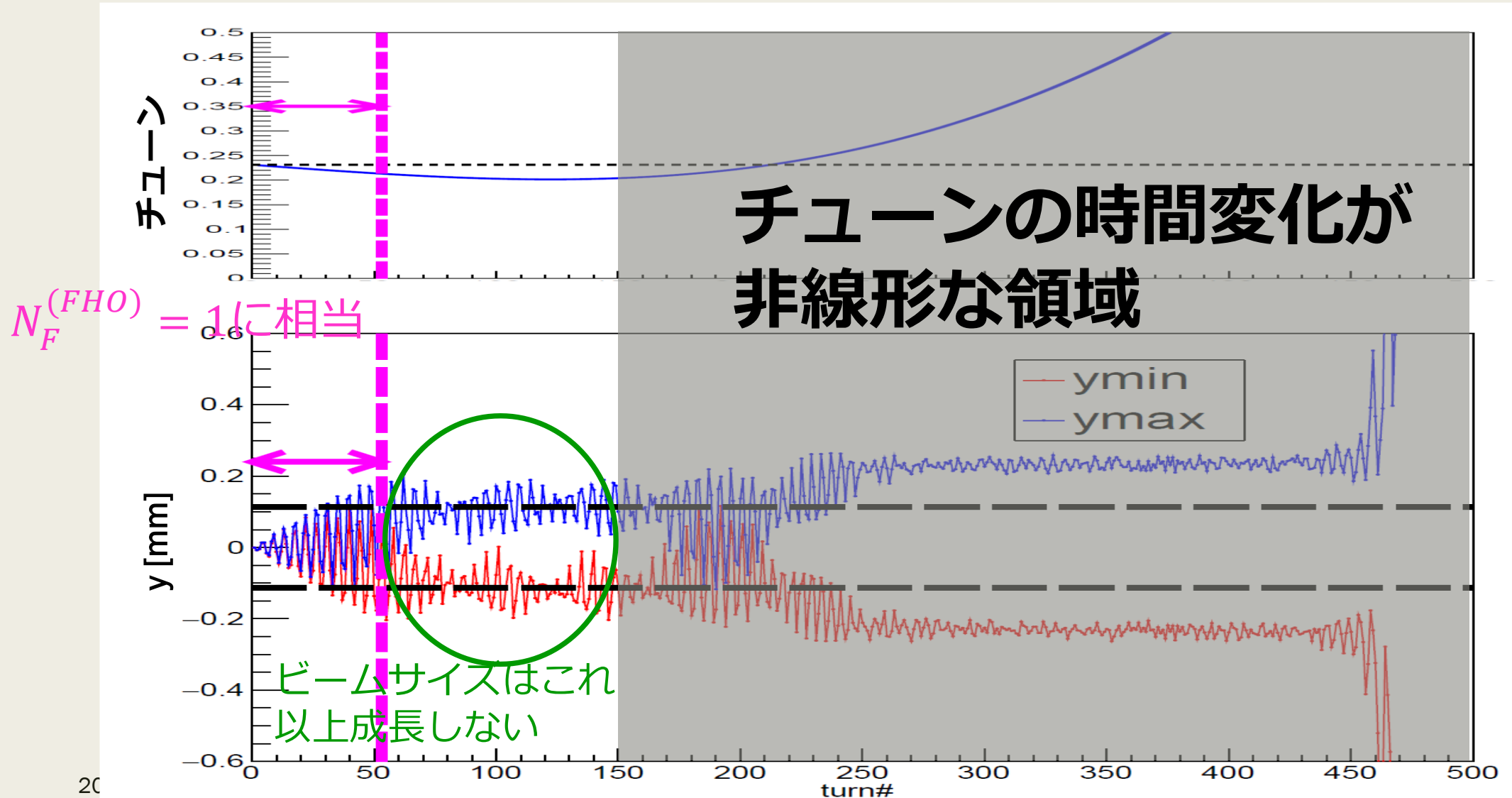


光の回折



# 廃棄電子ビームのシミュレーション結果

- ナイフエッジ回折との類似性を、廃棄電子ビームのトラッキングシミュレーション結果に当てはめてみた。

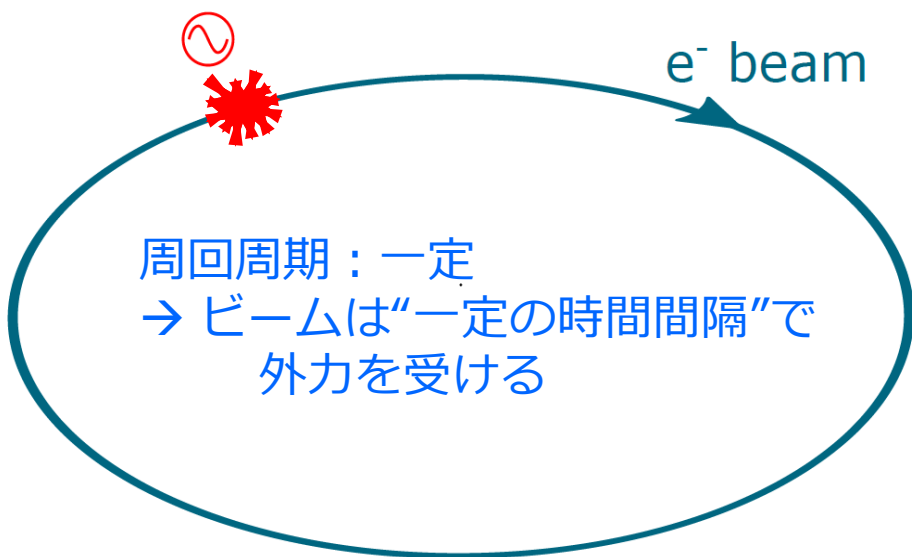


# ビーム物理への応用の可能性

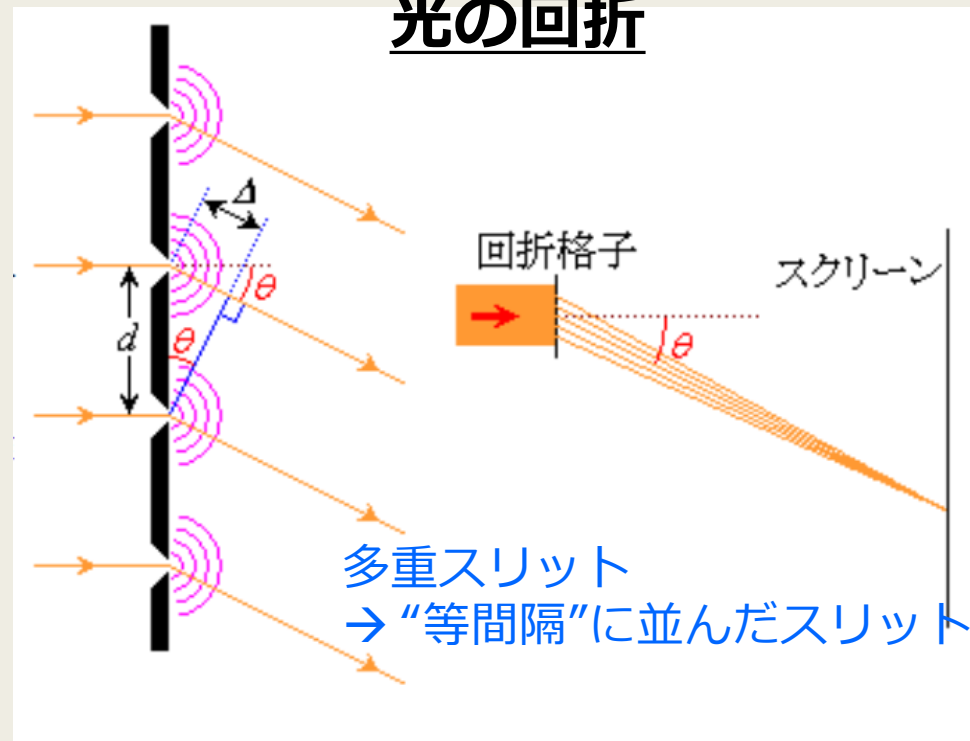
1. 共鳴横切り現象への応用：  
- 複雑な式やシミュレーションを用いることなく、共鳴横切りの影響を評価できる。
2. 円型加速器における“共鳴現象”を異なる視点で捉える：  
「円型加速器でビームが周回毎に特定の場所で外力を受ける場合」 $\Leftrightarrow$  「多重スリット回折」  
→ ビーム動力学を全く異なる切り口で議論できるのかもしれない。 (回折格子)

## 円型加速器

誤差磁場や六極  
磁石による外力



## 光の回折



# まとめ

- 今回、我々は、次世代リング型光源加速器である回折限界リングでの安全な電子ビームの廃棄手法を検討する中で、“偶然にも”力学現象と光学現象の間の類似点を発見することができた。
- → 何事も、やみくもに計算機シミュレーションを走らせるのではなく、「まずはどういうことが起きているのかを自分の頭で考えてみる」ことが大事！
- 工学寄りなイメージの強い加速器分野の中にも、このような基礎物理の面白い現象が隠されていたことは自分自身大変驚きでもあった。
- 今回の例が示すように、加速器分野にもまだまだ面白い物理現象が隠されている可能性があります。もし興味があれば、我々と一緒に加速器を作ってみませんか？

ご清聴ありがとうございました！